第　一　編

緒　　　　論

工業力學

第一章

度量衡及時ノ單位

1. 長サノ單位.

1. 日本單位. 我國ニ用ユル度量衡單位ハ明治四十二年三月法律第四號度量衡法ヲ以テ一定サレ該法第一條ニ於テ度ハ尺ヲ以テ基本トスルコトヲ規定シ其第二條ニ於テ度ノ原器ハ白金及いりぢゅむノ合金製ノ棒ニシテ其棒ノ面ニ記シタル標線間ノ攝氏0·15度ニ於ケル長サノ$\frac{10}{33}$ヲ尺トスルコトヲ定メ更ニ其第三條ニ於テ尺以外ノ單位ヲ次ノ如ク命名スル旨ヲ記セリ:—

毛	01^{-4} 尺
厘	10^{-3} 尺
分	10^{-2} 尺
寸	10^{-1} 尺
丈	10 尺
間	6 尺
町	360 尺

里 12,960 尺

2. 佛單位. 佛單位ニ於ケル長サノ單位ハめーとる (mètre) ヲ以テ基本トス. 1めーとるハ恰モ第1節ニ述ベタル棒ノ標線間ノ攝氏 0·15 度ニ於ケル長サニシテ我日本ノ單位ハ實ニ之ヨリ脱化セルモノナリ.

めーとる以外ノ單位ハ次ノ如シ:—

みりめーとる (millimètre)	10^{-3} めーとる
さんちめーとる (centimètre)	10^{-2} めーとる
でしめーとる (décimètre)	10^{-1} めーとる
でかめーとる (décamètre)	10 めーとる
へくとめーとる (hectomètre)	10^2 めーとる
きろめーとる (kilomètre)	10^3 めーとる

3. 英單位. 英單位ニ於ケル長サノ單位ハやーど(碼, yard)ヲ以テ基本トス.

碼以外ノ單位ハ次ノ如シ:—

いんち (吋, inch)	$\frac{1}{36}$ 碼
ふっと (呎, foot)	$\frac{1}{3}$ 碼
まいる (哩, mile)	1,760 碼

4. 長サノ日佛英單位比較. 長サノ日佛單位ノ比較ハ第1及第2節ニヨリテ之ヲ知リ得ベク日英單位ノ比較ハ明治四十二年六月勅令第百六十九號度量衡法施行令第一條ニ於テ定ムル所ノ

$$1\text{ 碼} = \frac{37719}{12500}\text{ 尺}$$

ナル關係ヨリ之ヲ求ムルコトヲ得ベシ. 次ノ表ハ此等ニ基キテ計算セル結果ナリ:—

日	佛	英
1 寸	$\frac{100}{33} = 3{\cdot}030$ さんちめーとる	1·193 吋
1 尺	$\frac{10}{33} = 0{\cdot}303$ めーとる	0·994 呎
佛	**日**	**英**
1 さんちめーとる	$\frac{33}{100} = 0{\cdot}330$ 寸	0·394 吋
1 めーとる	$\frac{33}{10} = 3{\cdot}300$ 尺	3·281 呎
英	**日**	**佛**
1 吋	0·838 寸	2·540 さんちめーとる
1 呎	1·006 尺	0·305 めーとる

2. 面積及容積ノ單位.

5. 面積單位. 力學ニ於テハ面積單位トシテ平方寸,平方尺,平方さんちめーとる,平方めーとる,平方吋,平方呎等ヲ用ユルヲ常トス.

6. 面積ノ日佛英單位比較.

日	佛	英
1 平方寸	$\left(\frac{100}{33}\right)^2 = 9{\cdot}183$ 平方さんちめーとる	1·423 平方吋
1 平方尺	$\left(\frac{10}{33}\right)^2 = 0{\cdot}092$ 平方めーとる	0·988 平方呎
佛	**日**	**英**
1 平方さんちめーとる	$\left(\frac{33}{100}\right)^2 = 0{\cdot}109$ 平方寸	0·155 平方吋
1 平方めーとる	$\left(\frac{33}{10}\right)^2 = 10{\cdot}890$ 平方尺	10·764 平方呎
英	**日**	**佛**
1 平方吋	0·703 平方寸	6·452 平方さんちめーとる
1 平方呎	1·012 平方尺	0·093 平方めーとる

7. <u>容積單位.</u> 力學ニ於テハ容積單位トシテ立方寸,立方尺;立方さんちめーとる,立方めーとる;立方吋,立方呎等ヲ用ユルヲ常トス.

8. <u>容積ノ日佛英單位比較.</u>

日	佛	英
1 立方寸	$\left(\frac{100}{33}\right)^3=27.826$ 立方さんちめーとる	1.698 立方吋
1 立方尺	$\left(\frac{10}{33}\right)=0.028$ 立方めーとる	0.983 立方呎
佛	**日**	**英**
1 立方さんちめーとる	$\left(\frac{33}{100}\right)^3=0.036$ 立方寸	0.061 立方吋
1 立方めーとる	$\left(\frac{33}{10}\right)^3=35.937$ 立方尺	35.315 立方呎
英	**日**	**佛**
1 立方吋	0.589 立方寸	16.387 立方さんちめーとる
1 立方呎	1.018 立方尺	0.028 立方めーとる

3. 重量ノ單位

9. <u>日本單位.</u> 度量衡法第一條ニ於テ衡ハ貫ヲ以テ基本トスルコトヲ規定シ其第二條ニ於テ衡ノ原器ハ白金及いりぢうむノ合金製ノ分銅ニシテ該分銅ノ質量ノ$\frac{15}{4}$ヲ貫トスルコトヲ定メ更ニ其第三條ニ於テ貫以外ノ單位ヲ次ノ如ク命名スル旨ヲ記セリ:—

毛 10^{-6} 貫

厘 10^{-5} 貫

分 10^{-4} 貫

匁 10^{-3} 貫

斤 160 匁

10. <u>佛單位.</u> 佛單位ニ於ケル質量ノ單位ハきろぐらむ (kilogramme) ヲ以テ基本トス. 1 きろぐらむハ恰モ第 9 節ニ述ベタル分銅ノ質量ニシテ我日本ノ單位ハ實ニ之ヨリ脱化セルモノナリ.

きろぐらむ以外ノ單位ハ次ノ如シ:—

みりぐらむ (milligramme) 10^{-6} きろぐらむ

さんちぐらむ (centigramme) 10^{-5} きろぐらむ

でしぐらむ (décigramme) 10^{-4} きろぐらむ

ぐらむ (gramme) 10^{-3} きろぐらむ

でかぐらむ (décagramme) 10^{-2} きろぐらむ

へくとぐらむ (hectogramme) 10^{-1} きろぐらむ

とんぬ (佛噸,tonne) 10^3 きろぐらむ

11. <u>英單位.</u> 英單位ニ於ケル質量ノ單位ハぱうんど (听, pound) ヲ以テ基本トス.

听以外ノ單位ハ次ノ如シ:—

をんす (ounce) $\frac{1}{16}$ 听

くをーたー (quarter) 28 听

はんどれっどうぇーと (hundred weight) 112 听

とん (噸, ton) 2,240 听

12. <u>質量ノ日佛英單位比較.</u> 質量ノ日佛單位ノ比較ハ第 9 及第 10 節ニヨリテ之ヲ知リ得ベク日英單位ノ比較ハ度量衡法施行令第一條ニ於テ定ムル所ノ

$$1\text{听}\ \frac{378}{3125}\ \text{貫}$$

ナル關係ヨリ之ヲ求ムルコトヲ得ベシ. 次ノ表ハ此等ニ基キテ計算セル結果ナリ:—

日	佛	英
1 匁	$\frac{15}{4}=3{\cdot}75$ ぐらむ	0·008 听
1 貫	$\frac{15}{4}=3{\cdot}75$ きろぐらむ	8·267 听
佛	**日**	**英**
1 きろぐらむ	$\frac{4}{15}=\quad 0{\cdot}267$ 貫	2·205 听
1 佛噸	$\frac{800}{3}=266{\cdot}667$ 貫	0·984 噸
英	**日**	**佛**
1 听	120·960 匁	0·454 きろぐらむ
1 噸	270·950 貫	1·016 佛噸

4. 時ノ單位.

13. 時ノ單位. 時ノ單位ニハ平均太陽時(精確ナル時計ノ示セル時)ノ一秒時ヲ用ユルヲ常トスレドモ便宜上一分間又ハ一時間ヲ用ユルコト亦尠カラズ.

第二章

力

1. 總說.

14. 力ノ單位. 力ノ單位ニハ重量ノ單位ヲ用ユ.

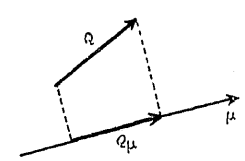
15. 力ノ三元素. 力ハ第一大サ,第二働ク方向,第三働ク點ヲ有ス. 之ヲ力ノ三元素ト謂フ.

力ノ働點ヲ通過シテ其働ク方向ニ横レル直線ヲ該力ノ働線ト謂フ.

16. 指線. 或ル一定ノ方向ヲ有スル直線ヲ指線ト謂フ. 解析幾何學ニ於ケル坐標軸ハ其一例ナリ.

17. 力ノ指線ニ於ケル分力. 第1圖ニ於テQヲ與ヘラレタル

第1圖



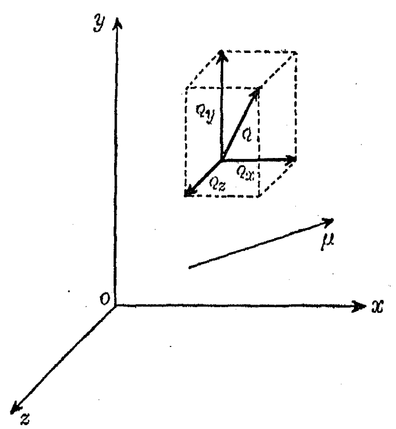
力,μヲ指線トス. Qノ兩端ヨリμニ垂線ヲ下ストキハ Q_μ ナル方向及大サヲ有シ一定ノ働點又ハ働線ヲ有セザル力ヲQ力ノμ線ニ於ケル分力ト謂ヒ,(Q,μ)ヲ以テQ及μノ兩方向ノ間ノ角ヲ示ストキハ

1) $$Q_\mu = Q\cos(Q,\mu)$$

ヲ得.

第2圖ノ如ク矩坐標軸x, y, zヲ取ルトキハ

第2圖



$$Q_x = Q\cos(Q,x),\qquad Q_y = Q\cos(Q,y),\qquad Q_z = Q\cos(Q,z)$$

ニシテ解析幾何學ニヨリ

$$\cos(Q,\mu)=\cos(Q,x)\cos(\mu,x)+\cos(Q,y)\cos(\mu,y)+\cos(Q,z)\cos(\mu,z)$$

ナルガ故ニ 1)式ニヨリ

2) $$Q_\mu = Q_x\cos(\mu,x)+Q_y\cos(\mu,y)+Q_z\cos(\mu,z)$$

ヲ得.

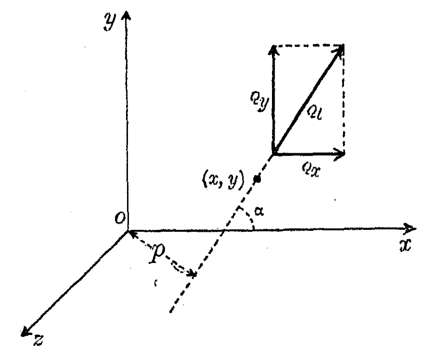
18. 力ノ指線ニ對スル力率. 第3圖ニ於テzヲ與ヘラレタル指線トシ,與ヘラレタル力Qノ兩端ヨリ面xyニ垂線ヲ下シテQ_tヲ得,OヨリQ_tニ下セル垂線ノ長サヲpトスルトキハ

3) $$M_z = pQ_t$$

ヲQ力ノz線ニ對スル力率ト謂フ. zト共ニ立チテQ_tヲ眺メ下

シQ_tノ方向時計ノ針ト反對ノ廻轉ヲ爲サントスルトキハM_zハ正

第3圖



號ヲ有スルモノトシ,Q_tノ方向時計ノ針ト同一ノ廻轉ヲ爲サントスルトキハM_zハ負號ヲ有スルモノトス.

(x, y, z)ヲQノ働線中ノ任意ノ一點トスルトキハ

$$M_z = pQ_t = (x\sin\alpha - y\cos\alpha)\,Q_t = x\,Q_y - y\,Q_x$$

ナルガ故ニx, yニ對スル同樣ノ關係ニヨリ

4) $$M_x = \begin{vmatrix} y & Q_y \\ z & Q_z \end{vmatrix},\qquad M_y = \begin{vmatrix} z & Q_z \\ x & Q_x \end{vmatrix},\qquad M_z = \begin{vmatrix} x & Q_x \\ y & Q_y \end{vmatrix}$$

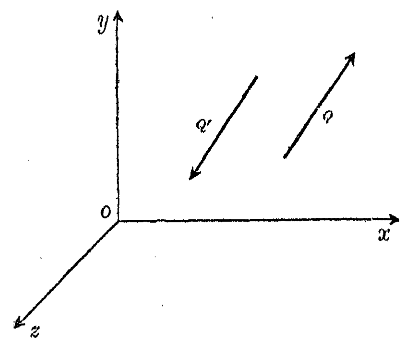
ヲ得.

19. 力率ノ單位. 長サノ單位呎ニシテ,力ノ單位听ナルトキハ力率ノ單位ヲ「呎听」ト稱ス. 其他類推スベシ.

20. 偶力. 偶力率. 其大サ相等シク,其方向全ク相反シ,而シテ異リタル働線ヲ有スル二力ヲ總稱シテ偶力ト謂フ.

第4圖ニ於テ矩坐標軸x, y, zニ對スル偶力Q, Q'ノ力率ノ和ヲソレゾレM_x, M_y, M_zトスルトキハ此等ヲソレゾレx, y, z軸ニ對スル偶力率ト謂フ.

第4圖



21. 總代力又ハ總代偶力. 與ヘラレタル多クノ力Qアリテ矩坐標軸x, y, zニ於ケルQノ分力ヲQ_x, Q_y, Q_zトシ, Qノx, y, z軸ニ對スル力率ヲM_x, M_y, M_zトシ, 更ニ$\mathfrak{N}$ナル一力アリテx, y, z軸ニ於ケル分力ヲ$\mathfrak{N}_x, \mathfrak{N}_y, \mathfrak{N}_z$トシ$\mathfrak{N}$ノ$x, y, z$軸ニ對スル力率ヲ$\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z$トシ

$$5)\qquad \begin{cases} \mathfrak{N}_x = \Sigma Q_x, & \mathfrak{N}_y = \Sigma Q_y, \quad \mathfrak{N}_z = \Sigma Q_z \\ \mathfrak{M}_x = \Sigma M_x, & \mathfrak{M}_y = \Sigma M_y, \quad \mathfrak{M}_z = \Sigma M_z \end{cases}$$

ナルトキハ$\mathfrak{N}$ヲ與ヘラレタル多クノ力Qノ總代力ト謂フ. (ξ, η, ζ), (x, y, z) ヲソレゾレニ$\mathfrak{N}, Q$ノ働線中ノ任意ノ一點トスルトキハ終リノ三式ハ

$$6)\qquad \begin{vmatrix} \eta & \mathfrak{N}_y \\ \zeta & \mathfrak{N}_z \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} y & Q_y \\ z & Q_z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \zeta & \mathfrak{N}_z \\ \xi & \mathfrak{N}_x \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} z & Q_z \\ x & Q_x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi & \mathfrak{N}_x \\ y & \mathfrak{N}_y \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} x & Q_x \\ y & Q_y \end{vmatrix}$$

トナスコトヲ得.

若シ

$$\Sigma Q_x = 0, \quad \Sigma Q_y = 0, \quad \Sigma Q_z = 0$$

ナレドモ $\Sigma M_x, \Sigma M_y, \Sigma M_z$ ノ一又ハ其以上ノモノ零ナラザルトキハ此ノ如キ一力$\mathfrak{N}$ノ存在ヲ認ムルコト能ハズ. 此場合ニ於テ$\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$

ナル偶力ヲ取リ其x, y, z軸ニ對スル偶力率ヲ$\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z$トシ

$$7)\qquad \mathfrak{M}_x = \Sigma M_x, \quad \mathfrak{M}_y = \Sigma M_y, \quad \mathfrak{M}_z = \Sigma M_z$$

ナルトキハ$\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$ヲ與ヘラレタル多クノ力$Q$ノ總代偶力ト謂フ.

總代力ハ一定ノ大サ,方向及働線ヲ有スレドモ確タル働點ヲ有セズ. 總代偶力ハ一定ノ偶力率ヲ有スレドモ確タル大サ,方向及働點ヲ有セズ.

22. 定理 1. 總代力又ハ總代偶力ハ唯一ナリ.

總代力ノ場合ニ於テ$\mathfrak{N}$及$\mathfrak{N}'$ナル二個ノ總代力アリトスルトキハ 5), 6)式ニヨリ

$$\mathfrak{N}_x = \mathfrak{N}'_x, \quad \mathfrak{N}_y = \mathfrak{N}'_y, \quad \mathfrak{N}_z = \mathfrak{N}'_z$$

$$\begin{vmatrix} \eta & \mathfrak{N}_y \\ \zeta & \mathfrak{N}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \eta' & \mathfrak{N}'_y \\ \zeta' & \mathfrak{N}'_z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \zeta & \mathfrak{N}_z \\ \xi & \mathfrak{N}_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \zeta' & \mathfrak{N}'_z \\ \xi' & \mathfrak{N}'_x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi & \mathfrak{N}_x \\ \eta & \mathfrak{N}_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi' & \mathfrak{N}'_x \\ \eta' & \mathfrak{N}'_y \end{vmatrix}$$

ナルガ故ニ$\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$ハ同一ノ大サ,方向及働線ヲ有セリ.

總代偶力ノ場合モ同樣ニ證スルコトヲ得ベシ.

系. 任意ノ矩坐標軸x, y, zニ對シ

$$\Sigma Q_x = 0, \quad \Sigma Q_y = 0, \quad \Sigma Q_z = 0$$

$$\Sigma M_x = 0, \quad \Sigma M_y = 0, \quad \Sigma M_z = 0$$

ナルトキハ任意ノ他ノ矩坐標軸ニ對スルモノ亦然リ.

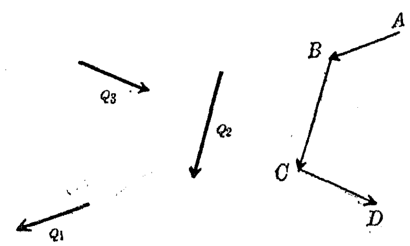
23. 定理 2. 同一ノ大サ及働線ト反對ノ方向ヲ有スル二力ハ總代力又ハ總代偶力ニ影響ヲ及ボスコトナシ.

此定理ハ證明ヲ要セズシテ明ナリ.

24. 力ノ多角形. 第5圖ニ於テQ_1, Q_2, Q_3ノ如キ多クノ與ヘラレタル力アルトキハ任意ノ一點Aヨリ起リテ$AB = Q_1$, $BC = Q_2$, $CD = Q_3$トナストキハ$ABCD$ナル多角形ヲ與ヘラレタル力ノ多角

形ト謂フ,

第 5 圖



25. 定理 3. 總代力ヲ有セル力ノ多角形ノ始點ヨリ終點ニ向ヘル線ハ該總代力ノ大サ及方向ヲ示ス.

此定理ハ 5) 式ノ初ノ三式ニヨリテ明ニシテ力ノ多角形ヲ作ルニ際シ各力ヲ順次ニ取ルベキ順序ノ如何ハ其始點ヨリ終點ニ向ヘル線ノ大サ及方向ニ影響ヲ及ボサヾルコト亦明ナリ.

系 1. 總代力零ナル如キ力ノ多角形ハ閉多角形ナリ.

系 2. 一點ニ集レル力ノ多角形閉多角形ナルトキハ其總代力ハ零ナリ.

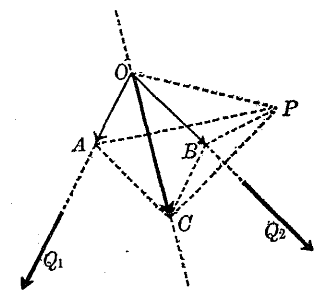
2. 同一ノ平面上ニ於ケル力.

26. 問題 1. 總代力ヲ有セル力ノ總代力ノ圖式解法.

第一法. 第 6 圖ニ於テ與ヘラレタル力ヲ Q_1, Q_2 トシ, $OA=Q_1$, $OB=Q_2$ トシ, $OACB$ ナル平行四邊形ヲ作ルトキハ OC ハ求ムル總代力ナリ.

證. OC ガ 5) 式ノ初ノ三式ヲ滿足スベキコト明ニシテ,又 P ヲ面ニ垂直ナル任意ノ指線トスルトキハ兩三角形 POA, POB ノ面積ノ和ハ三角形 POC ノ面積ニ等シキガ故ニ 5) 式ノ終リノ三式ノ滿足サルヽコト亦明ナリ.

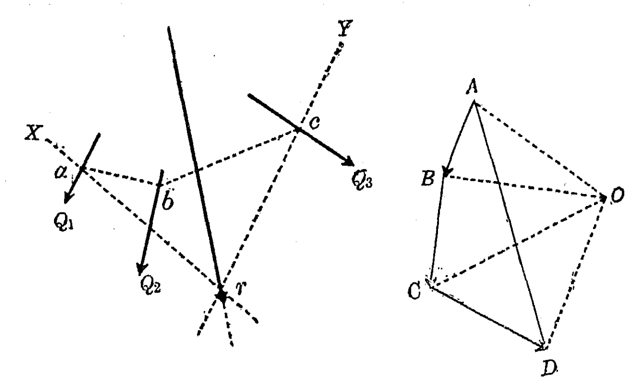
第 6 圖



與ヘラレタル力二力以上例ヘバ甲乙丙ノ三力ナルトキハ先ヅ任意ノ二力例ヘバ甲乙ノ總代力ヲ求メ次ニ此總代力ト丙トノ總代力ヲ求ムベシ. 此最後ノ總代力ハ求ムル總代力ニシテ甲乙丙ヲ取ルベキ順序ノ如何ハ之ニ影響スルコトナシ.

第二法. 第 7 圖ニ於テ與ヘラレタル力ヲ Q_1, Q_2, Q_3 トシ其總代力ヲ求ムルニ先ヅ力ノ多角形 $ABCD$ ヲ作リ任意ノ一點 O ト此多角形ノ各角點トヲ結ビ任意ノ點 X ヨリ起リ

第 7 圖



$$Xa \parallel OA,\quad ab \parallel OB,\quad bc \parallel OC,\quad cY \parallel OD$$

ヲ引キ Xa, Yc ノ交點ヲ r トスルトキハ r ヲ通過シ AD ナル大サ及

方向ヲ有セル力ハ求ムル總代力ナリ.

證. 與ヘラレタル三力ノ外ニ Xa 線上ニ AO, OA; ab 線上ニ BO, OB; bc 線上ニ CO, OC; cY 線上ニ DO, OD ナル大サ及方向ヲ有スル力アリトスルモ求ムル總代力ニ影響スルコトナシ(定理2). 定理3ノ系2ニヨリ

$$OA,\ Q_1,\ BO\ ノ總代力 = 0$$

$$OB,\ Q_2,\ CO\ ノ總代力 = 0$$

$$OC,\ Q_3,\ DO\ ノ總代力 = 0$$

$$\therefore\quad Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ ノ總代力 = AO,\ OD\ ノ總代力.$$

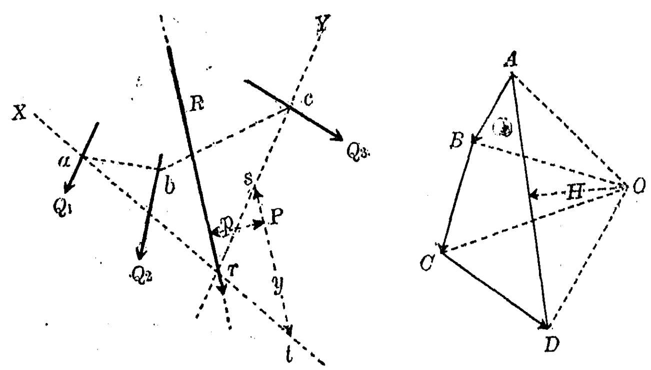
然ルニ第一法ニヨリ AO, OD ノ總代力ハ r ヲ通過シ AD ナル大サ及方向ヲ有スル力ナリ.

O ナル點ヲ極, $XabcY$ ナル多角形ヲ索多角形ト謂フ.

27. 問題 2. 總代力ヲ有セル力ノ之ニ垂直ナル指線ニ對スル力率ノ圖式解法.

第8圖ニ於テ前節ニヨリテ與ヘラレタル力ノ總代力ヲ求メ P

第8圖



ヲ與ヘラレタル指線トシ P ヨリ rR ニ下セル垂線ノ長サヲ p トスルトキハ第21節ニヨリ求ムル力率 $\mathfrak{M}$ ハ

$$\mathfrak{M} = p \times AD$$

ナリ. P ヲ通過シテ AD 又ハ rR ニ平行ニ sPt ヲ引キ Ya, Yc 兩線ニ挿マレタル長サ st ヲ y トシ, O ヨリ AD ニ下セル垂線ノ長サヲ H トスルトキハ rst, OAD 兩三角形ハ相似ニシテ

$$\frac{AD}{H} = \frac{y}{p}$$

ナルガ故ニ

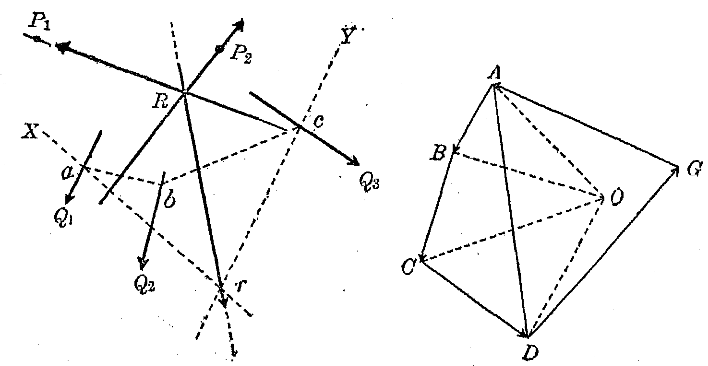
$$\mathfrak{M} = yH \tag{8}$$

ヲ得.

28. 問題 3. 與ヘラレタル多クノ力ト共ニ其總代力ヲ零ナラシムベキ二力ノ各ヲシテ與ヘラレタル一點ヲ通過セシメ而シテ其一ハ此二點ヲ結ベル線以外ノ一線上ニアラシメンコトヲ求ム.

第一. 第9圖ニ於テ P_1, P_2 ヲ與ヘラレタル二點, P_1R ヲ與ヘラレ

第9圖



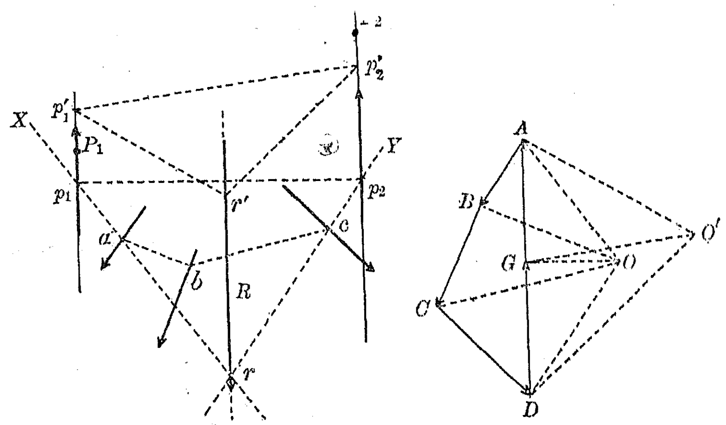
タル一線トス. 第26節ニヨリテ與ヘラレタル力ノ總代力ヲ求メ其働線ト P_1R トノ交點 R ト P_2 ヲ結ビ $AG // P_1R$, $DG // P_2R$ ヲ引クト

キハソレソレニ P_1R, P_2R 線上ニアリテ GA, DG ナル大サ及方向ヲ有セル二力ハ求ムル二力ナリ.

證明ハ定理3ノ系2ニヨリテ明ナリ.

第二. 第10圖ニ於テ若シ P_1 ヲ通過セル與ヘラレタル一線 P_1p_1 ガ rR ニ平行ナルトキハ $P_2p_2 // P_1p_1$ ヲ引キ Xa ト P_1p_1 トノ交點 p_1, 及 Yc

第10圖



ト P_2p_2 トノ交點 p_2 ヲ求メ $OG // p_1p_2$ トナストキハソレソレニ P_1p_1, P_2p_2 線上ニアリテ GA, DG ナル大サ及方向ヲ有セル二力ハ求ムル二力ナリ.

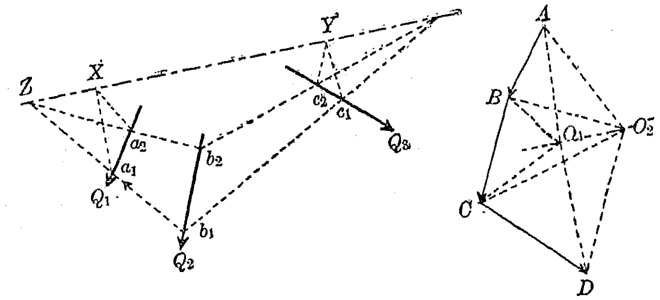
圖面ノ形狀如何ニヨリ rR ノ任意ノ一點 r' ヨリ任意ノ二線 $r'p_1'$, $r'p_2'$ ヲ引キ $AO' // r'p_1'$, $DO' // r'p_2'$ トシテ O' ヲ求メ $O'G // p_1'p_2'$ トシテ G 點ヲ求ムルモ可ナリ.

29. 定理4. 任意ノ二極ニ相當セル二索多角形ノ相對邊ノ交點ハ總テ二極ヲ結ブ直線ニ平行ナル一直線上ニアリ.

第11圖ニ於テ O_1, O_2 ヲ二極, $Xa_1b_1c_1Y, Xa_2b_2c_2Y$ ヲ之ニ相當セル二索

多角形トス. 此兩索多角形ノ第二相對邊 a_1b_1, a_2b_2 ノ交點ヲ Z トシ

第11圖



$Xa_1, a_1b_1, Xa_2, a_2b_2$ 線上ニソレソレニ AO_1, O_1B, O_2A, BO_2 ナル大サ及方向ヲ有スル力アリトスルトキハ

AO_1 ト O_2A トノ總代力ハ X 點ヲ通過シ O_2O_1 ナル大サ及方向ヲ有スル力

O_1B ト BO_2 トノ總代力ハ Z 點ヲ通過シ O_1O_2 ナル大サ及方向ヲ有スル力

ナルベシ. 然ルニ

AO_1 ト O_1B トノ總代力ハ a_1 點ヲ通過シ AB ナル大サ及方向ヲ有スル力

O_2A ト BO_2 トノ總代力ハ a_2 點ヲ通過シ BA ナル大サ及方向ヲ有スル力

ナルガ故ニ此等ノ AO_1, O_1B, O_2A, BO_2 ナル四力ノ總代力ハ零ナルベシ. 故ニ Z, X ヲ結合セル線ハ O_1O_2 線ニ平行ナリ.

同樣ノ理論ヲ進メ本定理ヲ證明スルコトヲ得ベシ.

O_1O_2 線ヲ極軸, XY 線ヲ索軸ト謂フ.

系1. 極軸中ノ任意ノ極ニ對セル索軸ハ常ニ極軸ニ平行ス.

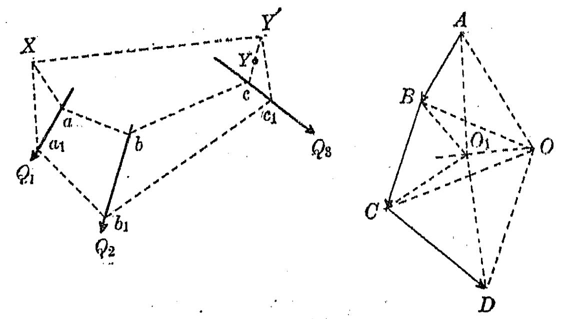
系 2. 索多角形ノ一定セル邊一定ノ點ヲ通過スルトキハ極軸中ノ任意ノ極ニ對スル索軸ハ該定點ヲ通過シ極軸ニ平行セル唯一ノ直線ナリ.

系 3. 二定邊ノ各ガ定點ヲ通過セル索多角形ニ對セル極ハ該二定點ヲ結合セル直線ニ平行ナル一直線上ニアリ.

30. 問題 4. 兩端ノ邊各與ヘラレタル點ヲ通過スベキ索多角形ヲ求ム.

第12圖ニ於テ X, Y ヲ與ヘラレタル兩點トス. X ヨリ起リテ任意ノ極 O_1 ニ對セル索多角形 $Xa_1b_1c_1Y'$ ヲ求メ其終邊 c_1Y' ガ Y ヲ通過

第 12 圖



セザルトキハ X ヨリ任意ノ一線 XY' ヲ引キ Y', Y ヲ結ビ $DO \,//\, YY'$, $O_1O \,//\, XY'$ ナラシムルトキハ X ヨリ起リテ O ニ對セル索多角形 $XabcY$ ハ求ムル索多角形ニシテ其終邊ハ又 Y ヲ通過スベシ.

XY' ハ任意ノ一線ナルガ故ニ求ムル索多角形ノ數ハ無限ナリ.

31. 問題 5. 任意ノ兩邊ノ各與ヘラレタル點ヲ通過スベキ索多角形ヲ求ム.

$S_1, S_2, \cdots, S_h, \cdots, S_k, \cdots S_n$ ヲ索多角形ノ邊トシ S_h, S_k ヲ既定ノ兩邊トスルトキハ S_h ヨリ前及 S_k ヨリ後ノ邊ニ就テハ何等ノ條件ナキガ

故ニ本問題ハ前節ノモノニ歸着スベシ.

32. 問題 6. 任意ノ三邊ノ各與ヘラレタル點ヲ通過スベキ索多角形ヲ求ム

$S_1, S_2, \cdots, S_h, \cdots, S_k, \cdots, S_l, \cdots, S_n$ ヲ索多角形ノ邊トシ S_h, S_k, S_l ノ通過スベキ點ヲソレゾレ X, Y, Z トスルトキハ前節ニヨリテ S_h, S_k ガソレゾレ X, Y ヲ通過スベキ極 O ト, S_k, S_l ガソレゾレ Y, Z ヲ通過スベキ極 O' トヲ求メ, O 及 O' ヨリソレゾレ XY, YZ ニ平行ナル線ヲ引クトキハ其交點ハ求ムル索多角形ニ對スル極ナリ.

求ムル索多角形ハ唯一ナリ.

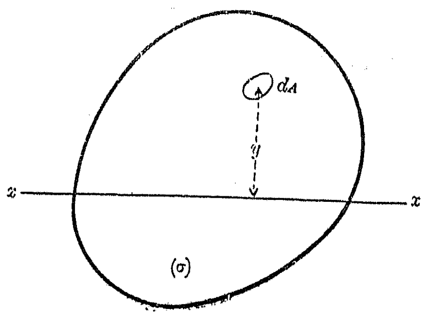
第三章

豫備數學

1. 平面圖ノ一次率.

33. 平面圖ノ一次率. 第 13 圖ニ於テ σ ヲ與ヘラレタル平面圖トシ軸 xx ヲ取リテ其片側ニ於テ計リタル垂直距離 y ハ他ノ側

第 13 圖



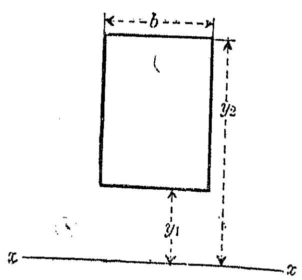
ニ於ケルモノト反對ノ符號ヲ有スルモノトシ A ヲ σ ノ面積トスルトキハ

9) $$G_x = \int_{(\sigma)} y dA$$

ヲ σ ノ xx 軸ニ對スル一次率ト謂フ.

例 1. 矩形ノ一次率. 第 14 圖ニ於テ

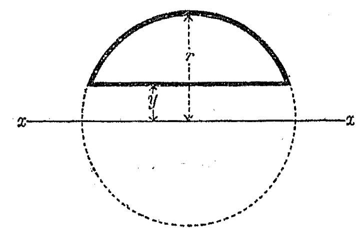
第 14 圖



10) $$G_x = \frac{b}{2}(y_2^2 - y_1^2)$$

例 2. 缺圓ノ一次率. 第 15 圖ニ於テ

第 15 圖



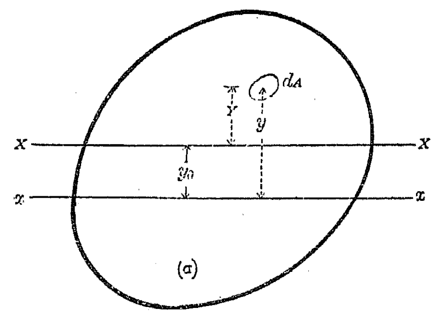
11) $$G_x = \frac{2}{3}(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$$

34. 平面圖ノ一次率ノ單位. 長サノ單位吋ナルトキハ平面圖ノ一次率ノ單位ハ「立方吋」ナリ. 其他類推スベシ.

35. 問題 1. 平面圖ノ面積及一軸ニ對スル一次率ヲ知リテ該軸ニ平行ナル他ノ軸ニ對スル一次率ヲ求ム.

第 16 圖ニ於テ平面圖 σ ノ面積 A, 及 xx 軸ニ對スル一次率 G_x ヲ

第 16 圖



與ヘラレタルモノトシ, XX 軸ヲ xx 軸ニ平行セル他ノ軸トスレバ

$$G = \int_{(\sigma)} Y dA = \int_{(\sigma)} (y - y_0) dA$$

ナルガ故ニ

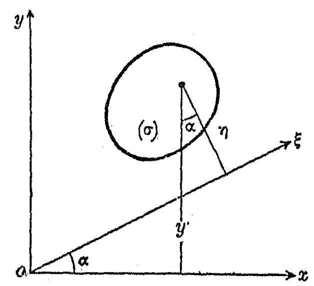
12) $$G_X = G_x - y_0 A$$

ナリ.

36. 問題 2. 兩矩坐標軸ニ對スル平面圖ノ一次率ヲ知リテ坐標原點ヲ通過セル任意ノ他ノ軸ニ對スル一次率ヲ求ム.

第17圖ニ於テ x, y ヲ與ヘラレタル矩坐標軸, ξ ヲ O ヲ通過セル

第 17 圖



任意ノ他ノ軸トスルトキハ

$$G_\xi = \int_{(\sigma)} \eta\, dA = \int_{(\sigma)} (y\cos\alpha - x\sin\alpha)\, dA$$

ナルガ故ニ

13) $$G_\xi = G_x\cos\alpha - G_y\sin\alpha$$

ナリ.

2. 平面圖ノ圖心.

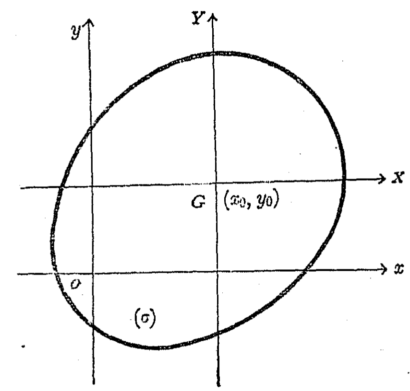
37. 平面圖ノ圖心. 兩矩坐標軸ニ對スル平面圖ノ一次率零ナルトキハ坐標原點ヲ該平面圖ノ圖心ト謂フ.

第18圖ニ於テ G ヲ平面圖 σ ノ圖心トシ任意ノ矩坐標軸 x, y ニ平行シ G ヲ通過セル GX, GY ヲ引クトキハ 12)式ニヨリ

$$G_X = G_x - y_0 A = 0$$

$$G_Y = G_y - x_0 A = 0$$

第 18 圖



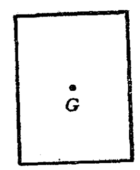
ナリ. 故ニ

14) $$x_0 = \frac{G_y}{A}, \qquad y_0 = \frac{G_x}{A}$$

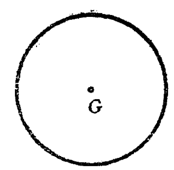
ヲ得.

例 1. 矩形及圓ノ圖心(第 19 及 20 圖). 共ニ其中心ニアリ.

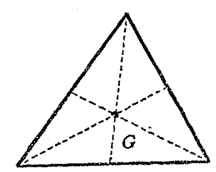
第 19 圖



第 20 圖



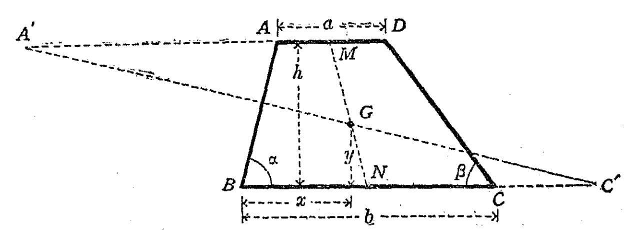
第 21 圖



例 2. 三角形ノ圖心(第 21 圖). 其中線ノ交點ニアリ.

例 3. 梯形ノ圖心(第 22 圖). $AM = MD$, $BN = NC$, $AA' = BC$, $CC' = AD$ トシテ

第 22 圖



$MN, A'C'$ ヲ引クトキハ其交點 G ハ求ムル圖心ニシテ

$$r = \cot\alpha, \qquad s = \cot\beta$$

トスレバ

$$15)\quad \begin{cases} x = \dfrac{3a^2 + 3(2r+s)ah + (r+s)(2r+s)h^2}{3[2a+(r+s)h]} \\ \quad = \dfrac{a^2 + ab + b^2 + (2a+b)rh}{3(a+b)} \\ y = \dfrac{(2a+b)h}{3(a+b)} \end{cases}$$

ナリ,

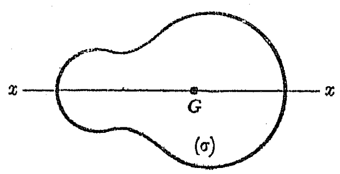
38. 定理 1. 平面圖ノ圖心ヲ通過スル任意ノ軸ニ對スル該圖ノ一次率ハ常ニ零ナリ.

此定理ハ 13)式ニヨリテ明ナリ.

39. 定理 2. 平面圖ノ對稱軸ハ常ニ其圖心ヲ通過ス.

第23圖ニ於テ xx 軸ヲ平面圖 σ ノ對稱軸トスレバ明ニ

第 23 圖



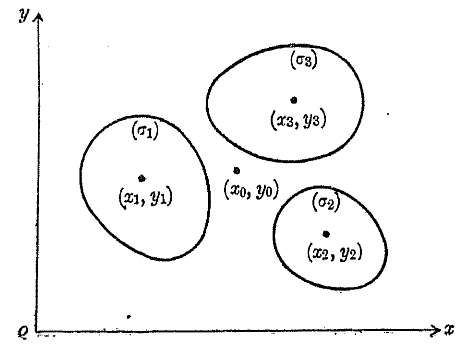
$$G_x = \int_{(\sigma)} y dA = 0$$

ナリ.

40. 問題 3. 與ヘラレタル面積ト圖心トヲ有スル多クノ平面圖ヨリ成レル全圖ノ圖心ヲ求ム.

第24圖ニ於テ A_1, A_2, A_3; $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ヲ與ヘラレタル平面圖

第 24 圖



$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, ノ面積及圖心トシ, (x_0, y_0) ヲ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ヲ一圖ト考ヘタルトキノ圖心トスルトキハ 14)式ヲ用ヒ

$$(A_1 + A_2 + A_3)x_0 = G_y = \int_{(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)} xdA = \int_{(\sigma_1)} xdA + \int_{(\sigma_2)} xdA + \int_{(\sigma_3)} xdA$$
$$= x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3$$

及 y ニ對スル同樣ノ關係ニヨリ

$$16)\quad x_0 = \frac{x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3}{A_1 + A_2 + A_3} \qquad y_0 = \frac{y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

ヲ得.

3. 平面圖ノ自乘率及相乘率.

41. 平面圖ノ自乘率及相乘率. 自乘率半徑. 第13圖ニ於テ

$$I_x = \int_{(\sigma)} y^2 dA$$

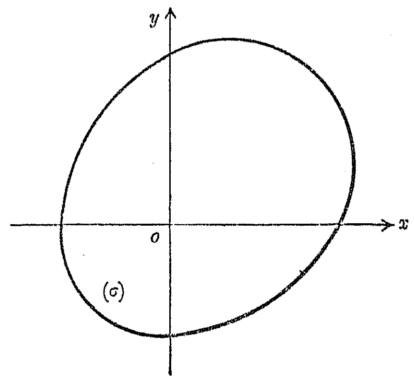
ヲ平面圖 σ ノ xx 軸ニ對スル自乘率ト謂ヒ,

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

ヲ平面圖 σ ノ xx 軸ニ對スル自乘率半徑ト謂フ.

第25圖ノ如ク平面圖σ中ニ矩坐標軸x, yヲ取ルトキハ

第 25 圖



$$J_{xy} = \int_{(\sigma)} xy dA$$

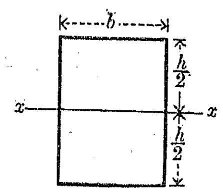
ヲ平面圖σノx, y軸ニ對スル相乘率ヲ謂フ.

上記ノ定義ニヨリ第25圖ヲ用ヒテ次ノ諸式ヲ得:—

$$17) \quad \begin{cases} I_x = \int_{(\sigma)} y^2 dA, & r_x = \sqrt{\dfrac{I_x}{A}} \\ I_y = \int_{(\sigma)} x^2 dA, & r_y = \sqrt{\dfrac{I_y}{A}} \\ J_{xy} = \int_{(\sigma)} xy dA, & \end{cases}$$

例 1. 矩形ノ自乘率. 第26圖ニ於テ

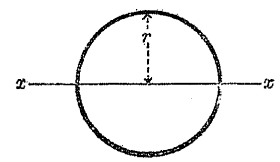
第 26 圖



$$18) \quad I_x = \frac{bh^3}{12}$$

例 2. 圓ノ自乘率. 第27圖ニ於テ

第 27 圖



$$19) \quad I_x = \frac{\pi r^4}{4}$$

42. 平面圖ノ自乘率,相乘率及自乘率半徑ノ單位. 長サノ單位吋ナルトキハ平面圖ノ自乘率及相乘率ノ單位ハ「四乘吋」ニシテ,自乘率半徑ノ單位ハ「吋」ナリ. 其他類推スベシ.

43. 問題 4. 平面圖ノ面積及一軸ニ對スル該圖ノ一次率及自乘率ヲ知リテ該軸ニ平行ナル他ノ軸ニ對スル自乘率ヲ求ム.

第16圖ニ於テ

$$I_X = \int_{(\sigma)} Y\, dA = \int_{(\sigma)} (y - y_0)^2\, dA = \int_{(\sigma)} (y^2 - 2yy_0 + y_0^2)A$$

ナルガ故ニ

$$20) \quad I_X = I_x - 2y_0 G_x + y_0^2 A$$

ナリ.

特ニx軸σノ圖心ヲ通過スルトキハ$G_x = 0$ナルガ故ニ

$$21) \quad I_X = I_x + y_0^2 A$$

ヲ得.

44. 定理 3. 多クノ平行セル軸ニ對スル平面圖ノ自乘率ノ中該圖ノ圖心ヲ通過セル軸ニ對スルモノ最小ナリ.

此定理ハ21)式ニヨリテ明ナリ.

45. 問題 5. 兩矩坐標軸ニ對スル平面圖ノ自乘率及相乘率ヲ知リテ坐標原點ヲ通過セル他ノ矩坐標軸ニ對スルモノヲ求ム.

第17 ニ於テ

$$I_\xi=\int_{(\sigma)}\eta^2 dA=\int_{(\sigma)}(y\cos\alpha-x\sin\alpha)^2 dA$$

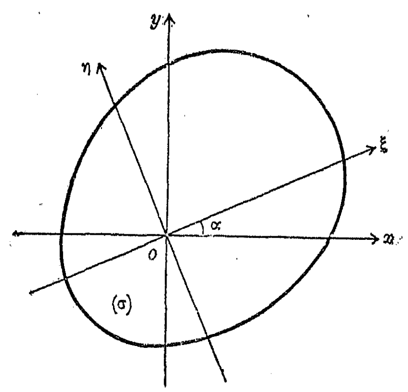
ナルガ故ニ

$$I_\xi=I_x\cos^2\alpha+I_y\sin^2\alpha-2J_{xy}\sin\alpha\cos\alpha$$

ナリ.

第28圖ニ於テ

第 28 圖



$$J_{\xi\eta}=\int_{(\sigma)}\xi\eta dA=\int_{(\sigma)}(y\cos\alpha-x\sin\alpha)(x\cos\alpha+y\sin\alpha)\,dA$$

ヨリ

$$J_{\xi\eta}=(I_x-I_y)\sin\alpha\cos\alpha+J_{xy}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$

ヲ得.

因テ次ノ諸式ヲ得ベシ:—

$$22)\quad \begin{cases} I_\xi=I_x\cos^2\alpha+I_y\sin^2\alpha-2J_{xy}\sin\alpha\cos\alpha \\ I_\eta=I_x\sin^2\alpha+I_y\cos^2\alpha+2J_{xy}\sin\alpha\cos\alpha \\ J_{\xi\eta}=(I_x-I_y)\sin\alpha\cos\alpha+J_{xy}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha). \end{cases}$$

46. 平面圖ノ主軸. 第28圖ニ於テ

$$23)\quad J_{\xi\eta}=0 \quad 從テ \quad \tan 2\alpha=\frac{2J_{xy}}{I_y-I_x}$$

ナル如キξ,η軸ヲ平面圖σノO點ニ於ケル主軸ト謂フ.

47. 定理 4. 平面圖ノ主軸ニ對スル自乘率ハ最大又ハ最小ナリ.

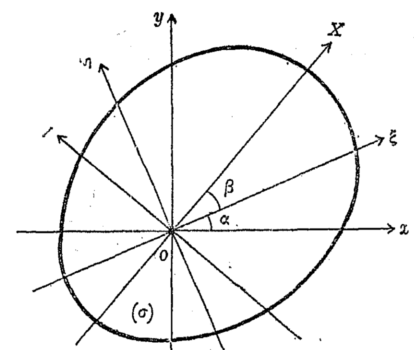
何トナレバ22)式ニヨリ

$$\frac{dI_\xi}{d\alpha}=-\frac{dI_\eta}{d\alpha}=-2J_{\xi\eta}$$

ナレバナリ.

48. 平面圖ノ自乘率楕圓. 第29圖ニ於テ平面圖σノ主軸ξ,ηヲ矩坐標軸トスルトキハ其坐標原點ヲ通過セル他ノ矩坐標軸

第 29 圖



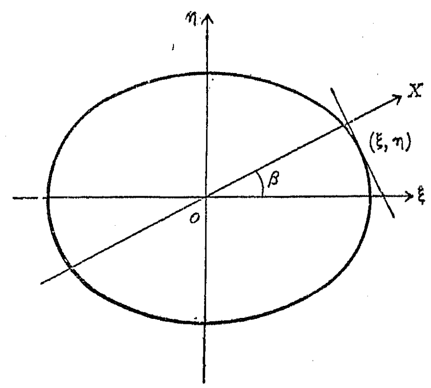
X, Yニ對スル自乘率及相乘率ハ22), 23)式ニヨリ

$$24)\quad \begin{cases} I_X=I_\xi\cos^2\beta+I_\eta\sin^2\beta \\ I_Y=I_\xi\sin^2\beta+I_\eta\cos^2\beta \\ J_{XY}=(I_\xi-I_\eta)\sin\beta\cos\beta \end{cases}$$

ナリ

第30圖ニ於テ楕圓

第 30 圖



$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1$$

ノ動徑ρ, 及坐標原點ヨリ(ξ,η)點ニ於ケル切線ヘ下セル垂線ノ長サpナ

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{a^2}\cos^2\beta+\frac{1}{b^2}\sin^2\beta$$
$$p^2=a^2\cos^2\beta+b^2\sin^2\beta$$

ハルガ故ニ24)式ノ第一式ニヨリ

$$a=\frac{1}{\sqrt{I_\xi}},\qquad b=\frac{1}{\sqrt{I_\eta}}$$

ナル楕圓ノX軸ニ沿ヘル動徑ρハ

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{I_X}}$$

ヲ示シ又

$$a=r_\xi,\qquad b=r_\eta$$

ナル楕圓ノX軸ニ沿ヒ之ニ垂直ナル切線ト坐標原點トニ挿マレタル長サpハ

$$p=r_X$$

ヲ與フベシ．此ノ如キ兩楕圓ヲ稱シテ共ニ之ヲ平面圖σノ自乘率楕圓ト謂フ．

49. 定理 5. 平面圖ノ對稱軸ハ亦其主軸ノ一ナリ．

此定理ハ說明ヲ要セズシテ明ナリ．

第四章

面力

50. 面力. 面力强度. 水及空氣ノ壓力ノ如ク面ニ働ク力ヲ面力ト謂ヒ,面積單位ニ働ク面力ノ大サヲ面力强度ト謂フ. dp ヲ面積 dA ニ働ク面力トスレバ其面力强度 p ハ

$$p=\frac{dP}{dA} \tag{25}$$

ナリ

面力ノ方向面ノ各點ニ於テ之ニ垂直ナルトキハ該面力ヲ垂面力ト謂ヒ,之ニ切觸セルトキハ切面力ト謂フ.

面力强度ノ値面ノ各點ニ於テ同一ナルトキハ該面力ヲ等布面力ト謂フ.

面平面ニシテ該平面中ニ矩坐標軸ヲ取リ,面力强度ノ値其點ノ坐標ノ一次函數ナルトキハ該面力ヲ等變面力ト謂フ.

51. 面力强度ノ單位. 力ノ單位听ニシテ長サノ單位吋ナルトキハ面力强度ノ單位ハ「毎平方吋ニ听」ト稱シ

听／平方吋

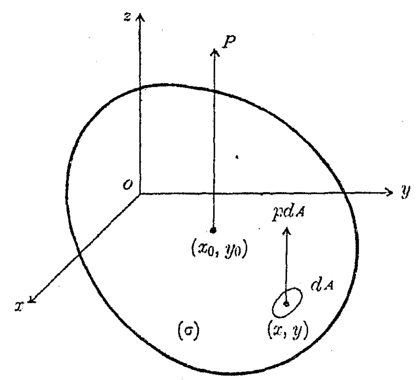
ヲ以テ之ヲ示ス. 其他類推スベシ.

52. 問題 1. 平面圖ニ働ケル等布垂面力ノ總代力ヲ求ム.

第一. 坐標原點平面圖ノ任意ノ一點ナルトキ. 第31圖ニ於テ與ヘラレタル平面圖 σ 中ニ x,y ナル矩坐標軸ヲ取リ

$A=\sigma$ ノ面積

第31圖



$G_x, G_y=\sigma$ ノ x,y 軸ニ對スル一次率

$p=(x,y)$ ナル點ニ於ケル面力强度

$\mathrm{P}=$ 總代力ノ大サ

$(x_0,y_0)=$ 總代力ノ働線ト σ トノ交點

$M_x,M_y=$ 總代力ノ x,y 軸ニ對スル力率

トスルトキハ dA ニ働ク面力 dP ハ 25)式ニヨリ pdA ニシテ且總代力ノ方向ハ明ニ之ト同方向ニアルガ故ニ

$$P=\int_{(\sigma)} pdA=pA$$

$$M_x=y_0P=\int_{(\sigma)} pydA=pG_x$$

$$-M_y=x_0P=\int_{(\sigma)} pxdA=pG_y$$

從テ

$$\begin{cases} P=pA \\ x_0=\dfrac{G_y}{A} \qquad y_0=\dfrac{G_x}{A} \end{cases} \tag{26}$$

ヲ得. 終リノ二式ト14)式トニヨリ(x_0, y_0)ハσノ圖心ナリ.

第二, 坐標原點平面圖ノ圖心ナルトキ. 26)式ニヨリ

$$27)\qquad \begin{cases} P = pA \\ x_0 = 0, \qquad y_0 = 0 \end{cases}$$

ナリ.

53. 問題 2. 平面圖ニ働ケル等變垂面力ノ總代力又ハ總代偶力ヲ求ム.

第一. 總代力.

其一. 坐標原點平面圖ノ任意ノ一點ナルトキ. 第31圖ヲ用ヒテ

$$p = p_0 + mx + ny, \qquad p_0, m, n \text{ ハ常數}$$

トシ前節ニ用ヒタル記號ノ外

$I_x, I_y, J_{xy} = \sigma$ ノ x, y 軸ニ對スル自乘率及相乘率

トスルトキハ

$$P = \int_{(\sigma)} p\,dA = \int_{(\sigma)} (p_0 + mx + ny)\,dA = p_0A + mG_y + nG_x$$

$$M_x = y_0P = \int_{(\sigma)} py\,dA = \int_{(\sigma)} (p_0 + mx + ny)\,y\,dA = p_0G_x + mJ_{xy} + nI_x$$

$$-M_y = x_0P = \int_{(\sigma)} px\,dA = \int_{(\sigma)} (p_0 + mx + ny)\,x\,dA = p_0G_y + mI_y + nJ_{xy}$$

ニヨリ

$$28)\qquad \begin{cases} P = p_0A + m\,G_y + n\,G_x \\ x_0 = \dfrac{p_0G_y + m\,I_y + n\,J_{xy}}{P}, \qquad y_0 = \dfrac{p_0G_x + m\,J_{xy} + n\,I_x}{P} \end{cases}$$

又ハ

$$29)\qquad p = P\,\frac{\begin{vmatrix} 1 & G_y & G_x \\ x_0 & I_y & J_{xy} \\ y_0 & J_{xy} & I_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & 1 & G_x \\ G_y & x_0 & J_{xy} \\ G_x & y_0 & I_x \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} A & G_y & 1 \\ G_y & I_y & x_0 \\ G_x & J_{xy} & y_0 \end{vmatrix} y}{\begin{vmatrix} A & G_y & G_x \\ G_y & I_y & J_{xy} \\ G_x & J_{xy} & I_x \end{vmatrix}}$$

ヲ得.

其二. 坐標原點平面圖ノ圖心ニシテ,坐標軸其主軸ナルトキ. 此場合ニ於テハ

$$G_x = 0, \qquad G_y = 0, \qquad J_{xy} = 0$$

ナルガ故ニ28), 29)式ニヨリ

$$30)\qquad \begin{cases} P = p_0A \\ x_0 = \dfrac{mI_y}{P}, \quad y_0 = \dfrac{nI_x}{P} \end{cases}$$

$$31)\qquad p = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{x_0x}{r_y^2} + \frac{y_0y}{r_x^2}\right)$$

ヲ得.

其三. 坐標原點ハ平面圖ノ圖心,坐標軸ハ其主軸ニシテ且$m=0$又ハ$x_0=0$ナルトキ. 30), 31)式ニヨリ

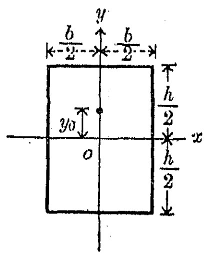
$$32)\qquad \begin{cases} P = p_0A \\ x_0 = 0 \qquad y_0 = \dfrac{nI_x}{P} \end{cases}$$

$$33)\qquad p = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{y_0y}{r_x^2}\right)$$

ヲ得.

<u>例.</u> <u>平面圖矩形ナルトキ.</u> P及y_0ヲ與ヘラレタルモノトスルトキハ第32圖ニ於テ任意ノ點(x,y)ニ於ケルpハ33式ニヨリ

第32圖



34) $$p=\frac{P}{bh}\left(1+\frac{12y_0\,y}{h_2}\right)$$

ナリ.

$y_0>0$ナルトキハpノ最大及最小ナル値ハソレソレニ$y=\frac{h}{2}$, $y=-\frac{h}{2}$ナルトキニシテ此等ノ値ヲソレソレニp', p''トスルトキハ

35) $$\begin{cases} p'=\dfrac{P}{bh}\left(1+\dfrac{6y_0}{h}\right) \\ p''=\dfrac{P}{bh}\left(1-\dfrac{6y_0}{h}\right) \end{cases}$$

ヲ得. $y_0<\frac{h}{6}$ナルトキハp', p''ハ共ニPト同ジ方向ヲ有シ, $y_0>\frac{h}{6}$ナルトキハp'ハPト同ジ方向ヲ有シp''ハ之ニ反ス,此時ノ$p=0$ナルyノ値ヲy'トスレバ34式ニヨリ

36) $$y'=-\frac{h^2}{12y_0}$$

ナリ. $y_0=\frac{h}{6}$ナルトキハ

37) $$\begin{cases} p'=\dfrac{2P}{bh} \\ p''=0 \end{cases}$$

ナリ.

$y_0<0$ナルトキハp'トp''トヲ彼此相交換シ同樣ノ結果ヲ得ベシ.

<u>第二.</u> <u>總代偶力.</u>

<u>其一.</u> <u>坐標原點平面圖ノ任意ノ一點ナルトキ.</u> 總代偶力ノ

x, y軸ニ對スル偶力率ヲM_x, M_yトシ其他第一ノ場合ト同ジ記號ヲ用ユルトキハ

38) $$\begin{cases} 0=p_0A+mG_y+nG_x \\ M_x=p_0G_x+mJ_{xy}+nI_x \\ -M_y=p_0G_y+mI_y+nJ_{xy} \end{cases}$$

38) $$p=\frac{\begin{vmatrix} 0 & G_y & G_x \\ -M_y & I_y & J_{xy} \\ M_x & J_{xy} & I_x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} A & 0 & G_x \\ G_y & -M_y & J_{xy} \\ G_x & M_x & I_x \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} A & G_y & 0 \\ G_y & I_y & -M_y \\ G_x & J_{xy} & M_x \end{vmatrix}y}{\begin{vmatrix} A & G_y & G_x \\ G_y & I_y & J_{xy} \\ G_x & J_{xy} & I_x \end{vmatrix}}$$

ヲ得. 38)式ノ第一式ニヨリp_0, m, nノ一ハ任意ナルコト能ハズ.

<u>其二.</u> <u>坐標原點平面圖ノ圖心ニシテ,坐標軸其主軸ナルトキ</u>

38) 39)式ニヨリ

40) $$\begin{cases} p_0=0 \\ M_x=nI_x \\ -M_y=mI_y \end{cases}$$

41) $$p=-\frac{M_y}{I_y}x+\frac{M_x}{I_x}y$$

ヲ得.

<u>其三.</u> <u>坐標原點ハ平面圖ノ圖心,坐標軸ハ其主軸ニシテ且$m=0$又ハ$M_y=0$ナルトキ.</u> 40) 41)式ニヨリ

42) $$\begin{cases} p_0=0 \\ M_x=nI_x \\ M_y=0 \end{cases}$$

43) $$p = \frac{M_x}{I_x} y$$

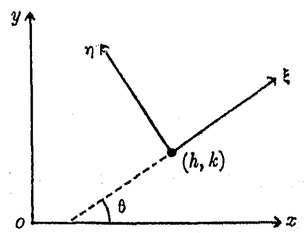
ヲ得. 43)式ハ桁ノ設計ニ於ケル基礎公式ノ一ナリ.

54. 定理. 與ヘラレタル總代力又ハ總代偶力ヲ有スル等布垂面力强度又ハ等變垂面力强度ノ値ハ坐標軸ノ撰擇如何ニヨリテ變ズルコトナシ.

等布垂面力ノ場合ハ別ニ證明ヲ要セズ.

第33圖ニ於テ總代力 P ヲ有スル等變垂面力ノ場合ニ於テ $x\,y$

第 33 圖



軸ニヨリテ求メタル强度ヲ

$$p = p_0 + mx + ny$$

トシ, ξ, η 軸ニヨリテ求メタルモノヲ

$$\pi = \pi_0 + \mu\xi + \nu\eta$$

トス. $(x_0, y_0), (\xi_0, \eta_0)$ ヲ總代力ノ働線ト xy 面トノ交點トスレバ

$$x_0 = h + \xi_0 \cos\theta - \eta_0 \sin\theta, \quad y_0 = k + \xi_0 \sin\theta + \eta_0 \cos\theta$$

尚一般ニ

$$x = h + \xi\cos\theta - \eta\sin\theta, \quad y = k + \xi\sin\theta + \eta\cos\theta$$

ナルガ故ニ

$$P = \int_{(\sigma)} \pi\, dA, \quad P\xi_0 = \int_{(\sigma)} \pi\xi\, dA, \quad p\eta_0 = \int_{(\sigma)} \pi\eta\, dA$$

$$Ph = \int_{(\sigma)} \pi h\, dA, \quad Pk = \int_{(\sigma)} \pi k\, dA$$

ナル關係ヨリ

$$P = \int_{(\sigma)} \pi\, dA, \quad Px_0 = \int_{(\sigma)} \pi x\, dA. \quad Py_0 = \int_{(\sigma)} \pi y\, dA$$

ヲ得. 然ルニ

$$P = \int_{(\sigma)} p\, dA, \quad px_0 = \int_{(\sigma)} px\, dA, \quad Py_0 = \int_{(\sigma)} py\, dA$$

ナルガ故ニ

$$p - \pi = \alpha + \beta x + \gamma y, \qquad \alpha, \beta, \gamma \text{ ハ常數}$$

トスルトキハ

$$\int_{(\sigma)} (\alpha + \beta x + \gamma y)\, dA = \alpha A + \beta G_y + \gamma G_x = 0$$

$$\int_{(\sigma)} (\alpha + \beta x + \gamma y)\, x\, dA = \alpha G_y + \beta I_y + \gamma J_{xy} = 0$$

$$\int_{(\sigma)} (\alpha + \beta x + \gamma y)\, y\, dA = \alpha G_x + \beta J_{xy} + \gamma I_x = 0$$

ヲ得. 然ルニ

$$\begin{vmatrix} A & G_y & G_x \\ G_y & I_y & J_{xy} \\ G_x & J_{xy} & I_x \end{vmatrix} \neq 0$$

ナルガ故ニ

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

從テ

$$p = \pi$$

ナリ.

總代偶力ヲ有スル等變垂面力ノ場合モ同樣ニ證明スルコトヲ得ベシ.

此定理ニヨリ總代力又ハ總代偶力ヲ知リテ等布垂面力强度又ハ等變垂面力强度ヲ求ムルニ當リ全ク任意ニ坐標軸ヲ撰定シ得ベキガ故ニ他ニ妨ナキ限リ成ルベク其公式ヲ簡單ナラシムベキ坐標軸ヲ用ユルヲ便トス.

55. 平面圖ノ心. 平面圖ノ面力强度pヲシテ何レノ點ニ於テモPト同ジ符號ヲ有セシメ而シテ其最小ナル値ヲ恰モ零ナラシムルガ如キ(x_0, y_0)ノ軌跡ニヨリテ圍マレタル圖ヲ該平面圖ノ心ト謂フ.

$f(x, y) = 0$ヲ以テ平面圖ヲ圍メル線ノ方程式トスルトキハ其心ヲ圍メル線ノ方程式ハ

$$44)\qquad \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial x} & \dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \\ p = 0 \end{cases}$$

ヨリx, yヲ消去シテ求ムルコトヲ得ベシ.

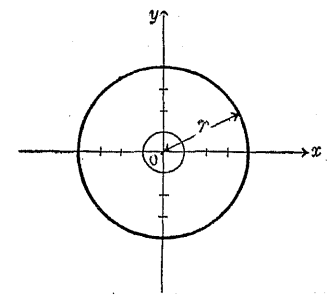
例 1. 圓ノ心. 第34圖ニ於テ圓ノ半徑ヲrトシ坐標原點ヲ其中心ニ取ルトキハ

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial x} & \dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{8P}{\pi r}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x & y \end{vmatrix} = 0$$

$$p = \frac{P}{\pi r^2}\left(1 + \frac{4x_0 x + 4y_0 y}{r^2}\right) = 0$$

第 34 圖



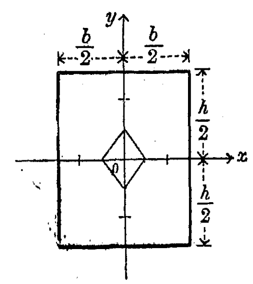
ヲ得,之ヨリx, yヲ消去スルトキハ

$$x_0^2 + y_0^2 = \frac{r^2}{16}$$

ヲ得. 故ニ與ヘラレタル圓ノ心ハ其半徑ノ四分ノ一ノ半徑ヲ有スル同心圓ナリ.

例 2. 矩形ノ心. 矩形ニ於テハ第35圖ヲ用ヒ

第 35 圖



$$p = \frac{P}{bh}\left(1 + \frac{12x_0 x}{b^2} + \frac{12y_0 y}{h^2}\right)$$

ナルガ故ニ$x = \pm\dfrac{b}{2}$, $y = \pm\dfrac{h}{2}$ナルトキノpノ値ヲ零ナラシムレバ求ムル心ヲ得. 故ニ

$$\pm\frac{x_0}{b} \pm \frac{y_0}{h} = -\frac{1}{6}.$$

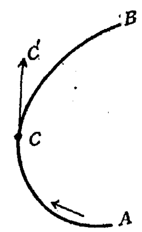
第五章

速度及加速度

1. 線速度.

56. 點ノ線速度. 第36圖ニ於テ動點 A ヨリ B ニ向ヒテ AB ナル道ヲ取リテ動キ, t 時ニ於テ動點ノ位置 C ニアリ, dt 時ノ後 ds

第 30 圖



ナル長サヲ進ムモノトスルトキハ, C 點ニ於テ AB ニ切觸シテ圖ノ如キ方向ヲ有シ

45) $$v = \frac{ds}{dt}$$

ナル大サヲ有スル量 CC' ヲ該動點ノ t 時ニ於ケル,又ハ C 點ニ於ケル,又ハ t 時ニ於テ C 點ニ於ケル線速度ト謂フ. 線速度ハ通常略稱シテ單ニ速度ト謂フ.

線速度ノ大サ及方向ガ動點ノ位置又ハ時ニヨリテ變化セザル如キ動ヲ等速度ト謂フ.

57. 線速度ノ單位. 長サノ單位呎ニシテ時ノ單位秒ナルトキ

ハ線速度ノ單位ハ「毎秒ニ呎」ト稱シ

呎／秒

ト記ス. 其他類推スベシ.

58. 線速度ノ坐標軸ニ於ケル分速度. 第17節ニ於ケルト類似ノ意義ヲ以テ v_x, v_y, v_z ヲソレソレ矩坐標軸 x, y, z ニ於ケル分速度ノ大サヲ示ストキハ該線速度ノ方向ト x, y, z 軸トノ成セル角ノ餘弦ハソレソレ $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ ナルガ故ニ

$$v_x = v\frac{dx}{ds} = \frac{ds}{dt}\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}$$

及 y, z ニ關スル同樣ノ關係ニヨリ

46) $$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

ヲ得.

59. 線速度ノ指線ニ於ケル分速度. 線速度ノ指線 μ ニ於ケル分速度ノ大サヲ v_μ トスルトキハ 2)式ヲ得タルト同樣ノ方法ニヨリ

47) $$v_\mu = v\cos(v, \mu) = v_x\cos(\mu, x) + v_y\cos(\mu, y) + v_z\cos(\mu, z)$$

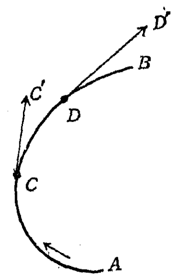
ヲ得.

2. 線加速度.

60. 點ノ線加速度. 點ノ線速度ハ其位置又ハ時ニヨリテ變化スルコトアリ. 例ヘバ第37圖ニ於テ C, D ニ於ケル線速度ヲソレソレ CC' DD' ヲ以テ示ストキハ此等ノ線速度ハ其大サ,其方向,又ハ其大サ及方向ニ於テ相等シカラザルコトアリ. C ヨリ D ニ

移レル時ノ長短ニ従ヒ此等ノ變化ヲ生ズル割合ヲ稱シテ該動點

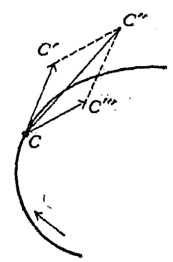
第37圖



ノ線加速度或ハ略稱シテ加速度ト謂フ.

第38圖ニ於テ CC' ヲ t 時ニ於テ C 點ニ於ケル線速度トシ CC'' ヲ dt 時ノ後 ds ナル長サヲ進ミタルトキノ線速度ノ大サ及方向ヲ示スモノトシ, $CC'C''C'''$ ナル平行四邊形ヲ作ルトキハ dt 時ニ

第38圖



於テ CC''' ナル線速度ヲ生ズル割合ハ該動點ノ t 時ニ於ケル,又ハ C 點ニ於ケル,又ハ t 時ニ於テ C 點ニ於ケル線加速度ナリ.

61. 線加速度ノ單位. 長サノ單位呎ニシテ時ノ單位秒ナルトキハ線加速度ノ單位ハ「毎秒毎秒ニ呎」ト稱シ

呎／秒／秒

ト記ス. 其他類推スベシ.

62. 線加速度ノ坐標軸ニ於ケル分加速度. 第17又ハ58節ニ於

ケルト類似ノ意義ヲ以テ a_x, a_y, a_z ヲソレゾレ矩坐標軸 x, y, z ニ於ケル分加速度ノ大サヲ示ストキハ

$$a_x = \frac{(v_x + dv_x) - v_x}{dt} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

及 y, z ニ關スル同樣ノ關係ニヨリ

$$48)\qquad a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

ヲ得.

63. 切觸加速度及垂直加速度. 第38圖ニ於ケル CC' ハ第56節ニヨリテ AB ニ切觸セリ. 線加速度ノ此線上ニ於ケル分加速度ヲ切觸加速度ト謂ヒ,之ニ垂直ナルモノヲ垂直加速度ト謂フ, a_t, a_n ヲ以テソレゾレニ之ヲ示シ, CC' ト CC'' トノ間ノ角ヲ $d\theta$ トスルトキハ

$$a_t = \frac{(v + dv)\cos d\theta - v}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

$$a_n = \frac{(v + dv)\sin d\theta}{dt} = v\frac{d\theta}{dt} = v\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} = v^2\frac{d\theta}{ds}$$

ナルガ故ニ AB 線ノ C 點ニ於ケル曲率半徑ヲ ρ トスルトキハ

$$49)\qquad a_t = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

ヲ得.

a ヲ以テ C 點ニ於ケル線加速度ノ大サトスルトキハ

$$50)\qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

ニシテ此終リノ關係ハ微分學ニ於ケル

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^4}{\rho^2}$$

ナル公式ト相一致セリ．

64. 線加速度ノ指線ニ於ケル分加速度． 線加速度ノ指線 μ ニ於ケル分加速度ノ大サヲ a_μ トスルトキハ 2) 又ハ 47) 式ヲ得タルト同樣ノ方法ニヨリ

51) $$a_\mu = a\cos(a,\mu) = a_x\cos(\mu,x) + a_y\cos(\mu,y) + a_z\cos(\mu,z)$$

ヲ得．

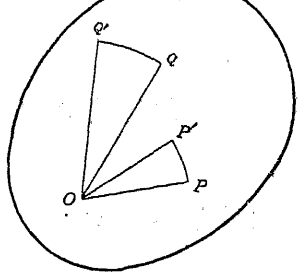
3. 角速度．

65. 直動及廻動． 物體ノ各點ノ線速度ノ大サ及方向總テ相等シキ動ヲ直動ト謂フ．

物體運動ノ狀態ニアルモ其一線ノミハ靜止シテ動カザルトキハ其動ヲ廻動ト謂ヒ,其靜止セル線ヲ廻動軸ト稱シ,廻動軸ニ垂直ナル面ヲ廻動面ト謂フ．

66. 物體ノ角速度． 第 39 圖ニ於テ O ヲ廻動軸トシ,任意ノ廻動面中ノ任意ノ二點 P, Q ハ dt ノ後ソレゾレニ P', Q' ニアリトスレバ

第 39 圖



$$角\ POQ = 角\ P'OQ'$$

ナルガ故ニ

$$角\ POP' = 角\ QOQ'$$

ナリ． 此相等シキ角ヲ $d\theta$ トスレバ此物體ノ廻動ニ際シ其各點ニ於テ

$$\frac{d\theta}{dt}$$

ナル値ハ總テ相等シカルベシ． 此常數ヲ稱シテ該物體ノ t 時ニ於ケル角速度ト謂ヒ, ω ヲ以テ之ヲ示ストキハ

52) $$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

ヲ得．

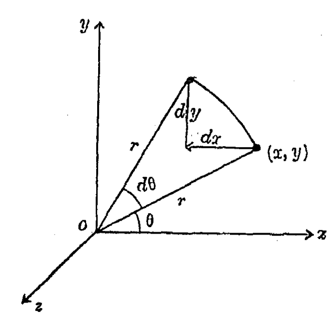
67. 角速度ノ單位． 時ノ單位秒ナルトキハ角速度ノ單位ハ「毎秒ニ」ト稱シ

$$／秒$$

ト記ス． 其他類推スベシ．

68. 廻動ニヨリテ生ズル點ノ變位． 第 40 圖ニ於テ廻動軸ノ一點 O ヲ坐標原點トシテ矩坐標軸 x, y ヲ取ルトキハ

第 40 圖



$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

ニシテ $d\theta$ ナル廻動ニヨリテ生ズル (x, y) 點ノ變位ハ

$$dx = -r\sin\theta d\theta = -y d\theta$$

$$dy = r\cos\theta d\theta = x d\theta$$

ナルガ故ニ $d\theta_x, d\theta_y, d\theta_z$ ヲソレゾレニ x, y, z 軸ニ對スル廻動角トスルトキハ之ニヨリテ生ズル (x, y, z) 點ノ變位ハ

$$\text{53)} \quad \begin{cases} dx = z d\theta_y - y d\theta_z \\ dy = x d\theta_z - z d\theta_x \\ dz = y d\theta_x - x d\theta_y \end{cases}$$

ナリ.