

第1章 構造の静定條件

§ 1. 反力條件

構造物、例へば橋梁の支點構造は、力学的に之れを3種類に分つことが出来る。

可動支點 *Movable support*

鉸支點 *Hinged support*

固定支點 *Fixed support*

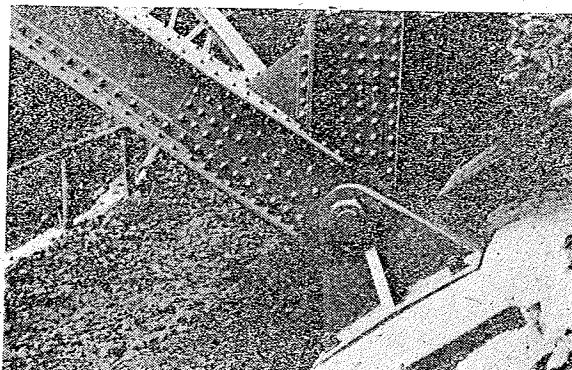
1) 可動支點

可動支點は、第1-1圖に其の數例を示せるが如き構造より

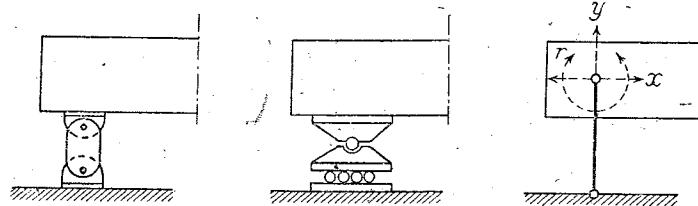
成り、支面に沿ひ自由に移動し得るものと謂ふ。かくの如き構造は、1本の反力棒より成るものと考へ得べく、茲に反力棒とは其の兩端に鉸(ヒンヂ)を有し、棒の應力は軸應力のみなりと假定し得るものである。この支點は、移動の方向より論すれば、 x 及び r の方向に自由に動き得るが

y の方向には x 方向

移動量の微少なる限りに於て移動せざるものと爲すことが出来るのであつて、反



寫眞 1-1 鉸 支 點



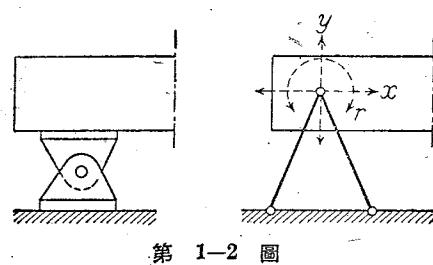
第 1-1 圖

力は y 方向のみに起る。即ち可動支點はこの性質より反力條件1個を有すと稱す。

2) 鉸支點

鉸を中心として構造物が自由に回轉し得る第1-2圖の如き支點は、鉸支點と謂ひ屋根

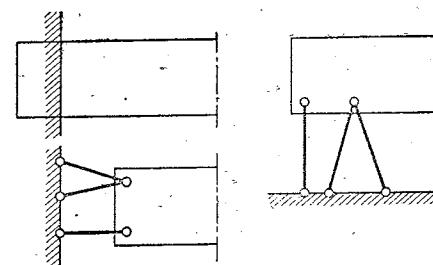
形をなす 2 本の反力棒に依つて置き換へることが出来る。かくの如き支點は移動の方向より論ずれば、 r の方向には回転し得るが x, y の方向には移動することが出来ない。依つて反力は x, y の方向に分力を持つて居る。鉗支點は 2 個の反力條件を有すと稱す。



第 1-2 圖

3) 固定支點

梁或は柱の一端が剛壁の中に埋込まれてゐる第 1-3 圖の如き支點は、固定支點と謂ひ、3 本の反力棒に依つて置き換へることが出来る。かくの如き支點は、移動を何れの方向にもすることが出来ない。反力は x, y の方向に分力を有し、且つ r の方向に反力モーメントを生ず。固定支點は 3 個の反力條件を有すと稱す。

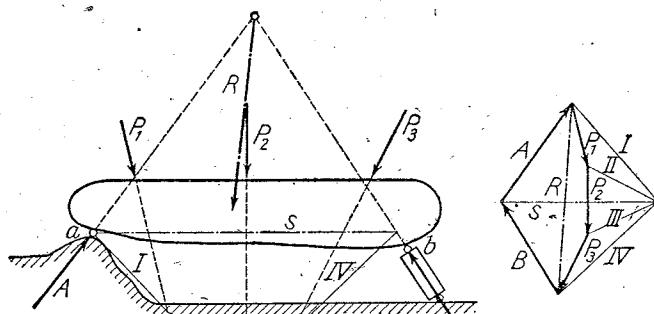


第 1-3 圖

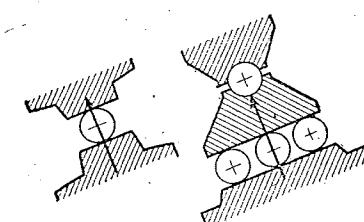
4) 反力方向

構造物の支點に生ずる反力の方向は、支點の性質、換言すれば其の支點の反力棒の數によつて變化する。

第 1-4 圖に示す平面構造に於て集中荷重 P は任意の方向に向けられて作用するものとし、支點 a はヒンデ支承(反力棒 2 個)、支點 b は可動支承(搖支承、反力棒 1 個)であるとする。 P_1, P_2 及び P_3 の合力 R は力多角形から直にその大きさと方向が求められ連力圖からその作用線が決定される。反力 B は反力棒の方向に作用する事當然で



第 1-4 圖



第 1-5 圖

あるから此の線と連力圖 IV 線との交點を定めて閉塞線を書き、之を力多角形に移して反力 B の方向線と S 線との交點を定めれば、之によつて反力 A 及び B の大きさ並に A の方向が決定される。

ローラー支承(第 1-5 圖)は反力が 1 個ある支承であるから、支面が傾斜してゐるとき、之に對する反力はローラーの滑動面に直角に作用し滑動面に平行の反力はない。

§ 2. トラスの靜定條件

平面トラスが釣合を保てる限りに於ては、その各々の格點も亦同時に釣合を保つのである。格點に作用する力は、外力(荷重、反力)と内力(應力)とに分つことが出来る。即ち

1 格點に作用する力には

荷 重 P

反 力 R

部材應力 S の 3 種がある。

任意軸 x, y をとり、 P, R, S の 2 軸の方向の分力を夫れ夫れ P_x, R_x, S_x 及び P_y, R_y, S_y とすれば、1 格點が釣合を保つてゐる限りに於て

$$\left. \begin{array}{l} \sum P_x + \sum R_x + \sum S_x = 0 \\ \sum P_y + \sum R_y + \sum S_y = 0 \end{array} \right\} \quad (1-1)$$

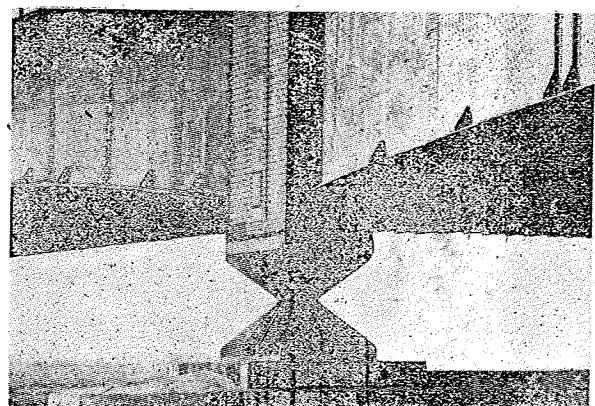
が成立し、普通とるやうに、 x 軸を水平、 y 軸を鉛直とすれば、

$$\left. \begin{array}{l} \sum (\text{水平分力}) = \sum H = 0 \\ \sum (\text{鉛直分力}) = \sum V = 0 \end{array} \right\} \quad (1-2)$$

の成立すること明である。トラスが釣合を保つてゐるとすれば、總ての格點に於ても此の 2 式が成立するから、格點數を p 個とすれば、トラスには $2p$ 個の靜力學的釣合條件方程式の成立することが分る。

更に任意點 0 に於て P, R, S に對してモーメントをとり、之を M とすれば、

$$\sum M = 0 \quad (1-3)$$



寫真 1-2 搖支承

なる釣合條件方程式を得。即ち全體としては構造が静力學的に釣合を保てる限りに於て

$$\Sigma H=0; \Sigma V=0; \Sigma M=0$$

の3條件等式が存在する。茲に第三の條件等式 $\Sigma M=0$ は $\Sigma H=0; \Sigma V=0$ の存在に伴つて從屬する條件を示し、何等別個のものではないから、靜力學的釣合の基本條件方程式は第1-2式に示す2式である。

作用力 P, R, S に就いて考察するに、 P は荷重であるから既知量に屬し、 R は反力棒の數に依つて左右せられ、一般には其の大さ及び方向は未知である。 S は方向は既知であるが其の大さは未知である。依つて之等の未知量は之を含める條件方程式より解かなければならぬ。

茲に今 R 及び S を通じて $r+m$ 個の未知量ありとせよ。若し $r+m$ 個の條件方程式が在れば、 $r+m$ 個の未知量を解き得ること論を俟たない所であるから、あるトラスが靜力學釣合條件のみに依つて解けるか否かに關しては一般に

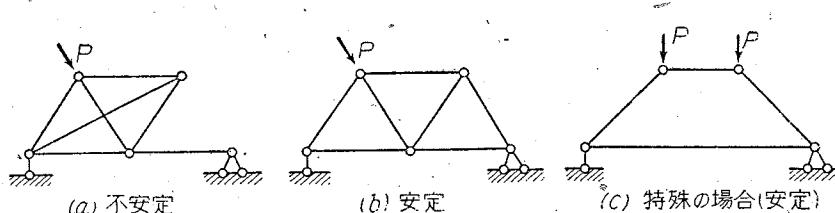
$$n_1 = r+m - 2p \quad \dots \dots \dots \quad (1-4)$$

から之を決定することが出来る。茲に

r = 反力棒の數； m = 部材の數； p = 格點の數

$n_1=0$ の場合

$r+m=2p$ 即ち力の數と條件方程式の數とが同一であるから總ての力を靜力學的釣合條件のみに依つて解くことが出来る。斯くの如きトラスは一般に安定 (stable, *stabil*) なり



第1-6圖

と謂ふ。但しこの場合トラスの r 及 m は安定に必要な數を有するを示すだけであつて、その構成の如何に依つて必ずしも安定とはならない (第1-6圖)。

第1-6圖 (b) は $n_1=0$ であつて安定な構造である。同 (a) 圖は同様に $n_1=0$ ではあるが、此の構造は部材の組合せが不適當である爲に不安定となる。よつて $r+m$ の數と $2p$ の數が等しくても、安定なりや否やに就いては別の判断が必要である。

$r+m$ 個の聯立條件方程式に於て注意すべき事は、各式は互に獨立してゐる事及び互に矛盾せざることであつて、例へば $x+y=2; 3x+3y=6$ の如きは獨立してゐないから2個の聯立式とはならず、 $x+y=1; 2x+2y=3$ は互に矛盾してゐるから解き得ないのである。

$n_1 < 0$ の場合

$r+m < 2p$ であつて、トラスは靜力學的釣合に必要な r 及び m の數を持つて居ない、従つて構造は不安定 (*unstable, latil*) である。但し P の特別なる配置にある場合は、 $2p$ 個の式のうち或るものは他のものと同じくなり、 $n_1=0$ 、即ち安定となることがある (第1-6圖 c)。

$n_1 > 0$ の場合

$r+m > 2p$ である。 $n_1=0$ の場合に於て構造は丁度安定を保つことから考へれば、この場合には、構造は安定を保つに必要な以上の部材或は反力棒のあるものと言ふことが出来るから、構造は必要以上に安定であつて (超安定 *super-rigid*)、 $r+m$ の總和より n_1 個の部材或は反力棒を除去しても尚ほ安定を保ち得るのである。依つて、 $n_1 > 0$ の構造は、 n_1 個だけの餘分の部材 (棒)、換言せば n_1 個だけの剩材 (*redundant member*) を有するものと稱し、剩材に作用する力を剩應力と謂ふ。

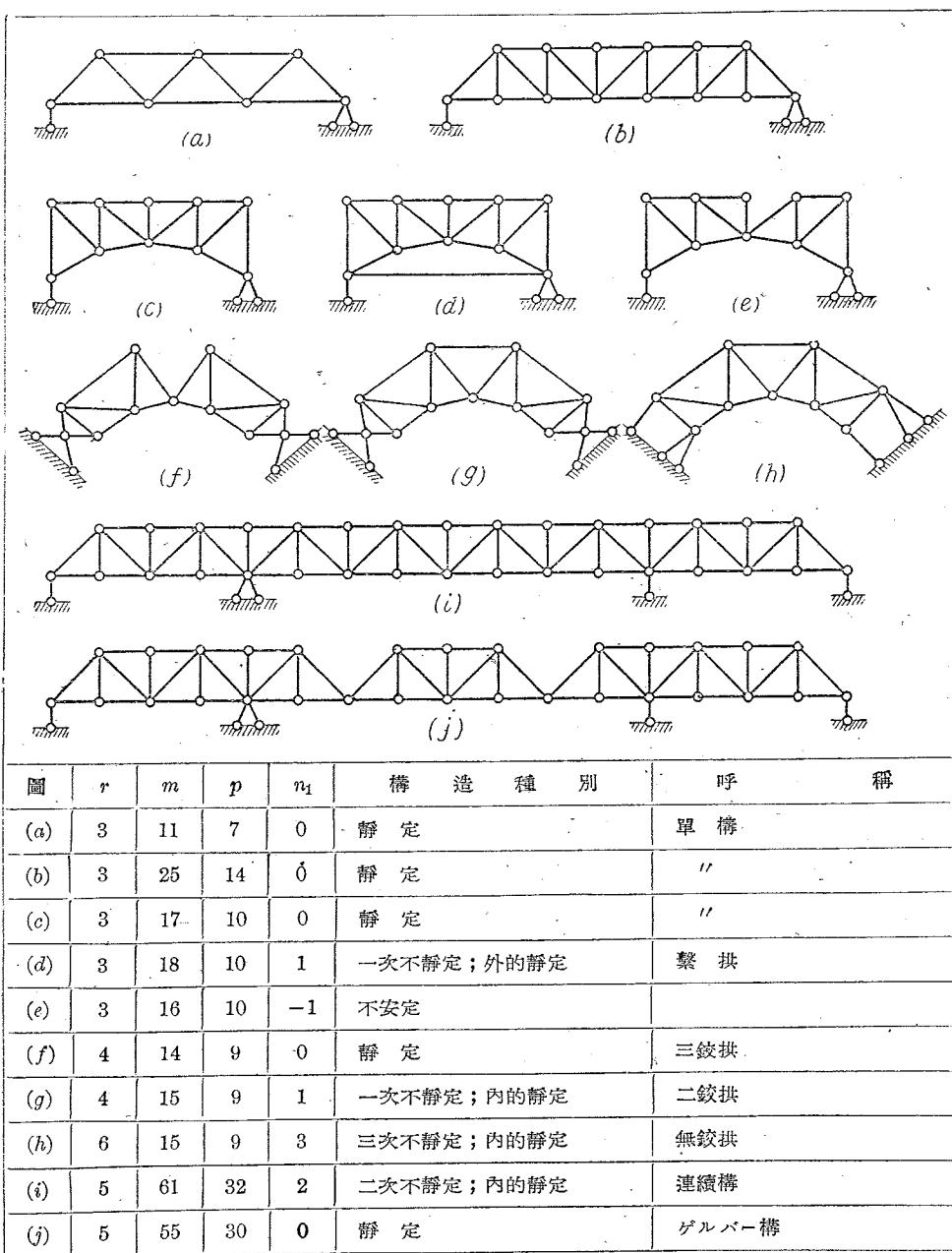
$n_1 > 0$ なる構造の R 及び S を解くに當りては、 n_1 個だけの條件方程式が不足し、即ち $2p$ 個だけの靜力學的釣合條件方程式 ($\Sigma H=0; \Sigma V=0$) だけでは R 及び S の總てを解く能はず。この關係よりかかる構造を靜力學的には解くこと能はざる構造—不靜定構造 *statically indeterminate structure*—と稱し、之れに反して $n_1=0$ の構造を靜定構造 *statically determinate structure* と稱す。

若し構造が彈性體より成り、或は支點が彈性支承ならば、構造は外力の影響に依つて彈性變形をなし、その格點は變位を行ふ。構造が不靜定に屬し、一般に n_1 個だけの剩應力ありとすれば、彈性變形の現象より n_1 個の條件方程式を新たに設けるときは、剩應力の總てを解くことが出来る。この目的のために彈性變形より得られる條件方程式を彈性方程式と稱す。而して n 個の剩材或は剩應力を有する構造を n 次の不靜定構造と云ふ。

不靜定構造に於て r だけは單獨に $\Sigma H=0; \Sigma V=0$ の條件から解き得ることがある。かかる構造は外的靜定構造と呼ぶ。又あるものは R が既知なる限り S を $\Sigma H=0; \Sigma V=0$

* 不靜定構造とは正しく言へば、靜力學的釣合條件のみに依りては解き得ざるを意味し、決して靜力學に依りて解き得ない事を意味してゐるのではない。

第 1-1 表



の條件から解き得ることがある。かゝる構造は内的静定構造と呼ぶ。

次に、トラスが静定なるか不静定なるかの判別に關しその數例を第 1-1 表に示す。

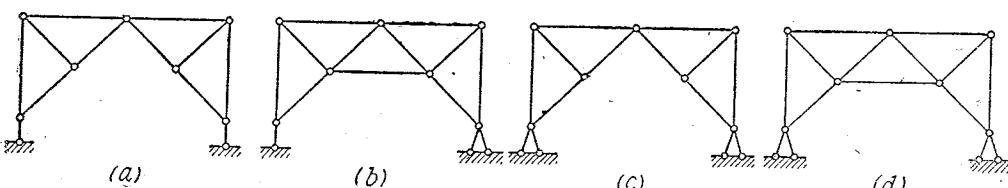
トラスの静力学的釣合條件について更に吟味するに、第 1-7 圖 (a) は、 $r=2 : m=10 :$

第 1 章 構造の静定條件

$2p=14, n_1=-2$ なるを以て不安定に屬し、 r 或は m 又はその兩者のうち 2 本の部材の不足を示す。此の構造は一般的に論すれば、 r 又は m 或はその兩者に對して任意に 2 部材を補給すれば安定構造を得るのであるが、此の場合は 2 支點共に可動であるから必ず r を 1 本補給するを要し、残りの 1 本は r に増しても又は m に増しても差支へない。第 1-7 圖 (b) (c) は其の場合を示し、何れも静定構造である。

然るに (d) は、 r に 2 本 m に 1 本を増加したから、 $n_1=1$ 即ち一次不静定構造となる。

(d) に於て r のうちの 1 本或は m の 1 本の何れかは剩材に屬し、その 1 本を除去すれば静定構造となること論を俟たない所である。



第 1-7 圖

§ 3. 充腹構造の静定條件

充腹構造とは、梁の如く solid-web (vollwandig) の構造を有するものの假語であつて、軸應力、曲げ應力、剪斷應力に併せて抵抗することが出来る。^{*}

充腹構造の静定なるか或は不静定なるかの判別に對しては、§ 2. のトラスに對する判別條件を適宜用ひ得るのである。第 1-8 圖 (a) は、既に例示せる如く內的に静定にして、

外的に一次不静定であるが、(b) の充腹構造は單に (a) の静定トラス部と置換せられたるに留るから等しく外的一次不静定なりと定め得るのである。

靜力学的に釣合状態を保つ充腹構造に對しては、 $\Sigma H=0 ; \Sigma V=0 ; \Sigma M=0$ の 3 條件が成立する。若しその内部にヒンヂがあれば、ヒンヂの數 h だけ $\Sigma M=0$ の條件式が成立する。依つて釣合條件式の數 q は

$$q = 3 + h \quad \dots \dots \dots \quad (1-5)$$

未知量たるべき反力の數は反力棒の數に等しく之を r となし且つ剩材の數を i とすれば、

* 力學的には disc 或は Scheibe にして抗曲材は之に相當す。

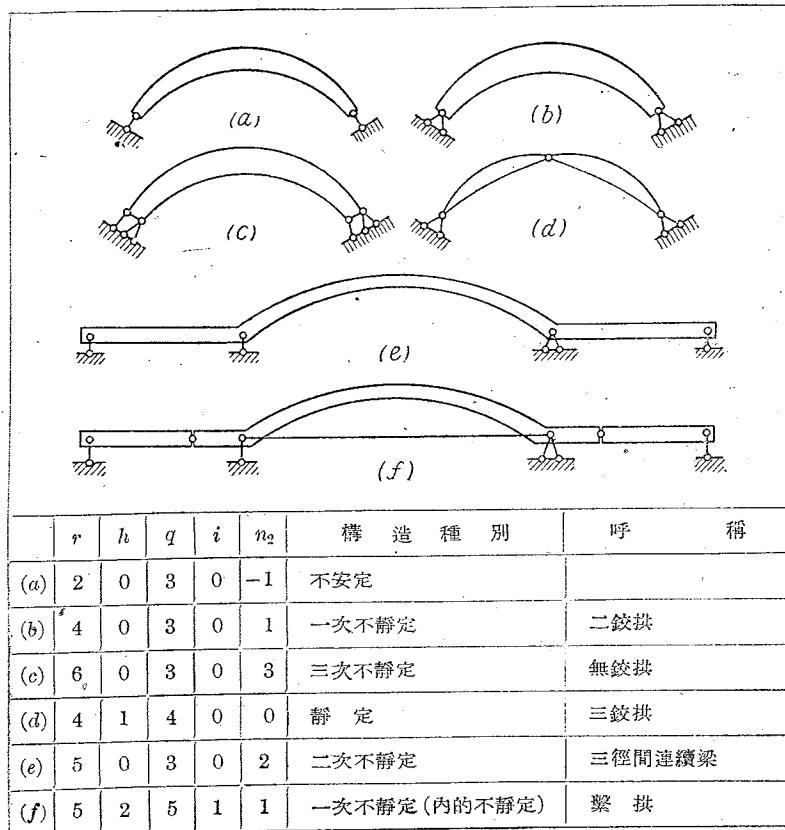
上記の理由より充腹構造の静定なるか不静定なるかは次式から判別することが出来る。

$$n_2 \geq r + i - q \quad \dots \dots \dots \quad (1-6)$$

$n_2 < 0$ の場合	不安定
$n_2 = 0$ の場合	安定且つ静定
$n_2 > 0$ の場合	超安定且つ不静定

之れを例示すれば、第 1-2 表の通りである。

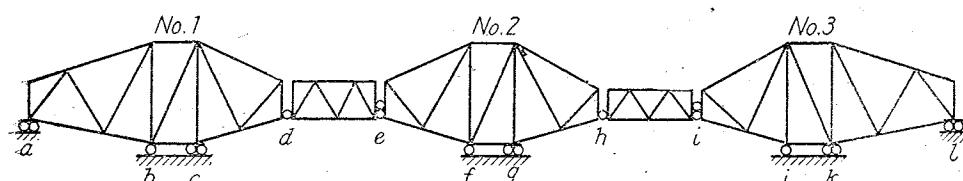
第 1-2 表



【例題】

英國スコットランドのフォース橋はゲルバー形式に類似した構橋であつて 1890 年の建造にかかり、その工法は既に舊式に屬するが今日尚ほ世界的巨橋の一つである。その構造は第 1-9 図に示す如く、

$$a, c, g, k, l \quad \dots \dots \dots \quad \text{可動支點 } (r=1)$$



第 1-9 圖 フォース橋概念圖

$b, f, j \dots \dots \dots \quad \text{ヒンヂ支點 } (r=2)$

$e, i \dots \dots \dots \quad \text{可動支點 } (r=1)$

$d, h \dots \dots \dots \quad \text{ヒンヂ支點 } (r=2)$

である。今之を吟味するに、

(I) 橋脚橋臺上の反力棒數 $= r = 11$ 、橋桁各部を充腹構造として考ぶるに、内部に 2 個のヒンヂあり、又 2 個の可動支承があつて、之から 4 個の條件式を得べきに依り $q = 3 + 2 + 4 = 9$; $n_2 = r - q = 2$ 、即ち全體は 2 次の不静定構造である。

(II) No. 1 及 No. 3 の橋脚上に斜材なきものと假定すれば、此の部分に於て、 $M_b = M_c$, $M_j = M_k$ なる 2 個の新條件式を得るから、全體は $n_2 = 0$ なる静定構造となる。

(III) 更に No. 2 橋脚上の斜材も亦無きものと假定すれば、條件式が更に 1 個得られ、然るべきは $n_2 = -1$ となりて不安定となり、横方向の安定を缺くに至る。

(IV) 原構造に還りて a, l の支點なしと假定するときは、或は c, k の支點なしと假定するときは、何れに於ても $r = 9$ となりて全體は静定構造となる。この状態は所謂ゲルバー形式に屬す。

(V) 前記の如きゲルバー式構造なるに際して更に橋脚上の斜材を撤去せば撤去せる數だけ不安定の度を増加す。

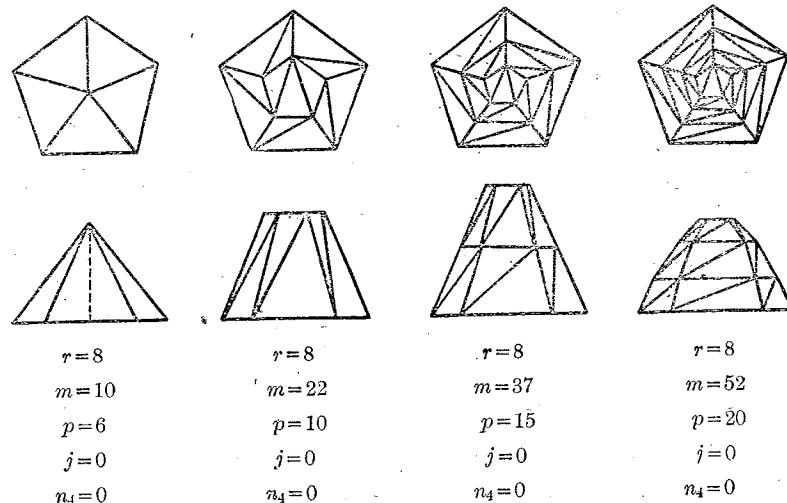
以上は全體を一個の構造と看做して取扱つたのであるが、第 1-9 圖は de 及び hi の各區間によつて完全に 3 分されてゐるから、實際問題としては、3 分して取扱つた方が良く、然る時は、No. 2 は静定、No. 1 及 No. 3 は各 1 次不静定（全體としては 2 次不静定）である。

§ 4. 複合構造の静定條件

數個の充腹構造が一點に會してゐるやうな複合構造では、連結點に作用する力（モーメント）

3角形より成つてゐるを必要とする。第1-12図のトラスは、 $r=8$, $m=25$, $p=13$, $j=4$, $n_4=r+m-(3p-j)=-2$ であるから不安定である。若し R_1, R_2, R_3, R_4 を夫れ夫れ同圖と直角の方向に働くやう装置すれば、 $j=8$ となつて2次不静定となるから、之より鉛直及び水平反力棒を各1個づゝ除去するやうにすれば静定となる。

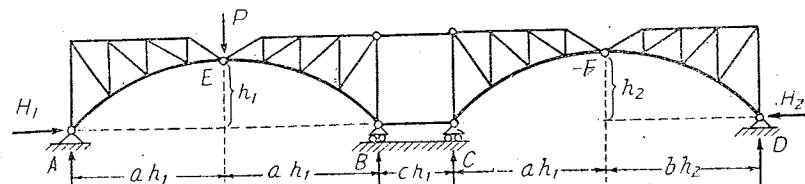
第1-13図に示す諸構造は何れも静定構造である(但し、鉛直反力=5, 水平反力=3)。



第1-13図

§ 6. 安定不安定の照査

既に述べた通り $2p=r+m$ の条件を供へてゐるだけでは決して安定なりとは断じ得ないのであつて、例へば第1-14図は其の一例を示し、此の構造は



第1-14図

反力 A, B, C, D, H_1, H_2

條件式 $\Sigma V=0, \Sigma H=0, \Sigma M=0; \Sigma M_E=0, \Sigma M_F=0, \Sigma Q_{BC}=0$

を有し安定なりと考へ得られるが、併し乍ら中央の平行四邊形は不安定であるから果して

全體が安定であるか否かは照査を必要とするのである。茲に E, F は同高、 A, B, C の各支點も亦同高なりとする。

今、上記の6條件式を列記して之から6個の反力を求めるに際し、デタアミナントを使用するものとする。

$$\Sigma V=0 \dots A+B+C+D-P=0$$

$$\Sigma H=0 \dots H_1-H_2=0$$

$$\Sigma Q_{BC}=0 \dots D+C=0$$

$$\Sigma M_A=0 \dots A \cdot ah_1 - H_1 \cdot h_1 = 0 \therefore A \cdot b - H_1 = 0$$

$$\Sigma M_B=0 \dots D \cdot bh_2 - H_2 \cdot h_2 = 0 \therefore D \cdot b - H_2 = 0$$

$$\Sigma M_D=0 \dots A(3ah_1 + ch_1 + bh_2) + B(ah_1 + ch_1 + bh_2)$$

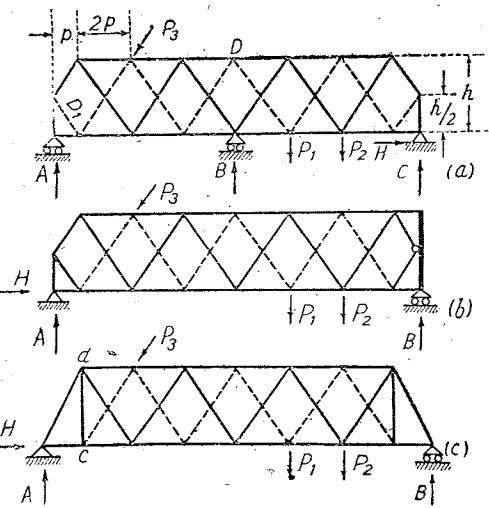
$$+ C(ah_1 + bh_2) + H_1(h_2 - h_1) - P(2ah_1 + ch_1 + bh_2) = 0$$

此の6個の聯立方程式を解くデタアミナント分母の A は、整理すれば

$$A = ah_1(a-b)$$

となる。よつて $a=b$ のとき反力は無限或は不定となるのであつて、構造は不安定であり、 $a \neq b$ なるとき安定となるのである。

本書第7章第7-16図に示すやうな菱形(Rhomboïd)を含むトラスは不安定の如く見えるが、 $2p=m+r$ の條件を充たし静定である。但し寸法の割合如何によつて不安定となる。



第1-15図

第1-15図に示す二重ワーレン・トラス(Rhomben, 或は Lautenträger)は、(a)図に於て中央支承なきとき m 或は r が1個不足して不安定であるが、支點 B を増して r を加へるか或は DB の如き部材を1個増加すれば丁度安定となる。(b)図の場合は右側端柱が普通のトラスの骨組から出來てゐるときは部材1個を缺いて不安定であるが、圖示通りに端柱を剛性

ある抗曲材として之に腹材をヒンデで取付けければ、此の部材の抗曲性が1條件を追加するから安定となる。(c) 圖の二重ワーレン・トラスは1次不静定であつて、右左孰れかの鉛直材を取除いたとき安定となる。

§ 4. に對する補遺 複合構造の安定吟味の一般式は、各部材を単位にして、次のように書くことが出来る。先づ各部材を考へると、

- (a) 片持部材は、固定端(剛結端)に H, V, M の3力あり。
- (b) 兩端ヒンデ部材は、各端に H, V あり、合計4力あり。
- (c) 一端ヒンデ、他端固定の部材は、ヒンデ端に H 及び V 、固定端に H, V, M あり、合計5力あり。
- (d) 兩端固定の部材は、各端に H, V, M あり、合計6力あり。

然るに各部材に對して、 $\Sigma H=0, \Sigma V=0, \Sigma M=0$ の3條件式が成立するから未知力として殘る断面力は、上記の(a)~(d) の各部材に對して夫々 0, 1, 2, 3 となる。よつて (b), (c), (d) の各部材數を m_1, m_2, m_3 とすれば、全構造物に於ける未知力數は、

$$(m_1 + 2m_2 + 3m_3 + r) \text{ である。}$$

この未知力を決定するものは、各格點(節點)に於ける釣合條件であるが、格點がヒンデであれば $\Sigma H=0, \Sigma V=0$ の2條件あり、格點が剛結されてゐれば $\Sigma H=0, \Sigma V=0, \Sigma M=0$ の3條件があるから、ヒンデ格點(滑節)數を p_1 、剛結格點(剛節)數を p_2 とすれば、全構造に於ける條件方程式數は、 $(2p_1 + 3p_2)$ である。よつて、

$$n_4 = (m_1 + 2m_2 + 3m_3 + r) - (2p_1 + 3p_2) \dots \quad (1-8)$$

から安定不安定を判定することが出来る。

$n_4 < 0$ の場合 不安定

$n_4 = 0$ の場合 安定且つ靜定

$n_4 > 0$ の場合 超安定且つ不靜定

判別を例示すれば第 1-3 表の通りである。

第 1-3 表

圖	m_1	m_2	m_3	r	p_1	p_2	n_4	構造判別
第 1-1 表 (a)	11	0	0	3	7	0	0	靜定
第 1-2 表 (c)	0	2	1	5	2	2	2	2 次不靜定
第 1-11 圖 (d)	0	2	4	4	2	4	4	4 次不靜定
第 1-1 表 (a) の格點 が剛結合された場合	0	0	11	3	0	7	15	15 次不靜定