第十二章

調整法又ハ最小自乘法

第一節 測定又ハ觀測

332. **器械**. 一ノ量ヲ測定スルニ當リ,之ニ關係アル要素トシテハ測定ニ用ヒタル**器械**,測定ヲ爲サルヽ**環境**及**觀測者**ヲ擧ゲザルベカラズ.

人文未ダ進マザル際ニハ或ハ拇指ノ長ニ依リ,又ハ兩手ヲ開キタル長サヲ用ヒテ他ノ長サヲ計リ,或ハ掌上ニ載セ手ニ提ゲテ重量ヲ測ルノ類凡ベテ推定ニ依ルモノ多カリシナリ. 即チ主トシテ五官ヲ用ヒテ其量ヲ推定スルニ過ギザリシモノガ五官ヲ助クル所ノ器械ヲ用フルニ至リテ觀測ノ方面ニハ一大進歩ヲ來シタリ. 其後器械ハ益々精巧ヲ加ヘ一回ノ直接測定ニ比スレバ遙カニ眞ニ近キ結果ヲ得ルニ至リテ更ニ發達ヲ見ルニ至レリ. 斯クシテ優良ナル器械ト良好ナル觀測法トヲ得タリ. 例ヘバがすこあに(*Gascoigne*)ガ望遠鏡ノ合焦ニ始テ又線ヲ用フルニ至リテ分度圈ハ益々精巧ヲ加ヘ,讀角ノ法モ亦益々進歩シテ終ニ今廣ク用ヒラルヽ測微鏡ヲ見ルニ至レリ.

器械ノ各部ガ整正ヲ爲シ得テ觀測者ハ唯其意ノ儘ニ之ヲ動シ得ルニ至リテ亦非常ナル進歩ヲ遂ゲタリ. 斯クシテ益々優良ナル器械ヲ生ズルニ至レリ.

器械ノ構造ハ漸ク改善セラレテ誤差ナルモノガ少クナレルノミナラズ,其取扱ノ方法モ亦益々精練ヲ加ヘ,其整正ノ完全ト相俟チテ誤差ハ亦減少スルニ至レリ.

器械構造ノ簡單ハ亦人ノ着目スル所トナリ,餘リニ複雜ナル器械ハ代フルニ簡單堅實ナルモノヲ以テセラルヽニ至レリ.

383. **周圍ノ環境**. 精密ナル測定ヲ爲スニ大ナル障害ハ其周圍ノ狀態又ハ環境ヨリ起ルモノ多シ. 是狀態タルヤ全然觀測者ノ左右シ能ハザル所ニシテ又器械製造者モ亦之ヲ如何トモスルコト能ハザルモノニ屬シ,滿足ニ之ヲ計算シ又ハ觀測法ニ依リテ之ヲ消滅セシムルコト能ハズ. 然レドモ多クハ其環境ニ在ル間觀測ヲ中止スルトキハ之ヲ避クルコトヲ得ベシ. 例ヘバ鋼卷尺ヲ用ヒテ其線ノ測定ヲ爲サントスルニ當リ强風ガ吹クアラバ其止ムマデ之ヲ中止スルニ如クハナシ. 又夏日望遠鏡ヲ覘ク場合ニ空氣ノ旋躍アルトキハ日中讀角又ハ水準

測量等ノ精密ナル作業ヲ行フニ適セズ.

外來ノ障害ハ其觀測ノ方法ヲ適當ニ擇ブトキハ少クモ一部之ヲ回避スルコトヲ得ルコトアリ. 例ヘバ大氣中ニ於ケル光線ノ屈折ノ如キ其一例ニシテ,六分儀ヲ用ヒテ時ノ觀測ヲ行フガ如キ場合ニ午前及午後同一高度ノ太陽ノ觀測ヲ行フトキハ屢々光線屈折ノ影響ヲ脱スルコトヲ得. 然レドモ之ニ反シテ地平角ノ測定ノ如キ場合ニ,若シ其視準線ガ甚ダ遠クシテ或ハ水陸ニ跨リ或ハ地形凸凹甚シキガ如キ場合ニハ光線屈折ノ影響ハ甚ダ著シク,而カモ之ヲ避クルコト能ハザルヲ以テ,三角測量ノ如キモノニハ寧ロ斯カル線ヲ擇バザルヲ得策トスルコトアリ.

場合ニ依リテハ環境ノ障害ヲ近似的ニ算出スルコトヲ得ルコトアリ. 例ヘバ天頂望遠鏡ヲ用ヒテ緯度ノ觀測ヲ行フ場合ノ如キ光線屈折ノ影響ハ非常ニ少クシテ縱令計算ノ値ニ誤差アリトスルモ他ノ誤差ニ比スレバ遙カニ小ナルモノトナス.

384. **觀測者.** 環境ニ似テ觀測者ハ亦心身ノ變化ニ依リ視聽知覺ガ異常ヲ來シ易ク,亦一個變動シ易キ要素タルヲ失ハズ. 故ニ器械ニシテ良ク整正セラレ,外圍ノ狀態ニシテ亦觀測ニ適スト雖ドモ,而カモ觀測者ガ其心身常態ニ非ルトキハ決シテ精密ナル觀測ノ結果ヲ期スベカラズ. 即チ觀測者ガ心身ノ變態ヲ來セルトキハ其目讀手記ニ誤謬ヲ生ジ易シ. 心身ノ疲勞ハ亦認識ノ正鵠ヲ失ヒ易キヲ以テ一時ニ且ツ餘リ永ク觀測ヲ繼續スルトキハ精密ナル結果ヲ得難シ.

觀測ヲ爲スニハ豫メ其結果ヲ想定シテ偏執ニ陷ルガ如キヲ忌ム. 器械ノ整正ハ充分ニシテ完全ニ而カモ觀測ノ方法ハ不充分ナル整正ノ器械ヲ使用スルニ當リ起ル誤差ヲ消去スルニ努メ,虚心坦懷觀測ニ當ルヲ良シトス.

觀測者ノ經驗多ケレバ觀測ノ慣習ニ固著スルコト多ク,器械的ニ觀測作業ヲ爲スコト多シ. 而シテ縱叉線ヲ以テ覘標ヲ二等分スル場合ノ如キ常ニ其一側ノミヲ視準シテ正中ヲ逸スルコト少ナカラズ. 此特性ハ寧ロ經驗ニ富ミタルモノニ多クシテ名ケテ**個人誤差**ト呼ブ.

器械,環境及觀測者ノ特性ニ對シ凡テ更正ヲ實測ノ結果ニ施スモ尙測定セラレタル量ノ正シキ値ヲ知ルコト能ハザルハ普通ナリ. 蓋シ器械取扱ノ巧拙,環境ノ變化等到底人力ガ其異同ヲ識別シ得ザルモノアリ,無限ノ大智識ニ非レバ其要諦ニ觸ルヽコ

ト能ハズ．限リアル吾人ノ力ヲ以テシテハ如何ニ好ク觀測ヲ行フモ尙所謂誤差ノ片影ヲ止ムルヲ免レズ．吾人ノ觀測ニハ確實ナルモノナクシテ唯眞ニ近キモノタルニ過ギズ．

此等說明シ得ザル原因ノ爲ニ眞價ヨリ外レタル量ヲ名ケテ**誤差**ト云フ．

第二節　誤差ノ法則

385. **觀測ト誤差ノ種類．** 一ノ量ヲ測定スル作業ハ卽チ**觀測**ニシテ如何ナル觀測ニモ常ニ誤差ノ爲ニ不合ノ結果ヲ生ズ．此ノ誤差ニ三種アリ．常差，誤謬及偶差是ナリ．

常差又ハ**整差**トハ其原因ノ明カナル誤差ニシテ之ヲ計算シ又ハ消去スルヲ得ルモノナリ．此中ニハ竪角ノ上ニ及ボス光線ノ屈折ノ如キ,又ハ鋼卷尺ノ上ニ及ス溫度ノ如キ**理論的誤差**モアレバ,器械ノ不完全ナル整正ノ結果ノ如キ**器械的誤差**モアリ．又觀測者ノ習僻ニ基ヅク**個人的誤差**モアリ．

誤謬トハ錯覺ヨリ起ル誤差ニシテ之ガ爲ニ觀測ニハ信ヲ措クコト能ハズ．35ト書クベキヲ53ト書クガ如キモノニシテ誤謬ノアル觀測ハ之ヲ排セザルベカラズ．唯時トシテ之ヲ誤差ト區分スルコト能ハザルコトアリ．

常差及誤謬ノ外ニ尙他ノ誤差アリテ人力ノ之ヲ如何トモスルコト能ハザルモノアリ．之ヲ偶差ト云フ．例ヘバ水準儀ノ氣泡又ハ支脚ガ急ニ膨脹シテ水準測量ニ及ス誤差ノ如キ,又ハ風ノ影響或ハ不規則ナル光線ノ屈折ノ如キ卽チ是ナリ．此種ノ誤差ハ又人ノ感觸視準ノ不完全ヨリ起リ,之ガ爲ニ器械ノ取扱巧妙ヲ缺キ或ハ遊標ヲ讀ムコト精密ナラザルニ至ル．而シテ若シ觀測ノ誤差ニシテ其跡ヲ尋ネテ一定ノ法則ヲ見出シ得ルモノナラバ既ニ誤差ノ域ヲ脫シテ**更正**トナル．

386. **定差,整差及偶差．** 定差ハ凡ベテノ觀測ニ同一ノ效果ヲ有シ,整差ハ其正負又ハ或程度迄其大サガ或ル狀態ト一定ノ關係ヲ有ス．偶差ハ各觀測ニ一定ナラズシテ或ハ正トナリ或ハ負トナリ,最小自乘法ノ基礎ヲ爲ス所ノ誤差ノ法則ニ從フモノトス．例ヘバ地平ノ方向ヲ觀測スルニ當リ覘標ノ影ヨリ起ル位相ノ差ハ太陽及視準線ノ方位角ニ就イテハ整差トナル．觀則者ノ個人誤差ハ種々ナル恒星ノ觀測ニ定差ヲ與フベシ．定差ナル語ハ屢々偶差ニ對シテ用ヒラレ,其中ニ定差及整差ヲ含ムコト稀ナラズ．

偶差カ最終ノ結果ニ及ス影響ハ觀測ヲ反覆繼續シテ之ニ最小自乘法ノ理ヲ適用スルトキハ之ヲ減少スルコトヲ得ベシ. 又定差及整差モ觀測法ヲ換ヘテ之ヲ消去スルカ又ハ其法則ヲ定ムルトキハ之ヲ除去スルコト困難ナラザルコトアリ.

387. **過失又ハ誤謬.** 測定ノ値ニ不合ヲ生ズルハ觀測者ガ其器械ヲ讀ミ其結果ヲ記帳スルニ當リテ陷ル**過失誤謬**ニ依ルヲ最モ忌ムベシト爲ス. 誤聞, 數字ノ轉倒,錯覺ノ爲ニ他ノ數字ヲ記帳シ, 7 ト 9, 3 ト 8 ヲ誤ルノ類決シテ稀ナラズ.

不注意ハ亦示度ヲ讀ミ又ハ之ヲ記帳スルニ過失ト同一ノ結果ヲ生ズルコトアリ. 例ヘバ跨準器ヲ取扱フコト丁寧ナラズ,又ハ熱シタル燈火ヲ其近クニ置クノ類是ナリ.

斯クノ如クシテ觀測ヲ爲スニ當リテ有ラユル注意ヲ拂ヒ,出來得ル限リノ更正ヲ施シテ得タル値ヲ**觀測ノ値**ト名ケ,單ニ偶差ニ依ルモノト想定スルコトヲ得. 卽チ相異ナル觀測ノ値ヨリ如何ニシテ其量ノ眞ノ値ヲ見出スベキヤガ當面ノ問題ナリトス.

388. **或眞率ノ定義及定理. 一個ノ特種ノ出來事ガ起ル或眞率又ハぷろばびりちートハ其出來事ガ等シク起リ得ル回數ト有ラユル回數トノ比ヲ云フ.**

今一方ニ好都合ニ起リ得ル回數ヲ a, 之ニ不都合ニ起リ得ル回數ヲ b トセバ好都合不都合有ラユル回數ハ $a+b$ ニシテ,其中 a ガ起ル或眞率 W ハ $W=\frac{a}{a+b}$, b ガ起リ得ル或眞率 W' ハ $W'=\frac{b}{a+b}$ ナリ. 勿論 $W+W'=1$ ナリトス.

故ニ一出來事ノ起ル或眞率ハ 1 ト 0 ノ間ニ在リテ, 1 ハ確實ヲ表ハシ, 0 ハ不可能ヲ示ス.

定理第一. w 及 w' ヲ互ニ相容レザル二ノ部分的出來事ノ或眞率トセバ全體ノ出來事ノ或眞率 W ハ w 及 w' ノ和ナリ.

$$W=w+w' \qquad [416]$$

今一方ニ好都合ナル場合ノ數ガ夫々 a 及 b ニシテ凡ベテノ場合ノ數ガ μ トセバ好都合ナル場合ノ數ハ勿論 $a+b$ ニシテ其或眞率 W ハ

$$W=\frac{a+b}{\mu}=\frac{a}{\mu}+\frac{b}{\mu}$$

又ハ

$$W=w+w'$$

例ヘバ a 個ノ白球, b 個ノ黑球及 c 個ノ他ノ球アリトセバ此等ノ相混合セル中ヨリ無意識ニ一白球ヲ取出ス或眞率ハ $\frac{a}{a+b+c}$ ニシテ,一黑球ヲ取出ス或眞率ハ $\frac{b}{a+b+c}$ ナリ. 而シテ一個ノ白球又ハ黑球

ヲ取出ス或眞率ハ $\dfrac{a}{a+b+c}+\dfrac{b}{a+b+c}$ ナリトス.

同樣ニ一出來事ヲ組成スル出來事ノ或眞率ガ w w', w'',……ナリトセバ其全體ノ出來事ノ或眞率 W ハ

$$W=w+w'+w''+\ldots\ldots \qquad [417]$$

定理第二. w 及 w' ヲ二ノ互ニ獨立セル出來事ノ或眞率トセバ此等双方ノ出來事ガ共ニ起ル或眞率 W ハ其積 $w.w'$ ナリ.

$$W=w.w' \qquad [418]$$

今 μ ナル有ラユル場合ノ中ニ a ナル好都合ノ出來事ト ν ナル有ラユル場合ノ中ニ b ナル好都合ノ出來事トアリ. 此等双方ガ共ニ起リ得ル有ラユル場合ハ $\mu\nu$ ニシテ,好都合ノミノ場合ハ ab ナリ. 故ニ好都合ノ或眞率ヲ W トセバ

$$W=\frac{ab}{\mu\nu}=\frac{a}{\mu}.\frac{b}{\nu}$$

又ハ

$$W=w.w'.$$

例ヘバ a 個ノ白球ト b 個ノ他ノ球トガ一方ニ置カレ, a' 個ノ白球ト b' 個ノ他ノ球ガ他方ニ置カレタル場合ニ双方ヨリ各一個ノ球ヲ取出シテ二個ノ白球ガ得ラルヽ或眞率ハ $\dfrac{a}{a+b}.\dfrac{a'}{a'+b'}$ ナリ.

同樣ニ若シ n 個ノ獨立セル出來事アリテ其或眞

率ヲ夫々 w, w', w'',……トセバ是等ノ出來事ガ共ニ起得ル或眞率 W ハ

$$W=w.w'.w''\ldots\ldots \qquad [419]$$

ナリ.

同理ニテ同一ノ出來事ガ r 回起ル或眞率ハ

$$W=w^r \qquad [420]$$

ナリ.

389. **誤差出現ノ公理.** 同一ノ量ヲ數回獨立シテ而カモ共ニ等シク良好ニ測定シタル場合ニ偶差出現ノ狀態ハ經驗ニ從ヘバ次ノ如シ.

第一. 絕對ノ値ガ相等シクシテ正若クハ負ナル誤差ハ相等シク出現ス.

第二. 如何ナル種類ノ觀測ニ於テモ偶差ノ大サハ一定限ヲ有ス.

第三. 小サキ誤差ハ大ナル誤差ヨリモ其出現回數頻繁ナリ.

斯クノ如クシテ誤差出現ノ或眞率ハ誤差ノ或函數ナルコトヲ假定スルコトヲ得.

390. **平均.** x ヲ直接又ハ間接ニ觀測ニ依リテ定メラルベキ一ノ量ノ値, l ヲ其測定ノ値トシ,若シ其觀測ニシテ完全ナリセバ勿論

(1) $\qquad x-l=0$

ナルベシ．然レドモ一般ニ觀測ニハ或種ノ誤差ヲ伴フヲ免レザルヲ以テ ε ヲ觀測ノ眞ノ誤差トスレバ n 回ノ觀測ニ於テ

$$\left.\begin{aligned} x-l_1&=\varepsilon_1 \\ x-l_2&=\varepsilon_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x-l_n&=\varepsilon_n \end{aligned}\right\} \qquad [421]$$

此ニ $x, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots \varepsilon_n$ ナル $n+1$ 個ノ未知量ニ對シテ n 個ノ等式アリ．今此等ノ求メラレタル未知量ノ値ハ勿論觀測ノ値ノ函數ナルベク，其最大ナルモノト最小ナルモノトノ間ニ在ルベシ．而シテ觀測ノ値ヲ其大サニ從テ配列スレバ必ズヤ其ノ中央ノ値ニ近ク鷹集スベシ．即チ x ノ値トシテ中央ノ値ヲ擇ブトキハ之ヨリ大ナル觀測ノ値ト之ヨリ小ナル觀測ノ値トハ其數ニ於テ相等シク，且ツ x ハ觀測シタル値ノ對稱的函數ナルモノト想像スルコトヲ得．

觀測ノ値ノ最モ簡單ナル對稱的函數ハ其ノ平均ナリトス．即チ x_0 ヲ平均トセバ

(2) $$x_0=\frac{(l_1+l_2+\ldots\ldots+l_n)}{n}=\frac{\Sigma(l)}{n}$$

又ハがうすノ記號ヲ用ヒ［ ］ヲ以テ和ヲ表ハスモノトセバ

$$x_0=\frac{[l]}{n} \qquad [422]$$

即チ一ノ量ヲ凡ベテ一様ナル良好ヲ以テ n 回觀測シタルトキハ其量ノ最良ノ値ハ觀測シタル n 値ノ平均トス．

[421] ヲ加ヘテ其平均ヲ取レバ

(3) $$x=\frac{[l]}{n}+\frac{[\varepsilon]}{n}=x_0+\frac{[\varepsilon]}{n}$$

今若シ n ガ非常ニ大トナリ，誤差ノ和 $[\varepsilon]$ ガ小ナラバ此等式ノ最後ノ項ハ甚ダ小ナルベシ．而シテ過ギタル誤差又ハ正差ハ不足ノ誤差又ハ負差ノ孰レカ一方ガ特ニ多キ理由ナキヲ以テ，n ガ非常ニ大ナルトキハ $\frac{[\varepsilon]}{n}$ ハ x ニ對シテ無窮大ニ小ナルモノト考フルコトヲ得．此場合ニ於テハ

(4) $$x=x_0$$

ニシテ觀測ノ數ガ非常ニ多ケレバ平均ノ値ハ眞ノ値ヲ表ハス．

[420] 及 (4) ヨリ，一般ニ $x_0-l=v$ トスレバ

$$\left.\begin{aligned} x_0-l_1&=v_1 \\ x_0-l_2&=v_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_0-l_n&=v_n \end{aligned}\right\} \qquad [423]$$

$v_1, v_2, \ldots\ldots v_n$ ヲ名ケテ**殘差**ト云ヒ，[423] ヲ**觀測等式**ト云フ．

[423] ヲ節々相加フレバ

(5) $nx_0-[l]=[v]$

又ハ (2) ヨリ左節ハ零ニ等シキヲ以テ

$$[v]=0 \qquad [424]$$

殘差ノ和ハ零ニ等シ. 或ハ換言スレバ**正號殘差ノ和ハ負號殘差ノ和ニ等シ.**

n ガ無窮大ニシテ x ガ眞ノ價ヲ示ス場合ト n ガ有限ニシテ x_0 ヲ見出シ得ル最良ノ値トスル場合ニ頗ル著シキ呼應アリ. 即チ前ノ場合ニハ誤差 ε ノ和ハ零ニ等シク,後ノ場合ニハ殘差 v ノ和ハ零ニ等シ.

今 X ヲ平均 x_0 ヨリ異ナル所ノ他ノ値トスレバ

$$(6)\qquad \begin{cases} X-l_1=v_1' \\ X-l_2=v_2' \\ \cdots\cdots\cdots \\ X-l_n=v_n' \end{cases}$$

[306] 及 (6) ヲ節々自乘シテ加フレバ

$$(7)\qquad \begin{cases} [v^2]=nx_0^2-2x_0[l]+[l^2] \\ [v'^2]=nX^2-2X[l]+[l^2] \end{cases}$$

又ハ (7) ノ兩式ヨリ

$$(8)\qquad [v'^2]=[v^2]+n\left(X-\frac{[l]}{n}\right)^2$$

$\left(X-\frac{[l]}{n}\right)^2$ ハ自乘ナルヲ以テ常ニ正ナリ. 從テ

$$[v'^2]>[v^2] \qquad [425]$$

即チ**平均ヲ取リテ見出シタル殘差 v ノ平方ノ和ハ最小ナリ.** 是レれーぜんだー (*Legendre*) ガ始メテ最小自乘法ナル名ヲ與ヘシ所以ナリ.

391. **觀測セラレタル量ノ誤差ノ法則.** 今日一ノ量ヲ數回獨立シテ共ニ等シク良ク觀測シタル場合ニハ 389 ノ公理ガ適用セラルヽヲ得ベシ. 即チ誤差ニハ其大サニ一定限アリ. 今 a ヲ此一定限又ハ最大誤差トセバ凡テノ誤差ハ $+a$ ト $-a$ ノ間ニ在ルノミナラズ(公理第二),小キ誤差ハ大ナル誤差ヨリモ其出現回數頻繁ニ(公理第三),從テ誤差零ナル附近ニハ回數最モ多ク密集ス. 即チ誤差出現ノ或眞率ハ誤差ノ函數ナルコト前ニ述ベタルガ如シ.

今一ノ誤差ガ 0 ト ε トノ間ニ在ル或眞率ヲ $f(\varepsilon)$ ヲ以テ表ハシ, ε ト $\varepsilon+d\varepsilon$ ノ間ニ在ル或眞率ヲ $W(\varepsilon)$ ヲ以テ表ハセバ其誤差ガ 0 ト $\varepsilon+d\varepsilon$ ノ間ニ在ル或眞率ハ $f(\varepsilon+d\varepsilon)$ ニシテ定理第一又ハ [299] ヨリ

$$(1)\qquad f(\varepsilon+d\varepsilon)=f(\varepsilon)+W(\varepsilon)$$

ナルガ故ニ

$$(2)\qquad W(\varepsilon)=f(\varepsilon+d\varepsilon)-f(\varepsilon)=f'(\varepsilon)d\varepsilon$$

今之ヲ

(3) $W(\varepsilon)=\phi(\varepsilon)d\varepsilon$

トセバ $d\varepsilon$ ハ小ナルガ故ニ $W(\varepsilon)$ ヲ以テ誤差 ε ノ出現ノ或眞率ト考フルコトヲ得．此ノ $\phi(\varepsilon)$ ヲ名ケテ**誤差分布ノ法則**又ハ**誤差ノ法則**ト云フ．

一ノ誤差ガ任意ノ定限 b ト a ノ間ニ在ル或眞率ハ $\phi(\varepsilon)d\varepsilon$ ヲ b ト a ノ間ニ擴充スレバ可ナリ．今之ヲ W ヲ以テ表ハセバ

(4) $W=\int_a^b\phi(\varepsilon)d\varepsilon$

誤差出現ノ公理ヨリ，

(5) $\begin{cases}\phi(0)=\text{最大}\\ \phi(\pm\infty)=0\\ \phi(\varepsilon)=\phi(-\varepsilon)\end{cases}$

且ツ

(6) $\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\varepsilon)d\varepsilon=1.$

次ニ ε_1 ナル誤差ガ出現スル或眞率ハ $\phi(\varepsilon_1)d\varepsilon_1$ ニシテ ε_2 ナル誤差ガ出現スル或眞率ハ $\phi(\varepsilon_2)d\varepsilon_2$ ナリ．以下之ニ準ズ．從テ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots\varepsilon_n$ ナル誤差ガ同時ニ出現スル或眞率 W ハ定理第二又ハ [418] ヨリ

(7) $W=\phi(\varepsilon_1)d\varepsilon_1.\phi(\varepsilon_2)d\varepsilon_2\ldots\ldots\ldots$

W ノ最大ナル場合ハ卽チ未知量 x ノ最モ眞ニ近キ値ヲ得ベシ．(7) ノ對數ヲ取レバ

(8) $\begin{cases}\log W=\log\phi(\varepsilon_1)+\log\phi(\varepsilon_2)+\ldots\ldots+\log\phi(\varepsilon_n)\\ \qquad+\log d\varepsilon_1+\log d\varepsilon_2+\ldots\ldots+\log d\varepsilon_n\end{cases}$

(8) ヲ $d\varepsilon$ ニ就テ微分スルトキハ [304] ヨリ $\frac{d\varepsilon_1}{dx}=\frac{d\varepsilon_2}{dx}=\ldots\ldots=\frac{d\varepsilon_n}{dx}=1$ ナルガ故ニ

(9) $\begin{cases}\frac{d\log W}{dx}=\frac{d\log\phi(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1}\frac{d\varepsilon_1}{dx}+\frac{d\log\phi(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2}\frac{d\varepsilon_2}{dx}\\ \qquad+\frac{d\log\phi(\varepsilon_n)}{d\varepsilon_n}\frac{d\varepsilon_n}{dx}\\ \quad=\frac{\phi'(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1\phi(\varepsilon_1)}\varepsilon_1+\frac{\phi'(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2\phi(\varepsilon_2)}\varepsilon_2+\ldots+\frac{\phi'(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n\phi(\varepsilon_n)}\varepsilon_n\end{cases}$

然ルニ觀測シタル値ノ數ガ非常ニ大ナルトキハ平均ノ理ヨリ

(10) $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots\ldots+\varepsilon_n=0$

(9) ト (10) トガ同時ニ滿足スルガ爲ニハ

(11) $\frac{\phi'(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1\phi(\varepsilon_1)}=\frac{\phi'(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2\phi(\varepsilon_2)}=\ldots\ldots=k$

又ハ任意ノ ε ヲ用ヒテ

(12) $\frac{\phi'(\varepsilon)}{\varepsilon\phi(\varepsilon)}=k$

或ハ

(13) $\log\phi(\varepsilon)=\frac{1}{2}k\varepsilon^2+C$

又ハ

(14) $\phi(\varepsilon)=Ae^{\frac{1}{2}k\varepsilon^2}$

ε ガ 0 ナルトキ $\phi(\varepsilon)$ ハ最大ナリ．從テ k ハ負號ノモノナラザルベカラズ．何トナレバ (14) ヲ (7) ニ代用スレバ

(15) $$W=A^n e^{\frac{1}{2}k(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots\ldots+\varepsilon_n^2)}d\varepsilon_1.d\varepsilon_2\ldots\ldots d\varepsilon_n$$

又ハ W ガ最大ナルガ爲ニ

(16) $$\frac{d\log W}{dx}=k(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots\ldots+\varepsilon_n^2)=0$$

從テ又

(17) $$\frac{d^2\log W}{dx^2}=kn$$

n ハ正ナルヲ以テ k ハ負ナルヲ要ス．今

(18) $$\frac{1}{2}k=-h^2$$

トスレバ (6), (14) 及 (18) ヨリ

(19) $$A\int_{-\infty}^{\infty}e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=1.$$

$h\varepsilon=t$ トスレバ $d\varepsilon=\frac{dt}{h}$. 故ニ (19) ハ

(20) $$\frac{A}{h}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=1.$$

更ニ又 $t^2=u$ トスレバ $2tdt=du$. 故ニ

(21) $$\left\{\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-u}u^{\frac{1}{2}-1}du\\&=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}\right.$$

故ニ

(22) $$\frac{A}{h}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{A}{h}\sqrt{\pi}=1.$$

從テ

(23) $$A=\frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

故ニ又

$$\phi(\varepsilon)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}$$

$e^{-h^2\varepsilon^2}$ ガ一個ノ實量ナルガ爲ニハ h ハ亦一個ノ數ナラザルベカラズ．從テ $\frac{1}{h}$ ハ x ト同一單位ニテ表ハサレタル量ナリトス．

又 $\phi(\varepsilon)$ ノ形ヨリ h ガ小ナル程誤差 ε ノ或眞率ハ大ナルベク，h ガ大ナル程 ε ノ或眞率ハ小ナリ．故ニ h ハ種々ナル觀測ノ性質ヲ試査スルモノニシテがうす (*Gauss*) ハ之ヲ**精度**ト名ケタリ．

實際ニハ他ノ方法ニ依リテ觀測ノ精密ヲ比較スルヲ便トス (394 及 395 參照)．

第六十六表 $\phi(\varepsilon)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}$ ノ値．

$$\log e=0{,}4342945\ldots\ldots=\mu,\quad \log\sqrt{\pi}=0{,}2485749,$$

$$\log\phi(\varepsilon)=9{,}7514251+\log h-\mu h^2\varepsilon^2.$$

ε	$\phi(\varepsilon)$		ε	$\varphi(\varepsilon)$	
	$h=1$	$h=2$		$=1$	$h=2$
0,0	0,564 19	1,128 38	1,0	0,207 55	0,020 67
0,1	0,558 58	1,084 13	1,1	0,168 24	0,008 92
0,2	0,542 07	0,965 14	1,2	0,133 67	0,003 56
0,3	0,515 63	0,787 24	1,3	0,104 10	0,001 31
0,4	0,480 77	0,594 99	1,4	0,079 47	0,000 44
0,5	0,439 39	0,415 11	1,5	0,049 46	0,000 14
0,6	0,393 62	0,267 34	1,6	0,043 61	0,000 04
0,7	0,345 64	0,158 94	1,7	0,031 36	0,000 01
0,8	0,297 49	0,087 23	1,8	0,022 10	0,000 003
0,9	0,250 98	0,044 19	1,9	0,015 26	0,000 0006
1,0	0,207 55	0 020 67	2,0	0,010 33	0,000 00001
			3,0	0,000 07	0,0
			∞	0,0	0,0

392. 最小自乘法ノ原理. 觀測セラレタル値ガ徹頭徹尾同性質ノモノナランニハ h ハ一定ニシテ 370 ノ (7) 式ニ示セル積ハ $A^n e^{-h^2[\varepsilon^2]}$ トナル. 若シ $[\varepsilon^2]$ ガ最小ナラバ此積ハ最大トナル. 換言スレバ或量ヲ許多タビ觀測シタル場合ニ其値ノ各ガ同一性質ノモノナラバ其量ノ最モ眞ニ近キ値ハ誤差ノ自乘ノ和ヲ最小ナラシムルコトニ依テ得ラルベシ.

若シ觀測ノ値ニシテ同一性質ノモノナラザルトキハ觀測ノ異ナルト共ニ h ハ異ナル　而シテ未知量ノ最モ眞ニ近キ値ハ $e^{-[h^2\varepsilon^2]}$ ノ最大値ヨリ見出サルベシ. 換言スレバ $[h^2\varepsilon^2]$ ノ最小値ヨリ見出サルベシ. 故ニ若シ一ノ量ヲ觀測シタル場合ニ其値ノ多數ノ各ガ相異ナル性質ノモノナラバ其量ノ最モ眞ニ近キ値ハ觀測ノ各誤差ニ其 h ヲ乘ジ其積ノ自乘ノ和ヲ最小トナスコトニ依リテ見出スコトヲ得.

393. 獨立シテ觀測セラレタル量ノ函數ノ誤差ノ法則. 前ニハ直接ニ觀測シタル量ノ誤差ノ法則ヲ述ベタレドモ若シ一個又ハ若干ノ獨立シテ觀測セラレタル量ノ函數ヨリ成ル場合ノ誤差ノ法則ハ如何ナルモノナルカヲ茲ニ述ベントス.

第一. 加法. 二ノ長サ l_1 及 l_2 ヲ獨立シテ測定シ其和ヲ x トセバ

(1)　$x=l_1+l_2$

x ノ誤差ヲ ε, l_1 及 l_2 ノ誤差ヲ夫々 ε_1 及 ε_2 トセバ勿論

(2)　$\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$

ニシテ l_1 ニ於ケル ε_1 ト l_2 ニ於ケル ε_2 トガ同時ニ出現スル或眞率 W ハ

(3)　$$W=\frac{h_1h_2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-h_1^2\varepsilon_1^2\quad h_2^2\varepsilon_2^2}d\varepsilon_1 d\varepsilon_2$$

ナリ. 又ハ

(4)　$$W=\frac{h_1h_2}{\pi}d\varepsilon_2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-h_1^2\varepsilon_1^2\cdot h_2^2\varepsilon_2^2}d\varepsilon_1$$

然ルニ ε_1 ト ε_2 トハ互ニ相獨立スルガ故ニ (2) ヲ微分シテ

(5)　$d\varepsilon=d\varepsilon_2$

故ニ

(6)　$$\begin{cases} W=\dfrac{h_1h_2}{\pi}d\varepsilon\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-h_1^2\varepsilon_1^2-h_2^2(\varepsilon-\varepsilon_1)^2}d\varepsilon_1 \\ \quad=\dfrac{h_1h_2}{\sqrt{(h_1^2+h_2^2)\pi}}.e^{-\frac{h_1^2h_2^2}{h_1^2+h_2^2}\varepsilon^2}d\varepsilon \end{cases}$$

之ヲ $W=\phi(\varepsilon)d\varepsilon$ ニ對比スレバ

(7)　$$h^2=\frac{h_1^2h_2^2}{h_1^2+h_2^2}$$

又ハ

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}$$

$$=\left[\frac{1}{h^2}\right] \qquad [427]$$

第二. 乘法. 或ル量xガ觀測セラレタル値lト定數aトノ積ナルトキハ

(8) $x=al$

此場合ニハ勿論 $x=l+l+\ldots\ldots+l$ (a回) ト見做スコトヲ得ベクx及lノ誤差ヲ夫々ε及ε_0トセバ

(9) $\varepsilon=a\varepsilon_0$

ナリ. 從テ又

$$\frac{1}{h^2}=\frac{a^2}{h_0^2} \qquad [428]$$

ナリ.

第三. 一次函數. 觀測ノ値$l_1, l_2,\ldots\ldots l_n$ガ夫々定數$a_1, a_2\ldots\ a_n$等ト

(10) $x=a_1l_1+a_2l_2+\ldots\ldots+a_nl_n$

ナル關係ヲ有スルトキハ一般ノ精度ヲh_rトスレバxノ精度hハ

$$\frac{1}{h^2}=\left[\frac{a^2}{h_r^2}\right] \qquad [429]$$

ナリ.

第四. 一般ノ函數. 誤差ガ非常ニ小ナルトキハ一般ノ函數ハてーらーノ定則ニ依リテ之ヲ一次函數ニ展開スルヲ得ルモノ多シ. 今$l_1, l_2,\ldots\ldots$ヲ觀測ノ値, $\varepsilon_1, \varepsilon_2,\ldots\ldots$ヲ夫々其誤差トセバ眞ノ函數ノ値$x$及$l_1l_2\ldots\ldots$ノ函數ノ値$X$ハ夫々次ノ如シ

(1) $$\begin{cases} x=f(l_1+\varepsilon_1,\ l_2+\varepsilon_2,\ldots\ldots\ldots\ldots) \\ X=f(l_1,\ l_2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \end{cases}$$

(1)ノ第一式ヨリ第二式ヲ減ジ, $x-X=\varepsilon$トスレバ

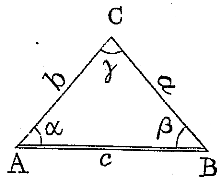
(2) $\varepsilon=\frac{\partial f}{\partial l_1}\varepsilon_1+\frac{\partial f}{\partial l_2}\varepsilon_2\ \frac{\partial f}{\partial l_3}\varepsilon_3+\ldots\ldots$

xノ精度ヲh; $l_1, l_2,\ldots\ldots$ノ精度ヲ夫々$h_1, h_2,\ldots\ldots$トスレバ第三ヨリ

$$\frac{1}{h^2}=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial l_r}\right)^2\Big/h_r^2\right] \qquad [430]$$

例99. 第四百三十一圖ニ於テ三角形ABCノ底c及二ノ角α及γヲ知ツテ他ノ一邊aヲ求ム.

第四百三十一圖



(1) $a=\frac{c}{\sin\gamma}\sin\alpha$

α及γノ誤差ヲ$\delta\alpha$及$\delta\gamma$トシ,底cハ誤差ナキモノトス.

今aハ自變數α及γノ函數ナルガ故ニaノ誤差δaハ

(2) $\delta a=\frac{\partial a}{\partial\alpha}\delta\alpha+\frac{\partial a}{\partial\gamma}\delta\gamma$

又ハ $\frac{\partial a}{\partial\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}\cos\alpha$, $\frac{\partial a}{\partial\gamma}=-\frac{c\sin\alpha}{\sin^2\gamma}\cos\gamma$ ナルガ故ニ

(3) $\delta a=\frac{c}{\sin\gamma}\cos\alpha\delta\alpha-c\sin\alpha\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}\delta\gamma$

或ハ

(4) $\delta a=a\cot\alpha\delta\alpha-a\cot\gamma\delta\gamma$

誤差ハ精度ニ反比例スルモノト假定スレバ[313]ヨリ

(5) $$\frac{1}{h}=a\sqrt{\frac{\cot^2\alpha}{h_\alpha^2}+\frac{\cot^2\gamma}{h_\gamma^2}}$$

此ニ $\frac{1}{h_\alpha}=\delta\alpha$, $\frac{1}{h_\gamma}=\delta\gamma$ ハ夫々 α 及 γ ノ誤差ヲ表ハス. 今 $\delta\alpha=\delta\gamma=\delta$ トシ, δ ヲ秒ヲ以テ表ハセバ

(6) $$\frac{\delta a}{a}=\frac{\delta}{\rho}\sqrt{\cot^2\alpha+\cot^2\gamma}, \qquad \rho=206265''.$$

若シ $\alpha=\gamma=60°$, $\delta''=10''$ トスレバ $\cot\alpha=0{,}57735$, $\cot^2\alpha=0{,}333333$ ニシテ

(7) $$\frac{\delta a}{a}=\pm 0{,}0000396$$

即チ誤差ハ邊 a ノ 0,004% ナリ. 若シ $a=1000$ 米ナラバ $\delta a=0{,}04$ 米ナリ.

例100. n 個ノ一様ニ善ク觀測セラレタル値ノ平均ノ精度ヲ見出セ.

(1) $$x=\frac{1}{n}(l_1+l_2+\ldots\ldots+l_n)$$

今 h_0 ヲ平均ノ精度, h ヲ各ノ觀測値ノ精度トセバ

(2) $$\frac{1}{h_0^2}=\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h^2}+\ldots\ldots n\text{ 項}\right)$$

又ハ

$$h_0=\sqrt{n}\,h \qquad [431]$$

即チ n **觀測ノ平均ノ精度ハ各觀測ノ精度ノ** $\sqrt{n}$ **倍ナリ.**

394. 均方誤差. h ノ計算ハ稍々不便ナルガ故ニがうすハ均方誤差ヲ案出セリ. 今 ε ト $\varepsilon+d\varepsilon$ ノ間ニ出現スル誤差ノ數ヲ ν トスレバ此 $d\varepsilon$ ナル間ニ在ル誤差ハ相等シキモノト考フルヲ得ベク,之ヲ ε トスレバ此間ニ在ル誤差ノ自乘ノ和ハ $\nu\varepsilon^2$ ナリ. 若シ此和ヲ凡ヘテノ間隙ニ擴張セバ凡ベテノ誤差ノ自乘ノ和ハ $[\nu\varepsilon^2]$ ナリ. n ガ非常ニ大ナルトキ

$$m^2=\frac{[\nu\varepsilon^2]}{n}=\left[\frac{\nu}{n}\varepsilon^2\right] \qquad [432]$$

トセバ m ヲ名ケテ**均方誤差**ト云ヒ, $\frac{\nu}{n}$ ハ ε ト $\varepsilon+d\varepsilon$ ノ間ニ誤差ノ出現スル或眞率ヲ表ハス.

即チ

(1) $$\frac{\nu}{n}=\phi(\varepsilon)d\varepsilon$$

故ニ

(2) $$\begin{cases} m^2=\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^2\phi(\varepsilon)d\varepsilon \\ \quad =\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon \end{cases}$$

今

(3) $$\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=2\int^{\infty}\varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon$$

$h\varepsilon=t$ トスレバ $d\varepsilon=\frac{dt}{h}$, 故ニ

$$(4)\quad \begin{cases} 2\int_0^{\infty}\varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=2\int_0^{\infty}\frac{t^2}{h^2}e^{-t^2}\frac{dt}{h} \\ \qquad =\frac{1}{h^3}\int_0^{\infty}t^2e^{-t^2}dt \end{cases}$$

然ルニ

$$(5)\quad \begin{cases} \int_0^{\infty}t^2e^{-t^2}dt=\int_0^{\infty}\frac{t}{2}(-2te^{-t^2})dt \\ \qquad =\left[-\frac{t}{2}e^{-t^2}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt \\ \qquad =\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{cases}$$

故ニ

$$(6)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^2e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=\frac{1}{h^3}\;\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

從テ (2) 及 (6) ヨリ

$$m^2=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\;\frac{1}{h^3}\;\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{2h^2} \qquad [433]$$

又ハ

$$m=\frac{1}{h\sqrt{2}}=\frac{0,70711}{h} \qquad [433']$$

395. **推差又ハ央差.** 若干群ノ觀測ヲ行ヒタル場合ニ各群ニ現ハレタル誤差ヲ其ノ大サノ順序ニ配列シ,其中同一ノ關係的位置ヲ占ムル誤差ヲ比較スレバ各群ノ觀測ノ精度ヲ定ムルコトヲ得. 各誤差群ノ中央ニ位スル誤差ヲ取リテ比較スルハ至便ナリトス. 例令誤差群ヲ大サノ順序ニ配列スレバ $\pm 2a,\ldots\ldots\pm r,\ldots\ldots 0$ トナレリトシ, r ヲ以テ中間ニ位シテ數値上之ヨリ大ナルモノト之ヨリ小ナル誤差トガ兩々相等シキ個數アルトキ此 r ヲ名ケテ**推差**又ハ**央差**ト云フ. 故ニ若シ n ヲ誤差ノ總數トスレバ $+r$ ト $-r$ ノ間ニ在ル誤差ノ數ハ $\frac{n}{2}$ ニシテ此等ノ限界ノ外ニ在ルモノ卽チ $+\infty$ ト $+r$ ノ間及 $-r$ ト $-\infty$ ノ間ニ在ル誤差ノ數ハ亦 $\frac{n}{2}$ ニ等シ. 換言スレバ一回ノ觀測ノ誤差ガ $+r$ ト $-r$ ナル定限ノ間ニ在ル或眞率ガ $\frac{1}{2}$ ニシテ,誤差ガ此等ノ定限ノ外ニ在ル或眞率ハ亦 $\frac{1}{2}$ ナリ.

故ニ

$$(1)\quad \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-r}^{+r}e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=\frac{1}{2}$$

(1) 式ニ $h\varepsilon=t$ トシ, $t=\rho$ ガ $\varepsilon=r$ ニ應ズレバ

$$(2)\quad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\rho}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}$$

今 e^{-t^2} ヲ級數ニ展開シテ各項ヲ積分スルトキハ

$$(3)\quad \begin{cases} \int_0^{t}e^{-t^2}dt=\int_0^{t}\left(1-\frac{t^2}{1}+\frac{t^4}{1.2}-\ldots\ldots\right)dt \\ \qquad =t-\frac{t^3}{3}+\frac{1}{1.2}\;\frac{t^5}{5}-\ldots\ldots \end{cases}$$

此級數ハ t ノ凡テノ値ニ對シテ收斂スレドモ t ノ値ガ小ナルトキハ收斂ハ特ニ速カナリ. 若シ t ノ値ガ大ナルトキハ部分積分ノ法ニ依リ

$$(4)\quad \begin{cases} \int e^{-t^2}dt = \int -\frac{1}{2t}de^{-t^2} \\ \quad = -\frac{1}{2t}e^{-t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{e^{-t^2}}{t^2}dt \\ \quad = -\frac{1}{2t}e^{-t^2} + \frac{1}{2^2t^3}e^{-t^2} + \frac{1.3}{2^2}\int \frac{e^{-t^2}}{t^4}dt \end{cases}$$

故ニ

$$(5)\quad \int^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{e^{-t^2}}{2t}\left\{1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1.3}{(2t^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2t^2)^3} + \ldots\ldots\right\}$$

然ルニ

$$(6)\quad \begin{cases} \int_0^t e^{-t^2}dt = \int_0^t e^{-t^2}dt - \int^{\infty} e^{-t^2}dt \\ \quad = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_t^{\infty} e^{-t^2}dt \end{cases}$$

從テ

$$(7)\quad \int_0^t e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-t^2}}{2t}\left\{1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1.3}{(2t^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2t^2)^3} + \ldots\right\}$$

之ヨリ近似法ニ依リ

$$\rho = rh = 0{,}4769363 \qquad [434]$$

[433′] ヨリ $m = \frac{1}{h\sqrt{2}}$ ナルガ故ニ

$$\left.\begin{aligned} r &= 0{,}6745m \\ &\doteqdot \frac{2}{3}m \end{aligned}\right\} \qquad [435]$$

[434] ヨリ $h = \frac{\rho}{r}$ 及 $ah = \rho\frac{a}{r}$ ニシテ

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\rho\frac{a}{r}} e^{-t^2}dt \qquad [436]$$

トスレバ次表ハ $\frac{a}{r}$ ヲ引數トセル $\Theta(t)$ ノ値ヲ表ハス.

第六十七表 $\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int^{\rho\frac{a}{r}} e^{-t^2}dt$ ノ値.

$\frac{a}{r}$	$\Theta(t)$	差	$\frac{a}{r}$	$\Theta(t)$	差
0,0	0,000		2,5	0,908	...
0,1	0,054	54	2,6	0,921	13
0,2	0,107	53	2,7	0,931	10
0,3	0,160	53	2,8	0,941	10
0,4	0,213	53	2,9	0,950	9
0,5	0,264	51	3,0	0,957	7
0,6	0,314	50	3,1	0,963	6
0,7	0,363	49	3,2	0,969	6
0,8	0,411	48	3,3	0,974	5
0,9	0,456	45	3,4	0,978	4
1,0	0,500	44	3,5	0 982	4
1,1	0,542	42	3,6	0,985	3
1,2	0,582	40	3,7	0,987	2
1,3	0,619	37	3,8	0,990	3
1,4	0,655	36	3,9	0,991	1
1,5	0,688	33	4,0	0,993	2
1,6	0,719	31	4,1	0,994	1
1,7	0,748	29	4,2	0,995	1
1,8	0,775	27	4,3	0,996	1
1,9	0,800	25	4,4	0,997	1
2,0	0,823	23	4,5	0,998	1
2,1	0,843	20	4,6	0,998	0
2,2	0,862	19	4,7	0,998	0
2,3	0,879	17	4,8	0,999	1
2,4	0,895	16	4,9	0,999	0
2,5	0,908	13	5,0	0,999	0

上表ヨリ或ル誤差 a ヨリ大ナル誤差ノ或眞率ハ $1-\Theta(t)$ ヨリ得ラルベク, a ガ r ヨリ大ナル或眞率ハ

0,5, $2r$ ヨリ大ナルモノハ 0,177,$3r$ ヨリ大ナルモノハ 0,043,$4r$ ヨリ大ナルモノハ 0,007,$5r$ ヨリ大ナルモノハ 0,001,$6r$ ヨリ大ナルモノハ 0,0001 ナルヲ知ルベシ.

故ニ推差ヲ見出サントスルニハ先ヅ均方誤差ヲ見出シ,之ニ 0,6745 ヲ乘ズルヲ要ス. 推差ハ之ヨリ大ナル誤差出現ノ或眞率ガ之ヨリ小ナル誤差出現ノ或眞率ト相等シキガ如キモノニシテ,決シテ他ノ誤差ヨリモ一層眞ニ近キモノナリト云フニアラズ. 如何ナル單一誤差ノ中ニテ最モ眞ニ近キモノハ零ナリ. 卽チ誤差零ノ或眞率ト推差 r ノ比ハ

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}:\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2r^2}=1:e^{-(0,47694)^2}$$

$$=1:0,8$$

どもるがん (*De Morgan*) ハ推差ヲ**限差**ト呼ビ,くーるのー (*Cournot*) ハ之ヲ**央差**ト稱セリ.

396. 平均誤差. 單ナル觀測群ノ精度ヲ表ハスニ凡ベテノ誤差ノ符號ヲ去リテ單ニ其數値ノ平均ヲ取レル所ノ**平均誤差**ヲ以テスルコトアリ. 卽チ夫々凡テノ正號誤差及負號誤差ノ平均ヲ取レバ觀測回數ガ非常ニ多キトキハ兩種ノ誤差ハ同數ナルベク,更ニ符號ニ無頓着ニ兩平均ノ平均値ヲ取レルモノハ平均誤差ナリ. η ヲ以テ平均誤差ヲ表ハシ,$[\varepsilon$ ヲ以テ誤差ノ符號ヲ閑却シタル算術的和ヲ表ハセバ

$$\eta=\frac{[\varepsilon}{n} \qquad [437]$$

今 ε ト $\varepsilon+d\varepsilon$ ノ間ニ在ル誤差ノ數ハ $n\phi(\varepsilon)d\varepsilon$ ナルヲ以テ凡ベテノ觀測中ニ在ル正號誤差ノ和ハ $n\int_0^\infty \varepsilon\phi(\varepsilon)d\varepsilon$ ニシテ負號誤差ノ和ハ亦之ニ等シク,從テ凡ベテノ誤差ノ和ハ $2n\int_0^\infty \varepsilon\phi(\varepsilon)d\varepsilon$ ニ等シ. 故ニ

(1) $$\eta=2\int_0^\infty \varepsilon\phi(\varepsilon)d\varepsilon$$

或ハ
$$\eta=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=\frac{2h}{h^2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty te^{-t^2}dt$$
$$=\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \qquad [438]$$

又ハ
$$\eta=m\sqrt{\frac{2}{\pi}} \qquad [439]$$

平均誤差ハ異ナル觀測群ノ精度ヲ表ハス爲ニ用ヒラルヽコト前ニ述ベタルガ如シト雖モ一般ニ之ヲ以テ均方誤差及推差ヲ見出ス方便トスルモノ多シ.

397. 均方誤差,推差及平均誤差ノ關係. 前ニ述ベタルガ如ク

(1) $$\begin{cases} m=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\eta=1,2533\eta \\ r=0,6745m=0,8453\eta \end{cases}$$

或ハ $$m\sqrt{2}=\frac{r}{\rho}=\sqrt{\pi}\eta \qquad [440]$$

今是等ノ關係ヲ表示スレバ次ノ如シ

	m	r	η
m	1,0000	1,4826	1,2533
r	0,6745	1,0000	0,8453
η	0,7979	1,1829	1,0000

推差ハ均方誤差又ハ平均誤差ノ孰レヨリモ計算シ出スヲ得ルモ均方誤差ヨリ見出シタル推差ノ値ハ平均誤差ヨリ見出シタルモノヨリモ精密ナリ. 萬國度量衡委員會ハ推差ヲ用フルコトヲ推獎セリ. 然レドモ均方誤差ヲ用ヒツヽアル所モ少ナカラズ.

398. 或眞曲線又ハぷろばびりちーかーぶ. 一群ノ觀測ヲ行ヒタル場合ニεナル誤差ガεト$\varepsilon+d\varepsilon$ノ間ニ在ル或眞率ハ

$$(1) \qquad W=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon$$

ヲ以テ表ハスコトヲ得ベク,或眞率ハ高サ $\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}$ 隔$d\varepsilon$ナル矩形ヲ以テ表ハサルヽヲ得. 尙精密ニ之ヲ述ブレバ此矩形ト誤差ノ限界內ニ此等ノ矩形ノ和トノ比ヲ以テ或眞率ヲ表ハスコトヲ得. 此等ノ矩形ノ和ハ便宜上之ヲ1トスルコトヲ得.

故ニ一群ノ觀測ニ於テεニ$+\infty$ト$-\infty$トノ間ノ凡テノ値ヲ與ヘ夫々之ニ呼應シタル縱距ヲ描ケバ一個ノ連續シタル曲線ヲ得ベク,之ヲ名ケテ**或眞曲線**ト云フ. 或眞曲線ハ

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2} \qquad [441]$$

ヲ以テ表ハスコトヲ得.

[441]ニ於テεハ偶數冪ヲ以テyノ中ニ表ハルヽガ故ニ或眞曲線ハ縱軸ニ對シテ對稱ヲ爲シ,且ツ等式ノ形ハ此曲線ハ横軸卽チεノ軸ノ一側ニノミ在ルコトヲ示ス. 而シテ$\varepsilon=0$ナレバ$y=h/\sqrt{\pi}$ヲナス.

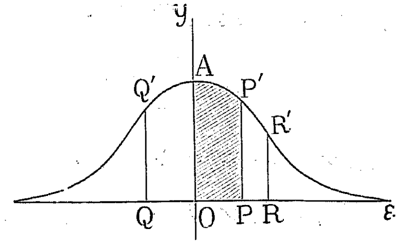
又 $\frac{dy}{d\varepsilon}=-\frac{2h^3\varepsilon}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}$ ニシテ之ニ $\varepsilon=0$ ヲ與フレバ $\frac{dy}{d\varepsilon}=0$ トナル. 卽チ曲線ノ頂點ニ於ケル切線ハ横軸ニ平行ナリ. 且又εガ增セバyハ減少シ,$\varepsilon=\pm\infty$トナレバ$y=0$トナリ,且ツ $\left|\frac{dy}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\pm\infty}=0$ ヲナス. 是レ横軸ガ此曲線ニ漸近線ヲ爲スコトヲ示ス.

更ニ又 $\frac{d^2y}{d\varepsilon^2}=\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}(2h^2\varepsilon^2-1)$ ニシテ $\varepsilon=\frac{1}{h\sqrt{2}}$ ノ横距ニ於テ轉曲點ヲ有ス. 而シテ此横距ハ方ニ均方誤差mニ等シ. 然ルニ$\varepsilon=0$ナレバ $\frac{d^2y}{d\varepsilon^2}$ ニ負號ヲナス. 卽チ曲線ノ頂點ニ於ケル縱距ハ最大ナリ.

或眞曲線[441]ノ縱距ハ $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ ト $e^{-h^2\varepsilon^2}$ トノ積ヨリ成リ,任意ノ縱距ニ於ケル横距ハ縱軸ニ於ケル最大

縱距 $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ ヲ一ノ因子トナス．故ニ $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ ヲ任意ニ假定シテ或眞曲線ヲ描クコトヲ得(第四百三十二圖).

第四百三十二圖



或眞曲線ト横軸トノ間ニ挾マレタル面積ハ前ニ述ベタルガ如ク $\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon$ ナル小サキ矩形ヲ $\varepsilon=+\infty$ ト $\varepsilon=-\infty$ ノ間ニ積算シタルモノニシテ其全面積ヲ1トスルコトヲ得. 即チ此全面積ハ一ノ觀測群ニ起ル誤差ノ全數ヲ表ハスモノニシテ二ノ任意ノ定限內ノ面積ハ亦此等ノ定限間ニ其觀測群ニ起ルベキ誤差ノ數ヲ表ハス. 例ヘバ第三百七十圖ニ於テ O ヲ基點トスレバ縱軸 Oy 上ノ最大縱距 OA ノ右ニアル面積ハ正號誤差ヲ表ハシ, OA ノ左ニアル面積ハ負號誤差ヲ表ハス. 故ニ面積 $OPP'A$ ハ OP ヨリ小ナル正號誤差ノ總數ヲ表ハシ,面積 $PRR'P'$ ハ OP ト OR ノ間ニ在ル正號誤差ノ總數ヲ表ハス. 又面積 $AOPP'$ ガ全正號面積 $AO\varepsilon$ ノ半分ニ等シカラバ OP ヨリ小ナル正號誤差ノ數ハ OP ヨリ大ナル正號誤差ノ數ニ等シカルベク, OP ハ即チ推差ニ相當ス. 又 $OQ=OP$ トセバ面積 $PQQ'P'$ ハ數字上推差ヨリ小ナル誤差ノ全數ヲ表ハス.

平均誤差 η ハ或眞曲線ノ正半又ハ負半ノ重心ノ横距ニ依テ表サルベシ.

399. 或眞曲線ノ面積. 一ノ觀測群ニ於テ a ヨリモ大ナラザル誤差出現ノ或眞率 W_a ハ

(1) $$W_a=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-a}^{+a}e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon$$

ニシテ方ニ定限 $+a$ ト $-a$ ノ間ニ在ル或眞曲線ノ面積ニ等シク,其定限ヲ $+\infty$ ト $-\infty$ ノ間ニ擴充シタル面積ハ即チ1ニ等シ.

$h\varepsilon=t$ トスレバ (1) ハ

(2) $$\begin{cases} W_a=\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-ha}^{+ha}e^{-t^2}dt \\ \quad =\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ha}e^{-t^2}dt \end{cases}$$

W_a ヲ通例 $\Theta(t)$ ヲ以テ表ハシ, $t=\rho$ ガ $\varepsilon=r$ ニ應ズルモノトセバ

(3) $$\Theta(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\rho\overline{r}}e^{-t^2}dt$$

是レ[436]ニ述ベタル所ナリ.

今

(4) $$\int e^{-t^2}dt=t-\frac{t^3}{3.1!}+\frac{t^5}{5.2!}-\ldots\ldots$$

ノ第 $n+1$ 項ト第 n 項ノ比ヲ作リ之ヲ q トスレバ

(5) $$\begin{cases} q=\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)\underline{|n}}\div\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)\underline{|n-1}} \\ \quad =\frac{2n-1}{2n+1}\,\frac{t^2}{n} \end{cases}$$

ニシテ n ガ非常ニ大ナレバ q ハ 1 ヨリ小ナリ. 從テ此級數ハ t ノ凡テノ値ニ對シテ收斂ス. 故ニ(2)及(4)ヨリ

$$\Theta(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{(ah)-\frac{(ah)^3}{3.1!}+\frac{(ah)^5}{5.2!}-\ldots\ldots\right\} \qquad [442]$$

例101. $ah=0{,}1$ ナルトキ $\Theta(t)$ ノ値ヲ求ム.

$$\Theta(t)=1{,}12838(0{,}1-0{,}000333+0{,}000001\ldots\ldots)$$

$$=0{,}112463$$

次表ハ ah ヲ引數トスル $\Theta(t)$ ノ値ヲ示ス.

第六十八表 $\Theta(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ha}e^{-t^2}dt$ ノ値.

ah	$\Theta(t)$	ah	$\Theta(t)$	ah	$\Theta(t)$
0,0	0,00000	1,3	0,93401	2.7	0,99987
0,1	0,11246	1,4	0,95229	2,8	0,99992
0,2	0,22270	1,5	0,96611	2,9	0,99996
0,3	0,32863	1,6	0,97635	3,0	0,9999779
0,4	0.42839	1,7	0,98375	3,1	0,9999884
0,47694	0,5	1,8	0,98909	3,2	0,9999940
0,5	0,52050	1,9	0.99279	3,3	0 9999969
0,6	0,60386	2,0	0,99532	3,4	0.9999985
0,7	0,67750	2,1	0,99702	3,5	0,9999992
0,8	0,74210	2,2	0,99814	3,6	0.9999996
0,9	0,79691	2,3	0,99886	3,7	0,9999998
1,0	0,84270	,4	0,99931	3,8	0,9999999
1,1	0,88020	2,5	0,99959	∞	1,0
1,2	0,91031	2,6	0,99976		

$h=\frac{\rho}{r}$ ナルガ故ニ $\rho\frac{a}{r}$ ハ卽チ ah ニ等シ. 從テ第六十

七表ト第六十八表トハ唯引數ヲ $\frac{a}{r}$ トセルト ah トセルトノ差アルノミ.

400. 最モ眞ニ近キ觀測ノ値. 之ヲ要スルニ $\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}$ ハ任意ノ與ヘラレタル觀測群ニ於ケル誤差ノ法則ヲ眞ニ表ハスモノナリヤ否ヤハ之ヲ斷言スルコト能ハザレドモ少クモ之ニ近キモノタルヤ論ナシ.

今觀測群ニ於テ力ヲ盡シテ更正ヲ見出シ之ヲ觀測ノ値ニ施スモ尙多クノ方面ヨリ來ル誤差ノ殘存スルヲ否ムベカラズ. 而シテ如上ノ硏究ニ依レバ誤差ノ指數法則ガ最モ良ク殘差ノ間ニ適用シ得テ觀測ニ應用シ得ルモノヽ如シ.

卽チ或量ヲ觀測シテ得タル若干ノ値ガ異ナル性質ノモノナランニハ最モ眞ニ近キ値ハ各殘差ヲ推差ニテ除シ其積ノ自乘ノ和ヲ最小ナラシムルコトニ依リテ得ラルベク,若シ同一ノ性質ノモノナランニハ最モ眞ニ近キ値ハ觀測シタル値ノ平均ニ等シ.

401. 觀測ノ種類. 觀測ハ獨立シテ毫モ環境ノ條件ニ拘束セラレズ唯觀測自身ニ定マレル條件ヲ有スルモノト,外圍ノ條件ニ束縛セラレ兼テ觀測ニ依リテ定マレル條件ノ下ニ拘束セラルモノヽ二種アリ. 例ヘバ測點 O ニ於テ角 AOB 及角 AOC ヲ測

定スルモノトス. 若シ各角ガ他ノ角ニ無關係ナラバ二角ハ直接ニ之ヲ見出スヲ得ベシ. 又若シ$\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC$ナル關係ヨリ角$BOC$ヲ定メント欲セバ此場合ニハ間接ニ未知角ヲ觀測スルモノナリ. 故ニ**獨立觀測ハ直接ト間接ノ二ニ分類スルコトヲ得ベシ.**

然レドモ若シ角BOCヲ直接ニ觀測シ且ツ角AOB及角AOCモ亦同時ニ直接ニ觀測セラルヽトキハ此等ノ角ハ最早獨立セルモノニアラズシテ$\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC$ナル條件ヲ滿足セシメザルベカラズ. 從テ此條件ヲ精密ニ滿足セシメザル三角ハ之ヲ眞ノ値トスルコト能ハズ. 斯カル場合ノ觀測ヲ名ケテ**條件附**ト云フ. 故ニ觀測ヲ三種ニ分チテ其調整ヲ論ズルコトヲ得.

第一. 一個ノ未知量ノ直接觀測.

第二. 數個ノ獨立未知量ノ間接觀測.

第三. 條件附觀測.

第三節 直接觀測セラレタル一個未知量ノ調整.

402. **簡單ナル平均及檢算.** 直接ニ觀測シタル値$l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$ガ相等シキ性質ノモノナランニハ其最モ眞ニ近キ値ハ其平均トス. 即チ[422]ニ示セルガ如ク

$$(1)\qquad x_0=\frac{[l]}{n}$$

又369ニ示セル如ク殘差ノ自乘ノ和ヲ最小ナラシメテ同ジク(1)ノ結果ヲ得ベシ. 即チ

$$(2)\qquad v=x_0-l$$

及

$$(3)\qquad [v]=0$$

時トシテ觀測ノ値lハ數値上大ニシテ而カモ著シク異ナラザルコトアリ. 斯カル場合ニハx_0ノ近似値ヲ見出シテ之ヲx'_0トシ, x'_0ト各觀測ノ値ヲ夫々vトセバ

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} x'_0-l_1=v'_1 \\ x'_0-l_2=v'_2 \\ \cdots\cdots\ \cdots \\ x'_0-l_n=v'_n \\ \hline nx'_0-[l]=[v'] \end{array}\right.$$

又ハ

$$(5)\qquad x'_0-\frac{[l]}{n}=\frac{[v']}{n}$$

或ハ$\frac{[l]}{n}=x_0$ナルガ故ニ

$$x_0=x'_0-\frac{[v']}{n} \qquad [443]$$

卽チ小ナル量v'ノ平均ヲ見出シ,之ヲ假定ノ平均量ヨリ減ズルトキハ眞ノ平均ヲ得ベシ.

最小自乘法ノ計算ハ屢々複雜ナルヲ以テ異ナル人ニテ計算シ其結果ヲ比較スルヲ便トスルノミナラズ,其途中ノ計算ニモ異ナル計算ヲ用ヒテ時々相互ノ成算ヲ照合スベシ. 然レドモ尙ホ誤謬ヲ見出スコト稀ナラザルガ故ニ全ク獨立シタル方法ニ依リテ檢算ヲ行フヲ必要トス.

同一量ヲ觀測シタル一群ノ値ニ就テハ(3)式ニ示セル關係ヲ以テ檢算ヲ行フモノトス. 換言スレバ正號殘差ノ和ハ負號殘差ノ和ニ等シ. 但シ觀測シタル値ガnニテ整除スルコト能ハザルガ爲メ切捨テ又ハ切揚ゲザルベカラズ. 從テ正負殘差ノ和ガ必ズシモ精密ニ相等シカラザルコトアリ. 然レドモ其不合ノ量ハ之ヲ推定スルコト容易ナリ. 卽チ精密ナル平均ト近似値ノ平均トノ差ヲn倍シタルモノガ此不合ノ量ニ殆ド等シカルベシ.

今平均ノ値ガ或小數位迄正シトスレバ次ノ小數位ノ5ヨリハ多ク誤差ヲ爲サズ. 從テ觀測ノ數ガnナリトセバ正號殘差ト負號殘差トノ差ハ$n\times$(次ノ小數位ノ5)ヨリ小ナリ. 卽チ小數第二位マデ正シトスレバ正負殘差間ノ差ハ$(0{,}005\times n)$ヨリ小ナルベシ. 例ヘバ21回ノ恒星時觀測ニ於テ平均ノ値ガ$-8^s{,}74$ニシテ第二位迄正シトシ,正號殘差ノ和ガ$+1^s{,}03$負號殘差ノ和ガ$-0^s{,}99$トスレバ其和ハ$[v=2^s{,}02$ニシテ其差$1{,}03-0{,}99=0{,}04$ハ$0{,}005\times 21=0^s\,105$ヨリ小ナリ.

403. 平均ノ精度. 未知量ノ最モ眞ニ近キ値ニ信賴スベキ程度ハ其推差ヲ以テ之ヲ示スコトヲ得ベシ. 直接ニ觀測シテ得タル値$l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$ニ於テ$x_0$ヲ最モ眞ニ近キ値或ハ平均トスレバ381 (1)ヨリ

$$(1)\qquad x_0=\frac{1}{n}l_1+\frac{1}{n}l_2+\ldots\ldots+\frac{1}{n}l_n$$

mヲ$l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$ノ均方誤差トスレバ$x_0$ノ均方誤差$M$ハ

$$(2)\qquad M=m\sqrt{n\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{m}{\sqrt{n}}$$

ナリ. 今若シ眞ノ値ヲX,眞ノ誤差ヲε,殘差ヲトスレバ勿論$\varepsilon=X-l$, $v=x_0-l$ナルガ故ニ

$$(3)\qquad \varepsilon=v+(X-x_0)$$

(3)ノ兩節ヲ自乘スレバ

$$(4)\qquad \varepsilon^2=v^2+(X-x_0)^2+2v(X-x_0)$$

トナリ,各ノ和ヲ取レバ$[v]=0$ナルガ故ニ

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}[\varepsilon^2]&=[v^2]+n(X-x_0)^2+2[v](X-x_0)\\&=[v^2]+n(X-x_0)^2\end{aligned}\right.$$

此ニ $(X-x_0)$ ノ値ハ之ヲ知ルコト能ハザレドモ其近似値トシテ平均ノ均方誤差ヲ用フルコトヲ得ベク, $X-x_0=M=\frac{m}{\sqrt{n}}$ 從テ $(X-x_0)^2=\frac{m^2}{n}$ ナルヲ以テ (5) ヨリ

$$(6) \qquad [\varepsilon^2]=[v^2]+m^2$$

然ルニ $\frac{[\varepsilon^2]}{n}=m^2$ ナルヲ以テ (6) ヨリ

$$m=\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \qquad [444]$$

m ハ前ニ述ベタルガ如ク個々ノ觀測ニ對スル均方誤差ナリ. 從テ平均ノ均方誤差ハ

$$M=\sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} \qquad [445]$$

之ヲべっせる (*Bessel*) ノ公式ト云フ.

r ヲ一個ノ觀測ノ推差, r_0 ヲ平均ノ推差トスレバ

$$r=0{,}6745\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \qquad [446]$$

及

$$r_0=0{,}6745\sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} \qquad [447]$$

次表ハべっせるノ推差公式ノ係數 $\frac{0{,}6745}{\sqrt{n-1}}$ 及 $\frac{0{,}6745}{\sqrt{n(n-1)}}$ ヲ示セルモノナリ.

第六十九表 べっせるノ推差公式ノ係數

n	$\frac{0{,}6745}{\sqrt{n-1}}$	$\frac{0{,}6745}{\sqrt{n(n-1)}}$	n	$\frac{0{,}6745}{\sqrt{n-1}}$	$\frac{0{,}6745}{\sqrt{n(n-1)}}$
…	… …	… …	40	0,1080	0,0171
…	… …	… …	41	,1066	0,0167
2	0,6745	0,4769	42	,1055	0,0163
3	,4769	,2754	43	,1041	0,0159
4	,3894	,1947	44	,1029	0,0155
5	0,3372	0,1508	45	0,1017	0,0152
6	,3016	,1231	46	,1005	,0148
7	,2754	,1041	47	,0994	,0145
8	,2549	,0901	48	,0984	,0142
9	,2385	,0795	49	,0974	,0139
10	0,2248	0,0711	50	0,0964	0,0136
11	,2133	,0643	51	,0954	,0134
12	,2029	,0587	52	,0944	,0131
13	,1947	,0540	53	,0935	,0128
14	.1871	,0500	54	,0926	,0126
15	0,1803	0,0465	55	0,0918	0,0124
16	,1742	,0435	56	,0909	,0122
17	,1686	,0409	57	,0901	,0119
18	,1636	,0386	58	,0893	,0117
19	,1590	,0365	59	,0886	,0115
20	0,1547	0,0346	60	0,0878	0,0113
21	,1508	,0329	61	,0871	,0111
22	,1472	,0314	62	,0864	,0110
23	,1438	,0300	63	,0857	,0108
24	,1406	,0287	64	,0850	,0106
25	0,1377	0,0275	65	0,0843	0,0105
26	,1349	,0265	66	,0837	,0103
27	,1323	,0255	67	,0830	,0101
28	,1298	,0245	68	,0824	,0100
29	,1275	,0237	69	,0818	,0098
30	0,1252	0,0229	70	0,0812	0,0097
31	,1231	,0221	71	,0806	,0096
32	,1211	,0214	72	,0800	,0094
33	,1192	,0208	73	,0795	,0093
34	,1174	,0201	74	,0789	,0092
35	0,1157	0,0196	75	0,0784	0,0091
36	,1140	,0190	80	,0759	,0085
37	,1124	,0185	85	,0736	,0080
38	,1109	,0180	90	,0713	,0075
39	,1094	,0175	100	,0678	,0068

例102. 一ノ角ヲ觀測シテ次ノ結果ヲ得タリ。

Nr	l	v		vv
1	35°26′16″	+2″,8		7,84
2	20		−1″,2	1,44
3	18	+0 ,8		0,64
4	25		−6 ,2	38,44
5	15	+3 ,8		14,44
和	94	+7 ,4	−7 4	62,80

平均 35°26′18″,8

從テ

$$m=\sqrt{\frac{62,80}{5-1}}=\pm3'',96$$

$$M=\frac{3,96}{\sqrt{5}}=\pm1'',77$$

故ニ

$$x_0=35°26'18''.8\pm1''8$$

若シ推差ヲ用フレバ第六十九表ヨリ係數ヲ見出シ

$$r_0=0,1508\times\sqrt{62,80}=\pm1'',19$$

故ニ

$$x_0=35°26'18'',8\pm1'',2$$

然ルニ $[v^2]$ ヲ作ルハ時トシテ頗ル複雜ナルガ故ニ殘差ノ代數和ヨリ近似的ノ推差ヲ求ムルヲ便トスルコトアリ。即チ

$$(7)\qquad [v^2]=\frac{n-1}{n}[\varepsilon^2]$$

ヨリ近似的ニ

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} v_1&=\sqrt{\frac{n-1}{n}}\varepsilon_1\\ v_2&=\sqrt{\frac{n-1}{n}}\varepsilon_2\\ &\cdots\cdots\\ v_n&=\sqrt{\frac{n-1}{n}}\varepsilon_n \end{aligned}\right.$$

兩節ヲ夫々加ヘテ之ヲ n 除スレバ

$$(9)\qquad \frac{[v}{n}=\sqrt{\frac{n-1}{n}}\eta$$

$[v$ ハ符號ヲ顧ミズ殘差ノ和ヲ取リタルモノナリ。

然ルニ $m=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\eta$ ([439] 參照) ナルヲ以テ

$$\left.\begin{aligned} m&=\sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}}[v\\ &=\frac{1,2533}{\sqrt{n(n-1)}}[v \end{aligned}\right\}\qquad [448]$$

又ハ推差ヲ取レバ $r=\rho\sqrt{2}m$ ニシテ

$$r=\frac{0\ 8453}{\sqrt{n(n-1)}}[v\qquad [449]$$

及

$$r_0=\frac{0,8453}{n\sqrt{n-1}}[v\qquad [450]$$

又ヲペーたー (*Peter*) ノ公式ト云フ。

次表ハペーたーノ推差公式ノ係數ヲ示セルモノナリ。

第七十表　ぺーたーノ推差公式ノ係數

n	$\frac{,8453}{\sqrt{n(n-1)}}$	$\frac{,8453}{n\sqrt{n-1}}$	n	$\frac{,8453}{\sqrt{n(n-1)}}$	$\frac{,8453}{n\sqrt{n-1}}$
...	... ...	... ..	40	0,0214	0,0034
...	... ...	..	41	,0209	,0033
2	0,5978	0,4227	42	,0204	,0031
3	,3451	,1993	43	,0199	,0030
4	,2440	,1220	44	,0194	,0029
5	0,1890	0,0845	45	0,0190	0,0028
6	,1543	,0630	46	,0186	,0027
7	,1304	,0493	47	,0182	,0027
8	,1130	,0399	48	,0178	,0026
9	,0996	,0332	49	,0174	,0025
10	0,0891	0,0282	50	0,0171	0,0024
11	,0806	,0243	51	,0167	,0023
12	,0736	,0212	52	,0164	,0023
13	,0677	,0188	53	,0161	,0022
14	,0627	,0167	54	,0158	,0022
15	0,0583	0,0151	55	0,0155	0,0021
16	,0546	,0136	56	,0152	,0020
17	,0513	,0124	57	,0150	.0020
18	,0483	,0114	58	,0147	,0019
19	,0457	,0105	59	,0145	,0019
20	0,0434	0,0097	60	0,0142	0,0018
21	,0412	,0090	61	,0140	,0018
22	,0393	,0084	62	,0137	,0017
23	,0376	,0078	63	,0135	,0017
24	,0360	,0073	64	,0133	,0017
25	0,0345	0,0069	65	0,0131	0,0016
26	,0332	,0065	66	,0129	,0016
27	,0319	,0061	67	,0127	,0016
28	,0307	,0058	68	,0125	,0015
29	,0297	,0055	69	,0123	,0015
30	0,0287	0,0052	70	0,0122	0,0015
31	,0277	.0050	71	,0120	,0014
32	,0268	,0047	72	.0118	,0014
33	,0260	,0045	73	,0117	,0014
34	,0252	,0043	74	,0115	,0013
35	0,0245	0,0041	75	0,0113	0,0013
36	,0238	,0040	80	,0106	,0012
37	,0232	,0038	85	,0100	,0011
38	,0225	,0037	90	,0095	,0010
39	,0220	,0035	100	,0085	,0008

例103. 例69ニ於テ $[v]=14,4$ ニシテ

$$r_0=0,0845\times14,4=\pm1'',22$$

ヲ得ベシ.

404. 異ナル性質ノ觀測値. 一ノ量ヲ直接觀測シテ得タル量 $l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$ ガ異ナル性質ノモノナランニハ其最モ眞ニ近キ値ハ各殘差ニ推差ノ反數ヲ乘ジ其ノ積ノ自乘ノ和ヲ最小ナラシムルコトニ依リテ得ラルベシ. 卽チ普通ノ記號ヲ用フレバ

$$(1)\qquad \left(\frac{v_1}{r_1}\right)^2+\left(\frac{v_2}{r_2}\right)^2+\ldots\ldots+\left(\frac{v_n}{r_n}\right)^2=\text{最小}$$

又ハ x_0 ヲ最モ眞ニ近キ値トスレバ

$$(2)\qquad \left(\frac{x_0-l_1}{r_1}\right)^2+\left(\frac{x_0-l_2}{r_2}\right)^2+\ldots\ldots+\left(\frac{x_0-l_n}{r_n}\right)^2=\text{最小}$$

(2) ヲ微分シテ之ヲ變化スレバ

$$x_0=\left[\frac{l}{r^2}\right]\div\left[\frac{1}{r^2}\right] \qquad [451]$$

卽チ一ノ量ノ觀測セラレタル値ガ異ナル性質ノモノナランニハ其最モ眞ニ近キ値ハ各觀測ノ値ニ其推差ノ自乘ノ反數ヲ乘ジテ其積ノ和ヲ作リ,推差ノ自乘ノ反數ヲ作リ其和ヲ以テ前者ヲ除シタルモノニ等シ.

更ニ又 $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ ヲ夫々 $\frac{1}{r_1^2}, \frac{1}{r_2^2}, \ldots\ldots \frac{1}{r_n^2}$ ノ數値トスレバ一般ニ

(3) $$p=\frac{(\text{單位})^2}{r^2}$$

ニシテ，[451] ハ

$$x_0=\frac{p_1l_1+p_2l_2+\cdots\cdots+p_nl_n}{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n}=\frac{[pl]}{[p]} \qquad [452]$$

x_0 ノ分母及分子ニハ共ニ $\frac{1}{r_1^2}$, $\frac{1}{r_2^2}$, ……$\frac{1}{r_n^2}$ ヲ含ムヲ以テ p_1, p_2, ……p_n ヲ $\frac{1}{r_1^2}$, $\frac{1}{r_2^2}$, ……$\frac{1}{r_n^2}$ ニ比例シタル數トシ

$$p_1=\frac{r^2}{r_1^2},\ p_2=\frac{r^2}{r_2^2},\ \cdots\cdots,\ p_n=\frac{r^2}{r_n^2} \qquad [453]$$

此ニ r ハ任意ニ假定シタル單位輕重率又ハ重ミノ單位ニ應ジタル推差ノ値トス．p_1, p_2, ……p_n ヲ名ケテ**輕重率**ト云ヒ，x_0 ヲ**總平均**又ハ**輕重平均**ト云フ．

一回ノ觀測ニ對スル推差ト n 回觀測ノ平均ノ推差トヲ比較スレバ $\sqrt{n}$ ト 1 ノ比ヲ爲ス．換言スレバ相等シキ精度又ハ相等シキ輕重率ノ觀測ニ對シテ此等二ノ推差ハ $\sqrt{n}:1$ ノ比ヲ爲ス．故ニ之ヲ(4)ニ對比スレバ一回ノ觀測ニ於ケル p_1 ナル輕重率トハ單位輕重率ノ p_1 個ノ觀測ノ平均ト同一ノ精度ヲ有スルヲ云フ．

觀測ノ値 l ガ數値上甚ダ大ナルトキハ [443] ニ述ベタルガ如ク，x'_0 ヲ近似値トシ

$$x_0=x'_0+\frac{[pv']}{[p]} \qquad [454]$$

ヨリ眞ノ總平均ヲ見出スコトヲ得．[453] ヨリ

(4) $$r_1=\frac{r}{\sqrt{p_1}},\ r_2=\frac{r}{\sqrt{p_2}},\ \cdots\cdots,\ r_n=\frac{r}{\sqrt{p_n}}$$

r_1, r_2, ……r_n ハ l_1, l_2, ……l_n ノ推差ニシテ $l_1\sqrt{p_1}$, $l_2\sqrt{p_2}$, ……$l_n\sqrt{p_n}$ ノ推差ハ各 r ニ等シカルベシ．故ニ觀測シタル値 l_1, l_2, ……l_n ノ輕重率ガ夫々 p_1, p_2, ……p_n ナルトキハ觀測ノ値ニ夫々 $\sqrt{p_1}$, $\sqrt{p_2}$, ……$\sqrt{p_n}$ ヲ乘ズルトキハ同一標準ニ歸セシムルヲ得．例ヘバ

(5) $$\begin{cases} x-l_1=v_1 & \text{輕重率 } p_1 \\ x-l_2=v_2 & \cdots\cdots\cdots\ p_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ x-l_n=v_n & \cdots\cdots\cdots\ p_n \end{cases}$$

同一ノ標準輕重率ニ歸セシムル爲メ，$\sqrt{p}$ ヲ乘ズレバ

(6) $$\begin{cases} \sqrt{p_1}x-\sqrt{p_1}l_1=\sqrt{p_1}v_1 \\ \sqrt{p_2}x-\sqrt{p_2}l_2=\sqrt{p_2}v_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sqrt{p_n}x-\sqrt{p_n}l_n=\sqrt{p_n}v_n \end{cases}$$

x ノ最モ眞ニ近キ値ハ

(7) $$(\sqrt{p_1}v_1)^2+(\sqrt{p_2}v_2)^2+\cdots\cdots+(\sqrt{p_n}v_n)^2=\text{最小}$$

トナラシムルトキハ之ヲ見出スコトヲ得．或ハ

(8) $$(\sqrt{p_1}x-\sqrt{p_1}l_1)^2+(\sqrt{p_2}x-\sqrt{p_2}l_2)^2+\cdots\cdots$$
$$+(\sqrt{p_n}x-\sqrt{p_n}l_n)^2=\text{最小}$$

微分ニ依リテ x ノ最モ眞ニ近キ値ヲ x_0 トスレバ

(9)　$$x_0=\frac{[pl]}{[p]}$$

是レ卽チ [452] ニ見出シタルモノナリ.

405. 總平均ノ檢算. x_0 ヲ相異ナル性質ノ n 回ノ觀測ニ於ケル最モ眞ニ近キ値トスレバ

(1)　$$\begin{cases} x_0-l_1=v_1 & \text{輕重率 } p_1 \\ x_0-l_2=v_2 & \cdots\cdots\cdots\ p_2 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ x_0-l_n=v_n & \cdots\cdots\cdots\ p_n \end{cases}$$

(1)ノ兩節ニ夫々其輕重率ヲ乘ジテ之ヲ節々相加フレバ

(2)　$$x_0[p]-[pl]=[pv]$$

然ルニ $x_0=\frac{[pl]}{[p]}$ ナルヲ以テ

$$[pv]=0 \qquad [455]$$

此レ總平均ノ檢算ニ用ヒラルヽ等式ナリ.

例104. 光速ノ測定ハふぃぞう (*Fizeau*) 及其他ノ人ニ依リテ行ハレ次ノ結果ヲ得タリ.

番號	光速(每秒)	輕重率
1	298,000 粁±1000 粁	1
2	298,500 〃 ±1000 〃	1
3	299,990 〃 ± 200 〃	25
4	300,100 〃 ±1000 〃	1
5	299,930 〃 ±100 〃	100

最モ眞ニ近キ光速ヲ求ム.

輕重率ハ推差ノ自乘ニ反比スルヲ以テ前ノ5種ノ觀測ニ於テ夫々 1, 1, 25, 1, 100 トスルコトヲ得.

今光速ノ近似値ヲ $x'_0=299,000$ 粁トスレバ

v'	p	pv'
粁 +1,000	1	+ 1,000
+ 500	1	+ 500
− 990	25	− 24,750
−1,100	1	− 1,100
− 930	100	− 93,000
和	128	−117,350

$$\frac{[pv']}{[p]}=\frac{-(-117,350)}{128}=+917$$

從テ總平均＝299,917 粁ナリ.

406. 總平均ノ精度. 總平均 x_0 ハ單位輕重率ノ $[p]$個ノ觀測ヨリ作リタル平均ナルヲ以テ其ノ輕重率ハ卽 $[p]$ ナリ. 故ニ x_0 ノ推差ヲ r_0 トスレバ

(1)　$$r_0^2=\frac{r^2}{[p]}$$

此ニ r ハ單位輕重率ノ一個觀測ノ推差ナリトス.

同一輕重率ノ觀測ニ對スル等式中 $v_1, v_2, \ldots\ldots$ ノ代リニ $\sqrt{p_1}v_1, \sqrt{p_2}v_2, \ldots\ldots$ 等ヲ用フレバべっせるノ公式ヨリ([446] 參照).

$$r=0{,}6745\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} \qquad [456]$$

ぺーたーノ公式ヨリ([332] 參照).

$$r=0{,}8453\frac{[\sqrt{p}\,v]}{\sqrt{n(n-1)}} \qquad [457]$$

或ハ總平均ノ推差 r_0 ニ就テハ

$$r_0=0{,}6745\sqrt{\frac{[pv^2]}{[p](n-1)}} \qquad [458]$$

又ハ

$$r_0=0{,}8453\frac{[\sqrt{p}\,v]}{\sqrt{[p]n(n-1)}} \qquad [459]$$

或ハ又總平均 x_0 ヲ次ノ如ク表ハスコトヲ得ベク

$$(2) \qquad x_0=\frac{p_1}{[p]}l_1+\frac{p_2}{[p]}l_2+\ldots\ldots+\frac{p_n}{[p]}l_n$$

m ヲ單位輕重率ノ均方誤差トスレバ $l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$ ノ均方誤差ハ夫々 $\frac{m}{\sqrt{p_1}}, \frac{m}{\sqrt{p_2}}, \ldots\ldots\frac{m}{\sqrt{p_n}}$ ナルガ故ニ x_0 ノ均方誤差ヲ M トスレバ

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} M^2&=\left(\frac{p_1}{[p]}\,\frac{m}{\sqrt{p_1}}\right)^2+\left(\frac{p_2}{[p]}\,\frac{m}{\sqrt{p_2}}\right)^2+\ldots\ldots \\ &=\frac{m^2}{[p]}\end{aligned}\right.$$

故ニ

$$(4) \qquad M=\frac{m}{\sqrt{[p]}}$$

輕重率	殘差	輕重率	更正殘差
p_1	v_1	1	$v_1\sqrt{p_1}$
p_2	v_2	1	$v_2\sqrt{p_2}$
…	…	…	……

從テ n 回ノ觀測ニ於ケル均方誤差 m ハ

$$(5) \qquad m^2=\frac{(v_1\sqrt{p_1})^2+(v_2\sqrt{p_2})^2+\ldots\ldots}{n-1}=\frac{[pv^2]}{n-1}$$

又ハ

$$m=\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} \qquad [460]$$

ニシテ

$$M=\sqrt{\frac{[pv^2]}{[p](n-1)}} \qquad [461]$$

[460] 及 [461] ヨリ [456] 及 [458] ヲ見出スコトヲ得.

例105. 高サノ既ニ知ラレタル六ノ測點 A, B, C, D, E 及 F ヨリ一點 P ヲ觀測シテ竪角ヲ測リ三角準測ニ依リテ P ノ高サヲ定メタリ. 而シテ各點ヨリ P ニ至ル距離ハ亦知ラルヽモノトス. P 點ノ最モ眞ニ近キ高サヲ求ム.

測點	距離 s (P ニ至ル)	高サ (水準基面上)	P點トノ高サノ差	P點ノ高サ
A	2010	1043,64	−314,73	728,91
B	8903	619,02	+109,20	728,22
C	5820	480,81	+248,24	729,05

測點	距離 s (Pニ至ル)	高サ (水準基面上)	P點トノ高サノ差	P點ノ高サ
D	3002米	1247,01米	−518,43米	728,58
E	6197	928,18	−199,16	729,02
F	5800	418,71	+310,13	728,84

三角準測ノ性質ヨリ高サノ差 (h) ニ起ル誤差ハ距離 (s) ニ比例スルヲ以テ輕重率ハ s ノ自乘ニ反比ス. 今長サノ單位ニ粁ヲ用フルトキハ距離 s 及輕重率 p ハ次ノ如シ.

測點	A	B	C	D	E	F
s (粁)	2,0	8,9	5,8	3 0	6,2	5,8
輕重率 $p=\frac{1}{s^2}$	0,25	0,01	0,03	0,11	0,03	0,03

v'	p	pv'	$v=0,83-v'$	v^2	pv^2
728+0,91	0,25	0,2275	−0,08	0,0064	0,0016
+0,22	0,01	0,0022	+0,61	0,3721	0,0037
+1,05	0,03	0,0315	−0,22	0,0484	0,0015
+0,58	0,11	0,0638	+0,25	0,0625	0,0070
+1,02	0,03	0,0306	−0,19	0,0361	0,0011
+0,84	0,03	0,0252	−0,01	0,0001	0,0000
和	0,46	0,3803			0,0149

$$\frac{[pv']}{[p]}=\frac{0,3803}{0,46}=0,83$$

$$m=\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}=\sqrt{\frac{0,0149}{5}}=\pm\overset{m}{0,}055$$

$$M=\frac{m}{\sqrt{[p]}}=\frac{0,055}{\sqrt{0,46}}=\pm\overset{m}{0,}080$$

故ニ P 點ノ最モ眞ニ近キ高サ H ハ

$$H=728+0,83=7\;8,\overset{米}{83}$$

ニシテ其ノ推差ハ ±0,080×0,6745=±0,054 米ナリ.

407. 觀測セラレタル値ガ未知量ノ倍數ナル場合. 觀測ニ依リテ見出サレタル値 $l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$ ガ同一ノ未知量 x ノ倍數ニシテ $a_1x, a_2x \ldots\ldots, a_nx$ ナル形ヲ爲シ,此ニ $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ ハ各觀測ニ於テ理論上知ラレタル定數トス. 斯カル場合ニハ $\frac{l_1}{a_1}, \frac{l_2}{a_2}, \ldots\ldots \frac{l_n}{a_n}$ ヲ直接ニ觀測シタル不同輕重率ノ x ノ値ト考ヘ,r ヲ一回觀測ノ推差卽チ $l_1, l_2, \ldots\ldots$ ノ推差トスレバ $\frac{l_1}{a_1}, \frac{l_2}{a_2}, \ldots\ldots$ ノ推差ハ夫々 $\frac{r}{a_1}, \frac{r}{a_2}, \ldots\ldots$ ニシテ是等假想觀測ノ輕重率ハ $a_1^2, a_2^2, \ldots\ldots$ ニ比例スベシ. 故ニ總平均 x_0 ハ [335] ヨリ

$$x_0=\frac{\frac{l_1}{a_1}a_1^2+\frac{l_2}{a_2}a_2^2+\ldots\ldots+\frac{l_n}{a_n}a_n^2}{a_1^2+a_2^2+\ldots\ldots+a_n^2}$$

又ハ

$$x_0=\frac{[al]}{[a^2]} \qquad [462]$$

$[a^2]$ ハ x_0 ノ輕重率ナルガ故ニ r_x^2 ヲ x_0 ノ推差トスレバ

$$r_s^2=\frac{r^2}{[a^2]} \qquad [463]$$

ナリ.

408. 獨立シテ觀測セラレタル量ノ一次函數ノ推差. n 個ノ獨立シテ觀測セラレタル量 $l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$ アリテ其均方誤差ヲ夫々 $m_1, m_2, \ldots\ldots m_n$ トシ

$$F=a_1l_1+a_2l_2+\ldots\ldots+a_nl_n$$

ノ推差ヲ求ム. 茲ニ $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ ハ常數トス.

h ヲ精度, r ヲ推差トセバ一般ニ [434] ヨリ $rh=\rho$ ハ定數ナルガ故ニ, r_F^2 ヲ F ノ推差トセバ [429] ヨリ

$$r_F^2=[a^2r^2] \qquad [464]$$

409. 一般函數ノ推差. 一ノ函數 F ガ獨立ニ觀測セラレタル量 $l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$ ノ一次ノ形ヲ爲サズシテ

(1) $F=f(l_1, l_2, \ldots\ldots l_n)$

ナル形ヲ爲ストキハ

(2) $\frac{\partial f}{\partial l_1}=a_1, \frac{\partial f}{\partial l_2}=a_2, \ldots\ldots \frac{\partial f}{\partial l_n}=a_n$

トスレバ [313] ヨリ F ノ推差 r_F ハ

$$r_F^2=a_1^2r_1^2+a_2^2r_2^2+\ldots\ldots+a_n^2r_n^2=[a^2r^2] \qquad [465]$$

ナリ.

例 106. 一ノ三角形 ABC ノ底 b 及角 A 並ニ B ノ推差ヲ夫々 r_b, r_A, r_B トスレバ他ノ邊 a ノ推差 r_a ヲ求ム. (例 66 參照).

此ニ

(1) $a=b\frac{\sin A}{\sin B}$

ニシテ其對數ヲ取レバ

(2) $\log a=\log b+\log\sin A-\log\sin B$

(2) ヲ微分スレバ

(3) $\frac{da}{a}=\frac{db}{b}+\cot A\sin 1''dA-\cot B\sin 1''dB$

又ハ

(4) $da=\frac{a}{b}db+a\cot A\sin 1''dA-a\cot B\sin 1''dB$

a, b, A, B ノ推差ヲ夫々 $r_a^2, r_b^2, r_A^2, r_B^2$ トスレバ

(5) $r_a^2=\frac{a^2}{b^2}r_b^2+a^2\cot^2A\sin^2 1''r_A^2+a^2\cot^2B\sin^2 1''r_B^2$

若シ $r_A=r_B=r$ 及 $r_b=0$ トセバ

(6) $r_a=a\sin 1''r\sqrt{\cot^2A+\cot^2B}$

又 δ_a 及 δ_b ヲ對數表 a 及 b ノ表差卽チ一單位ニ對スル差トシ, δ_A 及 δ_B ヲ對數正弦ノ角 A 及 B ノ $1''$ ニ對スル表差トセバ (2) ヲ微分シテ

(7) $\delta_a da=\delta_b db+\delta_A dA-\delta_B dB$

從テ

(8) $r_a^2=\left(\frac{\delta_b}{\delta_a}\right)^2r_b^2+\left(\frac{\delta_A}{\delta_a}\right)^2r_A^2+\left(\frac{\delta_B}{\delta_a}\right)^2r_B^2$

(5) 及 (8) ハ互ニ檢算ニ用フルコトヲ得.

410. 二重觀測又ハ觀測差. 一ノ測定ヲ二回反覆

シテ行フコトアリ．例ヘバ一ノ長サヲ往復二回測定スルガ如キ，又ハ一ノ水準測量ヲ往復反覆スルガ如キ即チ是ナリ．斯カル場合ニハ平均ノ規則ヲ適用スルコトヲ得ベシ．今 l_1 及 l_2 ヲ二ノ測定，$l_1-l_2=d$ トセバ其平均ハ言フマデモナク $x=\frac{l_1+l_2}{2}$ ナリ．而シテ其殘差ヲ v_1 及 v_2 トスレバ

$$(1)\qquad \begin{cases} v_1=x-l_1=-\dfrac{d}{2} \\ v_2=x-l_2=+\dfrac{d}{2} \end{cases}$$

故ニ一回觀測ノ均方誤差 m ハ $n=2$ ニシテ

$$(2)\qquad m=\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}=\sqrt{\frac{d^2}{4}+\frac{d^2}{4}}=\frac{d}{\sqrt{2}}$$

即チ m ニ應ズル推差ヲ r トスレバ

$$\left.\begin{aligned} m&=\frac{d}{\sqrt{2}} \\ r&=0{,}477\,d \end{aligned}\right\} \qquad [466]$$

故ニ平均ノ均方誤差 M 及推差 r_0 ハ

$$\left.\begin{aligned} M&=\frac{m}{\sqrt{n}}=\frac{d}{2} \\ r_0&=0{,}3373\,d \end{aligned}\right\} \qquad [467]$$

$d=\sqrt{2}.m$ ナルガ故ニ [464] ヨリ二回測定ノ均方誤差ハ一回測定ノ均方誤差ノ $\sqrt{2}$ 倍ニ等シ．

若シ又斯カル往復測定ヲ n 回繰返ストキハ茲ニ觀測差 $d_1, d_2, \ldots\ldots d_n$ ナルモノヲ得．此ノ場合ニハ長

サハ殆ド相等シクシテ d ハ其輕重率相同ジ．故ニ n 個ノ d ヨリ平均差ヲ次ノ如ク見出スコトヲ得．

$$(3)\qquad D^2=\frac{d_1^2+d_2^2+\ldots\ldots+d_n^2}{n}$$

又ハ

$$D=\sqrt{\frac{[d^2]}{n}} \qquad [468]$$

[468] ノ D ヲ [466] ノ d ニ代用スレバ一個觀測ノ均方誤差又ハ推差ハ夫々

$$\left.\begin{aligned} m&=\sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} \\ r&=0{,}6745\sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} \end{aligned}\right\} \qquad [469]$$

二回反覆ノ測定ノ均方誤差及推差ハ亦夫々

$$\left.\begin{aligned} M&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{[d^2]}{n}} \\ r_0&=0{,}3373\sqrt{\frac{[d^2]}{n}} \end{aligned}\right\} \qquad [470]$$

若シ更ニ s_1 ナル道順ヲ經テ往復水準測量ヲ爲シタル差ヲ d_1，s_2 ナル他ノ道順ヲ經テ二回ノ水準測量ヲ爲シタル差ヲ d_2 等トスルガ如ク，輕重率ヲ異ニスルトキハ

$$D=\sqrt{\frac{[pd^2]}{n}} \qquad [471]$$

$$m=\frac{D}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}} \qquad [472]$$

二回觀測ノ平均ノ均方誤差 M ハ

$$M=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{[pd^2]}{n}} \qquad [473]$$

長ク往復測定シ又ハ水準測量ヲ往復繰返スガ如キ場合ハ實ニ如上ノ理ニ依ルモノニシテ,凡テ此等ノ測定ハ其均方誤差ハ距離ノ平方根ニ比例シ,從テ輕量率ハ$(\sqrt{s})^2$又ハsニ反比ス. 卽チ$D^2=\frac{1}{n}\left(\frac{d_1^2}{s_1}+\frac{d_2^2}{s_2}+\cdots\cdots+\frac{d_n^2}{s_n}\right)=\frac{1}{n}\left[\frac{d^2}{s}\right]$ナルガ故ニ

$$m=\sqrt{\frac{1}{2n}\left[\frac{d^2}{s}\right]} \qquad [474]$$

及ビ

$$M=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{d^2}{s}\right]} \qquad [475]$$

例107. 6 地點間ノ水準測量ニ於テ次ノ如キ結果ヲ得タリトスレバ 1 粁ノ往復水準測量ノ均方誤差及一回水準測量ノ均方誤差ヲ求ム.

測點	水準測量 I	水準測量 II	觀測差 $I-II=d$	d^2	距離 s	$\frac{d^2}{s}$
(1)						
	米 −0,1853	米 −0,1859	粍 +0,6	0,36	粁 0,72	0,50
(2)						
	+1,6258	+1,6262	−0,4	0,16	0,42	0,38
(3)						
	+1,4329	+1,4323	+0,6	0,36	0,47	0,77
(4)						
	+0,5106	+0,5094	+1,2	1,44	0,48	3,00
(5)						
	−0,0073	−0,0049	−2,4	5,76	0,51	11,30
(6)						

測點	水準測量 I	水準測量 II	觀測差 $I-II=d$	d^2	距離 s	$\frac{d^2}{s}$
$n=5$	米 +3,5693	米 +3,5679	粍 +2,4		粁 2,60	15,95
	−0,1926	−0,1908	−2,8			
	+3,3767	+3,3771	−0,4			
	+3,3771					
	0,0004					

1 粁ノ往復水準測量ノ均方誤差ハ

$$M=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15,95}{5}}=\pm1,79\text{ 粍}$$

1 粁ノ一回水準測量ノ均方誤差ハ

$$m=M\sqrt{2}=\pm2,53\text{ 粍}$$

411. 觀測ノ輕重率. 輕重率ハ觀測又ハ觀測ヨリ計算セラレタル結果ノ信賴シ得ベキ程度ヲ表ハス所ノ比較的ノ數値ニシテ觀測又ハ計算ノ結果ノ推差ノ自乘ニ反比スル數ナリトス. 故ニ輕重率ヲ定ムルニハ凡テノ方面ヨリ起ル所ノ推差ニ反比例セシムルヲ要ス. 例ヘバ 1 粁ノ長サヲ測定シテ一方ハ 20 回ノ平均ガ $1000,1\pm0,40\mu$ (みくろーん) ヲ示シ,他ハ 30 回ノ平均ガ $1000,3\pm0,33\mu$ ナリトセバ是等兩群ノ總平均ハ

$$1000+\frac{20\times0,1+30\times0,3}{20+30}=1000,22$$

ニシテ,其推差ハ夫々 0,40 及 0,33 ナルガ故ニ其輕重率ハ $\frac{1}{40^2}$ ト $\frac{1}{33^2}$ ノ比卽チ 1089 ト 1600 ノ比ヲ爲ス.從テ總平均ハ

$$1000+\frac{0,1\times1089+0,3\times1600}{1089+1600}=1000,22$$

ニシテ恰カモ前ニ得タル結果ト相等シ. 而シテ總平均ノ推差ハ ±0,16 ニ等シ.

觀測ノ誤差ハ時トシテ偶差及定差ノ二種ニ分ツコトヲ得ルコトアリ. 卽チ偶差ヲ ε_1,定差ヲ ε_2 トスレバ全誤差 ε ハ

$$\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$$

ニシテ,偶差ヨリ起ル推差ヲ r_1,定差ヨリ起ル推差ヲ r_2 トセバ此觀測ノ推差 r ハ

$$r^2=r_1^2+r_2^2$$

ナリ. 若シ n 觀測ヲ行ヒタランニハ其ノ平均ノ推差 r_0 ハ

$$r_0^2=\frac{r_1^2}{n}+r_2^2$$

n ガ大ナレバ r^2 ハ主ナル項ヲ爲ス. 而シテ此ノ場合ニ於テ如何ニ觀測ヲ增スモ推差又ハ輕重率ハ改善セラルヽコト少シ. 例令轉鏡儀ヲ用ヒテ測角ヲ行フ場合ニ目盛ノ誤差ハ定差ニ屬シ,觀測ノ誤差ハ寧ロ偶差ニ依ル. 故ニ分度圈ノ同一ノ部分ニ於テ

n 回ノ觀測ヲ繰返ストキハ觀測ノ誤差ハ n ガ增ストト共ニ減少スレドモ目盛ノ誤差ハ毫モ減少セズ.

時トシテ不良ナル器械ヲ用ヒテ手腕ノナキ觀測者ノ爲シタル觀測ノ結果ガ良好ナル器械ヲ用ヒテ熟練ナル觀測者ガ行ヒタル結果ニ比シテ外觀上優越ナルガ如キコトアリ. 斯カル場合ニハ觀測者ノ經驗手腕ノ巧拙ヲ考ヘ器械ノ良否環境ノ適否ヲ酌量シテ任意ニ輕重率ヲ附スルコトアリ.

之ヲ要スルニ觀測ノ輕重率ヲ定ムルハ至難ノ業ニシテ,常差ノ有無ヲ顧ミズシテ漫ニ公式ニノミ膠着スルハ非ナリ. 而シテ充分觀測ニ熟練スルニ非レバ適當ニ最小自乘法ヲ利用シ得ルヤ否ヤハ疑ナキ能ハズ.

412. 各種測定ノ輕重率. 長又ハ距離ノ測定,方向又ハ角度ノ測定及水準測量ノ如キハ其輕重率ヲ知ルコト最モ必要ナリ.

長又ハ距離ノ測定ハ單位ノ長サ又ハ尺度ヲ以テ測定セントスル長サヲ切リ,幾單位及幾部分ヲ含ムヤヲ定ムルモノナルガ故ニ,最後ノ結果ニ見出サルヽ推差ハ長サト共ニ增加スベシ. 例ヘバ r_1 ヲ單位ノ長サノ推差,l ヲ此單位ニ依リテ反覆測定シタル長サトスレバ l ノ推差 r ハ

$$r=r_1\sqrt{l} \qquad [476]$$

ナリ. 故ニ今同一ノ注意ヲ用ヒテ二ノ線ヲ測定シタル場合ニ,第二線ガ第一線ノ4倍ナランニハ第二線ノ推差ハ第一線ノ推差ノ二倍ニ等シク而カモ其輕重率ハ推差ノ自乘ニ反比例スルヲ以テ**同樣ナル注意ヲ以テ行ハレタル長サ又ハ距離測定ノ輕重率ハ長サニ反比ス**. 故ニ1000米ノ長サヲ測リテ其ノ精度ヲ500米ヲ一回測リタルモノト同一ナラシメンニハ前者ハ二回之ヲ測リテ其平均ヲ取ルヲ要ス.

測角ノ輕重率ハ通例其反覆回數ヲ取ッテ之ヲ定メ,推差ノ自乘ニ反比スルモノヲ用ヒザルヲ常トス. 但シ大ニ熟練セル觀測者ハ反覆回數及推差ノ兩者ヲ以テ輕重率ヲ定ムルコトアレドモ,觀測者ニシテ同一ニ測角ノ器械ニシテ同一精度ニ,又環境ニシテ相異ナラザル限リハ反覆回數ニ比例シタル輕重率ヲ用フルヲ便トス. 例ヘバ角ABC,角ABD及角CBDヲ觀測シテ次ノ如キ結果ヲ得タリトス.

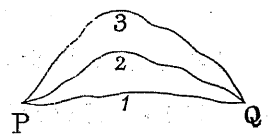
	角ノ大サ	觀測回數	輕重率
角 ABC	$12°15'16'',4\pm1'',2$	6	3
〃 ABD	$35°07'42''\,5\pm4'',8$	4	2
〃 CBD	$22°52'24'',0\pm2'',4$	6	3

酒精準測ニ於テ二ノ水準據標間ノ高ノ差ノ推差

ハ器械ヲ据ウル回數ト共ニ增スヲ以テ凸凹多キ山地ニ於テハ大ニシテ平地ニ於テハ之ニ反シテ小ナリ. 推差ハ又器械ノ良否ニ關スルハ勿論ニシテ水準手桿夫ノ熟練ニモ依ル.

一定距離例ヘバ1粁ノ間ニ水準儀ヲ据ウル回數同一ナリトセバ**水準測量ノ推差ハ距離測定ト同一ノ法則ニ依リ,距離ノ平方根ニ比例ス**. 卽チ或單位ノ長サ例ヘバ1粁ノ水準測量ニ於ケル推差ヲrトセバl粁ノ水準測量ノ推差ハ$r_1=r\sqrt{l}$ナリ. 從テ1粁ノ水準測量ノ推差ガ10粍ナラバ4粁ノ推差ハ20粍ナリ. 輕重率ハ推差ノ自乘ニ反比スルガ故ニ高サノ差ノ輕重率ハ高サノ差ヲ求ムル距離ニ反比ス.

第四百三十三圖



例108. 第四百三十三圖ニ於テP及Qヲ高サノ差ヲ求ムル二點トシ,其道順ヲ1,2及3トスレバ

道順	距離	P及Qノ高ノ差	輕重率
1	粁 5	米 37,407	$\frac{1}{5}=0,20$
2	6	37,392	$\frac{1}{6}=0,17$
3	10	37,414	$\frac{1}{10}=0,10$

∴高サノ差ノ修正値ハ 37,403 ナリ.

l	v	v^2	p	pv^2
37,407	−0,004	0,000016	0,20	0,00000320
37,392	+0,011	0,000121	0,17	2057
37,414	−0,011	0,000121	0,10	1210
x_0=37,403		0,000258	0,47	0,00003587

1粁ノ推差 $r=0,6745\sqrt{\dfrac{0,00003587}{3-1}}=0,0029$

$\sqrt{l}$	$r_1=0,0029\sqrt{l}$
2,24	0,0065
2,45	0,0070
3,16	0,0092

而シテ修正高差ノ推差ハ 0,0039 ナルヲ以テ 37,403±0,004 米ハ求メラルヽ最後ノ値ナリトス.

413. 觀測ノ抹消. 觀測ヲ繰返シタル場合ニ甚シク他ノ結果ト異ナルモノアルトキハ之ヲ抹消スルコトアリ. 而シテ殘差ガ一回ノ觀測推差ノ 5 倍以上ナル所ノ觀測ハ之ヲ抹消スベシ. 又殘差ガ推差ノ $3\frac{1}{2}$ 倍以上ナルトキハ仔細ニ之ヲ點檢シ觀測ヲ行ヒタル場合ノ環境ニシテ信頼シ難キモノアラバ亦之ヲ放棄スベシ.

第四節　間接ニ觀測セラレタル數個未知量ノ調整

414. 數個未知量ノ最モ眞ニ近キ値. 同一狀態ノ下ニ一ノ量ヲ直接ニ觀測シタル場合ニハ其平均ノ値ガ其量ノ最モ眞ニ近キ値タリシコト既ニ述ベタルガ如シ. 今若シ測定セラレタル量ガ一個又ハ數個ノ未知量ノ一次函數ヲ爲セルトキ其未知量ノ最モ眞ニ近キ値ヲ知ラザルベカラズ. 蓋シ前節ニ述ベタルモノハ此一般ナル場合ノ特別ナルモノト考フルコトヲ得ベシ.

觀測セラレタル n 個ノ量 $l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$ アリテ ν 個ノ獨立セル未知量 $x, y, z, \ldots\ldots$ ト次ノ如キ關係ヲ有スルモノトス

$$(1)\qquad\left\{\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z+\ldots\ldots+k_1=l_1+v_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z+\ldots\ldots+k_2=l_2+v_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_nx+b_ny+c_nz+\ldots\ldots+k_n=l_n+v_n \end{array}\right.$$

茲ニ $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ 及 $k_1, k_2, \ldots\ldots k_n$ ハ定數, $v_1, v_2, \ldots\ldots v_n$ ハ觀測ノ殘差ニシテ勿論 $n>\nu$ トス. 若シ又一般ニ $l'=k-l$ トセバ

$$\left.\begin{aligned} v_1&=a_1x+b_1y+c_1z+\dots\dots+l'_1\\ v_2&=a_2x+b_2y+c_2z+\dots\dots+l'_2\\ &\dots\dots\dots\\ v_n&=a_2x+b_ny+c_nz+\dots\dots+l'_n \end{aligned}\right\}\qquad[477]$$

[477] ヲ名ケテ**觀測等式**又ハ**誤差等式**ト云フ.

觀測等式ガ相等シキ輕重率ノモノナランニハ最小自乘法ノ理ニ依リ $[v^2]=$ 最小ナルヲ要シ,若シ又相異ナル輕重率ノモノナランニハ $[pv^2]=$ 最小ナルヲ要ス.

今輕重率ガ相等シキトキハ $[v^2]$ ガ最小ナルガ爲ニ

$$(2)\qquad \frac{\partial[v^2]}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial[v^2]}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial[v^2]}{\partial z}=0,\dots\dots$$

ナルヲ要ス. 然ルニ [360] ヨリ

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} [v^2]=[aa]x^2+2[ab]xy+2[ac]xz+\dots\dots+2[al']&\\ +[bb]y^2+2[bc]yz+\dots\dots+2[bl']&\\ +[cc]z^2+\dots\dots+2[cl']&\\ +\dots\dots+[ll]& \end{aligned}\right.$$

(3) ヲ x, y, z 等ニ就テ微分スルトキハ次ノ ν 個ノ等式ヲ得

$$\left.\begin{aligned} &[aa]x+[ab]y+[ac]z+\dots\dots+[al']=0\\ &[ab]x+[bb]y+[bc]z+\dots\dots+[bl']=0\\ &\dots\dots\dots \end{aligned}\right\}[478]$$

又ハ符號ヲ以テ

$$\left.\begin{aligned} &[av]=0\\ &[bv]=0\\ &\dots\dots\dots \end{aligned}\right\}\qquad[478']$$

[478] 又ハ [478′] ヲ**正等式**ト云フ. 正等式ヲ解ケバ $x, y, z\dots\dots$ 等 ν 個ノ最モ眞ニ近キ値ヲ得.

若シ又輕重率ガ相異ナルトキハ其正等式ハ

$$\left.\begin{aligned} &[paa]x+[pab]y+[pac]z+\dots\dots+[pal']=0\\ &[pab]x+[pbb]y+[pbc]z+\dots\dots+[pbl']=0\\ &\dots\dots\dots \end{aligned}\right\}\quad[479]$$

又ハ

$$\left.\begin{aligned} &[pav]=0\\ &[pbv]=0\\ &\dots\dots\dots \end{aligned}\right\}\qquad[479']$$

トナル.

[478′] 又ハ [479′] ハ殘差ノ値ヲ計算スルニ當リ其檢算ニ用フルヲ得ルコト猶平均ノ場合ノ $[v]=0$ ノ如シ.

時トシテハ $x, y, z,\dots\dots$ 等ノ近似値ヲ容易ニ見出シ得ルコトアリ. 今此等ノ近似値ヲ夫々 $(x), (y), (z),\dots\dots$, 其更正量ヲ $\delta x, \delta y, \delta z,\dots\dots$ トセバ

$$\left.\begin{aligned} x&=(x)+\delta x\\ y&=(y)+\delta y\\ z&=(z)+\delta z\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}\qquad[480]$$

又ハ

$$\left.\begin{aligned} x-(x)&=\delta x\\ y-(y)&=\delta y\\ z-(z)&=\delta z\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}\qquad[480']$$

今若シ一般ニ近似値ヲ用ヒタルモノヲ $l''=a(x)+$ $+b(y)+\ldots+l'$ トセバ相對シキ輕重率ノ觀測等式[480]ハ

$$\left.\begin{aligned} v_1&=a_1\delta x+b_1\delta y+c_1\delta z+\ldots\ldots+l_1''\\ v_2&=a_2\delta x+b_2\delta y+c_2\delta z+\ldots\ldots+l_2''\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ v_n&=a_n\delta x+b_n\delta y+c_n\delta z+\ldots\ldots+l_n'' \end{aligned}\right\}\qquad[481]$$

トナリ其ノ正等式ハ

$$\left.\begin{aligned} &[aa]\delta x+[ab]\delta y+[ac]\delta z+\ldots\ldots+[al'']=0\\ &[ab]\delta x+[bb]\delta y+[bc]\delta z+\ldots\ldots+[bl'']=0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}\qquad[482]$$

トナル. 是等ノ正等式ヲ解ケバ更正量 $\delta x, \delta y, \delta z,\ldots\ldots$ ヲ得,從テ[480]ヨリ最モ眞ニ近キ未知量ノ値 $x, y, z,$ $\ldots\ldots$ ヲ得ベシ. 相異ナル輕重率ノ場合モ亦同シ.

例109. 海面上 A ノ高サハ4301米, B ノ高サハ6075米ニシテ A 及 B ノ高サノ差ハ1749米トセバ, A 及 B ノ最モ眞ニ近キ海面上ノ高サヲ求ム. 但シ與ヘラレタル高サハ相等シキ價値ノモノトス.

x 及 y ヲ夫々 A 及 B ノ海面上ノ高サトセバ

$$(x-4301)^2+(y-6075)^2+(x-y+1749)^2=\text{最小}$$

又ハ之ヲ x 及 y ニ付テ微分セバ

$$2x-y=2552$$
$$-x+2y=7824$$

是等二ノ正等式ヨリ

$$x=4309\ \text{米}$$
$$y=6067\ \text{米}$$

ヲ得.

例110. 凡テ相等シキ輕重率ノ觀測等式

$$\begin{aligned} x\qquad&=1\\ x+y\qquad&=3\\ x-y+z&=2\\ -x-y+z&=1 \end{aligned}$$

ヲ與ヘテ正等式及 x, y, z ノ最モ眞ニ近キ値ヲ見出セ.

正等式ハ
$$\begin{aligned} 4x+y\qquad&=5\\ x+3y-2z&=0\\ -2y+2z&=3 \end{aligned}$$

ニシテ且ツ

$$x=\frac{2}{3},\ y=\frac{7}{3},\ z=\frac{23}{3}.$$

例111. 測點0ニ於テ A, B, C, D ニ對スル角度ヲ測リ,次ノ如キ結果ト輕重率ヲ得タリ

$l_1=$角 $AOB=$ 72°59′40″,33 輕重率 5

$l_2=$角 $AOC=$ 74°11′34″,92 〃 7

$l_3=$角 $AOD=$110°20′29″,12 〃 4

$l_4=$角 $BOD=$ 37°20′49″,55 〃 7

$l_5=$角 $COD=$ 36°08′55″,86 〃 4

調整角ノ大サヲ求ム.

角 AOB, 角 AOC, 角 AOD ノ最モ眞ニ近キ値ヲ夫夫 x, y, z, 其近似値ヲ夫々 $(x), (y), (z)$, 更正角ノ値ヲ夫々 ξ, η, ζ トセバ

$$x=(x)+\xi=l_1+v_1$$

$$y=(y)+\eta=l_2+v_2$$

$$z=(z)+\zeta=l_3+v_3$$

$$-x+z=-(x)-\xi+(z)+\zeta=l_4+v_4$$

$$-y+z=-(y)-\eta+(z)+\zeta=l_5+v_5$$

此ニ $v_1, v_2, \ldots\ldots v_5$ ハ夫々 $l_1, l_2, \ldots\ldots l_5$ ノ更正角ヲ表ハス.

故ニ近似値トシテ觀測角ヲ用フレバ觀測等式ハ

$+\xi \qquad =v_1$ 輕重率 5

$+\eta \qquad =v_2$ 〃 7

$+\zeta \qquad =v_3$ 輕重率 4

$-\xi \qquad +\zeta-0{,}76=v_4$ 〃 7

$-\eta+\zeta-1{,}66=v_5$ 〃 4

ニシテ正等式ハ

$$12\xi \qquad -7\zeta=-\ 5{,}32$$

$$+11\eta-\ 4\zeta=-\ 6{,}64$$

$$-7\xi-\ 4\eta+15\zeta=+11{,}96$$

トナリ,之ヲ解ケバ

$$\xi=-0''{,}05 \quad \eta=-0''{,}36 \quad \zeta=+0''{,}68$$

ヲ得. 故ニ又 v 及調整角ノ大サハ次ノ如シ.

$v_1=-0'',05$	$x=$ 72°59′40″,28
$v_2=-0\ ,36$	$y=$ 74 11 34 ,56
$v_3=+0\ ,68$	$z=$110 20 29 ,80
$v_4=-0\ ,03$	$-x+z=$ 37 20 40 ,52
$v_5=-0\ ,62$	$-y+z=$ 36 08 55 ,24

415. 相等シキ精度ヲ以テ觀測セラレタル二ノ未知量. x 及 y ヲ二ノ未知量トスレバ其觀測等式ハ l ノ肩符ヲ除キ

$$\left.\begin{array}{l} v_1=a_1x+b_1y+l_1 \\ v_2=a_2x+b_2y+l_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n=a_nx+b_ny+l_n \end{array}\right\} \qquad [483]$$

ニシテ其正等式ハ

$$\left.\begin{aligned}&[aa]x+[ab]y+[al]=0\\&[ab]x+[bb]y+[bl]=0\end{aligned}\right\}\tag{484}$$

又ハ

$$\left.\begin{aligned}&[av]=0\\&[bv]=0\end{aligned}\right\}\tag{484'}$$

是等二ノ正等式ヲ解ケバ

$$\left.\begin{aligned}x&=-\frac{\begin{vmatrix}[al]&[ab]\\ [bl]&[bb]\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}[aa]&[ab]\\ [ab]&[bb]\end{vmatrix}}=-\frac{[bb][al]-[ab][bl]}{[aa][bb]-[ab][ab]}\\ y&=-\frac{\begin{vmatrix}[aa]&[al]\\ [ab]&[bl]\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}[aa]&[ab]\\ [ab]&[bb]\end{vmatrix}}=-\frac{[aa][bl]-[ab][al]}{[aa][bb]-[ab][ab]}\end{aligned}\right\}\tag{485}$$

x 及 y ノ近似値ヲ用ヒテ最モ眞ニ近キ値ヲ見出スノ法ハ全ク前ニ同ジ.

416. **がうすノ消去法.** 二ノ未知量ノ場合ニ其ノ正等式ハ

(1) $[aa]x+[ab]y+[al]=0$

(2) $[ab]x+[bb]y+[bl]=0.$

(1) ニ $-\frac{[ab]}{[aa]}$ ヲ乘ジ (2) ニ $+1$ ヲ乘ジテ相加フレバ

(3) $\left\{[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]\right\}y+\left\{[bl]-\frac{[ab]}{[aa]}[al]\right\}=0.$

今

(4) $$\begin{cases}[bb.1]=[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]\\ [bl.1]=[bl]-\frac{[ab]}{[aa]}[al]\end{cases}$$

トセバ (3) ハ

$$y=-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}\tag{486}$$

トナル. 又同様ニ

(5) $$\begin{cases}[aa.1]=[aa]-\frac{[ab]}{[bb]}[ab]\\ [al.1]=[aa]-\frac{[ab]}{[bb]}[bl]\end{cases}$$

トセバ

$$x=-\frac{[al.1]}{[aa.1]}\tag{487}$$

即チ (1) 及 (2) 式ヲ順次ニ消去又ハ代用シタルモノハ

$$\left.\begin{aligned}&[aa]x+[ab]y+[al]=0.\\&[bb.1]y+[bl.1]=0.\end{aligned}\right\}\tag{488}$$

是等ヲ**誘導正等式**ト云フ.

又 [483] ヨリ $[vv]$ ヲ作レバ

(6) $$\begin{aligned}[vv]=[aa]x^2+2[ab]xy+2[al]x\\ +[bb]y^2+2[bl]y\\ +[ll]\end{aligned}$$

(1) ヨリ

$$(7)\quad \begin{cases} \left\{[aa]x+[ab]y+[al]\right\}^2=[aa]^2x^2+2[aa][ab]xy \\ \qquad +2[aa][al]x+[ab]^2y^2 \\ \qquad +2[ab][al]y+[al]^2 \\ \qquad =0 \end{cases}$$

(7) ノ兩節ヲ $[aa]$ ニテ除スレバ

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\left\{[aa]x+[ab]y+[al]\right\}^2}{[aa]}=[aa]x^2+2[ab]xy \\ \qquad +2[al]x+\dfrac{[ab]^2}{[aa]}y^2 \\ \qquad +\dfrac{2[ab][al]}{[aa]}y+\dfrac{[al]^2}{[aa]} \\ \qquad =0 \end{cases}$$

(6) ヨリ (8) ヲ減ズレバ

$$(9)\quad \begin{cases} [vv]-\dfrac{\left\{[aa]x+[ab]y+[al]\right\}^2}{[aa]} \\ \quad =\left\{[bb]-\dfrac{[ab]}{[aa]}[ab]\right\}y^2+2\left\{[bl]-\dfrac{[ab]}{[aa]}[al]\right\}y \\ \qquad +\left\{[ll]-\dfrac{[al]}{[aa]}[al]\right\} \\ \quad =[bb.1]y^2+2[bl.1]y+[ll.1] \end{cases}$$

[486] ヨリ

$$(10)\quad \left\{[bb.1]y+[bl.1]\right\}^2=[bb.1]^2y^2+2[bb.1][bl.1]y+[bl.1]^2=0$$

(10) ヲ $[bb.1]$ ニテ除スレバ

$$(11)\quad [bb.1]y^2+2[bl.1]y+\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bl.1]=0$$

(9) ヨリ (11) ヲ減ズレバ

$$(12)\quad \begin{cases} [vv]-\dfrac{\left\{[aa]x+[ab]y+[al]\right\}^2}{[aa]} \\ \quad -\dfrac{\left\{[bb.1]y+[bl.1]\right\}^2}{[bb.1]}=[ll.1]-\dfrac{[bl.1]}{[bb.1]}[bl.1] \\ \quad =[ll.2] \end{cases}$$

故ニ

$$(13)\quad [vv]=\frac{\left\{[aa]x+[ab]y+[al]\right\}^2}{[aa]}+\frac{\left\{[bb.1]y+[bl.1]\right\}^2}{[bb.1]}+[ll.2]$$

又ハ

$$\left.\begin{aligned} [vv]&=[ll.2] \\ &=[ll]-\frac{[al]^2}{[aa]}-\frac{\left\{[bl]-\dfrac{[al]}{[aa]}[ab]\right\}^2}{[bb]-\dfrac{[ab]}{[aa]}[ab]} \end{aligned}\right\}\quad [489]$$

若シ m 個ノ未知量アルトキハ一般ニ

$$\left.\begin{aligned} [vv]&=[ll.m] \\ &=[ll]-\frac{[al]^2}{[aa]}-\frac{[bl.1]^2}{[bb.1]}-\frac{[cl.2]^2}{[cc.2]}-\ldots\ldots \end{aligned}\right\}\quad [490]$$

417. 正等式ノ檢算. 二ノ未知量 x 及 y ノ場合ニ其係數ノミヲ取リテ一般ニ

$$(1)\quad a_r+b_r+l_s+s_r=0$$

トシ,茲ニ $\quad s_r=-(a_r+b_r+l_r)$

(1) ニ a, b, l, s ヲ乘ジテ之ヲ加フレバ

$$\left.\begin{aligned}[aa]+[ab]+[al]+[as]=0\\ [ab]+[bb]+[bl]+[bs]=0\\ [al]+[bl]+[ll]+[ls]=0\\ [as]+[bs]+[ls]+[ss]=0\end{aligned}\right\}\qquad[491]$$

以上ノ諸等式ガ凡テ滿足スレバ正等式ハ正シキモノナリ. 故ニ各正等式ハ其成ルニ從テ之ヲ檢算スベキモノトス. 但シ $[aa]$, $[ab]$, $[al]$, $[bb]$, $[bl]$ ノ諸項ハ正等式ヲ作ルニ當リテ計算セラレタルモノナルガ故ニ唯 $[as]$, $[bs]$, $[ls]$, $[ss]$ 及 $[ll]$ ヲ計算スルヲ要ス.

或ハ又次ノ如クシテ檢算スルコトヲ得.

$[aa]$	$[ab]$	$[al]$	$[as]$
	$[bb]$	$[bl]$	$[bs]$
		$[ll]$	$[ls]$
			$[ss]$

次ニ

$$[bb.1]=[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$$

$$[bl.1]=[bl]-\frac{[ab]}{[aa]}[al]$$

$$[ll.1]=[ll]-\frac{[al]}{[aa]}[al]$$

$$[bs.1]=[bs]-\frac{[ab]}{[aa]}[as]$$

$$[ls.1]=[ls]-\frac{[al]}{[aa]}[as]$$

$$[ss.1]=[ss]-\frac{[as]}{[aa]}[as]$$

ニシテ檢算トシテハ

$[bb.1]$	$[bl.1]$	$[bs.1]$
	$[ll.1]$	$[ls.1]$
		$[ss.1]$

又

$$[ll.2]=[ll.1]-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bl.1]$$

$$[ls.2]=[ls.1]-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bs.1]$$

$$[ss.2]=[ss.1]-\frac{[bs.1]}{[bb.1]}[bs.1]$$

故ニ

$[ll.2]$	$[ls.2]$
	$[ss.2]$

積 ab 等ハ直接ニ相乘積ヲ作ル代リニ自乘ヨリ見出スコトヲ得. 即チ

$$[ab]=\frac{\left[(a+b)^2\right]-\left([aa]+[bb]\right)}{2}$$

ヨリ直チニ見出スコトヲ得.

例 112. b, l ノ觀測ヨリ $[bl]$ ヲ見出セ.

b	l	bl	b^2	l^2	$(b+l)$	$(b+l)^2$
1,20	0,45	+ 0,54	1,44	0,20	1,65	2,72
2,25	0,22	0,50	5,06	0,05	2,47	6,10
2,71	0,16	0,43	7,34	0,03	2,87	8,24
3,48	0,75	2,61	12,11	0,56	4,23	17,89
4,07	−0,07	−0,28	16,56	0,00	4,00	16,00
4,92	1,37	6,74	24,21	1,88	6,29	39,56
7,08	0,45	3,19	50,13	0,20	7,53	56,70
7,34	1,10	8,07	53,88	1,21	8,44	71,23
7,69	0,45	3,46	59,14	0,20	8,14	66,26
40,74	4,88	+25,54−0,28	229,87	4,33	45,62	284,70
+4,88		− 0,28	=$[bb]$	=$[ll]$		−234,20
45,62=$[b+l]$		+25,26=$[bl]$	$[bb]+[ll]$=234,20		2$[bl]$=+50,50	
					$[bl]$=+25,25	

例 113. 次ノ係數ヨリ x 及 y ノ値ヲ見出セ.

	a	b	l	s
a	+9,00	−40,74	+ 4,88	+ 26,86
		+229,87	−25,26	−163,87
			+ 4,33	+ 16,05

檢算

$$[aa]=+9{,}00\quad [ab]=-\ 40{,}74\quad [al]=+\ 4{,}88\quad [as]=\ 26{,}86 \mid 0{,}00$$

$$[bb]=+229{,}87\quad [bl]=-25{,}26\quad [bs]=-163{,}87 \mid 0{,}00$$

$$[ll]=+\ 4{,}33\quad [ls]=+\ 16{,}05 \mid 0{,}00$$

$$-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]=-184{,}42\quad -\frac{[ab]}{[aa]}[al]=+22{,}09\quad -\frac{[ab]}{[aa]}[as]=+121{,}59$$

$$-\frac{[al]}{[aa]}[al]=-\ 2{,}65\quad -\frac{[al]}{[aa]}[as]=-14{,}56$$

$$[bb.1]=+45{,}45\quad [bl.1]=-3{,}17\quad [bs.1]=-42{,}28 \mid 0{,}00$$

$$[ll.1]=+1{,}68\quad [ls.1]=+\ 1{,}49 \mid 0{,}00$$

$$-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bl.1]=-0{,}22\quad -\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bs.1]=-2{,}95$$

$$[ll.2]=+1{,}46\quad [ls.2]=-1{,}46 \mid 0{,}00$$

$$y=-\frac{-3{,}17}{+45{,}45}=+0{,}06975$$

$$p_y=45{,}45\qquad [vv]=1{,}46$$

b	a	l	s	檢算
+229,9	−40,7	−25,3	−163,9	0,00
	+ 9,0	+ 4,9	+ 26,8	0,00
	− 7,2	− 4,5	− 29,0	0,0
		+ 4,3	+ 16,1	
		− 2,8	− 18,0	
	+ 1,8	+ 0,4	− 2,2	0,0
		+ 1,5	− 1,9	0,0
		− 0,1	+ 0,5	
		+ 1,4	− 1,4	0,0

$$x=-\frac{+0,4}{+1,8}=-0,22$$

$$p_x=1,8 \qquad [vv]=1,4$$

418. 對數ヲ用フル消去法. 未知量ガ單ニx及yノ二個ナルトキハ計算尺ヲ以テ計算シ得ルモノ多シト雖モ係數ノ桁ガ多キトキハ對數ニ依ルヲ便トス.

例 114. 前例ニ於テ對數ヲ用フルトキハ次ノ如シ.

	a]	b]	l]	s	檢算
$[a$	$+9,00$	$-40,74$	$+4.88$	$+26,86$	0,00
$log[a$	0,95424	1,61002	0,68842	1,42911	
$log\left(\frac{[ab]}{[aa]}[a\right.$		2,26580	1,34420	2,08489	
$log\left(\frac{[al]}{[aa]}[a\right.$			0,42260	1,16329	
$[b$		$+229,87$	$-25,26$	$-163,87$	0,00
$-\left(\frac{[ab]}{[aa]}[a\right.$		$-184,42$	$+22,09$	$+121,59$	
$[l$			$+4,33$	$+16,05$	0,00
$-\left(\frac{[al]}{[aa]}[a\right.$			$-2,65$	$-14,56$	
		b.1]	l.1]	s.1]	
$y=-\frac{-3,17}{+45,45}$	$[b$	$+45,45$	$-3,17$	$-42,28$	0,00
$=+0,06975$	$log[b$	1,65758	0,50106	1,62614	
	$log\left(\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[b\right.$		9,34459	0,46967	
	$[l$		$+1,68$	$+1,49$	0,00
	$-\left(\frac{[bl.1]}{[aa]}[b\right.$		$-0,22$	$-2,95$	
		$[l$	l.2] $+1,46$	s.2] $-1,46$	0,00
a	$log\frac{1}{[aa]}$ 9,04576	$log\frac{[ab]}{[aa]}$ 0,65578	$log\frac{[al]}{[aa]}$ 9,73418		
b		$log\frac{1}{[bb.1]}$ 8,34246	$log\frac{[bl.1]}{[bb.1]}$ 8,84353		

$$8,84353=log\,y$$
$$0,06975=y$$

419. 二ノ未知量ニ對スル單位輕重率ノ均方誤差. 二ノ未知量ノ眞ノ値ヲ X, Y, 觀測ノ結果ヨリ調整シタル最モ眞ニ近キ値ヲ x, y, 眞ノ誤差ヲ ε_1, ε_2, ε_3, ...現差ヲ v_1, v_2, v_3, ...トスレバ, 一般ニ

$$(1)\qquad \begin{cases} \varepsilon=aX+bY+l \\ v=ax+by+l \end{cases}$$

(1) ノ兩式ノ差ヲ取レバ

$$(2)\qquad v-\varepsilon=a(x-X)+b(y-Y)$$

$x-X=x_1$, $y-Y=y_1$ トスレバ

$$(3)\qquad v=ax_1+by_1+\varepsilon$$

形ノ類似ヨリ $[av]=0$, $[bv]=0$ 又ハ

$$(4)\qquad \begin{cases} [aa]x_1+[ab]y_1+[a\varepsilon]=0 \\ [ab]x_1+[bb]y_1+[b\varepsilon]=0 \end{cases}$$

又 (3) ノ自乘ヨリ

$$(5)\qquad \begin{cases} [vv]=[aa]x_1^2+2[ab]x_1y_1+2[a\varepsilon]x_1 \\ \qquad\qquad +[bb]y_1^2+2[b\varepsilon]y_1 \\ \qquad\qquad +[\varepsilon\varepsilon] \end{cases}$$

(4) ノ第一式ノ自乘ヲ $[aa]$ ニテ除スレバ

$$(6)\qquad \begin{cases} \frac{[av]^2}{[aa]}=\frac{\{[aa]x_1+[ab]y_1+[a\varepsilon]\}^2}{[aa]} \\ \qquad =[aa]x_1^2+2[ab]x_1y_1+2[a\varepsilon]x_1 \\ \qquad\qquad +\frac{[ab][ab]}{[aa]}y_1^2+2\frac{[ab][a\varepsilon]}{[aa]}y_1 \\ \qquad\qquad +\frac{[a\varepsilon]}{[aa]}[a\varepsilon]=0 \end{cases}$$

(5) ヨリ (6) ヲ減ズレバ

$$(7)\quad \begin{cases} [vv]-\dfrac{[av]^2}{[aa]}=\left([bb]-\dfrac{[ab][ab]}{[aa]}\right)y_1^2 \\ \qquad +2\left([b\varepsilon]-\dfrac{[ab][a\varepsilon]}{[aa]}\right)y_1+\left([\varepsilon\varepsilon]-\dfrac{[a\varepsilon]}{[aa]}[a\varepsilon]\right) \end{cases}$$

(7) 式右節ノ括弧内ノ項ヲ夫々 $[bb.1]$, $[b\varepsilon.1]$, $[\varepsilon\varepsilon.1]$ ニテ表ハセバ

$$(8)\quad [vv]-\frac{[av]^2}{[aa]}=[bb.1]y_1^2+2[b\varepsilon.1]y_1+[\varepsilon\varepsilon.1]$$

次ニ $[av]$ ニ $-\dfrac{[ab]}{[aa]}$ ヲ乘シテ之ヲ $[bv]$ ニ加フレバ

$$(9)\quad \left([bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}\right)y_1+\left([b\varepsilon]-\frac{[ab][a\varepsilon]}{[aa]}\right)=0$$

又ハ

$$(9')\quad \begin{cases} [bb.1]y_1+[b\varepsilon.1]=0 \\ \qquad\qquad =[bb.2] \end{cases}$$

(9′) ヲ自乘シテ $[bb.1]$ ニテ之ヲ除スレバ

$$(10)\quad [bb.1]y_1^2+2[b\varepsilon.1]y_1+\frac{[b\varepsilon.1]}{[bb.1]}[b\varepsilon.1]=0$$

(8) ヨリ (10) ヲ減ズレバ

$$(11)\quad \begin{cases} [vv]-\dfrac{[av]^2}{[aa]}-\dfrac{[bb.2]^2}{[bb.1]}=[\varepsilon\varepsilon.1]-\dfrac{[b\varepsilon.1]}{[bb.1]}[b\varepsilon.1] \\ \qquad\qquad =[\varepsilon\varepsilon.2] \end{cases}$$

故ニ

$$(12)\quad [vv]=[\varepsilon\varepsilon.2]=[\varepsilon\varepsilon]-\frac{[a\varepsilon]^2}{[aa]}-\frac{[b\varepsilon.1]^2}{[bb.1]}$$

然ルニ

$$(13)\quad [a\varepsilon]^2=a_1^2\varepsilon_1^2+a_2^2\varepsilon_2^2+\ldots\ldots+2a_1a_2\varepsilon_1\varepsilon_2+\ldots\ldots$$

又 $2a_1a_2\varepsilon_1\varepsilon_2+\ldots\ldots=0$ ナルガ故ニ

$$(14)\quad [a\varepsilon]^2=[a^2\varepsilon^2]$$

均方誤差 m ハ ε_1, ε_2 ト同一程度ノモノナルヲ以テ $\varepsilon_1^2=\varepsilon_2^2=\ldots\ldots=m^2$ トスレバ

$$(15)\quad [a\varepsilon]^2=[aa]m^2$$

又ハ

$$(15')\quad \frac{[a\varepsilon]^2}{[aa]}=m^2$$

同樣ニ

$$(16)\quad \begin{cases} [b\varepsilon.1]=[b\varepsilon]-\dfrac{[ab]}{[aa]}[ab] \\ \qquad =(b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+\ldots)-\dfrac{[ab]}{[aa]}(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\ldots) \\ \qquad =\left(b_1-\dfrac{[ab]}{[aa]}a_1\right)\varepsilon_1+\left(b_2-\dfrac{[ab]}{[aa]}a_2\right)\varepsilon_2+\ldots\ldots \end{cases}$$

故ニ

$$(17)\quad \begin{cases} [b\varepsilon.1]^2=\left(b_1-\dfrac{[ab]}{[aa]}a_1\right)^2\varepsilon_1^2+\left(b_2-\dfrac{[ab]}{[aa]}a_2\right)^2\varepsilon_2^2+\ldots \\ \qquad +2\left(b_1-\dfrac{[ab]}{[aa]}a_1\right)\left(b_2-\dfrac{[ab]}{[aa]}a_2\right)\varepsilon_1\varepsilon_2+\ldots\ldots \end{cases}$$

(13) ト同理ニ依リ

$$(18)\quad [b\varepsilon.1]^2=\left\{\left(b_1-\frac{[ab]}{[aa]}a_1\right)^2+\left(b_2-\frac{[ab]}{[aa]}a_2\right)^2+\ldots\right\}m^2$$

或ハ

$$
(19)\quad
\begin{cases}
\dfrac{[b\varepsilon.1]^2}{m^2} = \left\{(b_1^2 + \dfrac{[ab]^2}{[aa]^2}a_1^2 - 2a_1b_1\dfrac{[ab]}{[aa]}\right\} \\
\qquad\qquad + \left\{(b_2^2 + \dfrac{[ab]^2}{[aa]^2}a_2^2 - 2a_2b_2\dfrac{[ab]}{[aa]}\right\} + \ldots\ldots \\
\qquad = [bb] + \dfrac{[ab]^2}{[aa]^2}[aa] - 2\dfrac{[ab]}{[aa]}[ab] \\
\qquad = [bb.1]
\end{cases}
$$

故ニ (12), (15) 及 (19) ヨリ

$$
(20)\quad
\begin{cases}
[vv] = [\varepsilon\varepsilon] - m^2 - m^2 \\
\qquad = [\varepsilon\varepsilon] - 2m^2
\end{cases}
$$

然ルニ $\dfrac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} = m^2$ ナルヲ以テ單位輕重率ノ一回觀測ノ均方誤差ハ

$$
m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}} \qquad [492]
$$

一般ニ ν 個ノ未知量アラバ前ト同理ニ依リ單位輕重率ノ一回觀測ノ均方誤差ハ

$$
m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-\nu}} \qquad [493]
$$

420. **調整セラレタル x 及 y ノ均方誤差.** x 及 y ヲ觀測シタル値 $l_1, l_2, \ldots l_n$ ノ一次函數トスレバ

$$
(1)\quad
\begin{cases}
x = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \ldots\ldots + \alpha_n l_n \\
y = \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \ldots\ldots + \beta_n l_n
\end{cases}
$$

m ヲ l ノ均方誤差トスレバ x 及 y ノ均方誤差ハ夫夫次ノ如シ

$$
(2)\quad
\begin{cases}
m_x^2 = \alpha_1^2 m^2 + \alpha_2^2 m^2 + \ldots\ldots \\
\qquad = [\alpha\alpha] m^2 \\
m_y^2 = [\beta\beta] m^2
\end{cases}
$$

$[\alpha\alpha]$ 及 $[\beta\beta]$ ヲ名ケテ**輕重率ノ係數**ト云フ. p_x 及 p_y ヲ夫々 x 及 y ノ輕重率トスレバ

$$
(3)\quad
\begin{cases}
m_x = \dfrac{m}{\sqrt{p_x}} \\
m_y = \dfrac{m}{\sqrt{p_y}}
\end{cases}
$$

ナルガ故ニ

$$
\left.
\begin{aligned}
p_x &= \frac{1}{[\alpha\alpha]} \\
p_y &= \frac{1}{[\beta\beta]}
\end{aligned}
\right\} \qquad [494]
$$

今正等式ハ

$$
(4)\quad
\begin{cases}
[aa]x + [ab]y + [al] = 0 \\
[ab]x + [bb]y + [bl] = 0
\end{cases}
$$

ニシテ

$$
(5)\quad
\begin{cases}
x = -\dfrac{[al.1]}{[aa.1]} \\
y = -\dfrac{[bl.1]}{[bb.1]}
\end{cases}
$$

玆ニ

$$(6)\quad \begin{cases} [aa.1]=[aa]-\dfrac{[ab]}{[bb]}[ab] \\ [al.1]=[al]-\dfrac{[ab]}{[bb]}[bl] \\ [bb.1]=[bb]-\dfrac{[ab]}{[aa]}[ab] \\ [bl.1]=[bl]-\dfrac{[ab]}{[aa]}[al] \end{cases}$$

然ルニ

$$(7)\quad -[al.1]=-\left(a_1-\frac{[ab]}{[aa]}b_1\right)l_1-\left(a_2-\frac{[ab]}{[aa]}b_2\right)l_2-\ldots$$

故ニ (1) 式ノ第一式ト (7) トヲ對比スレバ一般ニ

$$(8)\quad \alpha=-\frac{1}{[aa.1]}\left(a-\frac{[ab]}{[bb]}b\right)$$

同様ニ

$$(9)\quad \beta=-\frac{1}{[bb.1]}\left(b-\frac{[ab]}{[aa]}a\right)$$

或ハ

$$(10)\quad \begin{vmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{vmatrix}=D$$

トスレバ

$$(11)\quad \begin{cases} [bb.1]=\dfrac{D}{[aa]} \\ [aa.1]=\dfrac{D}{[bb]} \end{cases}$$

從テ (8), (9) 及 (11) ヨリ

$$(12)\quad \begin{cases} \alpha=\dfrac{[bb]}{D}\left(a-\dfrac{[ab]}{[bb]}b\right) \\ \beta=\dfrac{[aa]}{D}\left(b-\dfrac{[ab]}{[aa]}a\right) \end{cases}$$

(12) ノ自乘ヨリ

$$(13)\quad \alpha\alpha=\frac{[bb]^2}{D^2}\left\{aa-2\frac{[ab]}{[bb]}ab+\frac{[ab]^2}{[bb]^2}bb\right\}$$

或ハ

$$[\alpha\alpha]=\frac{[bb]}{D}=\frac{1}{[bb.1]} \qquad [495]$$

同様ニ

$$[\beta\beta]=\frac{1}{[aa.1]} \qquad [496]$$

故ニ [494], [495] 及 [496] ヨリ

$$\left.\begin{aligned} p_x&=[aa.1] \\ p_y&=[bb.1] \end{aligned}\right\} \qquad [497]$$

又ハ

$$\left.\begin{aligned} m_x&=\frac{m}{\sqrt{[aa.1]}} \\ m_y&=\frac{m}{\sqrt{[bb.1]}} \end{aligned}\right\} \qquad [498]$$

[489] 又ハ [492] ヨリ

$$m=\sqrt{\frac{[vv]}{n-2}}=\sqrt{\frac{[ll.2]}{n-2}} \qquad [499]$$

例 115. 例 113 ニ於テ x 及 y ノ推差ヲ求ム.

$$x = -0,226 \qquad y = +0,06975$$

$$[aa.1] = +1,78 \qquad [bb\,1] = +45,45$$

$$[ll.2] = 1,46$$

ナルヲ以テ單位輕重率ノ均方誤差 m ハ

$$m = \sqrt{\frac{1,46}{9-2}} = \pm 0,46 \text{ 粍}$$

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{1,78}} = \pm 0,34 \text{ 粍}$$

$$m_y = \frac{m}{\sqrt{45\,45}} = \pm 0,06797$$

故ニ

$$x = -\overset{\text{粍}}{0,23} \pm \overset{\text{粍}}{0,34}$$

$$y = +0,06975 \pm 0,06797$$

例116. 流速計ノ定數測定ニ於テ船ノ進速ト流速計ノ測輪ノ回轉數ハ一次ノ關係ヲ有シ次ノ等式ヲ以テ表ハスコトヲ得.

$$l = ax + y$$

玆ニ l ハ進速ニシテ a ハ毎秒測輪ノ回轉數ヲ表ハシ, x 及 y ハ定メラルベキ二ノ定數ナリトス. 今長サ 200 米ノ實驗水槽ニ於テ自記力量計ノ前端ニ流速計ヲ立テ,定數測定ヲ行ヒタルモノトス.

番號	時間(秒)	全回轉數	進速 l (毎秒米)	毎秒回轉數 (a)
1	53	100	3,774	1,886
2	44	101	4,544	2,295
3	41	101	4,878	2,464
4	124	96	1,613	0,774
5	152	94	1,316	0,618
6	193	90	1,036	0,466
7	181	91	1,105	0,503
8	28	103	7,142	3,678
9	53	100	3,774	1,886
10	73	93	2,740	1,342
11	29	103	6,896	3,552

此場合ニ正等式ハ次ノ如シ (第八章 257 參照)

$$[aa]x + [a]y - [al] = 0$$

$$[\,a\,]x + 11y - [\,l\,] = 0$$

上ノ觀測ノ結果ヨリ

$$[a] = 19,464 \qquad [aa] = 47,849 \qquad -[al] = -94,223$$

$$-[l] = -38,818 \qquad [\,ll\,] = 185,627498$$

從テ又

$$[aa.1]=[aa]-\frac{[a]^2}{[bb]}=47{,}849-\frac{19{,}464^2}{11}=13{,}417$$

$$[bb.1]=[bb]-\frac{[a]^2}{[aa]}=11{,}000-\frac{19{,}464^2}{47{,}849}=3{,}082$$

故ニ正等式

$$47{,}849x+19{,}464y-94{,}223=0$$

$$19{,}464x+11{,}000y-38{,}818=0$$

ヲ解ケバ

$$x=1{,}904$$

$$y=0{,}159$$

ヲ得. 從テ又

$$v=1{,}904a+0{,}159-l$$

ヨリ

$$[vv]=0{,}004486$$

一回ノ觀測ニ對スル單位輕重率ノ均方誤差 m ハ

$$m=\sqrt{\frac{0{,}004486}{11-2}}=\pm 0{,}0223$$

又 x 及 y ニ對スル均方誤差 m_x 及 m_y ハ

$$m_x=\frac{0{,}0223}{\sqrt{13{,}417}}=\pm 0{,}006$$

$$m_y=\frac{0{,}0223}{\sqrt{3{,}082}}=\pm 0{,}011$$

421. 異ナル輕重率ヲ以テ觀測セラレタル二ノ未知量. 觀測セラレタル量 $l_1, l_2, l_3, \ldots\ldots l_n$ ガ夫々 $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_n$ ナル輕重率ヲ有スルトキハ其誤差等式ハ

$$(1)\qquad \left.\begin{array}{lll} v_1=a_1x+b_1y+l_1 & \text{輕重率} & p_1 \\ v_2=a_2x+b_2y+l_2 & \text{〃} & p_2 \\ v_3=a_3x+b_3y+l_3 & \text{〃} & p_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n=a_nx+b_ny+l_n & \text{〃} & p_n \end{array}\right\} \qquad [500]$$

ニシテ $[pvv]$=最小ナルヲ要シ,其正等式ハ

$$\left.\begin{array}{l} [paa]x+[pab]y+[pal]=0 \\ [pab]x+[pbb]y+[pbl]=0 \end{array}\right\} \qquad [501]$$

ニシテ x 及 y ノ最モ眞ニ近キ値ヲ與フ. 相等シキ精度ヲ以テ觀測シタル場合ノ等式 [484] 等ノ $[aa]$ ノ代リニ $[paa]$, $[ab]$ ノ代リニ $[pab]$ ヲ用フベシ. 又單位輕重率ノ均方誤差 m ハ

$$m=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-2}}=\sqrt{\frac{[pll.2]}{n-2}} \qquad [502]$$

今單位輕重率ニ改ムレバ觀測ノ結果 $l_1, l_2, l_3, \ldots\ldots l_n$ ハ夫々 $l_1\sqrt{p_1}$, $l_2\sqrt{p_2}$, $l_3\sqrt{p_3}, \ldots\ldots l_n\sqrt{p_n}$ トスルコトヲ得ベク,從テ [497] ハ

$$\left.\begin{array}{l} v_1\sqrt{p_1}=a_1\sqrt{p_1}x+b_1\sqrt{p_1}y+l_1\sqrt{p_1} \\ v_2\sqrt{p_2}=a_2\sqrt{p_2}x+b_2\sqrt{p_2}y+l_2\sqrt{p_2} \\ v_3\sqrt{p_3}=a_3\sqrt{p_3}x+b_3\sqrt{p_3}y+l_3\sqrt{p_3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n\sqrt{p_n}=a_n\sqrt{p_n}x+b_n\sqrt{p_n}y+l_n\sqrt{p_n} \end{array}\right\} \qquad [503]$$

トナリ,之ヲ相等シキ輕重率ノ場合ト同樣ニ取扱フトキハ [503] ノ正等式ヲ得.

又 420 ニ述ベタルガ如ク

$$(2)\quad \begin{cases} x=\dfrac{\alpha_1}{\sqrt{p_1}}(l_1\sqrt{p_1})+\dfrac{\alpha_2}{\sqrt{p_2}}(l_2\sqrt{p_2})+\ldots\ldots \\ y=\dfrac{\beta_1}{\sqrt{p_1}}(l_1\sqrt{p_1})+\dfrac{\beta_2}{\sqrt{p_2}}(l_2\sqrt{p_2})+\ldots\ldots \end{cases}$$

トスレバ

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{p_x}&=\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] \\ \frac{1}{p_y}&=\left[\frac{\beta\beta}{p}\right] \end{aligned}\right\} \qquad [504]$$

又 [497] ト同ジク

$$\left.\begin{aligned} p_x&=[paa.1] \\ p_y&=[pbb.1] \end{aligned}\right\} \qquad [505]$$

且ツ

$$\left.\begin{aligned} m_x&=\frac{m}{\sqrt{[paa.1]}} \\ m_y&=\frac{m}{\sqrt{[pbb.1]}} \end{aligned}\right\} \qquad [506]$$

例 117. 測距絲定數ノ測定ニ於テ E ヲ轉鏡儀望遠鏡ノ中心ト測距桿又ハ函尺トノ間ノ距離, l ヲ測距桿ノ桿夾, c, k ヲ二ノ定數トスレバ,勿論望遠鏡ヲ地平ニ保チタル場合ニハ本書上卷第二章第二節ニ述ベタルガ如ク

$$E=c+kl$$

ナル關係アリ.

今 $c=x$, $k=100+y$ トスレバ

$$E=x+(100+y)l$$

又ハ

$$0=x+ly+100l-E$$

故ニ誤差等式ハ

$$v=x+ly+(100l-E)$$

或ハ

$$v=ax+by+\lambda$$

此ニ

$$a=1,\ b=l,\ \lambda=100l-E$$

觀測ノ値 λ ノ輕重率 p ハ 100 米ヲ單位トシテ

$$p=\frac{1}{l^2}$$

ヨリ定ムルコトヲ得ベク

$$[paa]=\left[\frac{1}{l^2}\right],\ [pab]=\left[\frac{1}{l}\right],\ [pa\lambda]=\left[\frac{\lambda}{l^2}\right]$$

$$[pbb]=n,\qquad [pb\lambda]=\left[\frac{\lambda}{l}\right]$$

$$[p\lambda\lambda]=\left[\frac{\lambda^2}{l^2}\right]$$

茲ニ n ハ觀測回數トス. 故ニ正等式ハ次ノ如シ

$$[paa]x+[pab]y+[pa\lambda]=0.$$

$$[pab]x+[pbb]y+[pb\lambda]=0.$$

距離 E（米）	25	50	100	150	200	250	300
桿夾 l（米）	0,2501	0,5000	1,0006	1,5016	2,0021	2,5058	3,0060
$100l-E=\lambda$（米）	+0,01	+0,00	+0,06	+0,16	+0,21	+0,58	+0,60
輕重率 $p=\frac{1}{l^2}$	16,00	4,00	1,00	0,44	0,25	0,16	0,11

今上ノ觀測ノ結果ヨリ係數ヲ計算スレバ次ノ如シ

番號	p	a	b	λ	pab	$pa\lambda$	pbb	$pb\lambda$	$p\lambda\lambda$
1	16,00	1,00	0,25	0,01	4,00	0,16	1,00	0,04	0,002
2	4,00	1,00	0,50	0,00	2,00	0,00	1,00	0,00	0,000
3	1,00	1,00	1,00	0,06	1,00	0,06	1,00	0,06	0,004
4	0,44	1,00	1,50	0,16	0,67	0,07	1,00	0,11	0,011
5	0,25	1,00	2,00	0,21	0,50	0,05	1,00	0,10	0,011
6	0,16	1,00	2,50	0,58	0,40	0,09	1,00	0,23	0,054
7	0,11	1,00	3,00	0,60	0,33	0,07	1,00	0,20	0,040
和	21,96	7,00	10,75	1,62	8,90	0,50	7,00	0,74	0,122

故ニ正等式ハ次ノ如シ

$$21{,}96x+8{,}90y+0{,}50=0$$

$$8{,}90x+7{,}00y+0{,}74=0$$

是等二ノ等式ヨリ

$$x=0{,}041$$

$$y=-0{,}158$$

又

$$[pb\lambda.1]=[pb\lambda]-\frac{[pab]}{[paa]}[pa\lambda]=0{,}74-\frac{8{,}90}{21{,}96}\times 0{,}50$$
$$=0{,}537$$

$$[pbb.1]=[pbb]-\frac{[pab]}{[paa]}[pab]=7{,}00-\frac{8{,}90}{21{,}96}\times 8{,}90$$
$$=3{,}393$$

從テ

$$[pvv]=[p\lambda\lambda]-\frac{[pa\lambda]^2}{[paa]}-\frac{[pb\lambda.1]^2}{[pbb.1]}=0{,}122-\frac{0{,}50^2}{21{,}96}-\frac{0{,}537^2}{3{,}393}$$
$$=0{,}025$$

一回觀測ノ輕重率ニ對スル均方誤差 m ハ

$$m=\sqrt{\frac{0{,}025}{7-2}}=\pm 0{,}070$$

即チ 100 米ノ距離ニ於テ均方誤差ハ 0,070 米ナリ。

又 x ノ輕重率 p_x 及 y ノ輕重率 p_y ハ夫々次ノ如シ

$$p_x=[paa.1]=[paa]-\frac{[pab]}{[pbb]}[pab]=21{,}96-\frac{8{,}90^2}{7{,}00}$$
$$=10{,}601$$

$$p_y=[pbb.1]=[pbb]-\frac{[pab]}{[paa]}[pab]=7{,}00-\frac{8{,}90^2}{21{,}96}$$
$$=3{,}393$$

故ニ

$$m_x=\frac{m}{\sqrt{p_x}}=\frac{0{,}070}{\sqrt{10{,}601}}=\pm 0{,}021\text{ 米}$$

$$m_y=\frac{m}{\sqrt{p_y}}=\frac{0,070}{\sqrt{3,393}}=\pm 0,038\ \text{米}$$

從テ

$$x=0,041\pm 0,021\ \text{米}\qquad y=-0,158\pm 0,038$$

即チ

$$c=0,04\pm 0,02\ \text{米}\qquad k=100+y=99,842\pm 0,038$$

422. 三ノ未知量ノ輕重率. 二ノ未知量 x 及 y ノ場合ニ其輕重率 p_x 及 p_y ハ夫々 [378] 乃至 [380] ニ示セルガ如ク

$$(1)\qquad \begin{cases} p_x=\dfrac{D}{[bb]} \\ p_y=\dfrac{D}{[aa]} \end{cases}\qquad D=\begin{vmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{vmatrix}$$

三ノ未知量 x, y, z ノ場合ニハ其輕重率 p_x, p_y, p_z ハ次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned} p_x&=\frac{D}{D_x} \\ p_y&=\frac{D}{D_y} \\ p_z&=\frac{D}{D_z} \end{aligned}\right\}\qquad [507]$$

此ニ

$$D=\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ab] & [bb] & [bc] \\ [ac] & [bc] & [cc] \end{vmatrix}=\left\{\begin{aligned} &[aa][bb][cc]-[ac][bb][ac] \\ &+[ab][bc][ac]-[aa][bc][bc] \\ &+[ac][ab][bc]-[cc][ab][ab] \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} D_x&=\begin{vmatrix} [bb] & [bc] \\ [bc] & [cc] \end{vmatrix}=[bb][cc]-[bc]^2 \\ D_y&=\begin{vmatrix} [aa] & [ac] \\ [ac] & [cc] \end{vmatrix}=[aa][cc]-[ac]^2 \\ D_z&=\begin{vmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{vmatrix}=[aa][bb]-[ab]^2 \end{aligned}\right\}\qquad [508]$$

423. 調整セラレタル x 及 y ノ函數ノ輕重率. x 及 y ガ互ニ獨立シタルモノトシ, x 及 y ノ函數 F ヲ

$$(1)\qquad F=f_1x+f_2y$$

トス,茲ニ f_1 及 f_2 ヲ定數トス.

今 l ヲ觀測シタル値トシ且ツ

$$(2)\qquad \begin{cases} x=\alpha_1l_1+\alpha_2l_2+\ldots\ldots+\alpha_nl_n \\ y=\beta_1l_1+\beta_2l_2+\ldots\ldots+\beta_nl_n \end{cases}$$

ニ於テ $\varepsilon_1\ \varepsilon_2,\ldots\ldots$ ヲ夫々 $l_1, l_2,\ldots\ldots$ ノ眞ノ誤差トスレバ x 及 y ノ眞ノ誤差 ε_x 及 ε_y ハ夫々次ノ如シ

$$(3)\qquad \begin{cases} \varepsilon_x=\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+\ldots\ldots+\alpha_n\varepsilon_n \\ \varepsilon_y=\beta_1\varepsilon_1+\beta_2\varepsilon_2+\ldots\ldots+\beta_n\varepsilon_n \end{cases}$$

又函數 F ノ眞ノ誤差 ε_F ハ

$$(4)\qquad \varepsilon_F=f_1\varepsilon_x+f_2\varepsilon_y$$

從テ

$$(5)\qquad \varepsilon_F^2=f_1^2\varepsilon_x^2+2f_1f_2\varepsilon_x\varepsilon_y+f_2^2\varepsilon_y^2$$

然ルニ

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x\varepsilon_y &= \alpha_1\beta_1\varepsilon_1^2+\alpha_2\beta_2\varepsilon_2^2+\ldots\ldots \\ &+\alpha_1\beta_2\varepsilon_1\varepsilon_2+\alpha_1\beta_3\varepsilon_1\varepsilon_3+\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

ε_1^2, ε_2^2, ...ノ平均ノ値ハ之ヲm^2ニ等シキモノト考フルコトヲ得ベク，$\alpha_1\beta_2\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\alpha_1\beta_3\varepsilon_1\varepsilon_3$,......等ノ和ハ零ニ等シ．故ニ$F$及$x$, yノ均方誤差ヲ夫々M, m_x, m_yトスレバ

$$(7)\qquad M^2=(f_1m_x)^2+(f_2m_y)^2+2f_1f_2[\alpha\beta]m^2$$

然ルニ

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} m^2_x &= [\alpha\alpha]m^2 \\ m^2_y &= [\beta\beta]m^2 \end{aligned} \right.$$

ナルヲ以テ

$$(9)\qquad M^2=m^2\left\{f_1^2[\alpha\alpha]+f_2^2[\beta\beta]+2f_1f_2[\alpha\beta]\right\}$$

或ハ

$$M^2=m^2\left\{\frac{f_1^2}{[aa.1]}+\frac{f_2^2}{[bb.1]}+\frac{2f_1f_2}{[ab.1]}\right\}\qquad [509]$$

又

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} [\alpha\alpha] &= \frac{[bb]}{D} \\ [\beta\beta] &= \frac{[aa]}{D} \qquad D=\begin{vmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{vmatrix} \\ [\alpha\beta] &= \frac{-[ab]}{D} \end{aligned} \right.$$

ナルヲ以テ，PヲFノ輕重率トスレバ$\dfrac{M^2}{m^2}=\dfrac{1}{P}$ニシテ

$$\frac{1}{P}=\frac{1}{D}\left\{f_1^2[bb]+f_2^2[aa]-2f_1f_2[ab]\right\}\qquad [510]$$

又ハ

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{P} &= \frac{f_1^2}{[aa]}+\frac{(f_2.1)^2}{[bb.1]} \\ (f_2.1) &= f_2-\frac{[ab]}{[aa]}f_1 \end{aligned} \right\}\qquad [511]$$

同樣ニ三個ノ未知量x, y, zヲ以テ

$$(11)\qquad F=f_1x+f_2y+f_3z$$

ナルトキハ

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{P} &= \frac{f_1^2}{[aa]}+\frac{(f_2.1)^2}{[bb.1]}+\frac{(f_3.2)^2}{[cc.2]} \\ (f_3.1) &= f_3-\frac{[ac]}{[aa]}f_1 \\ (f_3.2) &= (f_3.1)-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}(f_2.1) \end{aligned} \right\}\qquad [512]$$

424. 非一次函數. 觀測量ト未知量ノ間ノ關係ガ一次函數ヲ爲サヾルトキハ調整ニ依リテ一次誤差等式ニ改ムルコトヲ得ベシ．

今觀測セラレタル量ヲL_1, L_2, ...L_nトシ未知量X及Yノ函數F及觀測誤差vトハ次ノ如キ關係ヲ有スルモノトス．

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} v_1 &= F_1(X,\ Y)-L_1 \\ v_2 &= F_2(X,\ Y)-L_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= F_n(X,\ Y)-L_n \end{aligned} \right.$$

又ハ一般ニ

(2)　$$F(X,\ Y)-(L+v)=0$$

今若シ (X) 及 (Y) ヲ夫々 X 及 Y ノ近似値, x 及 y ヲ夫々其更正値トスレバ勿論

(3)　$$\begin{cases} X=(X)+x \\ Y=(Y)+y \end{cases}$$

從テ

(4)　$$\begin{cases} F(X,\ Y)=F\left\{(X)+x,\ (Y)+y\right\} \\ \qquad =F\left\{(X),\ (Y)\right\}+\dfrac{\partial F}{\partial X}x+\dfrac{\partial F}{\partial Y}y \end{cases}$$

(4) ヲ (2) ニ代用スレバ

(5)　$$F\left\{(X),\ (Y)\right\}+\frac{\partial F}{\partial X}x+\frac{\partial F}{\partial Y}y-(L+v)$$

今

(6)　$$\frac{\partial F}{\partial(X)}=a,\ \frac{\partial F}{\partial(Y)}=b,\ F\left\{(X),\ (Y)\right\}-L=l$$

トスレバ

$$v=ax+by+l \qquad [513]$$

是レ一次ノ誤差等式ヲ爲ス.

例118. $X,\ Y,\ldots\ldots$ ヲ獨立シテ觀測セラレタル量 $l_1,\ l_2,\ldots\ldots$ ノ函數トシ $X,\ Y,\ldots\ldots$ ノ函數 $F=f(X,\ Y,\ldots\ldots)$ ノ輕重率ヲ見出セ.

前ノ如ク $(X),\ (Y),\ldots\ldots$ ヲ $X,\ Y,\ldots\ldots$ ノ近似値, $x,\ y,\ldots\ldots$ ヲ夫々其ノ更正量トスレバ [395] ニ示セルガ如ク

(1)　$$\begin{cases} dF=G_1x+G_2y+\ldots\ldots \\ \qquad G_1=\dfrac{\partial F}{\partial(X)},\quad G_2=\dfrac{\partial F}{\partial(Y)},\ldots\ldots \end{cases}$$

然ルニ $x,\ y,\ldots\ldots$ ハ互ニ獨立シタルモノニ非ズシテ

(2)　$$\begin{cases} [aa]x+[ab]y+\ldots\ldots+[al]=0 \\ [ab]x+[bb]y+\ldots\ldots+[bl]=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

又 $x,\ y$ 等ハ

(3)　$$x=[\alpha l],\ y=[\beta l]\ldots\ldots$$

ヲ以テ表ハスコトヲ得ベク, $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots\ldots,\ \beta_1,\ \beta_2\ldots\ldots$ ハ $a_1,\ b_1,\ldots\ldots a_2,\ b_2,\ldots\ldots$ ノ函數トス. 故ニ (1) ハ

(4)　$$dF=(G_1\alpha_1+G_2\beta_1+\ldots)l_1+(G_1\alpha_2+G_2\beta_2+\ldots)^2+\ldots$$

故ニ F ノ輕重率ヲ u_F トスレバ

(5)　$$\begin{cases} u_F=(G_1\alpha_1+G_2\beta_1+\ldots)^2+(G_1\alpha_2+G_2\beta_2+\ldots)^2+\ldots \\ \quad =G_1^2[\alpha\alpha]+2G_1G_2[\alpha\beta]+\ldots\ldots \\ \qquad +G_2^2[\beta\beta]+\ldots\ldots \end{cases}$$

(5) ハ又之ヲ次ノ如ク表ハスコトヲ得

(6)　$$u_F=G_1Q_1+G_2Q_2+\ldots\ +G_nQ_n$$

茲ニ

(7)　$$\begin{cases} Q_1=[\alpha\alpha]G_1+[\alpha\beta]G_2+\ldots\ldots \\ Q_2=[\alpha\beta]G_1+[\beta\beta]G_2+\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots \end{cases}$$

又ハ

$$(8)\quad \begin{cases} G_1=[aa]Q_1+[ab]Q_1+\ldots\ldots \\ G_2=[ab]Q_2+[bb]Q_2+\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

從テ

$$(9)\quad u_F=[GQ]$$

425. **氣壓計示度ノ調整.** h ヲ三角準測ニ依リテ測定セラレタル海面上ノ高サ,B ヲ一樣ニ精密ナル氣壓ノ觀測示度トスレバ h ト B トハ

$$(1)\quad h=Y\log\frac{X}{B}$$

ナル關係アリ. 玆ニ Y 及 X ハ定數ニシテ,此外溫度及濕度並ニ重力加速度又ハ高サノ影響アレドモ孰レモ其量小ナルヲ以テ暫ク之ヲ除外ス.

(1) 式ハ亦次ノ如ク表ハスコトヲ得

$$(2)\quad \log X-\log B=\frac{h}{B}$$

今高サノ知ラルヽ九個所ノ測點ニ於テ測リタル氣壓計ノ示度ハ次ノ如シ.

測點	h (米)	B (粍)
1	120,2	751,18
2	225,1	742,37

測點	h (米)	B (粍)
3	270,6	733,50
4	347,6	731,27
5	406,7	726,99
6	492,4	718,16
7	708,1	700,48
8	733,5	697,64
9	768,9	695,23

測點第一及第九ニ於ケル結果ヨリ (X) 及 (Y) ヲ X, Y ノ近似値トスレバ

$$(3)\quad \begin{cases} \log(X)-\log 751,18=\dfrac{120,2}{(Y)} \\ \log(X)-\log 695,23=\dfrac{768,9}{(Y)} \end{cases}$$

(3) ヲ解ケバ

$$(4)\quad \begin{cases} (X)=762,03 \\ (Y)=192,98 \end{cases}$$

ヲ得. 403 ノ (1) 式ヲ得ル爲ニ

$$(5)\quad \frac{h}{Y}=\log\frac{X}{B}$$

又ハ

$$(6)\quad \frac{X}{B}=10^{-\frac{h}{Y}}$$

或ハ

$$B-X10^{-\frac{h}{Y}}=0 \tag{7}$$

即チ $F(X,\ Y)=X10^{-\frac{h}{Y}}$ ナリ. 403 ノ (6) ニ對シテ

$$\left\{\begin{aligned} a&=\frac{\partial(X10^{-\frac{h}{Y}})}{\partial X}=10^{-\frac{h}{Y}} \\ b&=\frac{\partial(X10^{-\frac{h}{Y}})}{\partial Y}=X10^{-\frac{h}{Y}}\frac{h}{Y^2}\frac{1}{M} \\ l&=(X)10^{-\frac{h}{(Y)}}-B=(B)-B. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

(a), (b) ノ計算ニ於テ X, Y ノ代リニ (X), (Y) ヲ用フルヲ要ス. (8) ノ對數ヲ取レバ

$$\left\{\begin{aligned} &\log a=-\frac{h}{(Y)} \quad \text{又ハ} \quad \log\frac{1}{a}=\frac{h}{(Y)} \\ &\log b=-\frac{h}{(Y)}+\log\frac{(X)h}{M(Y)^2}=\log a+\log\frac{(X)h}{(Y)^2M} \\ &\log(l+B)=\log(X)-\frac{h}{(Y)}=\log(X)+\log a \end{aligned}\right. \tag{9}$$

今觀測ノ結果ヨリ a, b 及 l ヲ表示セバ次ノ如シ

測點	a	b	l
1	+0,986	+0,00056	0,00
2	+0,973	+0,00103	−0,53
3	+0,968	+0,00123	−0,68
4	+0,959	+0,00157	−0,20

測點	a	b	l
5	+0,953	+0,00182	−1,06
6	+0,943	+0,00219	+0,38
	+0,919	+0,00307	−0,20
8	+0,916	+0,09317	+0,53
9	+0,912	+0,00331	0,00

誤差等式ハ即チ

$$\left\{\begin{aligned} v_1&=0{,}986x+0{,}00056y'+0{,}00 \\ v_2&=0{,}973x+0{,}00103y'-0{,}53 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ v_9&=0{,}912x+0{,}00331y'+0{,}00 \end{aligned}\right. \tag{10}$$

又ハ

$$\left\{\begin{aligned} v_1&=0{,}986x+0{,}056\left(\frac{y'}{100}\right)+0{,}00 \\ v_2&=0{,}973x+0{,}103\left(\frac{y'}{100}\right)-0{,}53 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ v_9&=0{,}912x+0{,}331\left(\frac{y'}{100}\right)+0{,}00 \end{aligned}\right. \tag{11}$$

トナル. 今

$$\frac{y'}{100}=y \tag{12}$$

トシ,係數表ヲ作レバ

$$a+b+l+s=0 \tag{13}$$

測點	a	b	l	s
1	+0,986	+0,056	0,000	−1,042
2	+0,978	+0,103	−0,530	−0,546
3	+0,968	+0,123	−0,680	−0,411
4	+0,959	+0,157	−0,200	−0,916
5	+0,953	+0,182	−1,060	−0,075
6	+0,943	+0,219	+0,380	−1,542
7	+0,919	+0,307	−0,200	−1,026
8	+0,916	+0,317	+0,530	−1,763
9	+0,912	+0,331	0,000	−1,243
和	+8,529	+1,795	−1,760	−8,564

之ヨリ $[aa]$, $[bb]$ 等ヲ見出セバ

$$[aa]=8,0884$$
$$[bb]=0,4383$$
$$[ll]=2,3722$$
$$[ss]=10,4812$$
$$[(a+b)^2]=11,8862$$
$$[(a+l)^2]=7,0287$$
$$[(b+l)^2]=2,4655$$

ヲ得. 故ニ

$[aa]=8,0884$	$[aa]=8,0884$	$[aa]=8,0884$
$[bb]=0,4383$	$[ll]=2,3722$	$[ss]=10,4812$
$-8,5267$	$-10,4606$	$-18,5696$
$[(a+b)^2]=+11,8862$	$[(a+l)^2]=+7,0287$	$[(a+s)^2]=+2,4655$
$+3,3595$	$-3,4319$	$-16,1014$
$[ab]=+1,6798$	$[al]=-1,7160$	$[as]=-8,0520$
	$[bb]=0,4383$	$[bb]=0,4383$
	$[ll]=2,3722$	$[ss]=10,4812$
	$-2,8105$	$-10,9195$
	$[(b+l)^2]=+2,4655$	$[(b+s)^2]=+7,0287$
	$-0,3450$	$-3,8908$
	$[bl]=-0,1725$	$[bs]=-1,9454$
		$[ll]=2,3722$
		$[ss]=10,4812$
		$-12,8534$
		$[(l+s)^2]=+11,8862$
		$-0,9672$
		$[ls]=-0,4836$

從テ

	a	b	l	s	檢算
a	+8,0884	+1,6798	−1,7160	−8,0520	+2
b		+0,4383	−0,1725	−1,9454	+2
l			+2,3722	−0,4836	+1
s				+10,4812	+2

更ニ對數ニテ正等式ヲ解ケバ次ノ如シ.

	a]	b]	l]	s]	檢算
$[a$	+8,088	+1,680	−1,716	−8,052	0,000
$log[a$	0,90784	0,22531	0,23452	0,90590	
$log\left(\frac{[ab]}{[aa]}\right)[a$		9,54278	9,55199	0,22337	
$log\left(\frac{[al]}{[aa]}\right)[a$			9,56120	0,23258	
$[b$		+0,438	−0,172	−1,946	0,000
$-\left(\frac{[ab]}{[aa]}\right)[a$		−0,349	+0,356	+1,673	
$[l$			+2,372	−0,484	0,000
$-\left(\frac{[al]}{[aa]}\right)[a$			−0,364	−1,708	
		b.1]	l.1]	s.1]	
$y=-\frac{0{,}180}{0{,}089}$	$[b$	+0,089	+0,184	−0,273	0,000
$=-2{,}07$	$log[b$	8,94939	9,26482	9,43616	
	$log\left(\frac{[bl.1]}{[bb.1]}\right)[b$		9,58025	9,75159	
	$[l$		+2,008	−2,192	0,000
	$-\left(\frac{[bl.1]}{[bb.1]}\right)[b$		−0,380	+0,564	
			l.2]	s.2]	
		$[l$	+1,628	−1,628	0,000

同様ニ $x=+0{,}642$ ヲ得.

又 $[vv]=[ll.2]=1{,}627$

故ニ $m=\sqrt{\frac{1{,}627}{9-2}}=\pm 0{,}48$

且ツ

$p_x=1{,}644$

$p_y=0{,}089$

故ニ

$$m_x=\frac{m}{\sqrt{p_x}}=\pm 0{,}38$$

$$m_y=\frac{m}{\sqrt{p_y}}=\pm 1{,}62$$

從テ

$x=+0{,}64\pm 0{,}38$

$y=-2{,}07\pm 1{,}62 \qquad y'=-207\pm 162$

近似値トシテ

$(X)=762{,}03 \qquad (Y)=19298$

故ニ

$X=762{,}67\pm 0{,}38 \qquad Y=19091\pm 162$

求メラルヽ公式ハ

$$h=19091 log\frac{762{,}67}{B}$$

第五節　條件附觀測ノ調整

426. **條件等式.** 前節論ゼシ所ノ量ハ直接ニ觀測シタルモノナルカ又ハ觀測シタル量ノ函數ニシテ互ニ獨立相關セザルモノナリキ。然レドモ若シ是等諸量ガ互ニ獨立シタルモノニ非ズシテ精密ニ或

ル關係又ハ條件ヲ滿足セシメザルベカラザルトキハ名ケテ**條件附觀測**ト云フ.

條件附觀測ニ關スル問題ハ凡テ前節ノ理ニ依リテ解クコトヲ得.

$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ ヲ夫々相等シキ輕重率ヲ以テ直接ニ觀測セラレタル量 $l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$ ノ最モ眞ニ近キ値トス. $x_1, x_2, \ldots\ldots$ ニ依リテ精密ニ滿足セラルベキ r 個ノ條件ヲ一次ノ形ニシタル等式ニ依リテ次ノ如キ條件等式ニ依テ表シ得ルモノトス.

$$r\left\{\begin{array}{l} a_0+a_1x_1+a_2x_2+\ldots\ldots+a_nx_n=0 \\ b_0+b_1x_1+b_2x_2+\ldots\ldots+b_nx_n=0 \\ c_0+c_1x_1+c_2x_2+\ldots\ldots+c_nx_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underbrace{r_0+r_1x_1+r_2x_2+\ldots\ldots+r_nx_n}_{n\text{ 個ノ }x}=0 \end{array}\right\} \quad [514]$$

玆ニ $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots\ldots$ ハ凡テ既知ノ定數ニシテ,且ツ條件等式ノ數 r ハ最モ眞ニ近キ値 x ノ數 n ヨリ小ナリトス.

今 $v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots v_n$ ヲ夫々觀測ノ値 $l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$ ノ更正量トスレバ一般ニ

(1) $\qquad x-l=v$

ニシテ從テ x ノ代リニ $l+v$ ヲ代用スレバ [396] ハ

$$r\left\{\begin{array}{l} a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+\ldots\ldots+a_nv_n+w_1=0 \\ b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3+\ldots\ldots+b_nv_n+w_2=0 \\ c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+\ldots\ldots+c_nv_n+w_3=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underbrace{r_1v_1+r_2v_2+r_3v_3+\ldots\ldots+r_nv_n}_{n}+w_n=0 \end{array}\right\} \quad [515]$$

トナル. 此ニ

$$\left.\begin{array}{l} w_1=a_0+[al] \\ w_2=b_0+[bl] \\ w_3=c_0+[cl] \\ \ldots\ldots\ldots \\ w_n=r_0+[rl] \end{array}\right\} \quad [516]$$

ニシテ凡テ既知量ナリ. [515] ヲ**更正條件等式**ト呼ブ.

[515] ニ依リテ表ハサレタル更正量ノ最モ近キ値ハ $[vv]$ ヲ最小ナラシムルモノナラザルベカラズ. 之ガ爲ニハ直接法ト間接法トノ二法アリ.

427. 直接解法又ハ獨立未知量法. 條件等式ノ數 r ハ未知量ノ數 n ヨリ少キヲ要シ,且ツ [514] 又ハ [515] ニ依リテ示サレタル條件等式ノ孰レモ互ニ獨立シテ相關セザルモノトス.

今 r 個ノ未知更正量ハ殘リノ $n-r$ 個ノ未知量ヲ

以テ表ハスコトヲ得ベク,從テ $v_1, v_2, \ldots . v_r$ ヲ是等個ノ未知量トスレバ

$$r\left\{\begin{array}{l} v_1=A_1v_{r+1}+A_2v_{r+2}+\ \ldots..+A_{n-r}v_n \\ v_2=B_1v_{r+1}+B_2v_{r+2}+\ldots\ldots+B_{n-r}v_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_r=\underbrace{H_1v_{r+1}+H_2v_{r+2}+\ \ldots..+H_{n-r}v_n}_{n-r\text{ 個ノ未知量}} \end{array}\right\} \quad [517]$$

之ニ $n-r$ 個ノ獨立未知量ヲ並列スレバ

$$n-r\left\{\begin{array}{l} v_{r+1}=v_{r+1}\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{r+2}=\ldots\ldots v_{r+2}\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underbrace{v_n=\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ v_n}_{n-r\text{ 個ノ未知量}} \end{array}\right\} \quad [518]$$

[517] 及 [518] ヲ併セテ $r+(n-r)=n$ 個ノ誤差等式ガ $n-r$ 個ノ獨立未知量ヲ有スルヲ以テ最小自乘法ノ理ニ依リ之ヲ解クトキハ單位輕重率ノ均方誤差 m ハ

$$m=\sqrt{\frac{[vv]}{\{r+(n-r)\}-(n-r)}}=\sqrt{\frac{[vv]}{r}} \quad [519]$$

428. **條件等式ヲ有スル函數ノ最小.** n 個ノ自變數 $x, y, z, \ldots..$ ヲ有スル一ノ函數 Ω アリテ

(1) $\Omega=F(x,\ y,\ z,\ \ldots..)$

次ニ示セル r 個ノ條件等式ヲ滿足シ

$$(2)\qquad \left.\begin{array}{l} \varphi(x,\ y,\ z,\ldots\ldots)=0 \\ \psi(x,\ y,\ z,\ldots\ .)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}r\text{ 個}$$

且ツ最大又ハ最小ナルヲ要スルモノトス. 勿論 n ハ r ヨリ大ナルモノトス.

最小ノ條件トシテハ全微分 $d\Omega$ ガ零ニ等シキヲ要ス.

$$d\Omega=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz+\ldots\ldots=0 \quad [520]$$

若シ此ニ他ノ條件等式ナカリセバ一般ニ $d\Omega$ ヲ零ニ等シカラシムル爲ニハ dx, dy, dz 等ノ係數ヲ凡テ零ニ等シカラシムルヨリ外ニ途ナシ. 然ルニ (2) 式ヲ微分スルトキハ

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz+\ldots\ldots=0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial z}dz+\ldots\ldots=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad [521]$$

[521] ニ依リテ表ハサレタル n 個ノ微分 $dx, dy, dz,\ldots\ldots$ ノ中 r 個ハ他ノ $n-r$ 個ノ微分ヲ以テ表ハスコトヲ得ベク,之ヲ [520] ニ代用スレバ是等ノ $n-r$ 個ノ微分ハ互ニ獨立セルモノニシテ其係數ハ各々之ヲ零ニ等シカラシメザルベカラズ. r 個ノ微分ノ消去ハ

不定係數ノ法ニ依リテ行フコトヲ得ベク,即チ不定係數又ハ相關因數$k_1, k_2, \ldots\ldots k_n$ヲ[403]ニ乘ジ,之ヲ[402]ニ加フレバ

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial x}+k_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+k_2\frac{\partial\psi}{\partial x}+\ldots\ldots=0\\&\frac{\partial F}{\partial y}+k_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}+k_2\frac{\partial\psi}{\partial y}+\ldots\ldots=0\\&\frac{\partial F}{\partial z}+k_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}+k_2\frac{\partial\psi}{\partial z}+\ldots\ldots=0\\&\ldots\ldots\ \ldots\ldots\end{aligned}\right\}\qquad[522]$$

[522]ノ等式ノ數ハ自變數$x, y, z, \ldots\ldots$ノ數ニ等シクnナルヲ以テ之ニ(2)ニ示サレタルr個ノ條件等式ヲ加フレバr個ノ相關因數及n個ノ未知量ヲ定メ得ベキ$n+r$個ノ獨立等式ヲ得.

之ヲ要スルニ條件等式$\varphi(x, y, z)=0$, $\psi(x, y, z)=0$ナル條件等式ニ對シテ一ノ函數$\Omega=F(x, y, z)$ヲ最小ナラシメンニハ夫々條件等式ニ不定係數k_1, k_2ヲ乘ジテ之ヲ原函數ニ加ヘ

$$\Omega'=F(x, y, z)+k_1\varphi(x, y, z)+k_2\psi(x, y, z)$$

トシテ此新函數Ω'ノ最小ヲx, y, zニ對シテ定ムルヲ要ス.

429. 間接解法又ハ相關因數法. 條件等式中ニ表ルヽ未知量ガ多少紛糾シタル形ヲ爲セルトキハ直接解法ハ非常ニ困難トナル. 從テ直接r個ノ未知量ヲ消去スル代リニ間接ニ不定係數又ハ相關因數ヲ乘ジテ間接ニ之ヲ解クヲ便トス.

今假リニ四個ノ未知量x_1, y_2, x_3, x_4ガ一樣ナル精度ヲ以テ測定セラレタルモノトシ,3個ノ條件等式ヲ有スルモノトス. 但シ一般ニハn個ノ未知量トr個ノ條件等式ヲ有シテ$n>r$ナルモノトス.

$$\left.\begin{aligned}&a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0\\&b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=0\\&c_0+c_1x_1+c_2x_2+c\,x_3+c_4x_4=0\end{aligned}\right\}\qquad[523]$$

今$x_1, x_2, \ldots\ldots$ノ實測ノ値ハ$l_1, l_2, \ldots\ldots$ニシテ

$$\left.\begin{aligned}&x_1=l_1+v_1\\&x_2=l_2+v_2\\&x_3=l_3+v_3\\&x_4=l_4+v_4\end{aligned}\right\}\qquad[524]$$

トシ之ヲ[483]ニ代用シ

$$(1)\qquad\left\{\begin{aligned}&a_0+[al]=w_1\\&b_0+[bl]=w_2\\&c_0+[cl]=w_3\end{aligned}\right.$$

トスレバ

$$\text{一般ニ}\ r\ \text{個}\left\{\begin{aligned}&a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4+w_1=0\\&b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3+b_4v_4+w_2=0\\&\underbrace{c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+c_4v_4}_{\text{一般ニ}\ n\ \text{個}}+w_3=0\end{aligned}\right\}\qquad[525]$$

[525] ハ又之ヲ次ノ如ク表ハスコトヲ得.

$$\left.\begin{aligned}[av]&=-w_1\\ [bv]&=-w_2\\ [cv]&=-w_3\end{aligned}\right\}\qquad [525']$$

此外基礎條件トシテ

$$(2)\qquad [vv]=v_1^2+v_2^2+v_3^2+v_4^2=\text{最小}$$

[525] 又ハ [525′] ニ不定係數 $-2k_1$, $-2k_2$, $-2k_3$ ヲ乘ジ之ヲ (2) ニ加フレバ

$$\left.\begin{aligned}\Omega'=v_1^2&-2v_1(a_1k_1+b_1k_2+c_1k_3)\\ +v_2^2&-2v_2(a_2k_1+b_2k_2+c_2k_3)\\ +v_3^2&-2v_3(a_3k_1+b_3k_2+c_3k_3)\\ +v_4^2&-2v_4(a_4k_1+b_4k_2+c_4k_4)\\ &-2(w_1k_1+w_2k_2+w_3k_3)\end{aligned}\right\}\qquad [526]$$

[526] ヲ v_1, v_2, v_3, v_4 ニ就テ微分シテ之ヲ零ニ等シクスレバ

$$\left.\begin{aligned}v_1&=a_1k_1+b_1k_2+c_1k_3\\ v_2&=a_2k_1+b_2k_2+c_2k_3\\ v_3&=a_3k_1+b_3k_2+c_3k_3\\ v_4&=a_4k_1+b_4k_2+c_4k_3\end{aligned}\right\}\qquad [527]$$

[527] ヲ [525] ニ代用シ, k_1, k_2, k_3 ニ就テ配列スレバ

$$\left.\begin{aligned}[aa]k_1+[ab]k_2+[ac]k_3+w_1&=0\\ [ab]k_1+[bb]k_2+[bc]k_3+w_2&=0\\ [ac]k_1+[bc]k_2+[cc]k_3+w_3&=0\end{aligned}\right\}\qquad [528]$$

是等ノ正等式ヨリ k_1, k_2, k_3 ヲ見出シ,之ヲ [527] ニ代用スレバ更正量 v ヲ得ベシ. 而シテ [524] ヨリ最モ眞ニ近キ値 x_1, x_2,...... ヲ得.

斯クシテ更ニ $[vv]$ ヲ見出セバ一回ノ觀測ノ均方誤差ハ

$$m=\sqrt{\frac{[vv]}{r}}\qquad [529]$$

[527] ノ各式ノ自乘ヨリ

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}[vv]=[aa]k_1k_2&+2[ab]k_1k_2+2[ac]k_1k_3\\ &+[bb]k_2k_2+2[bc]k_2k_3\\ &\qquad+[cc]k_3k_3\end{aligned}\right.$$

[528] ノ三等式ニ夫々 k_1, k_2, k_3 ヲ乘ジテ之ヲ加フレバ恰カモ (3) ニ等シク

$$[vv]=-k_1w_1-k_2w_2-k_3w_3=-[wk]\qquad [530]$$

或ハ

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}[vv]=&\frac{([aa]k_1+[ab]k_2+[ac]k_3)^2}{[aa]}\\ &+\frac{([bb.1]k_2+[bc.1]k_3)^2}{[bb.1]}+\frac{([cc.2]k_3)^2}{[cc.2]}\end{aligned}\right.$$

[528] ノ w ヲ插入スレバ

$$[vv]=\frac{w_1^2}{[aa]}+\frac{[w_2.1]^2}{[bb.1]}+\frac{[w_3.2]^2}{[cc.2]}\qquad [531]$$

此ノ計算ハ正等式ノ消去ニ依ルコトヲ得. 卽チ

$$\underline{[aa]}k_1+[ab]k_2+[ac]k_3+w_1$$

$$\underline{[bb]}k_2+[bc]k_3+w_2$$

$$\underline{[cc]}k+w_3$$

$$\underline{0}$$

$$\underline{[bb.1]}k_2+[bc.1]k_3+[w_2.1]$$

$$\underline{[cc.1]}k_3+[w_3.1]$$

$$\underline{[0.1]}$$

$$\underline{[cc.1]}k_2+[w_3.2]$$

$$\underline{[0.2]}$$

$$\underline{[0.3]}$$

最後ノ $[0.3]=-[vv]$ ナリ.

430. **相異ナル輕重率ノ間接解法.** 觀測ガ異ナル輕重率 p_1, p_2, p_3, p_4 ヲ以テ行ハレタランニハ最小條件トシテ勿論

$$[pvv]=\text{最小}$$

ナラザルベカラズ. 從テ正等式ハ次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{aa}{p}\right]k_1+\left[\frac{ab}{p}\right]k_2+\left[\frac{ac}{p}\right]k_3+w_1=0\\ \left[\frac{ab}{p}\right]k_1+\left[\frac{bb}{p}\right]k_2+\left[\frac{bc}{p}\right]k_3+w_2=0\\ \left[\frac{ac}{p}\right]k_1+\left[\frac{bc}{p}\right]k_2+\left[\frac{cc}{p}\right]k_3+w_3=0\end{aligned}\right\}\quad[532]$$

而シテ更正公式ハ

$$\left.\begin{aligned}v_1&=\frac{a_1}{p_1}k_1+\frac{b_1}{p_1}k_2+\frac{c_1}{p_1}k_3\\ v_2&=\frac{a_2}{p_2}k_1+\frac{b_2}{p_2}k_2+\frac{c_2}{p_2}k_3\\ v_3&=\frac{a_3}{p_3}k_1+\frac{b_3}{p_3}k_2+\frac{c_3}{p_3}k_3\end{aligned}\right\}\quad[533]$$

一回觀測ノ單位輕重率ノ均方誤差ハ

$$m=\sqrt{\frac{[pvr]}{r}}\quad[534]$$

又若シ輕重率ノ平方根ヲ以テ始メヨリ a, b, c 等ヲ除シ恰カモ單位輕重率ノ場合ト同ジク取扱フトキハ次ノ如キ條件等式ヲ得.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{a_1}{\sqrt{p_1}}v_1\sqrt{p_1}+\frac{a_2}{\sqrt{p_2}}v_2\sqrt{p_2}+\frac{a_3}{\sqrt{p_3}}v_3\sqrt{p_3}\\ &\qquad+\frac{a_4}{\sqrt{p_4}}v_4\sqrt{p_4}+w_1=0\\ &\frac{b_1}{\sqrt{p_1}}v^1\sqrt{p_1}+\frac{b_2}{\sqrt{p_2}}v_2\sqrt{p_2}+\frac{b_3}{\sqrt{p_3}}v_3\sqrt{p}\\ &\qquad+\frac{b_4}{\sqrt{p_4}}v_4\sqrt{p_4}+w_2=0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\quad[535]$$

或ハ $\frac{a_1}{\sqrt{p_1}}=a_1'$, $\frac{a_2}{\sqrt{p_2}}=a_2',\ldots\ldots v_1\sqrt{p_1}=v_1'$, $v_2\sqrt{p_2}=v_2',\ldots\ldots$ トセバ

$$\left.\begin{aligned}&a_1'v_1'+a_2'v_2'+a_3'v_3'+a_4'v_4'+w_1=0\\ &b_1'v_1'+b_2'v_2'+b_3'v_3'+b_4'v_4'+w_2=0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\quad[535']$$

故ニ正等式ハ

$$\left.\begin{aligned}[a_1'a_1']k_1+[a_1'b_1']k_2+[a_1'c_1']k_3+w_1=0\\ [a_1'b_1']k_1+[b_1'b_1']k_2+[b_1'c_1']k_3+w_2=0\\ [a_1'c_1']k_1+[b_1'c_1']k_2+[c_1'c_1']k_3+w_3=0\end{aligned}\right\}\quad[536]$$

ニシテ更正公式ハ

$$\left.\begin{aligned}v_1'&=a_1'k_1+b_1'k_2+c_1'k_3\\ v_2'&=a_2'k_1+b_2'k_2+c_2'k_3\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\quad[537]$$

又 $v_1=\dfrac{v_1'}{\sqrt{p_1}}$ 等ナルヲ以テ

$$[pvv]=[v'v']\qquad[538]$$

例 119. 414 例 109 ニ示セル實測角ノ更正角ノ値ヲ獨立未知量法並ニ相關因數法ニ依リテ見出セ.

v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 ヲ夫々實測角 l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 ノ更正角トセバ條件等式ハ

$$(1)\qquad\left\{\begin{aligned}l_4+v_4&=l_3+v_3-(l_1+v_1)\\ l_5+v_5&=l_3+v_3-(l_2+v_2)\end{aligned}\right.$$

又ハ l ノ値ヲ用ヒテ

$$(2)\qquad\left\{\begin{aligned}v_1-v_3+v_4&=-0{,}76\\ v_2-v_3+v_5&=-1{,}66\end{aligned}\right.$$

及

$$(3)\qquad 5v_1^2+7v_2^2+4v_3^2+7v_4^2+4v_5^2=\text{最小}$$

或ハ v_4 及 v_5 ノ値ヲ始ノ兩式ヨリ見出シテ最小等式ニ挿入スレバ

$$(4)\qquad\left\{\begin{aligned}&5v_1^2+7v_2^2+4v_3^3+7(v_1-v_3+0{,}76)^2\\ &\qquad+4(v_2-v_3+1{,}66)^2=\text{最小}\end{aligned}\right.$$

之ヲ v_1, v_2, v_3 ニ就テ微分シテ零ニ等シカラシムレバ正等式ヲ得

$$(5)\qquad\left\{\begin{aligned}12v_1\qquad-7v_3&=-5{,}32\\ 11v_2-4v_3&=-6{,}64\\ -7v_1-4v_2+15v_3&=11{,}96\end{aligned}\right.$$

之ヨリ

$$v_1=-0{,}05'',\quad v_2=-0{,}36'',\quad v_3=+0{,}68''$$

又條件等式ヨリ

$$v_4=-0{,}03'',\quad v_5=-0{,}62''$$

又條件等式 (2) 及 [532] ヨリ不定係數等式ハ次ノ如シ

$$(6)\qquad\left\{\begin{aligned}0{,}59k_1+0{,}25k_2&=-0{,}76\\ 0{,}25k_1+0{,}64k_2&=-1{,}66\end{aligned}\right.$$

(6) ヨリ

$$k_1=-0{,}23,\quad k_2=-2{,}49$$

而シテ [533] ヨリ

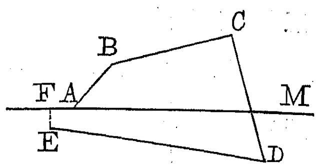
$$k_1=5v_1\qquad v_1=-0{,}05''$$

$$k_2=7v_2\qquad v_2=-0{,}36''$$

$$-k_1-k_2=4v_3 \qquad v_3=+0,68''$$
$$k_1=7v_4 \qquad v_4=-0,03''$$
$$k_2=4v_5 \qquad v_5=-0,62''$$

例120. 第四百三十四圖ニ示セルガ如ク,Aヨリ始メテ$ABCDE$ナル區域ノ測量ヲ行ヒ,各邊AB, BC, CD, DEノ長サ及方向ヲ測定シEニ終レリ. AMハ子午線ノ方向ニシテAF, FEハ夫々緯距及經距ノ誤差ヲ表ハシ,EハAト重ナルベク,EAハ閉差ヲ爲ス.

第四百三十四圖



今a_1, a_2,……及θ_1, θ_2,……ヲ夫々邊AB, BC等ノ測定シタル長サ及ビ方位角トシ,x_1, x_2,……及y_1, y_2,……ヲ夫々此等ノ最モ眞ニ近キ更正量トス. 故ニ調整シタル緯距及ビ經距ハ全體ニ於テ零ニ等シカルベク

$$(1)\quad\begin{cases}(a_1+x_1)\cos(\theta_1+y_1)+(a_2+x_2)\cos(\theta_2+y_2)+\ldots=0\\(a_1+x_1)\sin(\theta_1+y_1)+(a_2+x_2)\sin(\theta_2+y_2)+\ldots=0\end{cases}$$

又ハ之ヲ一次式ノ形ニ改ムレバ條件等式ハ

$$(2)\quad\begin{cases}x_1\cos\theta_1-a_1y_1\sin\theta_1+x_2\cos\theta_2-a_2y_2\sin\theta_2+\ldots\ldots\\\qquad\qquad+[a\cos\theta]=0\\x_1\sin\theta_1+a_1y_1\cos\theta_1+x_2\sin\theta_2+a_2y_2\cos\theta_2+\ldots\ldots\\\qquad\qquad+[a\sin\theta]=0\end{cases}$$

及

$$(3)\qquad [px^2]+[qy^2]=\text{最小}$$

茲ニpハxノ輕重率ニシテqハyノ輕重率ヲ表ハス. 故ニ不定係數等式ハ

$$(4)\quad\begin{cases}\cos\theta_1k_1+\sin\theta_1k_2=p_1x_1\\-a_1\sin\theta_1k_1+a_1\cos\theta_1k_2=q_1y_1\end{cases}$$

正等式ハ

$$(5)\quad\begin{cases}\left\{\left[\frac{\cos^2\theta}{p}\right]+\left[\frac{a^2\sin^2\theta}{q}\right]\right\}k_1+\left\{\left[\frac{\sin\theta\cos\theta}{p}\right]\right.\\\qquad\left.-\left[\frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{q}\right]\right\}k_2=-[a\cos\theta]\\\left\{\left[\frac{\sin\theta\cos\theta}{p}\right]-\left[\frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{q}\right]\right\}k_1+\left\{\left[\frac{\sin^2\theta}{p}\right]\right.\\\qquad\left.+\left[\frac{a^2\cos^2\theta}{q}\right]\right\}k_2=-[a\sin\theta]\end{cases}$$

今輕重率ヲ定ムルニ當リ

$$(6)\quad\begin{cases}p_1=\frac{1}{a_1},\ p_2=\frac{1}{a_2},\ldots\ldots\\q_1=a_1,\ q_2=a_2,\ldots\ldots\end{cases}$$

トスレバ正等式ハ

$$(7)\quad\begin{cases}k_1[a]=-[a\cos\theta]\\k_2[a]=-[a\sin\theta]\end{cases}$$

トナリ,k_1, k_2ハ直チニ知ラルベク,從テ(3)ヨリx_1, x_2,……及y_1, y_2,……ノ値ヲ知ルコトヲ得.

故ニ(2), (4), (6), (7)ヨリ緯距ノ誤差ハ

$$\left.\begin{array}{l} x_1\cos\theta_1-a_1y_1\sin\theta_1=-a_1\dfrac{[a\cos\theta]}{[a]} \\ x_2\cos\theta_2-a_2y_2\sin\theta_2=-a_2\dfrac{[a\cos\theta]}{[a]} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad [539]$$

ニシテ經距ノ誤差ハ

$$\left.\begin{array}{l} x_1\sin\theta_1+a_1y_1\cos\theta_1=-a_1\dfrac{[a\sin\theta]}{[a]} \\ x_2\sin\theta_2+a_2y_2\cos\theta_2=-a_2\dfrac{[a\sin\theta]}{[a]} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad [540]$$

以上ノ公式ヲ名ケテ測量ノ調整ニ關スルぼうぢっち(*Bowditch*)ノ規則ト云フ. **即チ閉折線ノ緯距及經距ヲ計算スルニ當リ,其閉差ヲ調整スル方法ハ緯距ノ全誤差ト一邊ノ緯距ノ更正トノ比ハ恰カモ全周ノ長サト其一邊ノ長サトノ比ニ等シク,其更正ハ緯距ノ全誤差ヲ減少スル如クナルベシ. 經距ノ更正亦之ニ同ジ.** (君島測量學第三章第六節81參照).

例121. 邊數 n ナル閉折線ノ全內角ノ和ガ $2(n-2)90°$ ニ等シクシテ閉差ガ長サノ誤差ノミニ依ルトキハ其長サノ更正ヲ求ム. (君島測量學第三章第六節83參照).

今 $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ ヲ閉折線ノ邊ノ長サ, $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ ヲ其最モ眞ニ近キ長ノ更正量, $\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots\theta_n$ ヲ夫々是等

ノ邊ノ方位角トスレバ調整ノ緯距及經距ハ次ノ如キ關係ヲ有ス

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} (a_1+x_1)\cos\theta_1+(a_2+x_2)\cos\theta_2+\cdots\cdots \\ \qquad\qquad +(a_n+x_n)\cos\theta_n=0 \\ (a_1+x_1)\sin\theta_1+(a_2+x_2)\sin\theta_2+\cdots\cdots \\ \qquad\qquad +(a_n+x_n)\sin\theta_n=0 \end{array}\right.$$

又ハ

$$(1')\quad \left\{\begin{array}{l} [x\cos\theta]+[a\cos\theta]=0 \\ [x\sin\theta]+[a\sin\theta]=0 \end{array}\right.$$

且ツ p ヲ x ノ輕重率トスレバ

$$(2)\qquad [px^2]=\text{最小}$$

故ニ (1′) ノ兩式ニ夫々不定係數 $-2k_1$ 及 $-2k_2$ ヲ乘ジ之ヲ (2) ニ加ヘテ之ヲ Ω トスレバ Ω ガ亦最小ナルヲ要ス

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} [px^2]-2k_1\Big\{[x\cos\theta]+[a\cos\theta]\Big\} \\ \qquad -2k_2\Big\{[x\sin\theta]+[a\sin\theta]\Big\}=\Omega=\text{最小} \end{array}\right.$$

故ニ更正公式ハ

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} x_1=\dfrac{1}{p_1}(k_1\cos\theta_1+k_2\sin\theta_1) \\ x_2=\dfrac{1}{p_2}(k_1\cos\theta_2+k_2\sin\theta_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

從テ正等式ハ

$$(5)\quad \begin{cases} k_1\left[\dfrac{\cos\theta}{p}\right]+k_2\left[\dfrac{\cos\theta\sin\theta}{p}\right]+[a\cos\theta]=0 \\ k_1\left[\dfrac{\cos\theta\sin\theta}{p}\right]+k_2\left[\dfrac{\sin^2\theta}{p}\right]+[a\sin\theta]=0 \end{cases}$$

前例ノ如ク

$$(6)\quad p_1=\frac{1}{a_1},\ p_2=\frac{1}{a_2},\ldots\ldots$$

トスレバ正等式ハ

$$(7)\quad \begin{cases} k_1[a\cos^2\theta]+k_2[a\cos\theta\sin\theta]+[a\cos\theta]=0 \\ k_1[a\cos\theta\sin\theta]+k_2[a\sin^2\theta]+[a\sin\theta]=0 \end{cases}$$

(7) ヨリ k_1 及 k_2 ノ値ヲ得ベク

$$(8)\quad \begin{cases} k_1=-\dfrac{[a\sin^2\theta][a\cos\theta]-[a\cos\theta\sin\theta][a\sin\theta]}{[a\cos^2\theta][a\sin^2\theta]-[a\cos\theta\sin\theta]^2} \\ k_2=-\dfrac{[a\cos^2\theta][a\sin\theta]-[a\cos\theta\sin\theta][a\cos\theta]}{[a\cos^2\theta][a\sin^2\theta]-[a\cos\theta\sin\theta]^2} \end{cases}$$

而シテ長ノ更正量ハ次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned} x_1&=k_1a_1\cos\theta_1+k_2a_1\sin\theta_1 \\ a_2&=k_1a_2\cos\theta_2+k_2a_2\sin\theta_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n&=k_1a_n\cos\theta_n+k_2a_n\sin\theta_n \end{aligned}\right\}\quad [541]$$

又緯距及經距ハ次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned} [(a+x)\cos\theta]=0 \\ [(a+x)\sin\theta]=0 \end{aligned}\right\}\quad [542]$$

431. 調整量ノ函數ノ輕重率. 整正シタル値 x_1, x_2, x_3,……ノ函數ヲ F トシ

$$(1)\quad F=f_0+f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+f_4x_4$$

ナル關係アリトス．一般ニ x ノ觀測ノ値ヲ l, 其更正量ヲ v トスレバ (1) ハ

$$(2)\quad \begin{cases} F=f_0+f_1(l_1+v_1)+f_2(l_2+v_2)+f_3(l_3+v_3)+f_4(l_4+v_4) \\ \quad=f_0+f_1l_1+f_2l_2+f_3l_3+f_4l_4+f_1v_1+f_2v_2+f_3v_3+f_4v_4. \end{cases}$$

トナル．又ハ F ヲ l ノ函數トスレバ

$$(3)\quad F=F_0+F_1l_1+F_2l_2+F_3l_3+F_4l_4$$

今 l ノ輕重率ヲ 1 トスレバ F ノ輕重率ハ

$$\frac{1}{P}=\frac{F_1^2}{1}+\frac{F_2^2}{1}+\frac{F_3^2}{1}+\frac{F_4^2}{1}=[FF]\quad [543]$$

k_1, k_2, k_3 ヲ不定係數トスレバ [409] ヨリ

$$(4)\quad \begin{cases} v_1=a_1k_1+b_1k_2+c_1k_3 \\ v_2=a_2k_1+b_2k_2+c_2k_3 \\ v_3=a_3k_1+b_3k_2+c_3k_3 \\ v_4=a_4k_1+b_4k_2+c_4k_3 \end{cases}$$

(2) 及 (4) ヨリ

$$(5)\quad F=f_0+[fl]+[af]k_1+[bf]k_2+[cf]k_3$$

而シテ [528] ヨリ不定係數正等式ハ

$$(6)\quad \begin{cases} [aa]k_1+[ab]k_2+[ac]k_3+[al]+a_0=0 \\ [ab]k_1+[bb]k_2+[bc]k_3+[bl]+b_0=0 \\ [ac]k_1+[bc]k_2+[cc]k_3+[cl]+c_0=0 \end{cases}$$

(5) 及 (6) ヨリ k_1, k_2, k_3 ヲ消去スル爲 (6) ニ他ノ不定係數 K_1, K_2, K_3 ヲ乘ジ之ヲ (5) ニ加フレバ k_1, k_2, k_3 ノ項ハ消去スベク

$$(7)\quad \begin{cases} [aa]K_1+[ab]K_2+[ac]K_3+[af]=0 \\ [ab]K_1+[bb]K_2+[bc]K_3+[bf]=0. \\ [ac]K_1+[bc]K_2+[cc]K_3+[cf]=0. \end{cases}$$

從テ (5) 及 (6) ヨリ過渡等式ヲ得.

$$(8)\quad \begin{cases} F=f_0+[fl] \\ \qquad +(a_0+[al])K_1+(b_0+[bl])K_2+(c_0+[cl])K_3 \end{cases}$$

又ハ l ノ順序ニ從テ配列スレバ

$$(9)\quad \begin{cases} F=f_0+a_0K_1+b_0K_2+c_0K_3 \\ \qquad +(f_1+a_1K_1+b_1K_2+c_1K_3)l_1 \\ \qquad +(f_2+a_2K_1+b_2K_2+c_2K_3)l_2 \\ \qquad +(f_3+a_3K_1+b_3K_2+c_3K_3)l_3 \\ \qquad +(f_4+a_4K_1+b_4K_2+c_4K_3)l_4 \end{cases}$$

卽チ (3) 及 (9) ヨリ

$$\left.\begin{aligned} F_1&=f_1+a_1K_1+b_1K_2+c_1K_3 \\ F_2&=f_2+a_2K_1+b_2K_2+c_2K_3 \\ F_3&=f_3+a_3K_1+b_3K_2+c_3K_3 \\ F_4&=f_4+a_4K_1+b_4K_2+c_4K_3 \end{aligned}\right\} \qquad [544]$$

今輕重率ヲ定メントスル函數 (1) ノ係數 f_1, f_2, f_3 f_4 ガ定マレバ和 $[af][bf][cf]$ ヲ作リ過渡等式 (8) ヨリ

K_1, K_2, K_3 ヲ得. 此等ノ K_1, K_2, K_3 ヲ [426] ニ挿入スレバ凡テ F_1, F_2, F_3, F_4 ヲ見出スヲ得ベク,其自乘和ハ求ムル輕重率ノ反數ヲ表ハス.

[372] 又ハ [273] ト全ク同理ニテ輕重率 P ハ

$$\frac{1}{P}=[FF]=[ff]-\left\{\frac{[af]^2}{[aa]}+\frac{[bf.1]^2}{[bb.1]} +\frac{[cf.2]^2}{[cc.2]}\right\} \qquad [545]$$

若夫レ觀測ノ輕重率ガ凡テ一ナラザルトキハ [386] ノ代リニ

$$\frac{1}{P}=\left[\frac{FF}{p}\right]=\left[\frac{ff}{p}\right]-\left\{\frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}+\frac{\left[\frac{bf}{p}.1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]} +\frac{\left[\frac{cf}{p}.2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}.2\right]}\right\} \qquad [546]$$

而シテ函數 F ノ均方誤差 M ハ

$$M=m\sqrt{\frac{1}{P}} \qquad [547]$$

例 122. 一ノ平面三角形ノ三ノ角ガ一樣ナル輕重率ヲ以テ測定セラレ,其値ヲ夫々 l_1, l_2, l_3 トシ,又其更正量ヲ v_1, v_2, v_3 トスレバ勿論

(1) $\quad x_1=l_1+v_1,\ x_2=l_2+v_2,\ x_3=l_3+v_3$

三ノ最モ眞ニ近キ角ヲ x_1, x_2, x_3 トスレバ條件等式ハ

(2) $-180°+x_1+x_2+x_3=0$

而シテ

(3) $-180°+l_1+l_2+l_3=w$

トスレバ v ニ依ル條件等式

(4) $v_1+v_2+v_3+w=0$

條件等式ノ係數ハ $a_1=+1,\ a_2=+1,\ a_3=+1$ ナリ. 故ニ正等式ノ係數ハ $\left[\frac{aa}{p}\right]=3,\ \left[\frac{ab}{p}\right]=0,\ \left[\frac{ac}{p}\right]=0$...... ニシテ正等式ハ

(5) $3k+w=0$

又ハ

(5′) $k=-\frac{w}{3}$

從テ更正角ノ大サハ

(6) $v_1=-\frac{w}{3},\ v_2=-\frac{w}{3},\ v_3=-\frac{w}{3}$

卽チ**三角形ノ各角ニ對スル更正角ハ理論的三角ノ和ト實測三角ノ和トノ差ヲ三等分シタルモノニ等シ.** 從テ調整角ハ

(7) $x_1=l_1-\frac{w}{3},\ x_2=l_2-\frac{w}{3},\ x_3=l_3-\frac{w}{3}.$

調整ノ前一ノ測角ノ均方誤差又ハ單位輕重率ノ一回觀測ノ均方誤差ハ

(8) $m=\sqrt{\frac{[vv]}{1}}=\frac{w}{\sqrt{3}}$

今整正角ノ輕重率ハ一ノ函數

(9) $F=x_1$

ニ於テ $f_1=1,\ f_2=0,\ f_3=0$ ナルガ故ニ

(10) $\left[\frac{af}{p}\right]=3,\ \left[\frac{bf}{p}\right]=0,\ \left[\frac{cf}{p}\right]=0$

過渡等式ハ

(11) $3K+1=0.$

或ハ

(11′) $K=-\frac{1}{3}$

故ニ

(12) $F_1=+\frac{2}{3}\quad F_2=-\frac{1}{3}\quad F_3=-\frac{1}{3}$

從テ

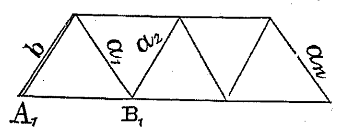
(13) $\left[\frac{FF}{p}\right]=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{3}$

故ニ

(14) $M=\frac{w}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{w}{3}\sqrt{2}$

例123. 第四百三十五圖ニ示スガ如キ單列三角形ヨリ成ル三角網ニ於テ凡テノ角ハ皆一樣ナル精密ヲ以テ測ラレ,基線 b ハ誤差ナキモノト假定ス. 今 b ヨリ順次ニ $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ ヲ邊ノ長サトシ, a_n ノ輕重率ヲ求ム.

第四百三十五圖



又 $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots\ldots$ ヲ測定角ノ大サトスレバ

$$\frac{a_1}{b}=\frac{\sin A_1}{\sin B_1},\ \frac{a_2}{a_1}=\frac{\sin A_2}{\sin B_2},\ \ldots\ldots\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{\sin A_n}{\sin B_n}.$$

是等ヲ相乘ズレバ

$$(1)\qquad a_n=b\frac{\sin A_1}{\sin B_1}\frac{\sin A_2}{\sin B_2}\cdots\cdots\frac{\sin A_n}{\sin B_n}$$

(1) ヲ微分スレバ

$$(2)\qquad da_n=a_n\sin 1''[\cot A(A)-\cot B(B)]$$

此ニ $(A), (B), \ldots\ldots$ ハ $A, B, \ldots\ldots$ ノ更正量ヲ表ハス. 而シテ各三角形ノ三內角ノ和ハ $180°$ ナルベキガ故ニ條件等式ハ

$$(3)\qquad \begin{cases}(A_1)+(B_1)+(C_1)=w_1\\(A_2)+(B_2)+(C_2)=w_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

[428] ヨリ a_n ノ輕重率 P ハ

$$(4)\qquad \frac{1}{P}=\frac{2}{3}a_n^2\sin^2 1''[\cot^2 A+\cot^2 B+\cot A\cot B]$$

若シ等邊三角形ナラバ

$$(5)\qquad \frac{1}{P}=\frac{2}{3}nb^2\sin^2 1''$$

故ニ三角網ハ長キ程邊長ノ輕重率ハ減少ス. 即チ基線ヨリ進ムニ從テ邊ノ輕重率ハ $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots$ トナル.

第六節　三角測量

432. 局所條件ト一般條件. 三角測量ニ於テハ少クモ精密ニ測定シタル基線ト,同ジク精密ニ測定シタル三角ノ大サヲ用ヒテ計算ヲ行ヒ,各邊ノ大サヲ知ル. 斯クシテ順次ニ三角網ノ長サヲ知リテ最後ニ他ノ基線ニ至リ實測ト計算トガ如何ニ符合スルヤヲ檢セザルベカラズ. 然シテ三角網中ノ諸角ハ二ツノ條件ヲ滿足セシムル樣ニ整正シテ其間ノ矛盾ヲ除キ合理ノ形ヲ得ベシ.

第一. 各測點ニ於ケル角ノ間ニ成立スベキ關係ヲ表ハスモノニシテ之ヲ**局所條件**ト云フ.

第二. 閉合シタル形ヲ成ス爲ニ必要ナル幾何學的關係ヨリ來ルモノニシテ之ヲ**一般條件**ト云フ. 即チ各三角形ノ三ノ內角ノ和ハ $180°$ ニ等シカルベク,又一邊ノ長サハ基線ヨリ孰レノ道順ヲ經テ計算スルモ常ニ同一ナラザルベカラズ.

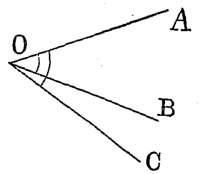
條件ノ數ハ實測ノ數ニ依リテ異ナリ,各條件ハ即チ實測シタル量ノ最モ眞ニ近キ値ヲ未知量トスル所ノ等式ノ形トシテ之ヲ表ハスコトヲ得ベシ. 等式ノ數ハ未知量ノ數ヨリモ少ク,無限ノ解法ヲ有スベシ,而シテ此等無限ノ値ヨリ最モ眞ニ近キ値ヲ擇

ブハ即チ此ニ求メラルヽモノナリ.

解法トシテハ同時ニ局所的條件及一般條件ヲ滿足セシムル樣ニ諸角ヲ調整スベシ. 即チ是等ノ條件ヲ充ス實測シタル量ノ更正量ハ恰カモ其自乘ノ和ガ最小ナル如キモノタルヲ要ス.

實測ノ方法ニ依リテ調整ノ形ヲ同ジウセズ. 例ヘバ第四百三十六圖ニ示シタルガ如ク,測點 O ニ於テ A, B, C ニ立テタル覘標ヲ覘フ場合ニ,始メ A ヲ覘ヒテ次ニ B ヲ覘ヒ,茲ニ角 AOB ヲ得. 更ニ又 B ヲ覘ヒテ次ニ C ヲ覘ヒ,角 BOC ヲ得. 是等二ノ角ハ互ニ相關セズ全ク獨立セルモノナリ. 然レドモ今若シ順次ニ A, B, C 三點ヲ覘フトキハ亦角 AOB 及角 BOC ヲ得ベシト雖モ,B ノ讀角ハ双方ニ表ハルヽヲ以テ二ノ角ハ決シテ獨立ナルコトヲ得ズ. 前法ハ即チ**獨立測角法**ト呼バルヽモノニシテ,若シ各角ヲ器械的ニ反覆シテ最後ニ角ヲ讀ムトキハ之ヲ**反覆法**ト云フ. 而シテ後法ハ之ヲ**方向法**ト云フ.

第四百三十六圖



433. **獨立測角法.** 獨立測角法ニ於テハ,充分ニ能ク整正ヲ了シタル轉鏡儀ヲ以テ左方ノ覘標ヲ視準シテ其遊標又ハ測微鏡ヲ讀ミ,次ニ右方ノ覘標ヲ視

準シテ同ジク其遊標又ハ測微鏡ヲ讀ミ,此等二ノ差ハ即チ一ノ結果ヲ爲ス. 次ニ右方ノ覘標ヨリ始メテ左方ニ及ビ,前ト反對ノ順序ニ視準シテ他ノ結果ヲ得. 是等前後ノ結果ノ平均ヲ取レバ三脚ノ捩レ望遠鏡軸ノ轉扭等ヨリ來ル誤差ヲ除クコトヲ得ベシ.

次ニ望遠鏡ヲ縱横ニ反轉シテ且ツ 180° 又ハ若干ノ角度丈ケ遊標又ハ測微鏡ヲ動シテ前法ヲ繰返シ,前ニ得タル平均ノ値ト組合セテ更ニ其平均ヲ取レバ視準線ノ整正不完全ナルガ爲ニ起ル器械ノ誤差,鏡脚ノ高サノ不同ヨリ來ル誤差及樞軸ノ不同等ヨリ來ル誤差ヨリ免ルヽコトヲ得ベシ. 是等二ノ讀角法ヲ區別シテ望遠鏡正及望遠鏡逆ト云フ.

此外**地平分度圈ノ目盛ノ誤差**ハ整差又ハ週期的誤差ヲ生ジ,**地平分度圈ノ傾斜**ハ亦同ジク整差ヲ生ズ. 前者ハ地平角ノ始讀ヲ變ズルコトニ依リテ之ヲ避クルコトヲ得ベク,n ヲ反覆讀角ノ對ノ數トスレバ $\frac{180°}{n}$ 丈ケ始讀ノ角ヲ移動スベシ 若シ遊標又ハ測微鏡ガ三個ナラバ $\frac{60°}{n}$ 丈ケ移動スルヲ要ス. 地平分度圈ガ眞ニ地平ヲ爲サヾルヨリ起ル誤差ハ觀測ノ方法ニ依リテ之ヲ除去スルコト能ハズ. 然レドモ良好ナル器械ヲ以テ普通ノ注意ヲ用フルト

キハ之ガ爲ニ生ズル角度ノ誤差ハ $0'',1$ ヨリ大ナラザルベシ. 但シ覘標ガ高キトキハ時トシテ大ナル誤差ヲ生ズルコトアリ.

434. 局所調整. 一ノ三角網ニ於テ一ノ測點ニ於テ測定シタル地平角ヲ其間ニ存在セル凡テノ條件ニ對シテ整正シタルトキハ此等ノ角ヲ局所的ニ整正セラレタリト云フ.

今 $l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$ ヲ夫々一回ノ測定ニ依リテ得タル角ノ大サ, $v_1, v_2, \ldots\ldots v_n$ ヲ最モ眞ニ近キ更正量トシ, l_h, l_k ガ他ノ角ヨリ導出スコトヲ得ルトキハ局所的條件ハ次ノ如シ

$$(1)\qquad \begin{cases} l_h+v_h=l_1+v_1+l_2+v_2+\ldots\ldots \\ l_k+v_k=l_1+v_1+l_2+v_2+\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

又ハ

$$(2)\qquad \begin{cases} v_1+v_2+\ldots\ldots-v_h=\delta_h \\ v_1+v_2+\ldots\ldots-v_k=\delta_k \end{cases}$$

トシ且ツ

$$(3)\qquad p_1v_1^2+p_2v_2^2+\ldots\ldots+p_hv_h^2+p_kv_k^2+\ldots\ldots +p_nv_n^2=\text{最小}$$

ナルヲ要ス. 此ニ $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ ハ諸角ノ輕重率ヲ表ハス.

例ヘバ測點 O ニ於テ n 個ノ覘標 $A, B, C, \ldots\ldots$ ヲ以テ角 $AOB, BOC, \ldots\ldots$ 等ヲ測定シ, 更ニ諸角ノ和 AOL ヲ測定シ得タリトシ, 凡テ測角ノ輕重率ハ相等シキモノトスレバ條件等式ハ

$$(4)\qquad l_1+v_1+l_2+v_2+\ldots\ldots+l_{n-1}+v_{n-1}=l_n+v_n$$

又ハ

$$(5)\qquad \begin{cases} v_1+v_2+\ldots\ldots+v_{n-1}-v_n=l_n-(l_1+l_2+\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +l_{n-1})=\delta \end{cases}$$

及ビ

$$(6)\qquad [vv]=\text{最小}$$

427 至乃 428 ヨリ

$$v_1=v_2=\ldots\ldots=-v_n=\frac{\delta}{n} \qquad [548]$$

卽チ各角ノ更正角ハ和角ト各角ノ和トノ差ヲ n 等分シテ之ヲ各角ニ加フベシ. 和角ヘノ更正角ノ符號ハ各角ノ符號ニ反對ナリ.

若シ又測點 O ニ於テ角 $AOB, BOC, \ldots\ldots LOA$ ヲ測定シテ地平ノ閉合ヲ爲シタルトキ其整正角ヲ求ム.

此場合ニ於ケル條件等式ハ

$$(7)\qquad \begin{cases} v_1+v_2+\ldots\ldots+v_n=360^\circ-(l_1+l_2+\ldots\ldots+l_n) \\ \qquad =\delta \end{cases}$$

及 p ヲ輕重率トスレバ

$$(8)\qquad [pvv]=\text{最小}$$

トス．更正角ノ大サハ次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned} v_1&=\frac{\delta}{p_1\left[\frac{1}{p}\right]}\\ v_2&=\frac{\delta}{p_2\left[\frac{1}{p}\right]}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad [549]$$

若シ $p_1=p_2=\ldots\ldots=p_n$ ナラバ

$$v_1=v_2=\ldots\ldots=v_n=\frac{\delta}{n} \qquad [550]$$

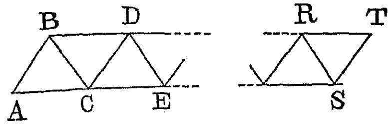
一ノ測點ニ於テ s 個ノ覘標又ハ測點ヲ視準シタル場合ニハ凡テ $s-1$ 個ノ角ヲ得ベシ．故ニ若シ新ニ一ノ角ヲ測定セシニハ直接之ヲ測定スルカ又ハ他ノ $s-1$ 角ヨリ之ヲ知ルコトヲ得ベク;此二重ノ値ノ矛盾ハ一ノ局所的條件トナル．從テ**一ノ測點ニ於テ n 個ノ角ヲ測定シタルトキハ局所等式ノ數ハ $n-s+1$ ナリ**．

435. **一般調整**．一個ノ基線ヲ有スル三角網ニ於テ其各部ニ存在スル幾何學的關係ヨリ起ル條件ノ數ハ之ヲ知ルコトヲ得．例ヘバ s 測點ヲ有スル三角網ノ中基線ノ兩端ヲ爲ス所ノ二ノ測點ハ知ラレ自餘ノ $s-2$ 測點ヲ見出サヾルベカラズ．基線ノ兩端ニ在ル測點ニ於テ觀測セラレタル二ノ角ハ第三ノ點ヲ定ムベク,同樣ニ任意ノ二點ヲ連ヌル一直線

ノ兩端ニ在ル測點ニ於テ更ニ二ノ角ヲ觀測スレバ第四ノ點ヲ得ベク,以下之ニ做フ．故ニ $s-2$ 個ノ測點ヲ定ムル爲ニハ $2(s-2)$ 個ノ角ヲ必要トス．從テ獨立角ノ總數ガ凡テ n ナルトキハ滿足スベキ條件ノ數又ハ餘分ノ角ノ數ハ $n-2(s-2)$ ナリトス．

例ヘバ單列三角網ニ於テ測點ノ數ガ s ナルトキハ其內ノ二測點ハ各々一個ノ角ヲ有シ(第四百三十七圖ノ測點 A 及 T), 二ノ測點ハ各々二個ノ角ヲ有シ(測點 B 及 S), 殘リノ $s-4$ ノ測點ニテハ各々三個ノ角ヲ有スルヲ以テ獨立角ノ總數ハ $n=1\times2+2\times2+3(s-4)=3(s-2)$ ナリ．從テ條件ノ數ハ $3(s-2)-2(s-2)=s-2$ ナリ．

第四百三十七圖



又四邊形ガ各二ノ對角線ヲ有シテ連續スルトキハ測點ノ數 s ニ對シテ $(s-2)/2$ 丈ケノ四邊形ノ數ヲ得ベク,各ノ四邊形ハ八個ノ角ヲ有スルヲ以テ獨立角ノ總數ハ $8\frac{(s-2)}{2}=4(s-2)$ ナリ．從テ滿足スベキ條件ノ數ハ $4(s-2)-2(s-2)=2(s-2)$ ナリトス．

436. **角等式**．平面三角形ノ三內角ノ和ハ 180° ニ等シク,球面三角形ノ三內角ノ和ハ 180° ニ球面餘剩 ϵ ヲ加ヘタルニ等シ．球ノ半徑ヲ r, 三角形ノ面積

ヲΔトスレバεハ次ノ如シ

(1)　$$\epsilon=\frac{\Delta}{r^2\sin 1''}$$

我ガ地球ハ其形楕圓體ニシテ其上ノ三角形ハ半徑$\sqrt{RN}$ナル接球上ノ球面三角形ト計算スルヲ得．此ニR, Nハ三角々頂ノ緯度ノ平均ヲ取リ,此平均緯度ニ應ズル點ニ於ケル子午圈ノ曲率半徑及此點ニ於テ子午圈ニ直斷面ノ曲率半徑ヲ表ハス．故ニa, bヲ三角形ノ二邊Cヲ其間ニ挿マレタル角トスレバϵ(秒)ハ

(2)　$$\epsilon=\frac{ab\sin C}{2RN\sin 1''}$$

ϵノ計算ニハ未整正角ヲ用ヒ,緯度ノ如キモ甚シキ精密ヲ要セズ．

斯クシテ各三角形ノ三內角ハ180°ニ等シカルベク,又ハ180°ト球面餘剩トノ和ニ等シカルベシ．是レ即チ**角等式**ナリ．

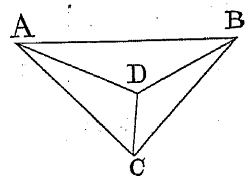
今一ノ三角網ニ於テ器械ヲ据エタルト否トニ論ナク測點ノ全數ヲsトシ,其中器械ヲ据エズ單ニ他ノ測點ヨリ視準シタルニ止ルモノヲσトシ,其三角網中ニ在ル直線ノ全數ヲl,單ニ一方ノ方向ニノミ視準シテ双方ヨリ視準セザル直線ノ數ヲl_1トスレバ此三角網中ニ在ル角等式ノ數ハ$l-l_1-s+\sigma+1$ナ

リ．蓋シ一條ノ基線又ハ他ノ一直線ノ兩端ニ在ル測點ニ於テ器械ヲ据エテ第三ノ測點ヲ覘ヒ$l=3, s=3$ニシテ角等式ハ1ナリ即チ$l-s+1$ニ相當ス．以下二ノlヲ增ス每ニ1ノsヲ增シ角等式一個ヲ加フ．即チ双方ヨリ視準シタル$l-l_1$線ニ對シ器械ヲ据エタル測點$s-\sigma$ヲ減ジテ1ヲ加ヘタル$l-l_1-(s+\sigma)+1$ガ角等式ノ數ヲ表ハス．

例ヘバ四邊形ノ二ノ對角線ヲ視準シタル場合ニハ$l=6$, $l_1=0$, $s=4$, $\sigma=0$ナルヲ以テ角等式ノ數ハ$6-4+1=3$ナリ．

437. 邊等式． 一個ノ三角形又ハ三角形ノ單列ニ於テハ任意ノ一邊ヲ取リ他ノ與ヘラレタル邊ヨリコレヲ計算スルニハ唯一法アルノミ．然レドモ若シ三角形ガ複雜ナル配置ヲ爲セルトキハ即チ然ラズ．例ヘバ第四百三十八圖ニ於テADヨリBCヲ見出スニハ三角形ADBヨリ先ヅBDヲ見出シ,更ニ三角形BCDヨリBCヲ見出スコトヲ得ベク,又ハ三角形ADBヨリABヲ見出シ,三角ABCヨリBCヲ見出スコトヲ得ベシ．從テ

第四百三十八圖



$$\frac{AD}{AC}\,\frac{AC}{AB}\,\frac{AB}{AD}=1$$

又ハ

$$\frac{\sin ACD \sin ABC \sin ADB}{\sin ADC \sin ACB \sin ABD}=1. \qquad [551]$$

之ヲ名ケテ**邊等式**ト云ヒ，A ヲ名ケテ**極**ト云フ．

今一ノ基線ノ兩端ハ知ラレ,第三點ヲ定ムル爲ニハ更ニ他ノ二邊ヲ知ルヲ要ス．故ニ s 個ノ測點ヲ連ヌル三角網アリテ其測點中ノ二個ハ基線ノ兩端ヲ爲スヲ以テ其三角網ヲ描ク爲ニハ基線ノ外 $2(s-2)$ 線ヲ要ス．即チ凡ベテ $2s-3$ 線ヲ要ス．基線ヨリ始メテ此三角網中ノ一線ハ唯一法ヲ以テ計算スルコトヲ得．然レドモ若シ更ニ一線ヲ加フレバ二樣ニ計算スルヲ得ベク,此ニ一個ノ邊等式ヲ得．從テ邊ノ數ガ凡ベテ l ナルトキハ邊等式ノ數ハ $l-(2s-3)=l-2s+3$ トナル．

438. 邊等式ヲ一次等式ニ改ムル法． 他ノ條件等式ト共ニ邊等式ヲ用フル際,後者ヲ一次等式ノ形ニスルヲ便トス．例ヘバ $l_1, l_2, \ldots\ldots$ ヲ實測角ノ値，$v_1, v_2, \ldots\ldots$ ヲ夫々其最モ眞ニ近キ更正角トスレバ

$$(1) \qquad \frac{\sin(l_1+v_1)}{\sin(l_2+v_2)}\,\frac{\sin(l_3+v_3)}{\sin(l_4+v_4)}\ldots\ldots=1$$

(1) ノ兩節ノ對數ヲ取レバ

$$(2) \qquad \begin{cases} \log\sin(l_1+v_1)+\log\sin(l_3+v_3)+\ldots\ldots \\ -\log\sin(l_2+v_2)-\log\sin(l_4+v_4)-\ldots\ldots=0. \end{cases}$$

一般ニてーらーノ定理ニ依リテ展開スレバ

$$\left.\begin{aligned} \log\sin(l+v) &= \log\sin l+\frac{d}{dl}(\log\sin l)v \\ &= \log\sin l+\mu\cot l.\frac{v}{\rho} \\ &= \log\sin l+av \end{aligned}\right\} \qquad [552]$$

$$\mu=0{,}43429\ldots\ldots$$

$$\rho=206265''$$

$\frac{\mu}{\rho}\cot l=a$ ハ角 l ニ對スル $1''$ ノ表差ニシテ正弦對數表ニ載セラルヽカ又ハ計算スルヲ得ルモノナリ．

故ニ (2) ハ

$$a_1v_1-a_2v_2+\ldots\ldots+\log\sin l_1-\log\sin l_2 +\ldots\ldots=0 \qquad [553]$$

又ハ

$$\left.\begin{aligned} &[av]=\delta \\ &\delta=\log\sin l_1-\log\sin l_2+\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad [553']$$

若シ 7 桁ノ對數表ヲ用フルトキハ [553] ハ又

$$\cot l_1.v_1-\cot l_2.v_2+\ldots\ldots =\frac{1}{10^7\mu\sin 1''}(\log\sin l_2 -\log\sin l_1+\ldots\ldots) \qquad [554]$$

トシテ表ハスコトヲ得．

439. 條件ノ總數. 一ノ三角系又ハ三角網ニ於テlヲ邊ノ全數, l_1ヲ一方ニノミ觀測シタル邊ノ數, sヲ測點ノ全數, σヲ器械ヲ据エザル測點ノ數, nヲ局所的條件ニ關シテハ互ニ獨立ナル實測角ノ數トスレバ器械ヲ据エタル測點ニ於テハ局所的ニ獨立セル角ノ數ハ其測點ニ於テ觀測シタル邊ノ數ヨリ1個丈ケ少シ. 而シテ双方ヨリ觀測シタル邊ノ數ハ$2l-l_1$ナルヲ以テ

$$n=2l-l_1-(s-\sigma) \qquad [555]$$

又436ニ述ベタルガ如ク角等式ノ數n_aハ

$$n_a=l-l_1-s+\sigma+1 \qquad [556]$$

及437ニ述ベタルガ如ク邊等式ノ數n_sハ

$$n_s=l-2s+3 \qquad [557]$$

[556]ト[557]ノ和ヲ取レバ三角網中ニ在ル角等式及邊等式ノ全數ハ

$$n_a+n_s=2l-l_1-3s+\sigma+4 \qquad [558]$$

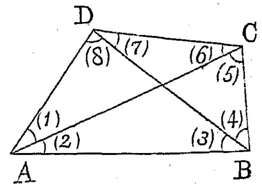
[555]ト組合ハセテ一個ノ基線ヨリ成ル三角網ノ全條件數ハ從テ

$$n_a+n_s=n-2s+4 \qquad [559]$$

ナリ. 例ヘバ四邊形ノ兩對角線ヲ有スルモノニ於テハ$n=8$, $s=4$ナルヲ以テ全條件數ハ凡テ4ナリトス.

440. 四邊形ノ調整. 四邊形$ABCD$(第四百三十九圖)ノ八ノ角ハ一樣ナル精度ヲ以テ測定シタルモノトス. 今(1)(2)等ヲ以テ夫々實測角ヲ表ハストキハ四ノ三角形ヨリ四ノ角等式ヲ得レドモ其中一ハ他ノ三ヨリ見出スコトヲ得ベシ.

第四百三十九圖



$$\left.\begin{array}{lll} \text{三角形 } ABD & (1)+(2)+(3)+(8)=180^\circ \\ \text{〃} \quad BCD & (4)+(5)+(6)+(7)=180^\circ \\ \text{〃} \quad ADC & (1)+(6)+(7)+(8)=180^\circ \\ \text{〃} \quad ABC & (2)+(3)+(4)+(5)=180^\circ \end{array}\right\} \qquad [560]$$

第一及第二ノ和ヨリ第三ヲ減ズレバ第四ヲ得. 又第一ト第二又ハ第三ト第四ヲ加フレバ此ニ8ノ角ノ和ハ360°ニ等シキヲ知ルベシ. 卽チ角等式ハ3個ナリ.

次ニBヲ極トシテ邊等式ハ

$$\frac{\sin(1+2)\sin(5)\sin(7)}{\sin(8)\sin(2)\sin(5+6)}=1. \qquad [561]$$

卽チ全條件ハ凡テ4個ナリトス(439參照).

$v_1, v_2, \ldots\ldots$ヲ夫々更正角トシ, [ ], [2], ...ヲ夫々最モ眞ニ近キ角又ハ調整角トスレバ

$$(1) \qquad (1)+v_1=[1],\ (2)+v_2=[2], \ldots$$

ニシテ[560]ノ第一式ヨリ

(2) $[1]+[2]+[3]+[8]-180°=0$

故ニ之ニ實測角ヲ代用スレバ

(3) $(1)+v_1+(2)+v_2+(3)+v_3+(8)+v_8-180°=0$

又ハ

(4) $(1)+(2)+(3)+(8)-180°=w_1$

トシ,同樣ニ他ノ三角形 ABC 及 ACD ニ就テ誤差ノ關係ヲ示セバ

$$\left.\begin{array}{l} v_1+v_2+v_3+v_8+w_1=0 \\ v_2+v_3+v_4+v_5+w_2=0 \\ v_4+v_5+v_6+v_7+w_3=0 \\ (v_1+v_6+v_7+v_8+w_4)=0 \end{array}\right\} \quad [562]$$

例ヘバ實測角ノ大サガ次ノ如キモノトス

(1)	37°26′41″	(5)	48° 9′ 2″
(2)	34 35 25	(6)	29 51 26
(3)	41 17 34	(7)	46 1 27
(4)	55 58 2	(8)	66 40 27

從テ

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} w_1=+4'' \\ w_2=+3'' \\ w_3=-3'' \\ (w_4=+1'') \end{array}\right.$$

又邊等式ヲ一次等式ノ形トシテ表ハスガ爲メ

	logsin	10″ノ表差
(5)=48°09′02″	9,872 0983	189
(7)=46 01 27	9,857 1109	203
(1+2)=72 02 06	9,978 2924	69
	9,707 5016	
(8)=66°40′27″	9,962 9694	90
(2)=34 35 25	9,754 1220	306
(5+6)=78 00 28	9,990 4169	45
	9,707 5083	

$$9{,}7075016-9{,}7075083=-0{,}0000067$$

7桁對數表ノ單位ニ於テ $w=-67$

故ニ

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} +18{,}9v_5+20{,}3v_7+6{,}9(v_1+v_2)-9{,}0v_8-30{,}6v_2 \\ \qquad -4{,}5(v_5+v_6)-67=0 \end{array}\right.$$

[444], (5) 及 (6) ヲ再記スレバ次ノ如シ

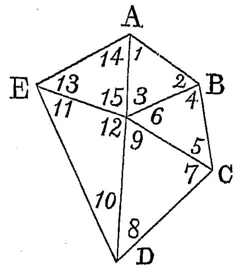
$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} v_1+v_2+v_3 \qquad\qquad +v_8+4''=0 \\ \quad v_2+v_3+v_4+v_5 \qquad\qquad +3''=0 \\ \qquad\quad v_4+v_5+v_6+v_7-3''=0 \\ 6{,}9v_1-23{,}7v_2 \\ \qquad +14{,}4v_5-4{,}5v_6+20{,}3v_7-9{,}0v_8-67=0 \end{array}\right.$$

[528] ヨリ相關因數ニ依リテ k_1, k_2, k_3, k_4 ヲ見出シ,

[527] ヨリ v_1, v_2, v_3,……ノ値ヲ見出スコトヲ得.

441. 有心多邊形ノ調整. 第四百四十圖ニ示セルガ如キ有心多邊形 $ABCDE$ ニ於テ地平ノ閉合ヨリ局所條件ハ

第四百四十圖



$$v_3+v_6+v_9+v_{12}+v_{15}+w_1=0 \qquad [563]$$

又角等式ハ

$$\left.\begin{aligned} v_1+v_2+v_3+w_2&=0\\ v_4+v_5+v_6+w_3&=0\\ &\cdots\cdots\\ v_{13}+v_{14}+v_{15}+w_6&=0 \end{aligned}\right\} \qquad [564]$$

更ニ邊等式ハ心中ヲ極トシテ

$$a_1v_1+a_2v_2+a_4v_4+a_5v_5+\cdots\cdots$$
$$+a_{14}v_{14}+w=0 \qquad [565]$$

是等 [563], [564] 及 [565] ヨリ v ノ最モ眞ニ近キ値ヲ見出スコトヲ得.

442. 異ナル輕重率ヲ有スル局所調整. 一ノ測點ニ於テ測定シタル角ヲ夫々 $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ トシ地平ヲ閉合スルモノトス. 今此等ノ角ノ輕重率ガ夫々 $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ ニシテ

(1) $\qquad A_1+A_2+A_3+\cdots\cdots+A_n-360°=w$

トシ第一ノ角ノ調整値ヲ x トスレバ x ヲ定ムル法二アリ.

(2) $\qquad \begin{cases} x=A_1 \text{ 輕重率 } p_1 \\ x=360°-(A_2+A_3+\cdots\cdots+A_n)=A_1-w \\ \qquad\qquad\qquad \text{輕重率 } p' \end{cases}$

而シテ輕重率 p' ハ

(3) $\qquad \dfrac{1}{p'}=\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{p_3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{p_n}=\left[\dfrac{1}{p}\right]-\dfrac{1}{p_1}$

故ニ x ノ調整値ハ

(4) $\qquad x=\dfrac{A_1p_1+(A_1-w)p'}{p_1+p'}=A_1-\dfrac{p'}{p_1+p'}w$

又ハ (3) ヲ代用スレバ

$$x=A_1-\frac{1}{p_1}\frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]} \qquad [566]$$

卽チ A_1 ニ施スベキ更正ハ w ヲ $\left[\dfrac{1}{p}\right]p_1$ ノ反數ヲ乘ジタルモノニ等シ. 他ノ角ニ就テモ同樣ナリ. 卽チ v_1 ヲ此更正角トスレバ

(5) $\qquad v_1=\dfrac{1}{p_1}\dfrac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]}$

從テ

$$[pvv]=\frac{1}{p_1}\frac{w^2}{\left[\frac{1}{p}\right]^2}+\frac{1}{p_2}\frac{w^2}{\left[\frac{1}{p}\right]^2}+\cdots\cdots$$
$$=\frac{w^2}{\left[\frac{1}{p}\right]} \qquad [567]$$

故ニ輕重率1ノ一回觀測ノ均方誤差 m ハ

$$m=\sqrt{\frac{[pvv]}{2-1}}=\frac{w}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}} \qquad [568]$$

調整値 x ノ均方誤差 M_1 ハ $\sqrt{p_1+p'}$ ヲ以テ m ヲ除シタルモノニ等シク

$$M_1=w\frac{\sqrt{\frac{1}{p_1}\left(\left[\frac{1}{p}\right]-\frac{1}{p_1}\right)}}{\left[\frac{1}{p}\right]} \qquad [569]$$

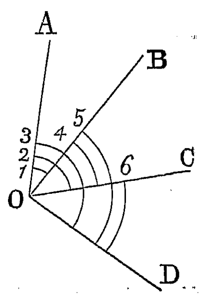
若シ $p_1=p_2=\ldots\ldots=p_n=1$ ナラバ

$$\left.\begin{aligned} x&=A_1-\frac{w}{n}\\ m&=\frac{w}{\sqrt{n}}\\ M_1&=w\frac{\sqrt{n-1}}{n}=\frac{w}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{n-1}{n}} \end{aligned}\right\} \qquad [570]$$

調整ヲ了シタル一角ノ精度ハ調整前ノ値ニ比シテ $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ ノ比ヲ以テ増加ス.

443. 間接觀測ニ依ル局所調整. 第四百四十一圖ニ示セルガ如ク一ノ測點 O ニ於テ四ノ他ノ測點 A, B, C, D ニ對シ凡ベテノ組合セヲ以テ六個ノ測角ヲ爲シタリトス.

第四百四十一圖



(1)= 48°17′ 1″,4　(4)= 48°35′14″,3

(2)= 96 52 16 ,8　(5)=104 37 7 ,8

(3)=152 54 6 ,8　(6)= 56 1 48 ,9

四ノ方向 OA, OB, OC, OD ヲ定ムルニハ三個ノ角ヲ以テ充分ナリトス. 故ニ角 AOB, AOC, AOD ヲ三ノ獨立角ト考ヘ,先ヅ近似値ト更正角ヲ夫々次ノ如キモノトス.

		更正角
(1)	$(AOB)=$ 48°17′1″,4	x
	$(AOC)=$ 96 52 16,8	y
	$(AOD)=$152 54 6,8	z

次ニ (1), (2), (3),……(6) ノ更正量ヲ夫々 $v_1, v_2, v_3,\ldots\ldots v_6$ トスレバ勿論

(2)　$v_1=x,\quad v_2=y,\quad v_3=z$

ニシテ第四ノ誤差等式ハ

(3)　$48°35'14'',3+v_4=(96°52'16'',8+y)-(48°17'1'',4+x)$

又ハ

(3′)　$v_4=-x+y+1'',1$

同様ニ第五,第六ノ誤差等式ヲ併セ加フレバ

$$(4)\quad \begin{cases} v_1=+x \\ v_2=\quad +y \\ v_3=\qquad +z \\ v_4=-x+y\quad +1'',1 \\ v_5=-x\quad +z-2'',4 \\ v_6=\quad -y+z+1'',1 \end{cases}$$

輕重率ガ相等シキモノトシテ正等式ハ次ノ如シ

$$
(5)\qquad \left\{\begin{array}{l}
3x-\ y-\ z+(+2{,}4-1{,}1)=0\\
-x+3y-\ z+(+1{,}1-1{,}1)=0\\
-x-\ y+3z+(-2{,}4+1{,}1)=0
\end{array}\right.
$$

又ハ

$$
(5')\qquad \left\{\begin{array}{l}
\underline{3x}-\ y-z+1{,}3=0\\
\quad +\underline{3y}-z+0{,}0=0\\
\qquad\quad \underline{3z}-1{,}3=0
\end{array}\right.
$$

此等三ノ正等式ヨリ

$$
(6)\qquad x=-0'',3\quad y=0'',0\quad z=+0'',3
$$

故ニ調整角ハ次ノ如シ

$$
(7)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\text{角 } AOB=\ 48°17'\ 1'',1\\
\text{角 } AOC=\ 96\ 52\ 1\text{[illegible]}\ ,8\\
\text{角 } AOD=152\ 54\ \ 7\ ,1
\end{array}\right.
$$

若シ測角ノ精度相等シカラズシテ輕重率ヲ異ニスル場合ニハ更正角モ亦勿論前ト同ジカラズ. 例ヘバ前例ニ於テ

$$
(8)\qquad \left\{\begin{array}{l}
p_1=30,\quad p_2=20,\quad p_3=26\\
p_4=25,\quad p_5=28,\quad p_6=44
\end{array}\right.
$$

ナリト假定スレバ (4) 及 (8) ヨリ

$$
(9)\qquad \left\{\begin{array}{l}
[paa]=+30+25+28=+83\\
[pab]=-25\\
[pac]=-28\\
[pbb]=+20+25+44=+89\\
[pbc]=-44\\
[pcc]=+98\\
[pal]=+39{,}7,\quad [pbl]=-20{,}9,\quad [pcl]=-18{,}8\\
[pll]\ =+244{,}77
\end{array}\right.
$$

故ニ正等式ハ

$$
(10)\qquad \left\{\begin{array}{r}
\underline{+83{,}0x}-25{,}0y-28{,}0z+39{,}7=0\\
\underline{89{,}0y}-44{,}0z-20{,}9=0\\
\underline{98{,}0z}-18{,}8=0\\
\underline{\underline{244{,}77}}\quad
\end{array}\right.
$$

之ヨリ

$$
(11)\qquad \left\{\begin{array}{ll}
x=-0'',34 & p_x=54{,}6\\
y=+0\ ,24 & p_y=50{,}4\\
z=+0\ ,20 & p_z=54{,}8
\end{array}\right.
$$

及

$$
(12)\qquad [pll.3]=[pvv]=222{,}5
$$

故ニ輕重率 1 ノ一回觀測ノ均方誤差ハ

$$
(13)\qquad m=\sqrt{\frac{222{,}5}{6-3}}=\pm 8'',61
$$

ニシテ調整値 x, y, z ノ均方誤差ハ

$$(14)\quad \begin{cases} m_x=\dfrac{8,61}{\sqrt{54,6}}=\pm1'',17 \\ m_y=\dfrac{8,61}{\sqrt{50,4}}=\pm1'',21 \\ m_z=\dfrac{8,61}{\sqrt{54,8}}=\pm1'',16 \end{cases}$$

從テ

角	實測ノ値	更正量 v	調整角	v^2	p	pvv
AOB	48°17′ 1,″4	−0″,34	48°17′ 1″,06	0,12	30	3,60
AOC	96 52 16, 8	+0 ,24	96 52 17 ,04	0,06	20	1,20
AOD	152 54 6, 8	+0 ,20	152 54 7 ,00	0,04	26	1,04
BOC	48 35 14, 3	+1 ,68	48 35 15 ,98	2,82	25	70,50
BOD	104 37 7, 8	−1 ,86	104 37 5 ,94	3,46	28	96,89
COD	56 1 48, 9	+1 ,06	56 1 49 ,96	1,12	44	49,28
						225,51

444. 不定因數ニ依ル局所調整. 443 ノ場合ニ於テ六個ノ實測角ノ間ニ三ノ條件等式ヲ得. 卽チ(4)ノ中初ノ 3 式ハ互ニ獨立セルモノニシテ,自餘ノ三式ハ條件等式ヲ表ハス.

$$(1)\quad \begin{cases} -v_1+v_2-v_4+w_4=0 & w_4=+1'',1 \\ -v_1+v_3-v_5+w_5=0 & w_5=-2\ ,4 \\ -v_2+v_3-v_6+w_6=0 & w_6=+1\ \ 1 \end{cases}$$

今不定因數 k_1, k_2, k_3 ヲ用フルトキハ其正等式ハ

$$(2)\quad \begin{cases} +3k_1-\ k_2-\ k_3+w_4=0 \\ +\ k_1+3k_2+\ k_3+w_5=0 \\ -\ k_1+\ k_2+3k_3+w_6=0 \end{cases}$$

ニシテ

$$(3)\quad \begin{cases} k_1=\frac{1}{4}(-2w_4+w_5-w_6) \\ k_2=\frac{1}{4}(+w_4-2w_5+w_6) \\ k_3=\frac{1}{4}(-w_4+w_5-2w_6) \end{cases}$$

[409] ヨリ

$$(4)\quad \begin{cases} v_1=\frac{1}{4}(-k_1-k_2)=\frac{1}{4}(+w_4+w_5) \\ v_2=\frac{1}{4}(+k_1-k_3)=\frac{1}{4}(-w_4+w_6) \\ v_3=\frac{1}{4}(+k_2+k_3)=\frac{1}{4}(-w_5-w_6) \\ v_4=\frac{1}{4}(-k_1) \qquad =\frac{1}{4}(+2w_4-w_5-w_6) \\ v_5=\frac{1}{4}(-k_2) \qquad =\frac{1}{4}(-w_4+2w_5-w_6) \\ v_6=\frac{1}{4}(-k_3) \qquad =\frac{1}{4}(+w_4-w_5+2w_6) \end{cases}$$

若シ又輕重率ガ異ナルトキハ [532] 乃至 [537] ニ依リテ更正量ヲ見出スコトヲ得ベシ.

今一般ニ一ノ測點ヨリ s 直線ヲ射出スルトキハ

$s-1$ 角ヲ得ベク,之ニ對シテ W 個ノ角ヲ測定シタルトキハ $s-1$ 個ノ獨立未知量ニ對シテ $W-(s-1)$ 個ノ條件等式ヲ得ベシ. 例ヘバ4直線ニ6個ノ角ヲ測定シタル場合ニハ3個ノ條件等式ヲ得ルガ如シ.

445. 方向法. 一ノ角ハ二ノ測點ノ方向ヲ定メ,二ノ方向ノ差トシテ表サルヽモノナリ. 而シテ望遠鏡ヲ正逆ニシ,遊標又ハ測微鏡ヲ一定量丈ケ移動シ,更ニ望遠鏡ニ縱横ノ反轉ヲ行テ方向ヲ定ムルコトハ測角法ト毫モ異ナル處ナシ.

測角法ニ於テ二測點間ノ一角ハ一回ニ測定スレドモ方向法ニ於テハ諸測點ノ方向ヲ測定シ,之ニ由リテ凡ベテノ測點間ノ角度ヲ知ルコトヲ得. 反覆法ニ於テハ測定セラルヽ未知量ハ角度ナレドモ方向法ニ於テハ其未知量ハ關係的方向ナリ. 從テ後者ニ於テハ此等二ノ未知量ノ差ハ一ノ角ヲ爲ス.

方向法ノ整正ニハ各方向ニ伴フ所ノ誤差アルモノトス. 然レドモ器械又ハ觀測者ニ基ヅク誤差ニ至テハ測角法又ハ方向法共ニ同一ニシテ特ニ孰レカ一方ニ固有ナルモノヲ想像スルコト能ハズト雖モ,器械又ハ觀測者以外ノ環境ノ狀態ニ基ヅク凡ベテノ誤差ハ之ニ反シテ種々ノ方向ニ依リテ異ナルモノト考フルヲ至當トス. 例ヘバ視準物ノ位相又ハ陰影及非對照,覘標ノ偏心,据エタル器械ノ偏心,光線ノ横屈折ノ如キハ環境ニ依ル外部的誤差ノ原因ニシテ一ノ器械ヲ据エタル測點ヨリ他ノ一定ノ方向ニハ常ニ一方ノ符號ヲ以テ表ハレ易ク,從テ其方向ニハ一定ノ誤差ヲ伴フヲ常トス.

今一ノ測點ニ於テ W 個ノ測角ヲ行ヒ R 個ノ方向測定ヲ爲シタル場合ニハ勿論 $R=W+1$ ナリ. 卽チ各測點ニ於テ獨立角ヨリモ方向ハ一個丈ケ多ク,一ノ三角網ニ s 個ノ測點アリテ W 個ノ測角ヲ行ヒタル場合ニ R 個ノ方向アレバ

$$W=R-s \qquad [571]$$

ナリ. 但シ視準ノミヲ行ヒテ器械ヲ据エザル測點ハ s ノ中ニ加算セズ. 而シテ角等式,邊等式及全條件ノ數ハ [438], [439] 及 [440] ニ擧ゲタルガ如シ.

第七節 基線測定

446. 基線ノ精度. 基線ヲ測定スルニハ先ヅ測桿又ハ卷尺等ヲ取リ標準ノ長サニ比較シテ精密ニ其ノ長サヲ知ラザルベカラズ. 而シテ基線ヲ測定スルハ種々ナル溫度ニ於テスルヲ以テ測桿又ハ卷尺等ノ膨脹係數ヲ知ラザルベカラズ. 從テ標準ノ長サト比較スルハ溫度ノ廣キ範圍內ニ於テスルヲ要

スベク,一般ニ溫度ノ影響ハ頗ル多ク,此ニ多少ノ誤差ヲ胚胎スルコト尠ナカラズ.

測桿又ハ卷尺ノ類ヲ以テ基線ヲ測定スルハ測鎖及測串ヲ以テ普通ノ鎖測ヲ行フト毫モ其原理ニ異ナル所ナシト雖モ,測桿ノ方向ヲ定メ,或ハ其ノ傾斜ヲ見出シ,測定ヲ止メ又ハ之ヲ始ムルニ際シテ固定點ヲ置クノ類鎖測ニハ見ルヲ得ザル精度ノ裝置ヲ用フルヲ相同ジカラズト爲ス.

故ニ**基線測定ノ誤差ハ二ノ主因ヲ有ス. 測桿又ハ卷尺ヲ標準尺ニ比較スルニ當リ起ル所ノモノ及此測桿等ヲ用ヒテ實地ニ基線ヲ測定スルニ當リ生ズル所ノモノ是ナリ.** 比較ニ際シテ生ジタル誤差ハ其測桿ニ定差トシテ固着スルモノニシテ全基線ニハ累差トナリテ表ハルレドモ,基線ノ測定自身ニ起ル誤差ハ即チ偶差ニ屬シ,或ハ過ギ或ハ足ラズ. 若シ測定モ許多度之ヲ反覆シ,其ノ環境ノ狀態モ亦充分變化セシニハ此ノ後者ノ誤差ハ互ニ相殺シ互ニ相補ヒテ最小自乘法ヲ適用スルニ適ス. 然レドモ通例基線ノ測定ハ二三回ニ止マル. 而カモ是等ハ同一時季ニ行ハルヽヲ常トスルガ故ニ精度ノ推定モ寧ロ大略ニ過ギザルモノトス.

今一般ニ單位ノ長サ例ヘバ1粁ノ平均偶差ヲm_1

平均累差ヲm_2トスレバL單位ノ長サニ對スル全誤差Mハ

$$\left.\begin{aligned} M &= \sqrt{(m_1\sqrt{L})^2+(m_2L)^2} \\ &= \sqrt{m_1^2L+m_2^2L^2} \end{aligned}\right\} \qquad [572]$$

若シ$m_1=1$粍/粁, $m_2=1$粍/粁トスレバL粁ニ對シテ

$$M=\sqrt{L+L^2} \qquad [572']$$

ナリ. 輓近精巧ナル方法ヲ用ヒテ基線ノ測定ハ1粁1粍ノ誤差ヲ平均トス. 然ルニ通例一ノ基線ハ兩端ナル測標ノ中心ヲ結付クル直線上ニ殆ド相等シキ間隔ヲ以テ若干ノ小區ニ分チテ其境ニ石標ヲ樹立シ,全線ノ兩端ニ於テハ長サヲ比較スル代リニ各小區ニ於テ夫々結果ヲ比較スルコトヲ得.

447. 基線測定ノ精度. 測桿又ハ卷尺ヲ標準尺ニ比較スルトキ起ル誤差ハ暫ク之ヲ措キ,基線測定ノ精度ヲ定メントスルニ,一ノ基線ヲn個ノ小區ニ分チ各區ν回或長サノ測桿又ハ卷尺ヲ以テ測定セリトス. 第一回ノ測定ニ於テ第一區ハl_1'桿ヲ測リ,第二區ハl_1''桿ヲ測リ以下之ニ準ズ. 第二回ノ測定ニ於テハ第一區ハl_2'桿ヲ,第二區ハl_2''桿ヲ測リ,其他亦之ニ準ズ. 而シテ測定ノ輕重率ハ夫々$p_1', p_2', \ldots\ldots p_1'', p_2'', \ldots\ldots$トスレバ基線ノ最モ眞ニ近キ値ヲ求ム.

$x' x_{,1}$ $_{2}\ldots\ldots x_n$ヲ夫々第一區,第二區等ノ最モ眞ニ近

キ値トスレバ觀測等式ハ

$$(1)\quad\begin{cases}\text{第一區}\quad x_1-l_1'=v_1' & \text{輕重率}\ p_1'\\ \qquad\quad x_1-l_1''=v_1'' & \text{〃}\quad p_1''\\ \qquad\quad \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\\ \text{第二區}\quad x_2-l_2'=v_2' & \text{輕重率}\ p_2'\\ \qquad\quad x_2-l_2''=v_2'' & \text{〃}\quad p_2''\\ \qquad\quad \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

今測桿ノ長サニ等シキ長サノ測定ハ孰レノ小區ニ於テモ其精度ヲ等シクスルモノトスレバ n 個ノ未知量 $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ ヲ含ム等式ガ各 ν 個ヅヽ,凡テ $n\nu$ 個ノ等式ヲ得ベク,從テ正等式ハ次ノ如シ

$$\left.\begin{array}{ll}+[p_1]x_1 & =[p_1l_1]\\ \quad+[p_2]x_2 & =[p_2l_2]\\ \quad\cdots\cdots\cdots & \\ \qquad[p_n]x_n & =[p_nl_n]\end{array}\right\}\qquad[573]$$

(2) ヨリ $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ ヲ知ルベク,故ニ又全基線ハ

$$x=x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n\qquad[574]$$

單位輕重率又ハ一測桿長ノ一回觀測ノ均方誤差ハ

$$m=\sqrt{\frac{[pvv]}{n(\nu-1)}}\qquad[575]$$

m ハ一測桿長ノ測定ニ對スル均方誤差ナルヲ以テ l 棹ノ長サノ測定ニ對スル均方誤差ハ $m\sqrt{l}$ ニ

等シク,一測桿ノ長サヲ一回測定セル輕重率ヲ單位トスレバ $\dfrac{1}{l}$ ハ長サ l (單位) ノ一回測定ニ對スル輕重率ナリ. 故ニ又

$$m=\sqrt{\frac{1}{n(\nu-1)}\left[\frac{vv}{l}\right]}\qquad[576]$$

多クノ場合ニ基線ハ二回ノ測定ヲ行フヲ以テ ν 區ノ第一回ノ測定ニ於テ $l_1, l_2, \ldots\ldots l_\nu$ ヲ得,第二回ノ測定ニ於テ $l_1+d_1,\ l_2+d_2, \ldots\ldots l_\nu+d_\nu$ ヲ得タリトスレバ,一測桿長ノ一回測定ノ均方誤差 m_1 及二回測定ノ平均ニ對スル均方誤差 M_1 ハ [573] 及 [574] ヨリ夫々次ノ如シ.

$$m_1=\sqrt{\frac{1}{2n}\left[\frac{d^2}{l}\right]}\qquad[577]$$

$$M_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{d^2}{l}\right]}\qquad[578]$$

例 124. 一ノ屈折基線ヲ南北兩部トシ,各部ヲ三小區ニ分チテ二回ノ測定ヲ行ヒ次ノ如キ測定差ト測桿長 (L ヲ單位トス) ヲ得タリ. 基線ノ推差ヲ求ム.

部	區	測定差 d	測桿長
		L	
北	1	−0,183	116
	2	+0,094	87
	3	−0,013	61
			264
南	1	−0,007	92
	2	+0,095	60
	3	+0,757	131
			283

測定ヨリ起ル北部ノ均方誤差 m' ハ

$$m'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{264}{3}\left(\frac{0{,}183^2}{116}+\frac{0{,}094^2}{87}+\frac{0{,}013^2}{61}\right)}$$
$$=\pm\overset{L}{0}{,}093$$

同ジク南部ノ均方誤差 m'' ハ

$$m''=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{283}{3}\left(\frac{0{,}007^2}{92}+\frac{0{,}005^2}{60}+\frac{0{,}757}{131}\right)}$$
$$=\pm\overset{L}{0}{,}327$$

此外測桿ノ長サヲ標準ノ長サニ比較スルガ爲ニ $\pm\overset{L}{0}{,}777$ 及 $\pm\overset{L}{0}{,}648$ ノ定差ヲ有ストセバ此基線ノ推差 r ハ次ノ如シ

$$r=0{,}6745\sqrt{0{,}093^2+0{,}327^2+0{,}777^2+0{,}648^2}$$
$$=\overset{L}{0}{,}72$$

若シ又各區ノ測定ノ精度ハ全ク知ラレズシテ各區獨立セルモノト假定スレバ各區ノ値ノ平均及其均方誤差ハ次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned}
x_1&=\frac{[p_1l_1]}{[p_1]}\\
m_{x_1}^2&=\frac{[p_1v_1^2]}{[p_1](\nu-1)}=\frac{[v_1^2]}{\nu(\nu-1)},\quad p_1'=p_1''=\ldots\ldots=\frac{1}{l_1}\\
x_2&=\frac{[p_2l_2]}{[p_2]}\\
m_{x_2}^2&=\frac{[p_2v_2^2]}{[p_2](\nu-1)}=\frac{[v_2^2]}{\nu(\nu-1)},\quad p_2'=p_2''=\ldots\ldots=\frac{1}{l_2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\qquad [579]$$

[574] ニ示セルガ如ク, $x=x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n$ ニシテ各區ノ測定ハ互ニ獨立セルモノナルガ故ニ

$$\left.\begin{aligned}
m_n^2&=m_{x_1}^2+m_{x_2}^2+\ldots\ldots\\
&=\frac{1}{\nu(\nu-1)}\left\{[v_1^2]+[v_2^2]+\ldots\ldots\right\}
\end{aligned}\right\}\qquad [580]$$

基線ノ一回觀測ニ對スル均方誤差ヲ m_1 トスレバ

$$m_1^2=\frac{1}{\nu-1}\left\{[v_1^2]+[v_2^2]+\ldots\ldots\right\}\qquad [581]$$

基線ノ全長ハ $[l]$ 丈ケノ測桿長ニ等シキガ故ニ一測桿長ノ一回觀測ニ對スル均方誤差ノ自乘ノ平均ハ

$$\frac{m_1^2}{[l]}=\frac{1}{(\nu-1)[l]}\left\{[v_1^2]+[v_2^2]+\ldots\ldots\right\}\qquad [582]$$

故ニ若シ二回ノ測定ヲ行ヒタル場合ニハ一測桿長ノ一回觀測ノ均方誤差 m_0 ハ

$$m_0=\sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{[d^2]}{[l]}}\qquad [583]$$

此ニ d ハ前後二回ノ測定ノ差ヲ表ハス.

第八節　水準測量

448. 水準測量ノ誤差. 地殼ノ密度ガ所ニ依リテ同ジカラザルト高山深海ノ如キ引力ノ異同ヲ來ス爲ニ起ル**垂線ノ外レ**ノ如キモノヲ外ニシテ,水準測量ノ誤差ハ器差,桿差,測差,個人誤差等ヲ主ナルモノトシ,此外記帳計算ノ錯誤並ニ地球ノ曲率及光線ノ

屈折ニ基ク誤差ヲ有ス(君島測量學第六章第十節水準測量ノ精限參照)

今充分水準儀ノ整正ヲ行ヒ,望遠鏡ヲ以テ函尺ヲ視準スルニ當リ,其桿讀ノ誤差ト泡管ノ氣泡ヲ正シ,又ハ其目盛ヲ以テ氣泡ヲ中央ニ來ラシムル時起ル誤差トハ併セテ $\pm\mu$ 丈ケノ差ヲ生ズ. 今水準測量ニ於テ後視ヲ一般ニ r, 前視ヲ v トスレバ二點ノ間ノ高ノ差 H ハ

$$H=[r]-[v] \qquad [584]$$

ニシテ各ノ r 又ハ v ニ $\pm\mu$ 丈ケノ誤差ヲ伴フ. 故ニ n 回ノ視準ヲ行ヒタルトキハ H ノ均方誤差ハ

$$M=\sqrt{n\mu^2}=\mu\sqrt{n} \qquad [585]$$

視準距離 s ヲ以テ水準儀ヲ $\frac{n}{2}$ 回据付ケ,全距離 $L=ns$ ノ間ノ高低ヲ測量シタリトスレバ $n=\frac{L}{s}$ ナルヲ以テ [585] ハ

$$M=\mu\sqrt{\frac{L}{s}} \qquad [586]$$

トナル. 即チ**同一ノ器械ト同一ノ狀態ヲ以テシテハ,其視準距離ガ一定ニシテ s ナル場合ニ,水準測量ノ均方誤差ハ全距離 L ノ平方根ニ比例シ,距離ガ一定ナル場合ニハ s ノ平方根ニ反比シ,異ナル L 及 s ヲ以テシテハ L ノ平方根ニ比例シ, s ノ平方根ニ反比ス.** 但シ此ノ最後ノ場合ニハ一ノ高低測量系ニ於テ各始ヨリ終マデ s ヲ一定ニシ他ノ高低測量系トハ異ナル s ヲ有スルモノトス.

故ニ又 s ガ一定ナルトキ均方誤差 M ハ $\sqrt{L}$ ニ比例スルガ故ニ一定ノ視準距離ヲ以テスル異ナル高低測量ノ輕重率ハ他ノ狀態ガ同一ナルトキハ距離 L ニ反比ス. 從テ二ノ距離 L 及 L' ニ於テ視準距離ガ一定ナルトキハ其輕重率 p 及 p' ハ夫々

$$p:p'=\frac{1}{L}:\frac{1}{L'} \qquad [587]$$

今視準線ト泡管ノ接線ガ平行ナラズシテ,視準線ガ地平線ニ對シテ傾斜スルトキハ桿讀ヲ爲ス毎ニ誤差ヲ生ズベク,若シ桿讀ガ或ル過高或ハ過低等ノ爲ニ生ズル誤差ヲ非常ニ小サキモノト假定スルトキハ $\pm\mu$ ノ大部分ハ單ニ視準線ノ傾斜ヨリ來ルモノト考フルコトヲ得ベシ. 此假定ニ於テハ k ヲ或定數トスレバ $\pm\mu=ks$ ニシテ之ヲ [586] ニ代用スレバ

$$M=k\sqrt{Ls} \qquad [588]$$

即チ同一ノ水準儀ヲ以テスレバ距離ヲ外ニシ,高低測量ノ均方誤差 M ハ視準距離 s ノ平方根ニ比例ス.

然レドモ若シ又 $\pm\mu=k'\sqrt{s}$ ナリト假定スレバ

$$M=k'\sqrt{L} \qquad [589]$$

ヲ得ベク,**同一器械ヲ以テシテハ高低測量ノ均方誤**

差 M ハ L ノ平方根ニ比例シ視準距離ニ關セズ.

449. 往復水準測量. 二點間ノ高サノ差ヲ見出サントスルトキハ其間ヲ $s_1, s_2, \ldots. s_n$ ナル異ナル所ノ長ヲ有スル區間ニ分チ,各區ヲ往復水準測量ヲ行ヒテ各 d ナル差ヲ見出シタリトス. 即チ

區間	s_1	$h_1-h_1^1=d_1$
„	s_2	$h_2-h_2^1=d_2$
………		………
„	s_n	$h_n-h_n^1=d_n$

$s=1$ 粁ナル長ニ對スル平均ノ差 D ハ

$$\left.\begin{aligned} D&=\sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{d_1^2}{s_1}+\frac{d_2^2}{s_2}+\ldots\ldots+\frac{d_n^2}{s_n}\right)} \\ &=\sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{d^2}{s}\right]} \end{aligned}\right\} \qquad [590]$$

長サ 1 粁ノ一回高低測量ニ對スル均方誤差 m ハ

$$m=\frac{D}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{1}{2n}\left[\frac{d^2}{s}\right]} \qquad [591]$$

故ニ 1 粁ヲ往復二回ノ水準測量ヲ爲シテ其平均ニ對スル均方誤差 M ハ

$$M=\frac{m}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{d^2}{s}\right]} \qquad [592]$$

是レ [474] 及 [475] ニ述ベタル所ナリ.

水準測量ニ於テ視準距離 s ハ粁ヲ以テ之ヲ表ハシ, d ハ粍ヲ以テ之ヲ表ハスヲ常トスルガ故ニ [590], [591] 及 [592] ハ 1 粁ニ對スル粍ヲ以テ表ハサルヽモノナリ.

450. 水準網ノ調整. 稍々精密ヲ要スル水準測量ハ通例二重ノ路線ヲ用ヒ,各線ハ往復二回以上水準ヲ取リ,成ルベク異ナル方向ヲ以テ高低ヲ測定スルヲ良シトス. 若シ是等水準路線ガ相連リテ網目ヲ作ルトキハ各種ノ回路ノ閉差ハ其測量ノ精度ヲ定ムル用ヲ爲ス. 水準網ヲ調整スルニハ間接觀測法ニ依ルカ又ハ條件觀測法ニ依ルモノトス.

間接觀測法ニ於テハ s ヲ水準路線ノ合スル所ニ設ケラレタル水準據標ノ數トシ各々水準網ノ二線以上ニ共通ナルモノトス. l ヲ二ノ據標ヲ繋ク水準網ノ邊ノ數トス. 今一ノ水準據標ヲ基點トシ其高サヲ零トスレバ求メラルヽ未知量即チ高サハ $s-1$ ニシテ,恰カモ $s-1$ ノ未知量ト l 個ノ觀測等式ヲ有スル所ノ間接觀測ノ一例ニ當リ,其ノ觀測等式ハ $x=h$ 又ハ $x-y=h$ ナル形ヲ有ス(本章第四節參照).

條件觀測法ニ至テハ s ヲ二線以上ガ相會シタル水準據標ノ總數, l ヲ二ノ水準據標ヲ連ヌル路線ノ數トス. 今是等ノ l 線ノ兩端ニ在ル水準據標ノ間ノ高サノ差ハ l 個ニシテ求ムル所ノ未知量ハ實ニ是等 個ノ高差ナリトセバ是レ即チ條件觀測ノ一

例ト見ルコトヲ得. 卽チ $x=h$ ナル形ノ觀測等式ハ l 個アリテ,各ノ場合ニ求メラルヽ一ノ未知量ヲ直接ニ觀側スルモノナリ. s 個ノ水準據標ノ關係的高サヲ定ムルニ必要ナル高サノ差ハ勿論 $s-1$ ナルヲ以テ $l-(s-1)$ 丈ケ觀測シタル高サノ差ハ必要ナル高サノ差ヨリ多シ. 從テ $l-s+1$ ハ條件等式ノ數ヲ表ハシ,水準網中ノ各回路ガ夫々相繋リテ一種ノ輪ヲ爲ス所ノ數ヲ示ス. 卽チ各回路ヲ回リテ順次ニ測定シタル高サノ差ハ之ヲ加フレバ終ニ零ニ等シカラザルベカラズ. 是レ 408 ニ述ベタル間接解法ニ屬スルモノナリ.

—〔終〕—