第十四章　多次不靜定構造物解法

第一節　概　　說

不靜定ノ數三個迄デアル剛構ノ解法ハ前章ニ說明シタ最小働ノ原理ヲ用ヒテ容易ニ之ヲ解ク事ヲ得ルノデアルガ不靜定ノ數ガ更ニ增加スルトキニハ其解法ガ中々容易デナイ。然カモ更ニ多次不靜定ナル構造物殊ニ剛構ハ鐵筋混凝土構造ニ於テ我等ガ實際數々遭遇スルノデアツテ斯クノ如キ剛構ニ適用シ得ベキ解法ノ內デ最モ一般的ナルモノニツキ說明ヲ進メヤウ。

第二節　「マックスウェル」氏相互法則

(Maxwell's Reciprocal Law)

一ツノ構造物ノ或一點 m ニ作用スル $P_m=1$ ニ因ツテ其任意ノ點ニ生ズル應力卽チ彎曲力率及軸推力ヲ夫々 M_m, N_m, 更ニ全ク之レト無關係ナル他ノ點 n ニ第二ノ荷重 $P_n=1$ ガ作用シテ生ズル應力ヲ M_n, N_n トシ $P_m=1$ ニ因ツテ n 點ニ(荷重 P_n ノ方向ニ)生ズル變位ヲ δ_{nm}, $P_n=1$ ニヨツテ m 點ニ(荷重 P_m ノ方向ニ)生ズル變位ヲ δ_{mn} ニテ表ハスモノトス。玆ニ δ_{nm} ニ附シタ文字 n, m ノ內 n ハ其變位ヲ生ズル位置ヲ示シ m ハ此變位ヲ生ズル原因ガ m 點ニ働ク $P_m=1$ デアルコトヲ示ス。然ルトキハ先ヅ $P_m=1$ ナル荷重ガ之レト無關係ナル變位 δ_{mn} ヲ爲ストト假定スルトキニ生ズル仕事ノ量ハ假想動ノ法則ニ依ツテ

$$1.\delta_{mn}=\int M_m\,\partial i_n+\int N_m\,\partial s_n$$

式中　∂i_n＝荷重 $P_n=1$ ニヨツテ生ズル任意點ノ傾斜ノ變化

$$=\frac{M_n}{EI}ds$$

∂s_n＝同上任意點ニ生ズル長サノ變化

$$=\frac{N_n}{EF}ds$$

コレヲ挿入シテ

$$1.\delta_{mn}=\int M_m\frac{M_n}{EI}ds+\int N_m\frac{N_n}{EF}ds \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(552)$$

全ク同樣ニ荷重 $P_n=1$ ガコレト無關係ナル變位 δ_{nm} ニヨツテ爲ス仕事ノ量ハ

$$1.\delta_{nm}=\int M_n\frac{M_m}{EI}ds+\int N_n\frac{N_m}{EF}ds$$

斯ク求メタル二式ヲ比較シテ次ノ關係ヲ得

$$\delta_{mn}=\delta_{nm}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(553)$$

m 點ニ働ク $P_m=1$ ニヨツテ n 點ニ(P_n ノ方向ニ)生ズル變位ハ n 點ニ働ク $P_n=1$ ニヨツテ m 點ニ(P_m ノ方向ニ)生ズル變位ニ等シ。是レヲ「**マツクスウエル**」氏相互法則ト云ヒ荷重Pトシテハ反力,彎曲力率,軸壓力等如何ナル種類ニテモ差支ナク生ズル變位モ亦之レニ應ジテ夫々移動,廻轉,相對的移動等ヲ採レバヨイ。玆ニ其數例ヲ列擧シテ之レヲ說明シヤウ。

(a) Fig. 613 ⓐ ニ示ス a 點ニ $X_a=1$ ガ働キタル爲メニ b 點ガ P_b ノ方向ニ動ク移動 δ_{ba} ハ ⓑ 圖ニ於テ $P_b=1$ ニヨツテ a 點ガ X_a ノ方向ニ動ク移動 δ_{ab}

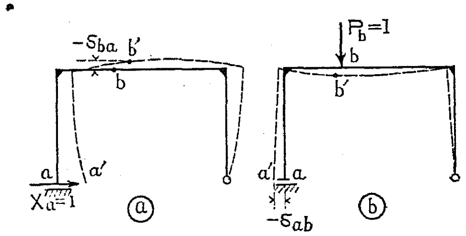


Fig. 613.

ニ等シ。

(b) Fig. 614 ⓐ $X_a=1$ ナル偶力率ノ作用シタル爲メ b 點ノ爲ス變位ノ垂直分移動 δ_{ba} ハ ⓑ 圖 $P_b=1$ ニヨツテ a 點ニ生ズル廻轉角 τ_{ab} ニ等シ。

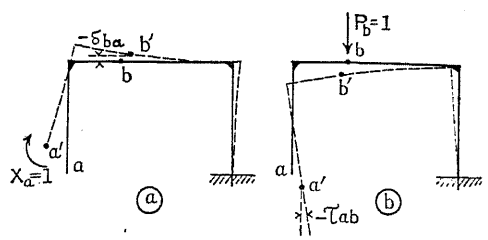


Fig. 614.

(c) Fig. 615 ⓐ $X_a=1$ ニヨツテ b 點(鉸)ニ於ケル部材切線ノ爲ス相對的角變位 τ_{ba} ハ ⓑ 圖 $M_b=1$ ナル偶力率ガ b 點左右ニ働イタトキニ a 點ガ X_a ノ方向ニ動ク移動 δ_{ab} ニ等シ。

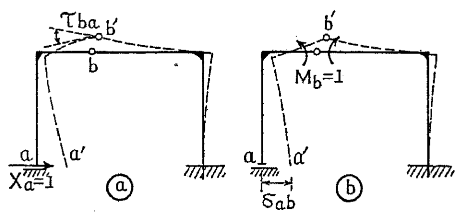


Fig. 615.

(d) Fig. 616 ⓐ ニ示ス支點垂直反力 $X_a=1$ ニヨツテ b 點(鉸)切線ガ爲ス相對的偏倚角 τ_{ba} ハ ⓑ 圖ニ示ス b 點ノ左右ニ働ク二個ノ力率 $M_b=1$ ニ因ツテ a 支點ノ移動スル垂直距離 δ_{ab} ニ等シ。

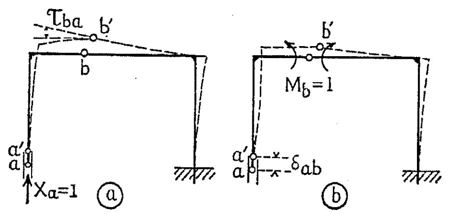


Fig. 616.

第三節 基本系ニ依ル解法

(Solution by means of Standard System)

n 次不靜定構造物ニ於ケル n 個ノ未知力ヲ

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\cdots\cdots X_r,\cdots\cdots X_n$$

トシ今假ニ

$$X_1=X_2=X_3\cdots\cdots=X_n=0$$

ナル場合ヲ假定スレバ此場合ニ此構造物ハ靜定的 (Statically determinate) トナル。斯クノ如キ構造物ヲ原 n 次不靜定ノモノニ對スル基本系 (Standard system, Hauptsystem) ト云フ。靜定的ナル基本系ハ其解法簡單ナル平衡條件ヲ用ヒテ極メテ容易ニ行ハレ得ルガ故ニ玆ニ之ヲ說明スルノ要ヲ認メナイ。尙不靜定未知力 X トシテハ反力,軸壓力,彎曲力率等何ニテモ差支ナキモノデアツテ其何レカヲ零ト假定スル事ハ何ヲ意味スルカハ次ノ如ク解釋セラレ得ル,支點ガ鉸ナルトキニ生ズル水平反力 $H=0$ ト假定スル事ハ此支點ヲ單純支持(左右ヘ自由ニ動キ得ルモノ)ニ變更シタ事ニ相當シ固定支點ニ生ズル反力 $H=V=M=0$ ト假定スル事ハ此支點ヲ全然除去スル事ヲ意味スル。更ニ部材ノ或一斷面ニ生ズル $M=0$ ト假定スルハ此點ニ鉸ヲ挿入シ廻轉ヲ自由ナラシメル事デアリ $N=0$ ハ軸壓力ノ傳ヘラレ得ザル構造ト爲ス事デアリ更ニ $Q=0$ ハ此斷面ヲ通ジテ剪力ガ傳導サレ得ザル事ヲ意味スル。Fig. 617 ニ記號的ニ示ス構造ハ是等ノ場合ヲ示ス。

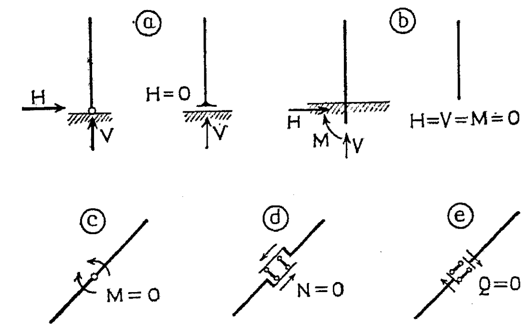


Fig. 617.

扨剛構ノ或一斷面ニ生ズル變位ヲ考ヘテ見ヤウ。此變位ヲ求ムルタメニ此剛構ニ對スル基本系ヲ採ツテ此兩者ヲ比較センニ剛構ト基本系トノ相違ハ不靜定力 X ノ存否デアル。從ツテ剛構ノ受ケル變位ハ基本系ノ受ケル變位ト不靜定力ガ作用シテ生ズ

ル變位トヲ加ヘタルモノニ等シイ。更ニ詳言スレバ剛構ガ或荷重ヲ受ケテ其任意點ニ生ズル變位ハ其基本系ガ同一荷重ヲ受ケテ同一點ニ生ズル變位ニ加フルニ不靜定力Xガ此基本系ニ作用シタルトキニ此點ニ生ズル變位ヲ加ヘタルモノヽ總和ニ等シイ筈デアル。此荷重ガ基本系ニ働イタトキニ其任意點ニ生ズル變位ハ靜定的ニ極メテ容易ニ計算セラレ得ル筈デアツテ其或斷面1(X_1ナル未知力ノ作用點)ニ生ズル變位ヲ $\delta_{1,0}$ ナル文字ニテ表ハスコトトシ更ニ不靜定力Xガ此基本系ニ働イタトキニ此斷面1ニ生ズル變位ハ何程トナルカヲ計算スルニハ次ニ示ス如キ誘導ノ方法ヲ採ルノヲ最モ便トスル。

$X_1=-1$ ガ基本系($X_2=X_3=\cdots\cdots=X_n=0$)ニ働キタル爲メニ此點1ガ X_1 ノ方向ニ生ズル變位ヲ $\delta_{1,1}$ トスレバ $X_1=X_1$ ガ作用シタルトキノ變位ハ明カニ $-X_1\delta_{11}$ デアルデアラウ。同樣ニ $X_2=-1$ ニヨリ點1ガ X_1 ノ方向ニ生ズル變位ヲ $\delta_{1,2}$, $X_3=-1$ ニヨリ點1ガ X_1 ノ方向ニ生ズル變位ヲ $\delta_{1,3}$ トスル。玆ニ δ ニ附シタ接尾字ハ前ニ說明シタ如ク例ヘバ $\delta_{1,2}$ ニ於ケル2ハ $X_2=-1$ ニ因ツテ生ズル變位ナル事ヲ意味シ1ハ變位ノ生ズル點ヲ表ハスモノトス卽チ最後ノ文字ハ變位ノ原因ヲ表ハシ最初ノ文字ハ其位置ヲ示ス。然ルトキハ點1ノ合成變位 δ_1 ハ以上求メタルモノヲ加ヘ合ハセ

$$\delta_1=\delta_{1,0}-X_1\delta_{1,1}-X_2\delta_{1,2}-\cdots\cdots-X_r\delta_{1,r}-\cdots\cdots-X_n\delta_{1,n}$$

全ク同樣ニシテ X_2 ノ作用點2ノ變位ハ

$$\delta_2=\delta_{2,0}-X_1\delta_{2,1}-X_2\delta_{2,2}-\cdots\cdots-X_r\delta_{2,r}-\cdots\cdots-X_n\delta_{2,n}$$

コレガ卽チ求ムル剛構ノ變位デアル。

不靜定未知力算定ノ方針ハ $X=0$ ト假定シタル或假設斷面ニ生ズル變位ガ零卽 $\delta=0$ デアルト云フ連續性(Continuity)ヲ方程式ニ書キ表ハシテ之ヲ解クノデアツテ例ヘバ未知力 $M=0$(連續セル一部材ノ中間ニ鉸ヲ挿入ス)ト假定シタル或斷面ノ左右兩部材ガ荷重 ΣP, 反力及未知力Xニ因ツテ受クル相對的角變位(廻轉)ヲ計算シタル後其部材ガ事實ニ於テ鉸ヲ有セズ連續セルモノナルガ故ニ玆ニ相對的角變位ノ生ジ得ナイ事卽チ廻轉ノ零ナル條件ヲ式ニ表セバヨイノデアツテ斯クテ得タル條件方程式ヲ彈性方程式(Elasticity equation)ト云ヒ n 個ノ未知力Xニ對シ其各々ノ作用點ノ變位ヲ零ト置キテ得べキ彈性方程式 n 個ヨリ n 個ノ未知數ガ求メ得ラレル。

扱與ヘラレタ剛構ヲ解ク順序ヲ述べンニ先ヅ適當ニ靜定的ナル(必ズシモ靜定的デアル事ハ要シナイ。例題第六十九參照)基本系ヲ假定シ剛構ヲ基本系トナス爲メニ零ト假定シタル不靜定應力ヲ $X_1, X_2\cdots\cdots, X_n$ トシヤウ。次ニ此基本系ニ於テ $X_1=-1$ ナル荷重ニヨリ X_1 ノ作用點ニ其方向ニ生ズル變位ヲ $\delta_{1,1}$, $X_2=-1$ ニヨリ X_1 ノ作用點ニ其方向ニ生ズル變位ヲ $\delta_{1,2}\cdots\cdots$ トスレバ

$$\delta_1=0=\delta_{1,0}-X_1\delta_{1,1}-X_2\delta_{1,2}-X_3\delta_{1,3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad X_1\delta_{1,1}+X_2\delta_{1,2}+X_3\delta_{1,3}+\cdots\cdots\cdots+X_n\delta_{1,n}=\delta_{1,0}$$

全ク同樣ニシテ

$$\left.\begin{array}{l} X_1\delta_{2,1}+X_2\delta_{2,2}+X_3\delta_{2,3}+\cdots\cdots\cdots+X_n\delta_{2,n}=\delta_{2,0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(554)$$

ナル n 個ノ彈性方程式ヲ得ル。而シテ(552)式ト同樣ニ

$$\delta_{1,0}=\int\frac{M_1M_0}{EI}ds+\int\frac{N_1N_0}{EF}ds$$

$$\left.\begin{aligned}\delta_{1,1} &= \int\frac{M_1^2}{EI}ds+\int\frac{N_1^2}{EF}ds\\ \delta_{1,2} = \delta_{2,1} &= \int\frac{M_1M_2}{EI}ds+\int\frac{N_1N_2}{EF}ds\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(555)$$

但 M_o 及 N_o ハ基本系ニ於テ外力ニヨリ生ズル彎曲力率及軸壓力, M_1 及 N_1 ハ同ジク $X_1=1$ ニヨル彎曲力率及軸壓力デアル。

(554)式ヲ解キテ n 個ノ不靜定力 X ガ求メラルレバ剛構任意點ノ彎曲力率及軸壓力ハ次式ニヨツテ容易ニ計算サレ得ル。

$$\left.\begin{aligned}M &= M_o+X_1M_1+X_2M_2+\cdots\cdots+X_nM_n\\ N &= N_o+X_1N_1+X_2N_2+\cdots\cdots+X_nN_n\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(556)$$

例題第六十八　二鉸矩形剛構ニ集中荷重ノ作用シタルトキノ應力ヲ求ム。

(答)　Fig. 618 ⓐ ニ示ス如ク此際ノ不靜定反力 X_1 ヲ未知トシ $X_1=0$ ナル基本系ヲ考フルニコレハ一端鉸,他端自由支持ナル單桁トナル。此單桁ニ ⓑ

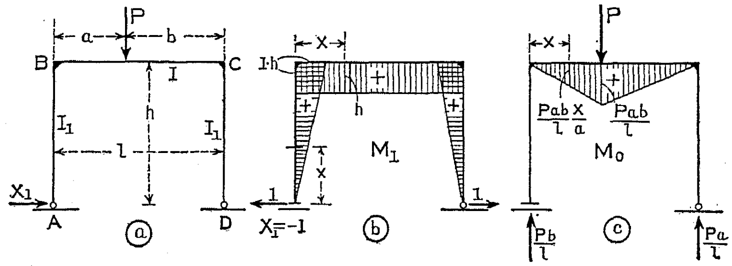


Fig. 618.

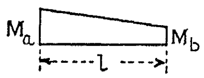
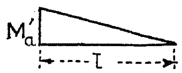
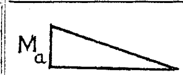
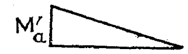
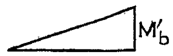
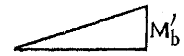
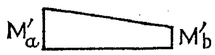
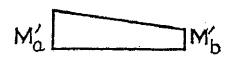
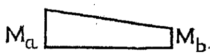
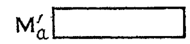
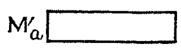
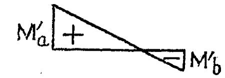
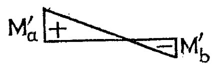
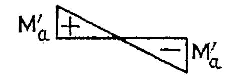
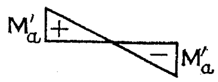
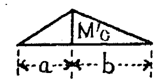
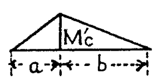
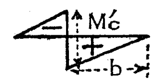
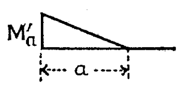
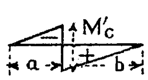
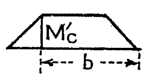
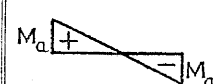
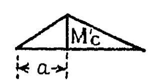
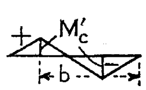
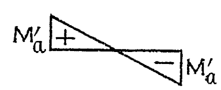
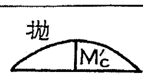
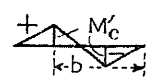
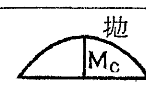
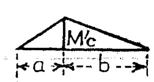
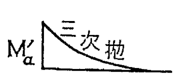
圖ノ如ク $X_1=-1$ ナル荷重ヲ加ヘタルトキノ彎曲力率圖ハ ⓑ 圖ニ示ス如ク又此單桁ニ單ニ外荷重 P ノミノ作用シタルトキノ彎曲力率圖ハ ⓒ 圖ノ如クナル。卽チ ⓑ 圖ハ M_1 圖デアリ ⓒ 圖ハ M_o 圖ニ外ナラナイ。斯クテ (555) 式ニ據リ

P ニ因ル支點 A ノ水平移動(X_1 ノ方向ニ)

$$\delta_{1;0}=\int\frac{M_oM_1}{EI}ds=\int_o^a\frac{h\left(\frac{Pab}{l}\frac{x}{a}\right)}{EI}dx+\int_o^b\frac{h\left(\frac{Pab}{l}\frac{x}{b}\right)}{EI}dx$$

$$=\frac{1}{EI}\frac{Pbh}{l}\frac{a^2}{2}+\frac{1}{EI}\frac{Pah}{l}\frac{b^2}{2}=\frac{Pabh}{2EI}$$

第二十六表 $\int_0^l M_m M_n ds$ ノ 表

M_m	M_n	$\int M_m M_n ds$	M_m	M_n	$\int M_m M_n ds$
		$\frac{1}{6}(2M_a+M_b)M_a'l$			$\frac{1}{3}M_aM_a'l$
		$\frac{1}{6}(M_a+2M_b)M_b'l$			$\frac{1}{6}M_aM_b'l$
		$\frac{1}{6}\left[M_a(2M_a'+M_b')+M_b(M_a'+2M_b')\right]l$			$\frac{1}{6}M_a(2M_a'+M_b')l$
		$\frac{1}{3}(M_a^2+M_aM_b+M_b^2)l$			$\frac{1}{2}M_aM_a'l$
		$\frac{1}{2}(M_a+M_b)M_a'l$			$\frac{1}{6}M_a(2M_a'-M_b')l$
		$\frac{1}{6}\left[M_a(2M_a'-M_b')+M_b(M_a'-2M_b')\right]l$			$\frac{1}{6}M_aM_a'l$
		$\frac{1}{6}(M_a-M_b)M_a'l$			$\frac{1}{6}M_aM_c'\left(1+\frac{b}{l}\right)l$
		$\frac{1}{6}\left[M_a\left(1+\frac{b}{l}\right)+M_b\left(1+\frac{a}{l}\right)\right]M_c'l$			$-\frac{1}{6}M_aM_c'\left(1-3\frac{b^2}{l^2}\right)l$
		$\frac{1}{2}\frac{a}{l}\left[M_a-\frac{1}{3}\frac{a}{l}(M_a-M_b)\right]M_a'l$			$\frac{1}{3}M_aM_c'l$
		$\frac{1}{6}\left[M_b\left(1-3\frac{a^2}{l^2}\right)-M_a\left(1-3\frac{b^2}{l^2}\right)\right]M_c'l$			$\frac{1}{4}M_aM_a'l$
		$\frac{1}{2}\frac{b}{l}(M_a+M_b)M_c'l$			$\frac{1}{6}M_aM_c'\left(1-2\frac{a}{l}\right)l$
		$\frac{1}{6}\frac{b}{l}(M_a-M_b)M_c'l$			$\frac{1}{3}M_aM_a'l$
		$\frac{1}{3}(M_a+M_b)M_c'l$			$\frac{1}{3}M_aM_c'\frac{b}{l}l$
		$\frac{1}{12}(5M_a+3M_b)M_a'l$			$\frac{1}{3}M_cM'\left(1+\frac{ab}{l^2}\right)l$
		$\frac{1}{12}(3M_a+M_b)M_a'l$			$\frac{8}{15}M_cM_c'l$
		$\frac{1}{20}(4M_a+M_b)M_a'l$			$\frac{1}{5}M_cM_a'l$

(三〇八—三〇九ノ間)

$X_1=-1$ ニ因ル支點 A ノ水平移動

$$\delta_{1,1}=\int\frac{M_1^2}{EI}ds=2\int_o^h\frac{\left(h\frac{x}{h}\right)^2}{EI_1}dx+\int_o^l\frac{h^2}{EI}dx$$

$$=\frac{2}{EI_1}\frac{h^3}{3}+\frac{1}{EI}h^2l=\frac{h^2l}{EI}\left(1+\frac{2}{3}\nu\right)$$

從ツテ一般式(554)ニ挿入シ

$$X_1\delta_{1,1}=\delta_{1,0}\quad \text{ヨリ}$$

$$X_1=\frac{\delta_{1,0}}{\delta_{1,1}}=\frac{Pabh}{2EI}\div\frac{h^2l}{EI}\left(1+\frac{2}{3}\nu\right)$$

$$=\frac{Pab}{2hl\left(1+\frac{2}{3}\nu\right)}$$ ……………………………………………(529)式參照

本例題ニ於テハ δ ノ計算ノ途中ニ $\int M_oM_1ds$ ナル積分ヲ行ヒタルガ此積分ハ第二十六表ヲ利用スル事ニヨツテ省略スル事ガ出來ル。第二十六表ハ種々ノ彎曲力率圖ノ組合セニ對シ此積分ヲ行ツタ結果デアル。

多次不靜定構造ノ解法ヲシテ成ルベク簡易ナラシメル祕訣ハ其合成變位ニ對スル彈性方程式 $\Sigma X\delta=\delta_o$ ノ各式ニ於ケル項數ヲ可及的少ナクスル事デアル。卽チ各方程式ノ内ニ存スル未知項ノ數少ナキ程其解法ハ容易デアツテ計算ニ誤差ヲ生ズル機會ガ少ナイ。彈性方程式ヲ斯クノ如ク簡單ナラシムルタメニハ最初ニ假定スル未知不靜定力ノ採リ方ニ餘程注意ヲ要スルノデアツテ其巧拙ハ一ツニ解法ノ難易ニ關スル所大デアル。普通ノ簡單ナル剛構ニ於テハ三項ノミヲ含ム方程式ヲ得ル事ガ多イ故ニ其解法ニ就キテハ更ニ第四節ニ於テ詳述スルコトトシヤウ。

n 項ヲ含ム一般的ノ場合ニ於ケル彈性方程式ノ解法ニ於テハ「ガウス」氏消去法 (Gauss' Algorithmus) ガ最モ普通ニ用ヒラレル。今最初ノ彈性方程式ヲ

$$X_1\delta_{1,1}+X_2\delta_{1,2}+X_3\delta_{1,3}+\cdots\cdots\cdots+X_n\delta_{1,n}=\delta_{1,0}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$X_1\delta_{2,1}+X_2\delta_{2,2}+X_3\delta_{2,3}+\cdots\cdots\cdots+X_n\delta_{2,n}=\delta_{2,0}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$X_1\delta_{3,1}+X_2\delta_{3,2}+X_3\delta_{3,3}+\cdots\cdots\cdots+X_n\delta_{3,n}=\delta_{3,0}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

トシテ次ノ如ク未知項ノ消去ヲ進メテ行ク。

$$(2)-(1)\times\frac{\delta_{2,1}}{\delta_{1,1}}:\qquad X_2\left(\delta_{2,2}-\delta_{1,2}\frac{\delta_{2,1}}{\delta_{1,1}}\right)+X_3\left(\delta_{2,3}-\delta_{1,3}\frac{\delta_{2,1}}{\delta_{1,1}}\right)+\cdots\cdots=\delta_{2,0}-\delta_{1,0}\frac{\delta_{2,1}}{\delta_{1,1}}$$

$$(3)-(1)\times\frac{\delta_{3,1}}{\delta_{1,1}}:\qquad X_2\left(\delta_{3,2}-\delta_{1,2}\frac{\delta_{3,1}}{\delta_{1,1}}\right)+X_3\left(\delta_{3,3}-\delta_{1,3}\frac{\delta_{3,1}}{\delta_{1,1}}\right)+\cdots\cdots=\delta_{3,0}-\delta_{1,0}\frac{\delta_{3,1}}{\delta_{1,1}}$$

コレヲ表ハスニ便宜上次ノ如クスル

$$X_2\delta^{(1)}_{2,2}+X_3\delta^{(1)}_{2,3}+\cdots\cdots\cdots=\delta^{(1)}_{2,0}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$X_2\delta^{(1)}_{3,2}+X_3\delta^{(1)}_{3,3}+\cdots\cdots\cdots=\delta^{(1)}_{3,0}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

即チ　$\delta^{(1)}_{2,2}=\delta_{2,2}-\delta_{1,2}\dfrac{\delta_{2,1}}{\delta_{1,1}}$　デアツテコレハ $X_1 \neq 0$ ト假定セル基本系即チ一次不靜定基本系ニ於テ $X_2=-1$ ニヨツテ點2ニ生ズル變位ニ外ナラナイ。δ ノ肩ニ附シタハ(1)ハ一次不靜定基本系ニ於ケル變位ナル事ヲ示ス。コノ理由ハ $\dfrac{\delta_{2,1}}{\delta_{1,1}}$ ハ靜定基本系ニ於テ $X_2=-1$ ガ作用シタトキノ X_1 ノ値デアリ(此 $X_2=-1$ ニヨリ X_1 ノ作用點ノ變位 $\delta_{1,2}=\delta_{2,1}=X_1\delta_{1,1}$ デアル故)此 X_1 ニヨツテ點2ニ生ズル變位ハ $-\delta_{1,2}\dfrac{\delta_{2,1}}{\delta_{1,1}}$ デアルガ故ニコレダケノ變位ヲ $\delta_{2,2}$ ニ加ヘタ

モノハ即チ一次不靜定基本系ニ於ケル $\delta_{2,2}$ ニ外ナラヌ。全ク同樣ノ理ニヨツテ(4)式ハ此一次不靜定基本系ニ於ケル點2ノ變位ヨリ求メタ彈性方程式デアリ(5)式ハ同ジク點3ノ變位ヨリ求メタ彈性方程式デアル。

同樣ノ消去操作ヲ反復シテ

$$X_3\delta^{(2)}_{3,3}+X_4\delta^{(2)}_{3,4}+\cdots\cdots\cdots=\delta^{(2)}_{3,0}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

ヲ得。コレハ X_1 及 X_2 ノ二ツノ未知力ヲ既知ト考ヘ其作用スル二次不靜定基本系ニ對スル彈性方程式ニ外ナラヌノデアツテ斯クノ如キ消去ヲ行フ度ニ未知數一個ヅヽ少ナキ方程式ガ得ラレ結局最後ニ

$$X_n\delta^{(n-1)}_{n,n}=\delta^{(n-1)}_{n,0}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

ヲ得ル事トナル。コレヨリ求ムル未知力 X_n ハ

$$X_n=\frac{\delta^{(n-1)}_{n,0}}{\delta^{(n-1)}_{n,n}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

以上ノ算法ニ於ケル (1), (2), (3) 式ニ夫々ノ場合ニ應ズル數値ヲ代入シ數字ニテ消去法ヲ反復スレバ計算ハ簡單トナル事勿論デアル。又最初ノ彈性方程式 (1), (2), (3) ヲ立テル代リニ一次(又ハ更ニ高次)不靜定基本系ニ於ケル變位ヲ計算シテ彈性方程式ヲ立テヽモ差支ナイ事ハ勿論デアル。

高次不靜定基本系ヲ用ヒテ解法ヲ行フハ高次不靜定構造物ニ於テ屢遭遇スル所デアツテ此解法ヲ行フ場合ニ其生ズル變形ヲ計算スルニ當ツテ次ニ説明スル定理ハ其計算ヲ簡易ナラシメルニ非常ニ役立ツデアラウ。

今 r 次不靜定基本系ニ於ケル $\delta^{(r)}_{m,n}$ ヲ計算セントスル場合トシ

此 r 次不靜定基本系ニ於テ $X_m=-1$ ニ因ツテ生ズル彎曲力率ヲ $M_m^{(r)}$ 此基本系ニ對スル靜定基本系ニ於テ $X_m=-1$ ニ因ツテ生ズル彎曲力率ヲ $M_m^{(o)}$ トシ今彎曲力率ノミヲ考慮スルトキハ(552)式ニヨツテ次式ヲ得ル。

$$\delta_{m,n}^{(r)}=\int M_m^{(r)}M_n^{(r)}\frac{ds}{EI} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

然ルニ今玆ニ證明セントスル定理ニ於テハ此變形ハ實ニ次式ニテ與ヘラレル。

$$\left.\begin{aligned}\delta_{m,n}^{(r)}&=\int M_m^{(o)}M_n^{(r)}\frac{ds}{EI}\\&=\int M_m^{(r)}M_n^{(o)}\frac{ds}{EI}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (557)$$

此公式ヲ證明スルタメニ今假ニ

$$M_m^{(r)}=M_m^{(o)}+X_{1m}M_1^{(o)}+X_{2m}M_2^{(o)}+\cdots\cdots+X_{rm}M_r^{(o)}$$

ト置ク。此式ニ於ケル $M_m^{(o)}$ ハ靜定基本系ニ於テ $X_m=-1$ ニ因ツテ生ズル彎曲力率, $M_1^{(o)}$ ハ $X_1=-1$ ニ因ツテ生ズル彎曲力率, $M_2^{(o)}$ ハ $X_2=-1$ ニ因ル力率デアル。コレヲ(9)式ニ挿入スレバ

$$\begin{aligned}\delta_{m,n}^{(r)}&=\int(M_m^{(o)}+X_{1m}M_1^{(o)}+\cdots\cdots)M_n^{(r)}\frac{ds}{EI}\\&=\int M_m^{(o)}M_n^{(r)}\frac{ds}{EI}+X_{1m}\int M_1^{(o)}M_n^{(r)}\frac{ds}{EI}+\cdots\cdots\end{aligned}$$

第二項ノ積分値 $\int M_1^{(o)}M_n^{(r)}\frac{ds}{EI}$ ハ何ヲ意味スルカヲ吟味スルニコレハ r 次不靜定基本系ニ於テ $X_n=-1$ ニ因ツテ斷面(點)1ニ生ズル變形ニ外ナラヌ。然ルニ r 次不靜定基本系ニ於テハ斷面1ハ鉸デハナク從ツテ變形(相對的角變位)ハ生ジ得ナイ事ヲ知ルガ故ニ斷面1ノ變形ハ0デアルベキ筈デアル。卽チ此第二項ハ0トナラネバナラヌ。全ク同樣ノ推論ハ斷面2, 3,……, r ニ對シテモ成立ツガ故ニ上式第二項以下ノ各項ハ全部消失スベク結局

$$\delta_{m,n}^{(r)}=\int M_m^{(o)}M_n^{(r)}\frac{ds}{EI}$$

ヲ得ル。コレ求ムル(557)式前半ニ外ナラヌ。(557)式後半モ全ク同樣ニシテ誘導シ得ラレル。

(557)式ノ事實ハ $\delta_{m,n}^{(r)}$ ノ計算ヲシテ極メテ容易ナラシメルモノデアツテ(9)式ニヨルトキハ r 次不靜定基本系ニ對スル M_m 圖及 M_n 圖ヲ作リコレヲ相互相乘ジテ $\int M_mM_n ds$ ヲ求メネバナラヌノデアルガ(557)式ニ據ルトキハ r 次不靜定基本系ニ對スル M_m 圖ト靜定基本系ニ對スル M_n 圖(又ハ逆)トノ積ヲ求ムレバヨイノデアツテ普通後者ハ其計算極メテ簡單デアルヲ常トスル。(557)式ヲ用フレバ次ノ關係モ自ラ明カデアル。

$$\delta_{m,m}^{(r)}=\int M_m^{(o)}M_m^{(r)}\frac{ds}{EI}$$

例題第六十九 Fig. 619ニ示ス二柱三徑間ヲ有スル連續桁ニ集中荷重ノ作用スルトキノ彎曲力率ヲ求ム。但シ支柱ハ上端剛節下端鉸構造トス。

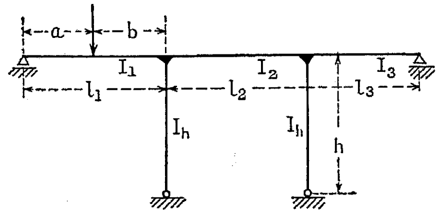


Fig. 619.

(答) 與ヘラレタル剛構ニ於ケル不靜定力ノ數ハ明カニ $2\times2+2-3=3$ 個デアツテ此三個ノ不靜定力トシテ如何ナル力ヲ採ルベキカハ其基本系ニ就キテ計算シタル變位ノ項 δ ノ或物ガ零トナリ從ツテ生ズベキ彈性方程式ヲシテ解クニ容易ナラシムルカ或ハ又不靜定基本系ヲ假定スル事ニヨツテ求ムベキ未知項(不靜定力)ノ數ヲ減ズル樣考慮ヲ繞スベキデアル。今 Fig. 620ニ二樣ノ基本系ヲ比較センニⓐ圖ハ圖示ノ如ク左右端支點ヲ除去シ同時ニ支柱下端ヲ可動ト假定シ從ツテ生ズル左右端支點垂直反力ト支柱下端水平反力トノ三反力ヲ不靜定力ト考ヘタルモノデアリⓑ圖ハ左徑間右端及ビ右徑間左端ニ圖示ノ如ク鉸ヲ假定シテ二點ノ彎曲力率ヲ未知不靜定力トシ基

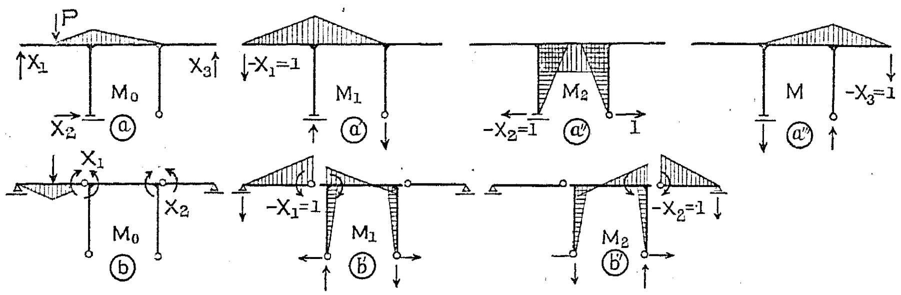


Fig.　620.

本系トシテ二鉸矩形剛構卽チ一次不靜定ノ基本系ヲ用フルモノデアル。ⓐ圖ノ假定ニ於テハ未知項ハ三ツデアリⓑ圖ノ假定ニ於テハ未知項ハ二ツデアル。其代リⓑ圖ニ於テハ一次不靜定基本系ヲ假定シテ居ル故其基本系ノ解法ハ旣知ナルカ又ハ之レヲ別ニ解ク事ヲ必要トスル。

Fig. 620 ⓑノ假定ニ從ヒ一次不靜定基本系ヲ前提トシテ計算ヲ進メテ見ヤウ。此基本系ノ中央徑間ハ二鉸矩形剛構デアッテ一次不靜定デアルガ故ニ其左肩隅點ニ偶力率 1 ガ作用シタトキニ生ズル彎曲力率圖ヲ豫メ求メテ置カネバナラヌ。Fig. 621 ニ於テ此二鉸矩形剛構ヲ解クタメニ其ノ不靜定力トシテ左支點水平反力ヲ採リ斯クテ生ズル基本系ニ對シ不靜定力 $X_1=-1$ ノ働キタルタメニ生ズル M_1 圖(ⓑ圖)ト同ジク基本系ニ偶力率 1 ノ

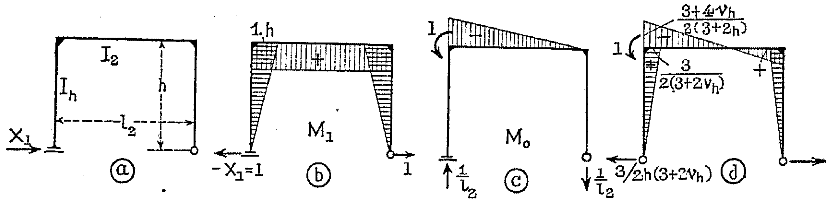


Fig.　621.

働キタルタメ生ズル M_0 圖(ⓒ圖)トヲ適宜相乘ジテ

$$\delta_{1,1}=\frac{2}{3}h^2\frac{h}{EI_h}+h^2\frac{l_2}{EI_2}=\frac{h^2l_2}{3EI_2}(3+2\nu_h);\quad \nu_h=\frac{hI_2}{l_2I_h};$$

$$\delta_{1,0}=-\frac{1}{2}h\frac{l_2}{EI_2}$$

$$X_1=\frac{\delta_{1,0}}{\delta_{1,1}}=\frac{-\frac{h}{2}\frac{l_2}{I_2}}{\frac{h^2}{3}\frac{l_2}{I_2}(3+2\nu_h)}$$

$$=-\frac{3}{2h(3+2\nu_h)}$$

從ツテⓓ圖ノ如キ彎曲力率圖ヲ得ル。此力率圖ハ取リモ直サズ Fig. 620ⓑ又ハ Fig. 622 ⓐニ用ヒラルベキ基本系ニ對スル力率圖デアッテ斯ク記入シタル Fig. 622 ⓐⓑ及ⓒニ就キ此一次不靜定基本系ニ生ズル變位ヲ計算スレバヨイノデアル。先ヅ $\delta_{1,1}$ ヲ計算センニ此一次不靜定基本系ニ對スル靜定基本系ハ Fig. 621 デアッテ $\delta_{1,1}^{(1)}=\int M_1^{(1)}M_1^{(o)}\frac{ds}{EI}$ ニ對スル $M_1^{(1)}$ 圖ハ卽チ Fig. 622 ⓐ, $M_1^{(o)}$ 圖ハ Fig. 621 ⓒデアル(尤モ此圖ニハ左徑間ヲ缺ク)。斯クテ計算シタル結果ハ次ノ如クナル。

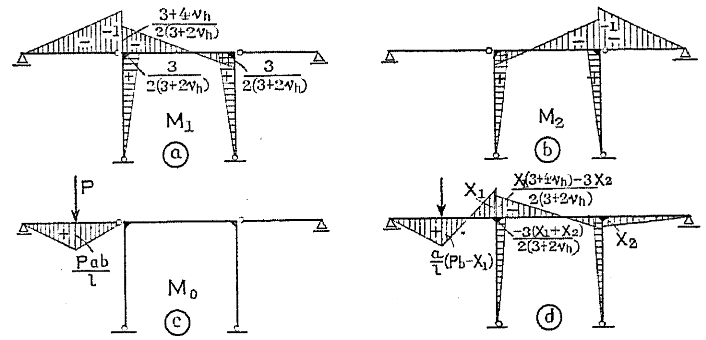


Fig.　622.

$$\delta_{1,1}^{(1)}=\frac{1}{3E}\left[\frac{l_1}{I_1}+\frac{1}{4}\frac{l_2}{I_2}\frac{3+8\nu_h}{3+2\nu_h}\right],\quad \delta_{1,2}^{(1)}=\frac{1}{12E}\frac{l_2}{I_2}\frac{4\nu_h-3}{3+2\nu_h},$$

$$\delta_{1,0}^{(1)}=-\frac{Pl_1}{6E}\frac{l_1}{I_1}\left[\frac{a}{l_1}-\left(\frac{a}{l_1}\right)^3\right],\qquad \delta_{2,1}^{(1)}=\delta_{1,2}^{(1)}$$

$$\delta_{2,2}^{(1)}=\frac{1}{3E}\left[\frac{l_3}{I_3}+\frac{1}{4}\frac{l_2}{I_2}\frac{3+8\nu_h}{3+2\nu_h}\right],\quad \delta_{2,0}^{(1)}=0$$

ヲ得ル。從ツテ生ズル彈性方程式ハ

$$X_1\frac{1}{3E}\left[\frac{l_1}{I_1}+\frac{1}{4}\frac{l_2}{I_2}\frac{3+8\nu_h}{3+2\nu_h}\right]+X_2\frac{1}{12E}\frac{l_2}{I_2}\frac{4\nu_h-3}{3+2\nu_h}=-\frac{Pl_1}{6E}\frac{l_1}{I_1}\left[\frac{a}{l_1}-\left(\frac{a}{l_1}\right)^3\right]$$

$$X_1\frac{1}{12E}\frac{l_2}{I_2}\frac{4\nu_h-3}{3+2\nu_h}\qquad+X_2\frac{1}{3E}\left[\frac{l_3}{I_3}+\frac{1}{4}\frac{l_2}{I_2}\frac{3+8\nu_h}{3+2\nu_h}\right]=0$$

簡單ニ書直シテ

$$X_1.4\left[\nu_1+\frac{1}{4}\,\frac{3+8\nu_h}{3+2\nu_h}\right]+X_2\frac{4\nu_h-3}{3+2\nu_h}=-2Pl_1\nu_1\left[\frac{a}{l_1}-\left(\frac{a}{l_1}\right)^3\right]$$

$$X_1\frac{4\nu_h-3}{3+2\nu_h}\qquad\qquad+X_2.4.\left[\nu_3+\frac{1}{4}\,\frac{3+8\nu_h}{3+2\nu_h}\right]=0$$

之レヨリ X_1 及 X_2 ガ計算セラレ

$$X_1=\frac{\begin{vmatrix}-2Pl_1\nu_1\left[\frac{a}{l_1}-\left(\frac{a}{l_1}\right)^3\right], & \frac{4\nu_h-3}{3+2\nu_h}\\ 0 & 4\left[\nu_3+\frac{1}{4}\,\frac{3+8\nu_h}{3+2\nu_h}\right]\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4\left[\nu_1+\frac{1}{4}\,\frac{3+8\nu_1}{3+2\nu_h}\right], & \frac{4\nu_h-3}{3+2\nu_h}\\ \frac{4\nu_h-3}{3+2\nu_h}, & 4\left[\nu_3+\frac{1}{4}\,\frac{3+8\nu_h}{3+2\nu_h}\right]\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{-2Pl_1\nu_1\left[\frac{a}{l_1}-\left(\frac{a}{l_1}\right)^3\right]\left[4\nu_3+\frac{3+8\nu_h}{3+2\nu_h}\right]}{\left[4\nu_1+\frac{3+8\nu_h}{3+2\nu_h}\right]\left[4\nu_3+\frac{3+8\nu_h}{3+2\nu_h}\right]-\left(\frac{4\nu_h-3}{3+2\nu_h}\right)^2}$$

$$X_2=\frac{+2Pl_1\nu_1\left[\frac{a}{l_1}-\left(\frac{a}{l_1}\right)^3\right]\left(\frac{4\nu_h-3}{3+2\nu_h}\right)}{\text{〃}}$$

X_1, X_2 サヘ求メラルレバ爾餘ノ部材各點ニ生ズル彎力曲率ハ容易ニ計算シ得ラレル。(Fig. 622 ⓓ 參照)

第四節　三項方程式ノ解法

與ヘラレタ彈性方程式

$$X_1\delta_{1,1}+X_2\delta_{1,2}+\cdots\cdots+X_i\delta_{1,i}+\cdots\cdots+X_n\delta_{1,n}=\delta_{1,0}$$

$$X_1\delta_{2,1}+X_2\delta_{2,2}+\cdots\cdots+X_i\delta_{2,i}+\cdots\cdots+X_n\delta_{2,n}=\delta_{2,0}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_1\delta_{k,1}+X_2\delta_{k,2}+\cdots\cdots+X_i\delta_{k,i}+\cdots\cdots+X_n\delta_{k,n}=\delta_{k,0}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ヲ解イテ求メタ最後ノ結果ヲ

$$X_1=\beta_{1,1}\delta_{1,0}+\beta_{1,2}\delta_{2,0}+\cdots\cdots+\beta_{1,n}\delta_{n,0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(558)$$

ト置クモノトス。此式ニ於ケル $\beta_{1,1}$ ハ $\delta_{1,0}=1,\ \delta_{2,0}=\delta_{3,0}=\cdots=0$ ト假定シタルトキニ得ラル、X_1 デアリ $\beta_{1,2}$ ハ $\delta_{2,0}=1,\ \delta_{1,0}=\delta_{3,0}=\cdots=0$ ト置キタルトキニ求メラル、X_1 デアル。然ルトキハ一般ニ

$$\beta_{ik}=\beta_{ki}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(559)$$

ナル關係ニアル事ヲ證明シヤウ。

β_{ik} ヲ求ムル爲メニ上式ニ於テ $\delta_{k,0}=1,\ \delta_{1,0}=\delta_{2,0}=\cdots=0$ ト置キ此 n 個ノ方程式ヲ解イテ求メタル X_i ハ則チ此場合ノ β_{ik} デアツテ其結果ヲ便宜上行列式 (Determinant) ニテ表ハセバ

$$\beta_{ik}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}\delta_{1,1}\cdots\cdots\delta_{1(i-1)} & 0 & \delta_{1(i+1)}\cdots\cdots\delta_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \delta_{(k-1)1}\cdots\delta_{(k-1)(i-1)} & 0 & \delta_{(k-1)(i+1)}\cdots\delta_{(k-1)n}\\ \delta_{k,1}\cdots\cdots\delta_{k(i-1)} & 1 & \delta_{k(i+1)}\cdots\cdots\delta_{kn}\\ \delta_{(k+1)1}\cdots\delta_{(k+1)(i-1)} & 0 & \delta_{(k+1)(i+1)}\cdots\delta_{(k+1)n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \delta_{n,1}\cdots\cdots\delta_{n(i-1)} & 0 & \delta_{n(i+1)}\cdots\cdots\delta_{n,n}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(-1)^{(i+k)}}{D}\begin{vmatrix}\delta_{1,1}\cdots\cdots\delta_{1(i-1)} & \delta_{1(i+1)}\cdots\cdots\delta_{1,n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \delta_{(k-1)1}\cdots\delta_{(k-1)(i-1)} & \delta_{(k-1)(i+1)}\cdots\delta_{(k-1)n}\\ \delta_{(k+1)1}\cdots\delta_{(k+1)(i-1)} & \delta_{(k+1)(i+1)}\cdots\delta_{(k+1)n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \delta_{n,1}\cdots\cdots\delta_{n(i-1)} & \delta_{n(i+1)}\cdots\cdots\delta_{n,n}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(-1)^{(i+k)}}{\mathrm{D}}\begin{vmatrix} \delta_{1,1}\cdots\cdots\delta_{(k-1)1} & \delta_{(k+1)1}\cdots\cdots\delta_{n,1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_{1(i-1)}\cdots\delta_{(k-1)(i-1)} & \delta_{(k+1)(i-1)}\cdots\delta_{n(i-1)} \\ \delta_{1(i+1)}\cdots\delta_{(k-1)(i+1)} & \delta_{(k+1)(i+1)}\cdot\delta_{n(i+1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_{1,n}\cdots\cdots\delta_{(k-1)n} & \delta_{(k+1)n}\cdots\cdots\delta_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{D}}\begin{vmatrix} \delta_{1,1}\cdots\cdots\delta_{1(k-1)} & 0 & \delta_{1(k+1)}\cdots\cdots\delta_{1,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_{(i-1)1}\cdots\delta_{(i-1)(k-1)} & 0 & \delta_{(i-1)(k+1)}\cdots\delta_{(i-1)n} \\ \delta_{i,1}\cdots\cdots\delta_{i(k-1)} & 1 & \delta_{i(k+1)}\cdots\cdots\delta_{in} \\ \delta_{(i+1)1}\cdots\delta_{(i+1)(k-1)} & 0 & \delta_{(i+1)(k+1)}\cdots\delta_{(i+1)n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_{n,1}\cdots\cdots\delta_{n(k-1)} & 0 & \delta_{n(k+1)}\cdots\cdots\delta_{n,n} \end{vmatrix}=\beta_{ki}$$

則チ $\beta_{ik}=\beta_{ki}$ ナル事ガ證明セラレタ譯デアル。

三項方程式 (3 terms equation) 卽チ一ツノ方程式ニハ未知項三ツノミヲ含ミ然カモ兩端ニ於ケルモノハ二項ノミヨリ含マザル如キ場合例ヘバ

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{X}_1\delta_{1,1}+\mathrm{X}_2\delta_{1,2} &= \delta_{1,0} \\ \mathrm{X}_1\delta_{2,1}+\mathrm{X}_2\delta_{2,2}+\mathrm{X}_3\delta_{2,3} &= \delta_{2,0} \\ \mathrm{X}_2\delta_{3,2}+\mathrm{X}_3\delta_{3,3}+\mathrm{X}_4\delta_{3,4} &= \delta_{3,0} \\ \mathrm{X}_3\delta_{4,3}+\mathrm{X}_4\delta_{4,4} &= \delta_{4,0} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ノ如キ彈性方程式ヲ解クニハ次ニ示ス「β法」(β-method) ヲ用フルガ最モ容易デアツテ未知數 X ノ數ガ何程多クトモ之レヲ用ヒ得ル。

與ヘラレタ 4 個ノ彈性方程式右邊ニ於テ $\delta_{1,0}=\delta_{2,0}=\delta_{3,0}=0$ $\delta_{4,0}=1$

ト置クトキハ斯クテ求メラレタル X_1 ハ明カニ $\beta_{1,4}$ デアリ X_2 ハ $\beta_{2,4}$ デアル。從ツテ此場合ノ方程式ハ

$$\left.\begin{aligned} \beta_{1,4}\delta_{1,1}+\beta_{2,4}\delta_{1,2} &= 0\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ \beta_{1,4}\delta_{2,1}+\beta_{2,4}\delta_{2,2}+\beta_{3,4}\delta_{2,3} &= 0\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \\ \beta_{2,4}\delta_{3,2}+\beta_{3,4}\delta_{3,3}+\beta_{4,4}\delta_{3,4} &= 0\cdots\cdots\cdots\cdots(4) \\ \beta_{3,4}\delta_{4,3}+\beta_{4,1}\delta_{4,4} &= 1\cdots\cdots\cdots\cdots(5) \end{aligned}\right\}$$

此場合ニ對シ上端ヨリ始メテ「ガウス」氏消去法ヲ適用シ

$(3)-(2)\times\dfrac{\delta_{2,1}}{\delta_{1,1}}$　　$\beta_{2,4}\left(\delta_{2,2}-\delta_{1,2}\dfrac{\delta_{2,1}}{\delta_{1,1}}\right)+\beta_{3,4}\delta_{2,3}=0$

或ハ書直シ　　$\beta_{2,4}\delta^{(1)}_{2,2}+\beta_{3,4}\delta_{2,3}=0\cdots\cdots\cdots(6)$

(4)式ハ其儘書寫シ　　$\beta_{2,4}\delta_{3,2}+\beta_{3,4}\delta_{3,3}+\beta_{4,4}\delta_{3,4}=0\cdots\cdots\cdots(7)$

(5)式　　$\beta_{3,4}\delta_{4,3}+\beta_{4,4}\delta_{4,4}=1\cdots\cdots\cdots(8)$

再ビ $(7)-(6)\times\dfrac{\delta_{3,2}}{\delta^{(1)}_{2,2}}$　　$\beta_{3,4}\left(\delta_{3,3}-\delta_{2,3}\dfrac{\delta_{3,2}}{\delta^{(1)}_{2,2}}\right)+\beta_{4,4}\delta_{3,4}=0$

書直シテ　　$\beta_{3,4}\delta^{(2)}_{3,3}+\beta_{4,4}\delta_{3,4}=0\cdots\cdots\cdots(9)$

(8)式　　$\beta_{3,4}\delta_{4,3}+\beta_{4,4}\delta_{4,4}=1\cdots\cdots\cdots(10)$

$(10)-(9)\times\dfrac{\delta_{4,3}}{\delta^{(2)}_{3,3}}$　　$\beta_{4,4}\left(\delta_{4,4}-\delta_{3,4}\dfrac{\delta_{4,3}}{\delta^{(2)}_{3,3}}\right)=1$

書直シ　　$\beta_{4,4}\delta^{(3)}_{4,4}=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$

斯クテ求ムル未知數

$$\beta_{4,4}=\frac{1}{\delta^{(3)}_{4,4}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

ヲ得タルガ故ニ(9)式ニ入ルレバ $\beta_{3,4}$ ガ求メラレ得ベク

$$\beta_{3,4}\delta^{(2)}_{3,3}+\beta_{4,4}\delta_{3,4}=0$$

$$\beta_{3,4}=-\beta_{4,4}\frac{\delta_{3,4}}{\delta^{(2)}_{3,3}}\equiv-\beta_{4,4}\varkappa_{3,4}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

$\varkappa$ ナル値ハ荷重ニハ關係ナキ係數デアツテ其接尾字 3,4 ハ β_3 ヲ β_4 ヨリ得ルタメニ乘ズベキ係數ナル事ヲ示ス。全ク同様ノ方法ヲ

(6)及(2)式ニ適用シテ

$$\beta_{2,4}=-\beta_{3,4}\frac{\delta_{2,3}}{\delta^{(1)}_{2,2}}\equiv-\beta_{3,4}x_{2,3}\quad\cdots\cdots(14)$$

$$\beta_{1,4}=-\beta_{2,4}\frac{\delta_{1,2}}{\delta_{1,1}}\equiv-\beta_{2,4}x_{1,2}\quad\cdots\cdots(15)$$

斯クテ $\beta_{1,4}$, $\beta_{2,4}$, $\beta_{3,4}$, $\beta_{4,4}$, $\beta_{4,1}$, $\beta_{4,2}$, $\beta_{4,3}$ ガ既知トナツタ。

次ニ再ビ前同様ノ計算操作ニ戻リ(1)式ノ右邊ニ $\delta_{1,0}=1$, $\delta_{2,0}=\delta_{3,0}=\delta_{4,0}=0$ ト置キ

$$\left.\begin{aligned}\beta_{1,1}\delta_{1,1}+\beta_{2,1}\delta_{1,2}&=1\\ \beta_{1,1}\delta_{2,1}+\beta_{2,1}\delta_{2,2}+\beta_{3,1}\delta_{2,3}&=0\\ \beta_{2,1}\delta_{3,2}+\beta_{3,1}\delta_{3,3}+\beta_{4,1}\delta_{3,4}&=0\\ \beta_{3,1}\delta_{4,3}+\beta_{4,1}\delta_{4,4}&=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(16)$$

下端ヨリ「ガウス」氏消去法ヲ始メ求メタル結果ハ

$$\beta_{11}=+\frac{1}{\delta^{(3)}_{11}}\quad\cdots\cdots(17)$$

$$\beta_{21}=-\beta_{11}\frac{\delta_{21}}{\delta^{(2)}_{22}}\equiv-\beta_{11}x_{21}\quad\cdots\cdots(18)$$

$$\beta_{31}=-\beta_{21}\frac{\delta_{32}}{\delta^{(1)}_{33}}\equiv-\beta_{21}x_{32}\quad\cdots\cdots(19)$$

$$\beta_{41}=-\beta_{31}\frac{\delta_{43}}{\delta_{44}}\equiv-\beta_{31}x_{43}\quad\cdots\cdots(20)$$

斯クテ β_{11}, β_{21}, β_{31}, β_{41}, β_{12}, β_{13}, β_{14} ガ既知トナツタ。β_{14} ハ前ニ求メタ結果ト一致シナケレバナラヌ。

更ニ(1)式右邊ニ 0, 0, 1, 0 ヲ入レタル場合ニ對シ

$$\left.\begin{aligned}\beta_{13}\delta_{11}+\beta_{23}\delta_{12}&=0\\ \beta_{13}\delta_{21}+\beta_{23}\delta_{22}+\beta_{33}\delta_{23}&=0\\ \beta_{23}\delta_{32}+\beta_{33}\delta_{33}+\beta_{43}\delta_{34}&=1\\ \beta_{33}\delta_{43}+\beta_{43}\delta_{44}&=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(21)$$

下端ヨリ消去ヲ始メ

$$\beta_{33}=-\beta_{43}\frac{\delta_{44}}{\delta_{43}}\equiv-\beta_{43}\frac{1}{x_{43}}\quad\cdots\cdots(22)$$

上端ヨリ計算シテ

$$\beta_{23}=-\beta_{33}\frac{\delta_{23}}{\delta^{(1)}_{22}}\equiv-\beta_{33}x_{23}\quad\cdots\cdots(23)$$

全ク同様ノ理ニテ

$$\beta_{22}=-\beta_{12}\frac{1}{x_{12}}\quad\cdots\cdots(24)$$

以上(12)乃至(15)式ニ得タル算式ヨリ

$$\beta_{44}=\frac{1}{\delta^{(3)}_{44}}=\cfrac{1}{\delta_{44}-\delta_{34}\cfrac{\delta_{43}}{\delta^{(2)}_{33}}}$$

$$=\cfrac{1}{\delta_{44}-\delta_{34}\underbrace{\cfrac{\delta_{43}}{\delta_{33}-\delta_{23}\underbrace{\cfrac{\delta_{32}}{\delta_{22}-\delta_{12}\underbrace{\cfrac{\delta_{21}}{\delta_{11}}}_{\to x_{12}}}}_{\to x_{23}}}}_{\to x_{34}}}\quad\cdots\cdots(560)$$

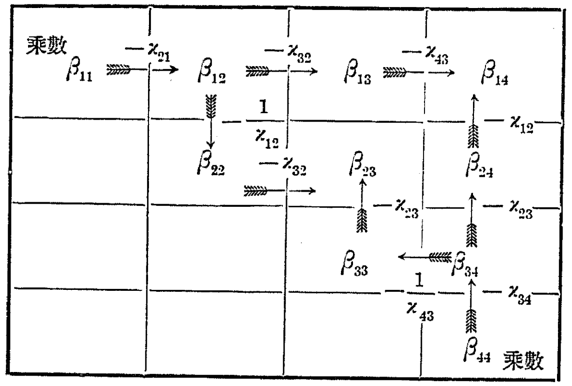
卽チ β_{44} ヲ與フル分數ノ分母ヲ點線ニテ示シタル位置ヨリ切離シ計算シテ x_{12}, x_{23}, x_{34} ガ得ラレル。同様(17)乃至(20)式ノ算式ヨリ

$$\beta_{11}=\cfrac{1}{\delta_{11}-\delta_{12}\underbrace{\cfrac{\delta_{21}}{\delta_{22}-\delta_{23}\underbrace{\cfrac{\delta_{32}}{\delta_{33}-\delta_{34}\underbrace{\cfrac{\delta_{43}}{\delta_{44}}}_{\to x_{43}}}}_{\to x_{32}}}}_{\to x_{21}}}\quad\cdots\cdots(561)$$

點線ノ如ク切離シ計算スレバ x_{43}, x_{32}, x_{21} ガ求メラレル。

β ヲ計算スルニハ先ヅ(560)及(561)式ニヨツテ β_{44} 及 β_{11} ヲ計算シテ置キ β_{44} ヨリ始メ次ニ示ス四角形ノ最右行ヲ下ヨリ上ニ順次 $-x_{34}$, $-x_{23}$ 及ビ $-x_{12}$, ヲ乘ジテ進メバ(12)乃至(15)式ニ示ス理ニヨリ

β_{34}, β_{24}, β_{14} ガ求メラレ次ニ β_{11} ヨリ始メテ四角形ノ最上段ヲ左ヨリ右ニ順次 $-x_{21}$, $-_{32}$, $-x_{43}$ ヲ乘ジツヽ進メバ β_{12}, β_{13}, β_{14} ガ求メラレ



……………(562)

最後ニ求メラルヽ β_{14} ニヨツテ計算ノ精度ヲ知ル事ヲ得。尙其他ノ β モ便宜既知ノ β ヨリ求メラレル事(562)四角形ニ示ス通リデアル。

改メテ計算ノ順序ヲ示サンニ先ヅ與ヘラレタル剛構ニ於テ三項方程式ヲ得ル如ク不靜定力ヲ決定シ斯クテ得タル基本系ニ就キテ δ_{11}, δ_{12},…… ヲ計算スル。此場合 $X_1=-1$, $X_2=-1$,…… ニ對スル彎曲力率圖 M_1, M_2,…… ヲ作圖シテ見テ其等彎曲力率圖ガ相互相重ナル部分ヲ調ベテ見ル。例ヘバ M_1 圖ト M_2 圖トガ或同一部材ノ上ニテ重ナリ更ニ M_2 圖ト M_3 圖トガ或部材ノ上ニテ重ナルモノトスレバ $\int M_1M_2ds$, $\int M_2M_3ds$ 共ニ零デナイ。然ルニ此場合 M_1 圖ト M_3 圖トハ何レノ部材ノ上ニ於テモ重ナラザルモノトセバ $\int M_1M_3ds=0$ 卽チ $\delta_{13}=0$ トナル。斯クノ如ク M_1 ト M_2, M_2 ト M_3 ノ如ク相隣接スル彎曲力率圖ハ重ナルモ M_1 ト M_3, M_1 ト M_4 或ハ M_2 ト M_4 ノ如ク相隣接セザル彎曲力率圖ハ決シテ重ナラザル場合

ニハ δ_{12}, δ_{23} ノ如キハ零ニ非ザルモ δ_{13}, δ_{14} ノ如キハ何レモ零トナル。故ニ此場合ニ得ベキ彈性方程式ハ三項方程式トナルベク玆ニ述ベル解法ヲ適用スル事ヲ得ルノデアル。扨三項方程式ヲ得タナラバ先ヅ δ ノ變位量ヲ計算シテ(1)式ノ彈性方程式ヲ立テ(560), (561)式ニ從ツテ x_{12}, x_{23},…… 及 β_{44}, β_{11} ヲ計算スル。次ニ(562)四角形ニ據ツテ β_{12}, β_{13},…… ヲ算出スレバ求ムル最後ノ結果

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \beta_{11}\delta_{10}+\beta_{12}\delta_{20}+\cdots\cdots \\ X_2 &= \beta_{21}\delta_{10}+\beta_{22}\delta_{20}+\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(563)$$

ヲ計算シ得ルノデアル。

本節ニ於テ述ベ來ツタ計算ハ其剛構ガ左右對稱トナツタトキ更ニ簡單トナルノデアツテ同時ニ其解法ニ對シテ種々ノ簡易法ヲ案出應用スル事ガ出來ル。讀者ニシテ更ニ其詳細ヲ究メントト欲スルノ士ハ次ノ書籍ヲ參考セラレタイ。

Beyer — Die Statik im Eisenbetonbau (Deutscher Beton-Verein — Eisenbetonbau, II Bd. Entwurf. u. Berechnung)

Kaufmann — Statik (Handbibliothek für Bauingenieure. IV Teil. 1Bd.)

例題第七十 Fig. 623 ニ示ス彈性支柱六本ヲ有スル對稱連續剛構ガ對稱荷重

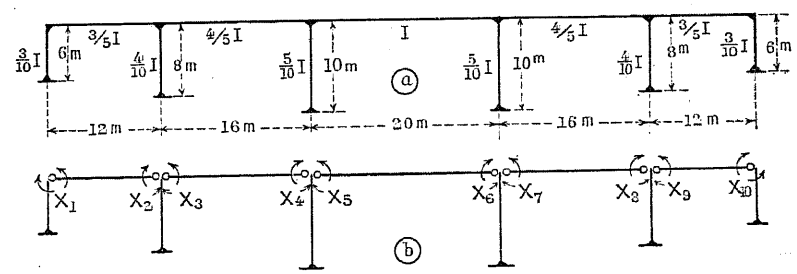


Fig. 623.

ヲ受ケタルトキニ生ズル應力ヲ求ム。

(答) 六固定支點ヲ有スル故 $3\times6-3=15$ ノ不靜定反力ヲ有ス。今⑥圖ニ示ス如キ基本系ヲ採用シ計10個ノ鉸ヲ挿入スト假定スレバ得ラレタル基本系ハ $15-10=5$ 次不靜定デアル。扨本題ヲ解クニ先チ不靜定基本系ヲ解カネバナラヌガ此基本系ニ於テハ柱ノ上端ニハ水平移動ヲ生セザルガ故ニ(剛構寸法及荷重共左右對稱ナルガ故ニ) Fig. 624 ニ示ス如ク一端固定サレ他端鉸トナレル桁ト考フルコトヲ得ルヲ以テ容易ニ計算セラレ

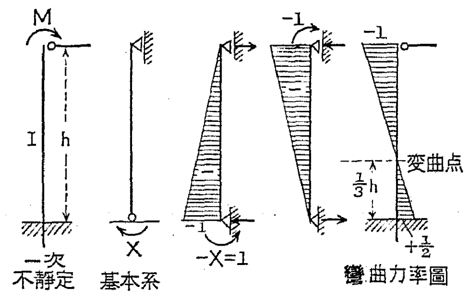


Fig. 624.

$$\delta_{11}=\frac{1}{3}\frac{h}{EI}\quad \delta_{10}=\frac{1}{6}\frac{h}{EI}\quad \therefore X=+\frac{1}{2}$$

即チ柱高ノ $\frac{1}{3}$ ノ點ニ變曲點ノ生ズル事ヲ知ル。

Fig. 623 ニ就キテ連續剛構ノ一般的ノ解答ヲ與ヘルニ先ダチ先ヅ其計算ニ必要ナ $\int M_m M_n\,ds$ ノ値ヲ Fig. 625 ニ就イテ求ムレバ

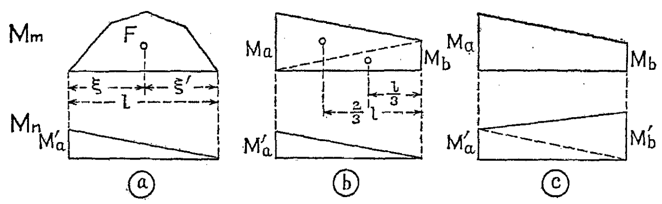


Fig. 625.

ⓐ圖 $\int M_m M_n\,ds=\frac{F\xi'}{l}M'_a$ 　コレハ面積Fヲ兩端ニテ支ヘタトキノ左支點ニ生ズル反力ト考ヘル事ガ出來ル

ⓑ圖 $\left(\frac{\frac{1}{2}M_a l\frac{2}{3}l}{l}+\frac{\frac{1}{2}M_b l\frac{l}{3}}{l}\right)M'_a=\frac{1}{6}(2M_a+M_b)M'_a l$ 　(第二十六表參照)

ⓒ圖 $\frac{1}{6}\left[(2M_a+M_b)M'_a+(M_a+2M_b)M'_b\right]l$ 　(同　上)

從ツテ桁下面及柱右側ニ張力ヲ生ズル如キ彎曲力率ヲ正ト規約スレバ Fig. 626 ニ就イテ

$$\delta_{k(k-1)}=\frac{1}{6}\frac{l_k}{EI_k}$$

$$\delta_{kk}=\frac{1}{3}\frac{l_k}{EI_k}+\frac{1}{6}\left[\left(2-\frac{1}{2}\right)+\left\{1+2\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\frac{h_k}{EI_{hk}}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{l_k}{EI_k}+\frac{1}{4}\frac{h_k}{EI_{hk}}$$

$$\delta_{k(k+1)}=-\frac{1}{4}\frac{h_k}{EI_{hk}}$$

$$\delta_{ko}=-\frac{F\xi}{l_k}\frac{1}{EI_k}$$

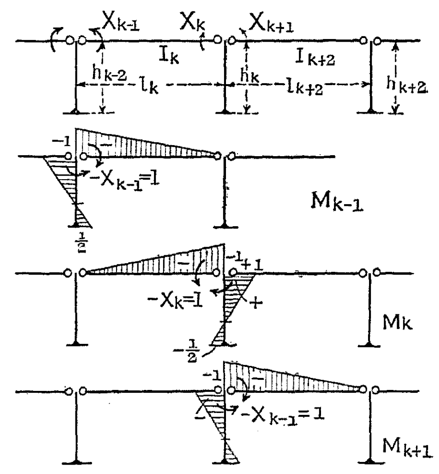


Fig. 626.

故ニ

$$\delta_{k(k-1)}X_{k-1}+\delta_{kk}X_k+\delta_{k(k+1)}X_{k+1}=\delta_{ko}$$

ニ挿入シ

$$\frac{1}{6}\frac{l_k}{EI_k}X_{k-1}+\left(\frac{1}{3}\frac{l_k}{EI_k}+\frac{1}{4}\frac{h_k}{EI_{hk}}\right)X_k-\frac{1}{4}\frac{h_k}{EI_k}X_{k+1}=-\frac{F\xi}{l_k}\frac{1}{EI_k}=\delta_{ko}$$

任意ニ或標準斷面ヲ定メテ I_c ニテ表ハシ $l_k\frac{I_c}{I_k}\equiv l'_k$ ニテ表ハスモノトセバ $\left(F\frac{I_c}{I_k}\equiv F'\right)$

$$\left.\begin{array}{l} l'_k X_{k-1}+2\left(l'_k+\frac{3}{4}h'_k\right)X_k-\frac{3}{2}h'_k X_{k+1}=-6\frac{F'\xi}{l_k}=6EI_c\delta_{ko} \\ \text{全ク同様ニ計算シテ} \\ -\frac{3}{2}h'_k X_k+2\left(l'_{k+2}+\frac{3}{4}h'_k\right)X_{k+1}+l'_{k+2}X_{k+2}=6EI_c\delta_{(k+1)o} \end{array}\right\}\cdots(564)$$

扨 Fig. 623 ニ戻ツテ中央徑間桁ノ慣性能率Iヲ標準ノ I_c ト假定セバ

$$\frac{l'_o}{l'_6}=\frac{l_2 I_c}{l_6 I_1}=\frac{12}{20}\frac{1}{0.6}=1,\quad \frac{l'_4}{l'_6}=\frac{16}{20}\frac{1}{0.8}=1,$$

$$\frac{h'_o}{l'_6}=\frac{h_o I_c}{l_6 I_{ho}}=\frac{6}{20}\frac{1}{0.3}=1,\quad \frac{h'_2}{l'_6}=\frac{8}{20}\frac{1}{0.4}=1,\quad \frac{h'_4}{l'_6}=\frac{10}{20}\frac{1}{0.5}=1$$

(564) 式全項ヲ $l'_6=l'$ ニテ割リ其第二式ニ $k=0$ ト置ケバ

$$2\left(1+\frac{3}{4}\right)X_1+X_2=\frac{6EI_c}{l'}\delta_{1,0}$$

$k=2$ ト置ケバ第一式カラ

$$X_1+2\left(1+\frac{3}{4}\right)X_2-\frac{3}{2}X_3=\frac{6EI_c}{l'}\delta_{2,0}$$

順次 $k=3,4,\cdots\cdots$ ト置キテ總計10個ノ方程式ガ得ラレル。 即チ

$$\frac{7}{2}X_1+X_2 \qquad\qquad =\frac{6EI_c}{l'}\delta_{1,0}$$

$$X_1+\frac{7}{2}X_2-\frac{3}{2}X_3 \qquad\qquad =\frac{6EI_c}{l'}\delta_{2,0}$$

$$-\frac{3}{2}X_2+\frac{7}{2}X_3+X_4 \qquad\qquad =\frac{6EI_c}{l'}\delta_{3,0}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

得タル方程式ノ係數ノミヲ列擧スレバ次ノ如クナル

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	
$\frac{7}{2}$	1									$=6\frac{EI_c}{l'}\delta_{1,0}$
1	$\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$								$6\frac{EI_c}{l'}\delta_{2,0}$
	$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	1							$6\frac{EI_c}{l'}\delta_{3,0}$
		1	$\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$						$6\frac{EI_c}{l'}\delta_{4,0}$
			$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	1					$6\frac{EI_c}{l'}\delta_{5,0}$
				1	$\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$				$6\frac{EI_c}{l'}\delta_{6,0}$
					$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	1			$6\frac{EI_c}{l'}\delta_{7,0}$
						1	$\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$		$6\frac{EI_c}{l'}\delta_{8,0}$
							$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	1	$6\frac{EI_c}{l'}\delta_{9,0}$
								1	$\frac{7}{2}$	$6\frac{EI_c}{l'}\delta_{10,0}$

コレヨリ (560) 式ニ示シタ連續分數ヲ作ツテ係數 x 及 β ヲ求メンニ先ヅ下端ヨリ始メ

$$\beta_{10,10}=\cfrac{1}{\delta_{10,10}-\delta_{9,10}\cfrac{\delta_{10,9}}{\delta_{9,9}-\delta_{8,9}\cfrac{\delta_{9,8}}{\delta_{8,8}-\cdots\cdots\cdots\cdots}}}$$

$$=\cfrac{1}{\cfrac{7}{2}-1\cdot\cfrac{1}{\cfrac{7}{2}+\cfrac{3}{2}\cdot\cfrac{-\cfrac{3}{2}}{\cfrac{7}{2}-1\cdot\cfrac{1}{\cfrac{7}{2}+\cfrac{3}{2}\cdot\cfrac{-\cfrac{3}{2}}{\cfrac{7}{2}-1\cdot\cfrac{1}{\cfrac{7}{2}+\cfrac{3}{2}\cdot\cfrac{-\cfrac{3}{2}}{\cfrac{7}{2}-1\cdot\cfrac{1}{\cfrac{7}{2}+\cfrac{3}{2}\cdot\cfrac{-\cfrac{3}{2}}{\cfrac{7}{2}-1\cdot\cfrac{1}{\cfrac{7}{2}}}}}}}}}}}$$

$\to x_{9,10}$ $\to x_{89}$ $\to x_{78}$ $\to x_{67}$ $\to x_{56}$ $\to x_{45}$ $\to x_{34}$ $\to x_{23}$ $\to x_{12}$

$$\therefore\quad x_{12}=\cfrac{1}{\cfrac{7}{2}}=\frac{2}{7} \qquad =+0{,}285\,714$$

$$x_{23}=\cfrac{-\cfrac{3}{2}}{\cfrac{7}{2}-\cfrac{2}{7}}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{14}{45}=-\frac{7}{15}=-0{,}466\,667$$

$$x_{34}=\cfrac{1}{\cfrac{7}{2}-\cfrac{3}{2}\cdot\cfrac{7}{15}}=\frac{10}{28}=+0{,}357\,143$$

$$x_{45}=\cfrac{-\cfrac{3}{2}}{\cfrac{7}{2}-\cfrac{10}{28}}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{28}{88}=-\frac{21}{44}=-0{,}477\,273$$

$$x_{56}=\cfrac{1}{\cfrac{7}{2}-\cfrac{3}{2}\cdot\cfrac{21}{44}}=\frac{88}{245}=+0.359\,184$$

$$x_{67}=\cfrac{-\cfrac{3}{2}}{\cfrac{7}{2}-\cfrac{88}{245}}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{490}{1539}=-\frac{245}{513}=-0.477\,583$$

$$x_{78}=\cfrac{1}{\cfrac{7}{2}-\cfrac{3}{2}\cdot\cfrac{245}{513}}=\frac{342}{952}=+0.359\,244$$

$$x_{89}=\cfrac{-\cfrac{3}{2}}{\cfrac{7}{2}-\cfrac{342}{952}}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{952}{2990}=-\frac{714}{1495}=-0.477\,592$$

$$\varkappa_{9,10}=\cfrac{1}{\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{714}{1495}}=\frac{2990}{8323}=+0.359\,245$$

$$\beta_{10,10}=\cfrac{1}{\frac{7}{2}-\frac{2990}{8323}}=\frac{16646}{52281}=+0.318\,395$$

同様ノ操作ヲ上端ヨリ始メ

$$\beta_{11}=\cfrac{1}{\frac{7}{2}-1\cdot\cfrac{1}{\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\cfrac{-\frac{3}{2}}{\frac{7}{2}-\cdot\cfrac{1}{\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\cfrac{-\frac{3}{2}}{\frac{7}{2}-\cdots\cdots}}}}}$$

計算ノ結果ハ

$\varkappa_{10,9}=\frac{2}{7}=+0.285\,714$ $\qquad\varkappa_{9,8}=-\frac{7}{15}=-0.466\,667$

$\varkappa_{8,7}=\frac{10}{28}=+0.357\,143$ $\qquad\varkappa_{7,6}=-\frac{21}{44}=-0.477\,273$

$\varkappa_{6,5}=\frac{88}{245}=+0.359\,184$ $\qquad\varkappa_{5,4}=-\frac{245}{513}=-0.477\,583$

$\varkappa_{4,3}=\frac{342}{952}=+0.359\,244$ $\qquad\varkappa_{3,2}=-\frac{714}{1495}=-0.477\,592$

$\varkappa_{2,1}=\frac{2990}{8323}=+0.359\,245$

$\beta_{1,1}=\frac{16646}{52281}=+0.318\,395$

斯クテβハ順次

$$\beta_{9,10}=\beta_{10,9}=-\beta_{10,10}\,\varkappa_{9,10}=-0.318\,395\times0.359\,245=-0.114\,382$$

$$\beta_{8,10}=\beta_{10,8}=-\beta_{9,10}\,\varkappa_{8,9}=+0.114\,382\times0.477\,592=-0.054\,628$$

....

$$\beta_{9,9}=-\beta_{9,10}\frac{1}{\varkappa_{10,9}}=\frac{0.114\,382}{0.285\,714}=+0.400\,337$$

....

此計算ハ次ノβ-四角形 (β-Matrix) ニ記入シテ行フガ判然シテ居ル。上欄左端ノβ_{11}及ビ右行下端ノ$\beta_{10,10}$ヨリ出發シテ(59)四角形ニ倣ヒ掛ケ算ヲ行ヒ他ノβヲ算出スルノデアル。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	+0.318 395	−0.114 382	−0.054 628	+0.019 625	+0.009 372	−0.003 366	−0.001 607	+0.000 573	+0.000 268	−0.000 076	−0.285 714 $=-\varkappa_{1,2}$
2		+0.400 337	+0.191 198	−0.068 687	−0.032 804	+0.011 783	+0.005 623	−0.002 008	−0.000 937	+0.000 268	+0.466 667 $=-\varkappa_{2,3}$
3			+0.409 709	−0.147 185	−0.070 293	+0.025 248	+0.012 050	−0.004 304	−0.002 008	+0.000 573	−0.357 143 $=-\varkappa_{3,4}$
4				+0.412 119	+0.196 821	−0.070 694	−0.033 741	+0.012 050	+0.005 623	−0.001 607	+0.477 273 $=-\varkappa_{4,5}$
5					+0.412 387	−0.148 123	−0.070 694	+0.025 248	+0.011 783	−0.003 366	−0.359 184 $=-\varkappa_{5,6}$
6						+0.412 387	+0.196 821	−0.070 293	−0.032 804	+0.009372	+0.477 583 $=-\varkappa_{6,7}$
7							+0.412 119	−0.147 185	−0.068 687	+0.019 625	−0.359 244 $=-\varkappa_{7,8}$
8								+0.409 709	+0.191 198	−0.054 628	+0.477 592 $=-\varkappa_{8,9}$
9									+0.400 337	−0.114 382	−0.359 245 $=-\varkappa_{9,10}$
10										+0.318 395	
	$-\varkappa_{2,1}$ −0.359 245	$-\varkappa_{3,2}$ +0.477 592	$-\varkappa_{4,3}$ −0.359 244	$-\varkappa_{5,4}$ +0.477 583	$-\varkappa_{6,5}$ −0.359 184	$-\varkappa_{7,6}$ +0.477 273	$-\varkappa_{8,7}$ −0.357 143	$-\varkappa_{9,8}$ +0.466 667	$-\varkappa_{10,9}$ −0.285 714		

β ノ計算ガ終レバ如何ナル荷重ヲ假定スルモ容易ニXガ計算サレルノデアツテ例ヘバ第一,第三(中央)及ビ第五徑間ニ等布荷重ガ滿載サレタトキニ生ズル彎曲力率ヲ計算センニハ $p=1\,\mathrm{ton/m}$ トシテ

$$6\frac{\mathrm{EI}_c}{l_6'}\delta_{1,0}=-6\frac{\mathrm{F}'\xi}{l_2 l_6}=-\frac{6}{l_2 l_6}\cdot\frac{2}{3}\,\frac{pl_2^2}{8}\,l_2\,\frac{l_1}{2}\,\frac{\mathrm{I}_c}{\mathrm{I}_2}=-\frac{pl_2^3}{4l_6}\,\frac{\mathrm{I}_c}{\mathrm{I}_2}$$

$$=-\frac{12^3}{4.20}\cdot\frac{5}{3}=-36$$

$$6\frac{\mathrm{EI}_c}{l_6'}\delta_{2,0}=-6\frac{\mathrm{F}'\xi}{l_2 l_6}=-36$$

$$6\frac{\mathrm{EI}_c}{l_6'}\delta_{3,0}=\quad 6\frac{\mathrm{EI}_c}{l_6'}\delta_{4,0}=0$$ (第二徑間ニハ荷重ナキヲ以テ)

$$6\frac{\mathrm{EI}_c}{l_6'}\delta_{5,0}=\quad 6\frac{\mathrm{EI}_c}{l_6'}\delta_{6,0}=-\frac{6}{l_6 l_6}\,\frac{2}{3}\,\frac{pl_6^2}{8}\,l_6\,\frac{l_6}{2}\,\frac{\mathrm{I}_c}{\mathrm{I}_6}=-\frac{pl_6^2}{4}$$

$$=-\frac{20^2}{4}=-100$$

$$6\frac{\mathrm{EI}_c}{l_6'}\delta_{7,0}=6\frac{\mathrm{EI}_c}{l_6'}\delta_{8,0}=0$$

$$6\frac{\mathrm{EI}_c}{l_6'}\delta_{9,0}=6\frac{\mathrm{EI}_c}{l_6'}\delta_{10,0}=-36$$

從ツテ(563)式ニ從ヒ

$$\mathrm{X}_1=\beta_{1,1}\delta_{1,0}+\beta_{1,2}\delta_{2,0}+\cdots\cdots\cdots+\beta_{1,n}\delta_{n,0}$$

$$=-0.318\,395\times36+0.114\,382\times36-0.009\,372\times100+0.003\,366\times100$$

$$-0.000\,268\times36+0.000\,076\times36=-7.952\,m\text{-}ton$$

同様ニシテ

$\mathrm{X}_2=-8.168$　　$\mathrm{X}_3=-0.360$　　$\mathrm{X}_4=-10.991$

$\mathrm{X}_5=-25.886$　　$\mathrm{X}_6=-25.886$　　$\mathrm{X}_7=-10.991$

$\mathrm{X}_8=-0.360$　　$\mathrm{X}_9=-8.168$　　$\mathrm{X}_{10}=-7.952$

斯クテ最後ニ得ラルベキ彎曲力率圖ハ Fig. 627 ニ示スガ如シ。

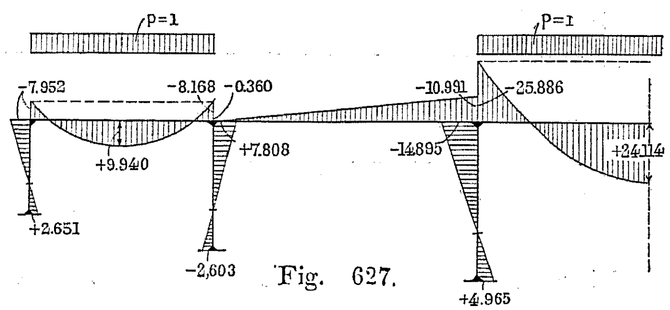


Fig. 627.

第五節　撓角撓度法 (Slope Deflection Method)

輓近建築界ニ其姿ヲ現シタ高層建築物卽チ多徑間多階層ノ不靜定構造等ノ如キ多次不靜定ノ解法トシテハ上述セル幾多ノ解法ノ何レモ不適當デアツテ殊ニ其彈性方程式ヲ立ツルルニ當リ甚シキ困難ニ遭遇スル。此不都合ヲ無クスルタメニ本法ガ用ヒラレルノデアツテ要點ハ撓角及撓度ト彎曲力率トノ一般關係式(第六章第二十二節參照)ヲ擴張シタ方程式ニ過ギナイケレドモ其適用ハ極メテ好都合ニ進メラレ得ル。玆ニ其要領ヲ説明シヤウ。

撓度ハ常ニ彎曲力率圖ニヨツテ與ヘラレルモノデアツテ

$$\delta_{\mathrm{B}}=\int\frac{\mathrm{M}x'}{\mathrm{EI}}ds=\frac{\mathrm{F}\xi'}{\mathrm{EI}}$$

$$=\frac{\text{彎曲力率圖ノB點ニ對スル靜力率}}{\mathrm{EI}}\cdots\cdots\cdots(206)\text{式參照}$$

符號ニ就イテハ普通ニ本法ニ用ヒラルヽ例ニ從ツテ次ノ如ク規約シヤウ。卽チ常ニ一ツノ節點(桁ト柱トノ交叉點)ヲ中心トシテ考ヘ此節點ニ働ク力率ガ此節點ニ對シ桁又ハ柱ヲ時針方向ニ彎曲セシムルモノ(Fig. 628參照)ヲ(+)トシ撓角 θ ハ之ニ應ジ此節點ニ於ケル彈性線切線ガ原位置ヨリ時針方向ニ向フモノヲ(+)トシ撓度 δ モ亦角 θ ヲ測リタル方向ニ此切線ヨリ移動スルモノヲ(+)ト規約

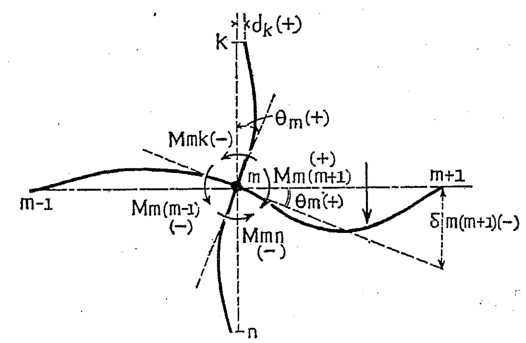


Fig. 628.

スル。

扨 Fig. 629 ニ示ス桁 AB ヲ採リ其兩端ニ力率ヲ受ケ同時ニ荷重ガ作用スルモノトシヤウ。A 端ニ受クル力率ヲ M_{AB} ニテ表ハシ B 端ニ働ク力率ヲ M_{BA} トシ且ツ荷重ニヨツテ單桁 AB ニ生ズル任意點彎曲力率ヲ M_o トス。更ニ此桁彈性線ノ A, B 點ニ於ケル撓角卽チ傾斜ノ變化ヲ θ_A 及 θ_B トシ一端 A ガ其位置ヲ變ゼズト假定シタルトキニ B 端ガ B′ ヨリ B ニ動キタルモノトシテ其變位ヲ d トス。然ルトキハ B 端ノ撓度 δ_B 卽チ A 端ニ於ケル彈性線切線カラ B 端ガ垂直ニ移動シタル距離ハ

$$\delta_B = d - l\theta_A$$

デアリ同様 A 端ガ B 端切線カラノ撓度ハ

$$\delta_A = d - l\theta_B$$

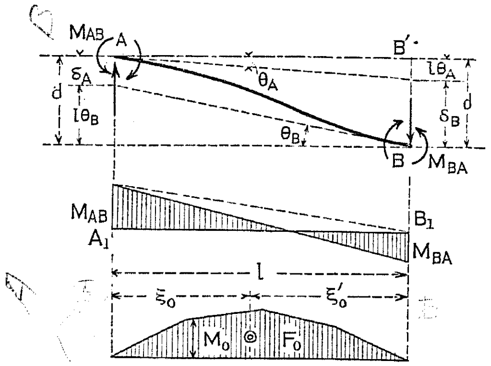


Fig. 629.

斯クテ (206) 式ヲ立テンニ Fig. 629 ニ示シタ彎曲力率 M_{AB}, M_{BA} 及 M_o ニ對シ (EI ヲ定數ト考ヘレバ)

$$\delta_B = d - l\theta_A = \frac{F\xi'}{EI} = \frac{M_{AB}}{EI}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{2l}{3} - \frac{M_{BA}}{EI}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{3} + \frac{F_o\cdot\xi_o'}{EI}$$

$$d = \frac{l^2}{6EI}(2M_{AB} - M_{BA}) + l\theta_A + \frac{F_o\xi_o'}{EI} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

F_o ハ單桁 AB ニ於テ荷重ニヨツテ生ズル彎曲力率圖面積デアリ ξ_o, ξ_o' ハ其重心點ガ左右支點カラノ距離デアル。

全ク同様ニシテ

$$\delta_A = d - l\theta_B = -\frac{M_{AB}}{EI}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{3} + \frac{M_{BA}}{EI}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{2l}{3} - \frac{F_o\cdot\xi_o}{EI}$$

$$d = \frac{l^2}{6EI}(-M_{AB} + 2M_{BA}) + l\theta_B - \frac{F_o\cdot\xi_o}{EI} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1) 及 (2) 式ヨリ M_{BA} ヲ消去セバ

$$\left.\begin{aligned} M_{AB} &= -2EK(2\theta_A + \theta_B - 3R) + \frac{2F_o}{l^2}(2l - 3\xi_o) \\ &\text{式中}\quad K \equiv \frac{I}{l},\ R \equiv \frac{d}{l}.\ \text{同様ニシテ } M_{AB} \text{ ヲ消去シ} \\ M_{BA} &= -2EK(\theta_A + 2\theta_B - 3R) + \frac{2F_o}{l^2}(l - 3\xi_o) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (565)$$

尙桁 AB 上ニ荷重ノ作用シナイ場合ニハ $F_o = 0$ トナリ

$$\left.\begin{aligned} M_{AB} &= -2EK(2\theta_A + \theta_B - 3R) \\ M_{BA} &= -2EK(\theta_A + 2\theta_B - 3R) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (566)$$

若シ又桁兩端ニ相對的移動ナキトキ卽チ $d = 0$ ナルトキ此桁ガ荷重ヲ受ケタル場合ニ對シテハ

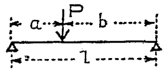
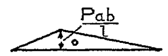
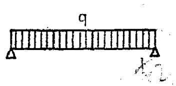
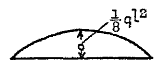
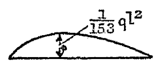
$$\left.\begin{aligned} M_{AB} &= -2EK(2\theta_A + \theta_B) + \frac{2F_o}{l^2}(2l - 3\xi_o) \\ M_{BA} &= -2EK(\theta_A + 2\theta_B) + \frac{2F_o}{l^2}(l - 3\xi_o) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (567)$$

桁 AB 上ニ荷重ヲ受ケザルトキハ $F_o = 0$, $d = 0$ トナリ

$$\left.\begin{aligned} M_{AB} &= -2EK(2\theta_A + \theta_B) \\ M_{BA} &= -2EK(\theta_A + 2\theta_B) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (568)$$

(565) 及 (567) 式最後ノ項ハ其桁ガ直接ニ受クル荷重ニ對スル項デアツテ徑間ヲ l トスル固定桁ガ此荷重ヲ受ケテ生ズル支點彎曲力率ニ外ナラヌ(第六章第三十節參照)。コレヲ $M°$ ニテ表ハスモノトセバ其種々ノ荷重狀態ニ對シ計算ノ結果ハ第二十七表ノ如クナル。

第二十七表 $M^\circ = \frac{2F_o}{l^2}(2l-3\xi_o)$ 及ビ $= \frac{2F_o}{l^2}(l-3\xi_o)$ ノ表

荷重狀態	彎曲力率圖	$\frac{2F_o}{l^2}(2l-3\xi_o)$ (左支點)	$\frac{2F_o}{l^2}(l-3\xi_o)$ (右支點)
		$\frac{Pab^2}{l^2}$	$-\frac{Pa^2b}{l^2}$
		$\frac{1}{8}Pl$	$-\frac{1}{8}Pl$
		$\frac{1}{12}ql^2$	$-\frac{1}{12}ql^2$
		$\frac{1}{20}ql^2$	$-\frac{1}{30}ql^2$

扨上ニ求メタ基本公式ヲ多徑間多階層建築ニ應用スル方法ヲ示サンニ今 Fig. 628 ニ示ス如キ或任意節點 m ヲ採リ此點ノ周圍ニ作用スル四個ノ力率 $M_{m(m-1)}$, $M_{m(m+1)}$, M_{mk} 及 M_{mn} ハ一ツノ平衡系統ヲ組織シテ居ル事ヲ要スルガ故ニ其條件 $\Sigma M=0$ ヲ式示スレバ

$$M_{m(m-1)}+M_{m(m+1)}+M_{mk}+M_{mn}=0$$

コレニ(565)式ノ値ヲ挿入シ

$$-2EK_{m(m-1)}(\theta_{m-1}+2\theta_m-3R_{m(m-1)})+M^\circ_{m(m-1)}-2EK_{m(m+1)}(2\theta_m+\theta_{m+1}$$
$$-3R_{m(m+1)})+M^\circ_{m(m+1)}-2EK_{mk}(2\theta_m+\theta_k-3R_{mk})+M^\circ_{mk}$$
$$-2EK_{mn}(\theta_n+2\theta_m-3R_{mn})+M^\circ_{mn}=0$$

コレヲ書直シ

$$K_{m(m-1)}\theta_{m-1}+2(K_{m(m-1)}+K_{m(m+1)}+K_{mk}+K_{mn})\theta_m+K_{m(m+1)}\theta_{m+1}+K_{mk}\theta_k$$
$$+K_{mn}\theta_n-3K_{m(m-1)}R_{m(m-1)}-3K_{m(m+1)}R_{m(m+1)}-3K_{mk}R_{mk}-3K_{mn}R_{mn}$$
$$=\frac{1}{2E}(M^\circ_{m(m-1)}+M^\circ_{m(m+1)}+M^\circ_{mk}+M^\circ_{mn}) \quad\cdots\cdots(569)$$

普通ノ高層剛構ニ於テハ垂直卽チ上下ノ方向ノ節點撓度ハ生ゼ

ザルガ故ニ $R_{m(m-1)}=R_{m(m+1)}=0$ ト置ク事ヲ得ベク更ニ垂直荷重ノミヲ受クル場合ニハ $M^\circ_{mk}=M^\circ_{mn}=0$ トナリ

$$K_{m(m-1)}\theta_{m-1}+2(K_{m(m-1)}+K_{m(m+1)}+K_{mk}+K_{mn})\theta_m+K_{m(m+1)}\theta_{m+1}+K_{mk}\theta_k$$
$$+K_{mn}\theta_n-3K_{mk}R_{mk}-3K_{mn}R_{mn}=\frac{1}{2E}(M^\circ_{m(m-1)}+M^\circ_{m(m+1)}) \quad\cdots\cdots(570)$$

若シ又水平荷重ノミヲ受クル場合ニハ

$$K_{m(m-1)}\theta_{m-1}+2(K_{m(m-1)}+K_{m(m+1)}+K_{mk}+K_{mn})\theta_m+K_{m(m+1)}\theta_{m+1}+K_{mk}\theta_k$$
$$+K_{mn}\theta_n-3K_{mk}R_{mk}-3K_{mn}R_{mn}=\frac{1}{2E}(M^\circ_{mk}+M^\circ_{mn}) \quad\cdots\cdots(571)$$

尤モ水平集中荷重ガ節點ニノミ作用スル場合ニハ右邊ハ悉ク零トナル。

斯クノ如キ方程式ハ各節點ニツキ一式ヅヽ卽チ節點ノ總數ト等シキダケ生ズル。一方此方程式ニ含マルヽ各節點撓角 θ ノ總數ハ一ツノ節點ニツキ一個宛ナレバ節點ノ總數ト等シクナリ尙其他ニ未知項トシテ R ガ入ツテ居ル。R ハ $\frac{d}{l}$ デアツテ部材ノ兩端ヲ連ヌル線ノ傾斜ニ外ナラズコレハ今考ヘテ居ル高層建築ニテハ一階層ニツキ一個ヅヽ(卽チ同一階ノ柱ハ何レモ等シキ傾斜ヲ爲ス)デアルカラ總計階數ト等シキ數ダケ生ズル。若シ剛構及ビ荷重共ニ左右對稱デアル場合ニハ此建築ハ左右ニ傾斜スル事ナキガ故ニ R=0 トナリ上式ハ餘程簡單トナル。

未知數 $R=\frac{d}{l}$ ハ次ノ如クシテ計算セラレル。Fig. 630 ニ或任意ノ階 r ヲ考ヘ此 r 階ニ倂立スル n 本ノ柱ヲ其上下端ニテ切斷シテ平衡條件ヲ適用シテ見ンニ r 階ノ柱ノ側面ヨリ作用スル水平荷重 w ニ對シ生ズル柱上端ノ反力(r 階ノ柱ヲ一個ノ單桁ト考ヘ)ヲ $U=\frac{1}{2}wh$ トシ r 階ヨリ上層ノ部分ニ作用スル水平荷重總和ヲ W_r トスレバ假定シタル下端斷面 $t't'$ ニ於ケル平衡條件 ΣM

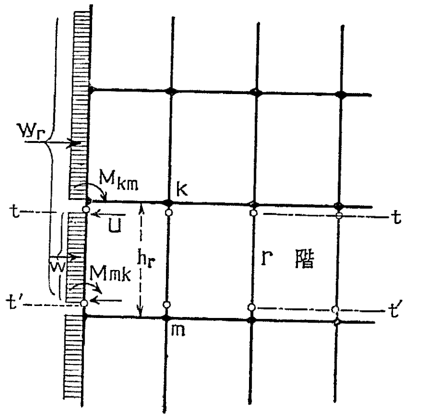


Fig.　630.

$=0$ ヨリ

$$\Sigma M_{mk}+\Sigma M_{km}-(W_r-U)h_r=0$$

卽チ

$$-2E\Sigma K_r(2\theta_m+\theta_k-3R_r)-\Sigma M^\circ_{mk}$$
$$-2E\Sigma K_r(\theta_m+2\theta_k-3R_r)-\Sigma M^\circ_{km}$$
$$-(W_r-U)h_r=0$$

R_r ハ求ムル r 階ニ於ケル撓度 $\frac{d}{h}$ ヲ表ハシ K_r ハ r 階ノ柱ニ對スル $\frac{I}{l}$ 卽 $\frac{I_h}{h_r}$ ヲ表ハス。上式ヲ書直シテ

$$6EK\Sigma_r(\theta_m+\theta_k)-12ER_r\Sigma K_r+(W_r-U)h_r+\Sigma(M^\circ_{mk}+M^\circ_{km})=0$$

コレヨリ R_r ヲ出シテ

$$R_r=\frac{1}{2\Sigma K_r}\Big[\Sigma K_r(\theta_m+\theta_k)+\frac{h_r}{6E}(W_r-U)$$
$$+\frac{1}{6E}\Sigma(M^\circ_{mk}+M^\circ_{km})\Big]\cdots\cdots\cdots\cdots(572)$$

r 階柱ニ働ク水平荷重ガ上下對稱的ナラバ $M^\circ_{mk}=-M^\circ_{km}$ トナリテ最後ノ項ハ消滅スベク

$$R_r=\frac{1}{2\Sigma K_r}\Big[\Sigma K_r(\theta_m+\theta_k)+\frac{h_r}{6E}(W_r-U)\Big]\cdots\cdots\cdots\cdots(573)$$

又 r 階柱ニ荷重作用セザルトキハ $U=0$ トナリ

$$R_r=\frac{1}{2\Sigma K_r}\Big[\Sigma K_r(\theta_m+\theta_k)+\frac{W_rh_r}{6E}\Big]\cdots\cdots\cdots\cdots(574)$$

若シ特別ノ場合トシテ r 階柱全部ガ同一寸法ヲ有スルトキニハ K_r ハ常數トナルガ故ニ $\Sigma K_r=nK_r$ ($n=$ 同一階ニ於ケ柱數) トナリ

$$R_r=\frac{1}{2n}\Big[\Sigma(\theta_m+\theta_k)+\frac{h_r}{6EK_r}(W_r-U)$$
$$+\frac{1}{6EK_r}\Sigma(M^\circ_{mk}+M^\circ_{km})\Big]\cdots\cdots\cdots\cdots(575)$$

此場合 r 階柱ニ働ク荷重ガ上下對稱的ナラバ

$$R_r=\frac{1}{2n}\Big[\Sigma(\theta_m+\theta_k)+\frac{h_r}{6EK_r}(W_r-U)\Big]\cdots\cdots\cdots\cdots(576)$$

r 階柱ニ荷重作用セザルトキハ

$$R_r=\frac{1}{2n}\Big[\Sigma(\theta_m+\theta_k)+\frac{W_rh_r}{6EK_r}\Big]\cdots\cdots\cdots\cdots(577)$$

斯クテ求メタ (572) 乃至 (577) 式ノ R_r ノ値ハ之ヲ (569) 乃至 (571) 式ニ挿入スル事ニヨツテ容易ニ R_r ヲ消去スル事ガ出來ル。從ツテ最後ニ節點數ダケノ未知數 θ ニ對シ夫レダケノ數ノ方程式ヲ得テ之レヲ解ク事ヲ得ル。求メタ θ ハ之ヲ (572) 乃至 (577) 式ニ挿入シテ R_r ヲ求メ得ベク更ニ (565) 乃至 (568) 式ヨリ部材ニ生ズル彎曲力率從ツテ應力ガ算定セラレル。

例題第七十一　Fig. 631 ニ示ス寸法ヲ有スル三徑間二階層ノ剛構アリ。對稱的垂直荷重及ビ水平荷重ヲ受ケタルトキノ各部材彎曲力率ヲ求ム。

(答) (1) **對稱的垂直荷重** (Fig. 631)

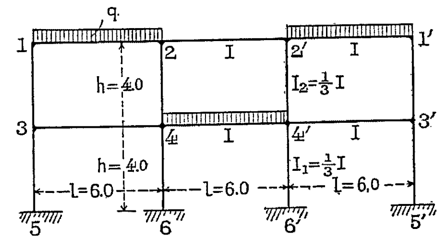


Fig.　631.

對稱的荷重ナル故剛構ノ水平變位無ク $R=0$ トナルベク最下端ハ緊定構造ナル故 $\theta=0$ デアリ左右對稱ナルガ故ニ變形モ對稱的トナルベク結局未知撓角 θ ハ 4 個ノミトナル。桁ノ慣性能率ヲ一樣ニ I トシ柱ノ慣性能率ヲ $\frac{1}{3}I$ トス。然ルトキハ桁ニ對スル $K\left(=\frac{I}{l}\right)$ ニテ (570) 式ノ全體ヲ割リ且ツ $\nu_{m(m-1)}=\frac{l_{m(m-1)}I}{l\,I_{m(m-1)}}=\frac{K}{K_{m(m-1)}}$ ヲ代入シ $R=0$ ト置ケバ

$$\frac{1}{\nu_{m(m-1)}}=\frac{K_{m(m-1)}}{K}$$

$$\frac{1}{\nu_{m(m-1)}}\theta_{m-1}+2\left(\frac{1}{\nu_{m(m-1)}}+\frac{1}{\nu_{m(m+1)}}+\frac{1}{\nu_{mk}}+\frac{1}{\nu_{mn}}\right)\theta_m+\frac{1}{\nu_{m(m+1)}}\theta_{m+1}+\frac{1}{\nu_{mk}}\theta_k+\frac{1}{\nu_{mn}}\theta_n$$
$$=\frac{1}{2EK}(M^{\circ}_{m(m-1)}+M^{\circ}_{m(m+1)})\cdots\cdots(578)$$

Fig. 631 ニ從ヒ $m=1$ ナル節點ヨリ始メテ $\frac{1}{\nu}$ ノ値ヲ求ムルニ桁ニ對シテハ $\nu=1$ ノ柱ニ對シテハ $\nu=\frac{4.0.\mathrm{I}}{6.0.\frac{1}{3}\mathrm{I}}=2$ トナル故

節　點	$\frac{1}{\nu_{m(m-1)}}$	$\frac{1}{\nu_{m(m+1)}}$	$\frac{1}{\nu_{mk}}$	$\frac{1}{\nu_{mn}}$	θ_{m-1}	θ_m	θ_{m+1}	θ_k	θ_n	$M^{\circ}_{m(m-1)}$	$M^{\circ}_{m(m+1)}$
$m=1$	0	1.0	0	0.5	0	θ_1	θ_2	0	θ_3	0	$+\frac{ql^2}{12}$
2	1.0	1.0	0	0.5	θ_1	θ_2	$-\theta_2$	0	θ_4	$-\frac{ql^2}{12}$	0
3	0	1.0	0.5	0.5	0	θ_3	θ_4	θ_1	0	0	0
4	1.0	1·0	0.5	0.5	θ_3	θ_4	$-\theta_4$	θ_2	0	0	$+\frac{ql^2}{12}$

從ツテ $m=1$ ニ相當スル第一式ハ

$$0+2\left(0+1+0+\frac{1}{2}\right)\theta_1+\theta_2+0+\frac{1}{2}\theta_3=\frac{1}{2EK}\left(0+\frac{ql^2}{12}\right)$$

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{或ハ} & 6\theta_1+2\theta_2+\theta_3 & =+\frac{ql^2}{12EK} \\ \text{同樣ニシテ} & 2\theta_1+8\theta_2\quad+\theta_4 & =-\frac{ql^2}{12EK} \\ & \theta_1\quad+8\theta_3+2\theta_4 & =0 \\ & \theta_2+2\theta_3+10\theta_4 & =+\frac{ql^2}{12EK} \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

得タ式 (1) ヲ聯立方程式トシテ解キ θ_1, θ_2, θ_3 及 θ_4 ヲ算出スレバヨイノデアル。此解法タル平凡デアルガ煩雜デ錯誤ヲ生ジ易イ。行列式法,消去法,反復法等種々ノ方法ガアルガ玆ニハ例トシテ反復法 (Method of iteration) ヲ用ヒテ解カンニ共右邊項 $\frac{ql^2}{12EK}$ ヲ θ ノ單位卽チ 1 ト假定シ次ノ如ク書直ス。

$$\left.\begin{array}{llll} (a) & \underline{\underline{6\theta_1}}+2\theta_2+\theta_3 & -1=0 & m=1 \\ (b) & 2\theta_1+\underline{\underline{8\theta_2}}\quad+\theta_4 & +1=0 & m=2 \\ (c) & \theta_1\quad+\underline{8\theta_3}+2\theta_4 & =0 & m=3 \\ (d) & \theta_2+2\theta_3+\underline{\underline{10\theta_4}} & -1=0 & m=4 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此第一式ヲ見レバ θ_1 ノ係數ガ特ニ大デアッテ之レニ比シテ他ノ項ハ小デアル故ニ今假ニ他ノ項 $2\theta_2+\theta_3$ ヲ無視スレバ $6\theta_1-1=0$ ヲ得ル。コレヨリ $\theta_1=+\frac{1}{6}=$ 約 $+0.2$ ト假定スル事ガ出來ヤウ。$\theta_1=+0.2$ ト假定シテ (2) 式ニアル未知數 θ_1 カラ $+0.2$ ダケヲ減ジタルモノヲ θ_1 ニテ表ハセバ (3) 式トナル

$$\left.\begin{array}{lll} 6(\theta_1+0.2)+2\theta_2+\theta_3\quad-1=0 & \text{卽チ} & 6\theta_1+2\theta_2+\theta_3\quad+0.2=0 \\ 2(\theta_1+0.2)+8\theta_2\quad+\theta_4\quad+1=0 & & 2\theta_1+8\theta_2\quad+\theta_4\quad+1.4=0 \\ (\theta_1+0.2)\quad+8\theta_3+2\theta_4\quad=0 & & \theta_1\quad+8\theta_3+2\theta_4\quad+0.2=0 \\ \theta_2+2\theta_3+10\theta_4-1=0 & & \theta_2+2\theta_3+10\theta_4-1.0=0 \end{array}\right\}\cdots(3)$$

(3) ノ第二式ヨリ概算トシテ $8\theta_2+1.4=0$ ト置キ $\theta_2=-0.2$ ヲ得再ビ (3) 式ノ θ_2 ヨリ -0.2 ダケ減ジタルモノヲ θ_2 ニテ表ハシ (4) 式ヲ得ル。卽チ

$$\left.\begin{array}{lll} 6\theta_1+2(\theta_2-0.2)+\theta_3\quad+0.2=0 & \text{卽チ} & 6\theta_1+2\theta_2+\theta_3\quad-0.2=0 \\ 2\theta_1+8(\theta_2-0.2)\quad+\theta_4\quad+1.4=0 & & 2\theta_1+8\theta_2\quad+\theta_4\quad-0.2=0 \\ \theta_1\quad+8\theta_3+2\theta_4\quad+0.2=0 & & \theta_1\quad+8\theta_3+2\theta_4\quad+0.2=0 \\ (\theta_2-0.2)+2\theta_3+10\theta_4-1.0=0 & & \theta_2+2\theta_3+10\theta_4-1.2=0 \end{array}\right\}\cdots(4)$$

斯クノ如キ算法ヲ順次 θ_3, θ_4, θ_1,…… ニ就キテ反復シ其都度 θ ノ實數價ヲ減少シテ行ケバ最後ニ其減ジタル數ノ和ニヨッテ充分ニ精細ナル θ_1, θ_2,…… ノ値ヲ求メ得ルノデアル。以上ノ計算ハ之ヲ次ノ如ク表記スル事ニヨッテ明瞭ニ順序立チテ進メ得ル。卽チ左欄ニ與ヘラレタ方程式係數ヲ順序ヲ變ヘ左行ヲ上段ニ右行ヲ下段ニ列記シ中央欄ニ既知數値項卽チ (2), (3), (4) 式左邊右端ノ數値ヲ併ベ最右欄ニ求メ得タル $\theta_1=+0.2$, $\theta_2=-0.2$ 等ノ數字ヲ記入スル。斯クテ上掲 (2) 乃至 (4) 式ノ計算ハ次ノ如ク表上ニテ順序ヨク排列算定セラレル。

	(a)	(b)	(c)	(d)
θ_1	6	2	1	0
θ_2	2	8	0	1
θ_3	1	0	8	2
θ_4	0	1	2	10

(a)	(b)	(c)	(d)	說　明	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
-1	$+1$	0	-1	(2) 式數値項				
$+1.2$	$+0.4$	$+0.2$	0	θ_1 ノ係數 6, 2, 1, 0 ニ $+0.2$ ヲ乘ジタルモノ	$+0.2$			
和 $+0.2$	$+1.4$	$+0.2$	-1.0	(3) 式數値項				
-0.4	-1.6	0	-0.2	θ_2 ノ係數 2, 8, 0, 1 ニ -0.2 ヲ乘ジタルモノ		-0.2		
和 -0.2	-0.2	$+0.2$	-1.2	(4) 式數値項				

(4) 式數値項ヲ得タナラバ次ニ $\theta_4=\dfrac{+1.2}{10}=+0.1$ ヲ立テコレヲ θ_4 ノ係數 0, 1, 2, 10 ニ乘ジテ中央欄ニ記入シ和ヲ求メ順次同樣ニ反復スルノデアル。其反復シタル計算ノ結果ハ次表ニ示ス如クナル。

	(a)	(b)	(c)	(d)
θ_1	6	2	1	0
θ_2	2	8	0	1
θ_3	1	0	8	2
θ_4	0	1	2	10

(a)	(b)	(c)	(d)	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
−1 +1.2	+1 +0.4	0 +0.2	−1 0	+0.2			
+0.2 −0.4	+1.4 −1.6	+0.2 0	−1.0 −0.2		−0.2		
−0.2 0	−0.2 +0.1	+0.2 +0.2	−1.2 +1.0				+0.1
−0.2 +.24	−0.1 +.08	+0.4 +.04	−0.2 0	+.04			
+.04 −.06	−.02 0	+.44 −.48	−.2 −.12			−.06	
−.02 0	−.02 +.03	−.04 +.06	−.32 +.30				+.03
−.02 +.018	+.01 +.006	+.02 +.003	+.02 0	+.003			
−.002 −.004	+.016 −.016	+.023 0	−.02 −.002		−.002		
−.006 −.003	0 0	+.023 −.024	−.022 −.006			−.003	
−.009 0	0 +.003	−.001 +.006	−.028 +.030				+.003
−.009 +.012	+.003 +.004	+.005 +.002	+.002 0	+.002			
+.003 −.0018	+.007 −.0072	+.007 0	+.002 −.0009		−.0009		
+.0012 −.0009	−.0002 0	+.007 +.0072	+.0011 −.0018			−.009	
+.0003 0	−.0002 +.00007	−.0002 +.00014	−.0007 +.0007				+.00007
+.0003 −.0003	−.00013 −.00010	−.00006 −.00005	0 0	−.00005			
0	−.00023	−.00011	0	+0.2449	−0.2029	−0.0639	+0.1331

斯クテ反復法ニテ求メタル最後ノ結果ハ

$$\theta_1=+0.2440\frac{ql^2}{12\mathrm{EK}} \qquad \theta_2=-0.2029\frac{ql^2}{12\mathrm{EK}}$$

$$\theta_3=-0.0639\frac{ql^2}{12\mathrm{EK}} \qquad \theta_4=+0.1331\frac{ql^2}{12\mathrm{EK}}$$

コレヲ (567) 及 (568) 式ニ挿入セバ $q=1\,\mathrm{ton/m}$ トシテ

$$\mathrm{M}_{12}=-2\mathrm{EK}(2\times0.2449-0.2029)\frac{ql^2}{12\mathrm{EK}}+\frac{ql^2}{12}=0.4262\frac{ql^2}{12}=+1.278\ \mathrm{ton\text{-}m}$$

$$\mathrm{M}_{21}=-2\mathrm{EK}(0.2449-2\times0.2029)\frac{ql^2}{12\mathrm{EK}}-\frac{ql^2}{12}=-2.035\ \mathrm{ton\text{-}m}$$

$$\mathrm{M}_{22'}=-2\mathrm{EK}(-2\times0.2029+0.2029)\frac{ql^2}{12\mathrm{EK}}=+1.217\ 〃$$

$$\mathrm{M}_{13}=-2\mathrm{EK}_h(-0.0639+2\times0.2449)\frac{ql^2}{12\mathrm{EK}}=-1.278\ 〃\quad\left(\frac{\mathrm{K}_h}{\mathrm{K}}=\frac{1}{2}\right)$$

$$\mathrm{M}_{31}=-2\mathrm{EK}_h(-2\times0.0639+0.2449)\frac{ql^2}{12\mathrm{EK}}=-0.351\ 〃$$

全ク同樣ノ計算ヲ爲シテ

$\mathrm{M}_{24}=+0.817$ ton-m　　$\mathrm{M}_{42}=-0.190$ ton-m

$\mathrm{M}_{34}=-0.032$ 〃　　$\mathrm{M}_{43}=-1.214$ 〃

$\mathrm{M}_{44'}=+2.201$ 〃

$\mathrm{M}_{35}=+0.383$ 〃　　$\mathrm{M}_{53}=+0.192$ 〃

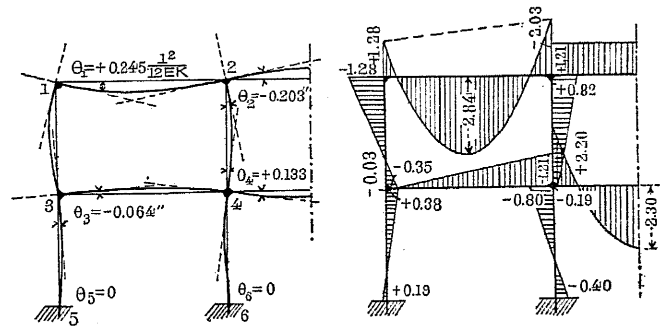
$\mathrm{M}_{46}=-0.798$ 〃　　$\mathrm{M}_{64}=-0.399$ 〃

最後ニ各節點ニ於ケル平衡條件ヨリ結果ノ驗算ヲ行ハンニ

$$\Sigma_1\mathrm{M}=\mathrm{M}_{12}+\mathrm{M}_{13}=+1.278-1.278=0,$$

$$\Sigma_2\mathrm{M}=-0.001,\quad \Sigma_3\mathrm{M}=0,\quad \Sigma_4\mathrm{M}=-0.001.$$

Fig. 632 ハ得タル結果ヨリ作ツタ變形圖及ビ彎曲力率圖デアル。



ⓐ　Fig. 632.　ⓑ

(2) 端柱ニ働ク水平等布荷重(風壓)

水平荷重ヲ受ケタ場合モ前同樣ニ解キ得ルノデアルガ唯此場合ハ左右對稱デナイガ故ニ求ムル節點撓角 θ ハ 8 個トナリ聯立方程式ガ 8 式トナ

ツテ計算ガ厄介トナル。斯クノ如キ場合ニハ次ノ解法ニ據リ未知撓角ヲ半減シ4個トシテ行フ方ガ餘程計算ガ簡略トナル。

Fig. 633 ⓐ ニ示ス如ク水平荷重$2q$ヲ左端柱ニ受クル場合ニハ之ヲ分解シテⓑ及ⓒ圖ニ示ス二種ノ荷重ノ和トシテ計算セラレ得ルノデアッテⓑ圖ハ左右ノ兩端柱ニqナル荷重ガ何レモ外側ヨリ對稱的ニ作用スル場合ⓒ圖ハ同ジクqナル荷重ガ左端柱ニ對シテハ外側ヨリ右端柱ニ對シテハ內側ヨリ作用スル場合デアッテⓑ圖ノ荷重トⓒ圖ノ荷重トノ和ハ明カニⓐ圖トナル。扨ⓑ圖ノ場合ニ對スル變形ハ左右對稱デアッテ$\theta_1=-\theta_{1'}$, $\theta_2=-\theta_{2'}$トナルニ反シⓒ圖ノ場合ニ生ズル變形ハ剛構中心線ヲ軸トシテ正反對ノ

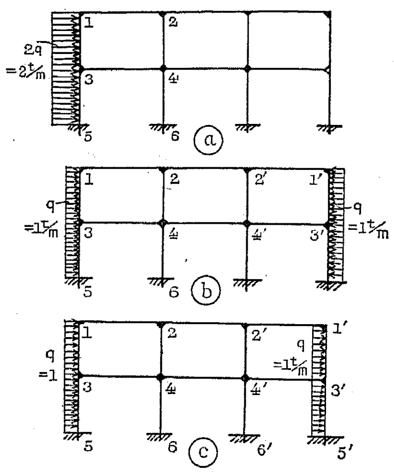


Fig. 633.

變形即チ極對稱ヲ爲スガ故ニ$\theta_1=\theta_{1'}$, $\theta_2=\theta_{2'}$トナル。何レノ場合ニアリテモ未知ノθハ4個ノミデアル事ハ注意スベキ特點デアル

(a)對稱荷重　此場合ハ對稱デアッテ節點ノ移動ナク R＝0 トナリ一般式ハ

$$\frac{1}{\nu_{m(m-1)}}\theta_{m-1}+2\left(\frac{1}{\nu_{m(m-1)}}+\frac{1}{\nu_{m(m+1)}}+\frac{1}{\nu_{mk}}+\frac{1}{\nu_{mn}}\right)\theta_m+\frac{1}{\nu_{m(m+1)}}\theta_{m+1}+\frac{1}{\nu_{mk}}\theta_k+\frac{1}{\nu_{mn}}\theta_n$$
$$=\frac{1}{2\mathrm{EK}}(\mathrm{M}^\circ_{mk}+\mathrm{M}^\circ_{mn})\cdots\cdots(579)$$

$m=1$ヨリ始メテ次ノ4式ヲ得

$$\left.\begin{aligned}6\theta_1+2\theta_2+\theta_3\qquad&=-\frac{qh^2}{12\mathrm{EK}}\\2\theta_1+8\theta_2\qquad+\theta_4&=0\\\theta_1\qquad+8\theta_3+2\theta_4&=0\\\theta_2+2\theta_3+10\theta_4&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

此聯立方程式ヲ行列式(Determinant)ニテ解ク例ヲ示サンニ右邊$\dfrac{qh^2}{12\mathrm{EK}}=1$ト置キ

$$\theta_1=\frac{\begin{vmatrix}-1&2&1&0\\0&8&0&1\\0&0&8&2\\0&1&2&10\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6&2&1&0\\2&8&0&1\\1&0&8&2\\0&1&2&10\end{vmatrix}}=\frac{-\begin{vmatrix}8&0&1\\0&8&2\\1&2&10\end{vmatrix}}{6\begin{vmatrix}8&0&1\\0&8&2\\1&2&10\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&1&0\\0&8&2\\1&2&10\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&0\\8&0&1\\1&2&10\end{vmatrix}}$$

$$=-\frac{8\begin{vmatrix}8&2\\2&10\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\8&2\end{vmatrix}}{6\left\{8\begin{vmatrix}8&2\\2&10\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\8&2\end{vmatrix}\right\}-2\left\{2\begin{vmatrix}8&2\\2&10\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\8&2\end{vmatrix}\right\}+2\left\{\begin{vmatrix}0&1\\2&10\end{vmatrix}-8\begin{vmatrix}1&0\\2&10\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\right\}}$$

$$=-\frac{600}{3209}=-0.18697$$

$$\theta_2=\frac{1}{3209}\begin{vmatrix}6&-1&1&0\\2&0&0&1\\1&0&8&2\\0&0&2&10\end{vmatrix}=+\frac{1}{3209}\begin{vmatrix}2&0&1\\1&8&2\\0&2&10\end{vmatrix}=+\frac{154}{3209}=+0.04799$$

$$\theta_3=\frac{1}{3209}\begin{vmatrix}6&2&-1&0\\2&8&0&1\\1&0&0&2\\0&1&0&10\end{vmatrix}=-\frac{1}{3209}\begin{vmatrix}2&8&1\\1&0&2\\0&1&10\end{vmatrix}=+\frac{83}{3209}=+0.02586$$

$$\theta_4=\frac{1}{3209}\begin{vmatrix}6&2&1&-1\\2&8&0&0\\1&0&8&0\\0&1&2&0\end{vmatrix}=+\frac{1}{3209}\begin{vmatrix}2&8&0\\1&0&8\\0&1&2\end{vmatrix}=-\frac{32}{3209}=-0.00997$$

(b)極對稱荷重　此場合ニハ $\mathrm{R}\neq0$. 從ッテ(576)式ニヨリコレヲ計算シテ一般式ノ中へ代入セネバナラヌ。

二階柱ニ對シ　$\mathrm{W}_2=2qh$　$\mathrm{U}=2\times\frac{1}{2}qh=qh$

一階柱ニ對シ　$\mathrm{W}_1=4qh$　$\mathrm{U}=qh$

從ッテ(576)式ヨリ$n=4$ト置キ

$$\left.\begin{aligned}r=2:\ \mathrm{R}_2&=\frac{1}{2\times4}\left[2(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)+\frac{h}{6\mathrm{EK}_2}(2qh-qh)\right]=\frac{1}{4}(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)+\frac{qh^2}{48\mathrm{EK}_2}\\r=1:\ \mathrm{R}_1&=\frac{1}{2\times4}\left[2(\theta_3+\theta_4)+\frac{h}{6\mathrm{EK}_1}(4qh-qh)\right]=\frac{1}{4}(\theta_3+\theta_4)+\frac{qh^2}{16\mathrm{EK}_1}\end{aligned}\right\}(6)$$

コレヲ(571)式ニ挿入スレバ節點1及2ニ對シテハ

$$6\theta_1+2\theta_2+\theta_3-3\left[\frac{1}{4}(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)+\frac{qh^2}{48\mathrm{EK}_h}\right]=-\frac{qh^2}{12\mathrm{EK}}$$

$$2\theta_1+12\theta_2+\theta_4-3\left[\frac{1}{4}(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)+\frac{qh^2}{48\mathrm{EK}_h}\right]=0$$

$K_h=\frac{1}{2}K$ ナレバ書直シテ

$$\left.\begin{array}{l}21\theta_1+5\theta_2+\theta_3-3\theta_4=2\dfrac{qh^2}{12EK}\\ 5\theta_1+45\theta_2-3\theta_3+\theta_4=6\dfrac{qh^2}{12EK}\\ \text{同樣ニシテ節點 3 及 4 ニ對シ}\\ \theta_1-3\theta_2+26\theta_3+2\theta_4=24\dfrac{qh^2}{12EK}\\ -3\theta_1+\theta_2+2\theta_3+50\theta_4=24\dfrac{qh^2}{12EK}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(7)$$

此聯立方程式ヲ今消去法 (Method of elimination) デ解カンニハ次ニ示ス如ク之レヲ排列計算スルヲ便トスル。

方程式番號	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	右邊 $\left(\text{單位}\frac{qh^2}{12EK}\right)$
(1)	21	5	1	−3	2
(2)	5	45	−3	1	6
(3)	1	−3	26	2	24
(4)	−3	1	2	50	24
(1)÷21 = (5)	1.00000	0.23810	0.04762	−0.14286	0.09524
(2)÷5 = (6)	1.00000	9.00000	−0.60000	0.20000	1.20000
(3) = (7)	1.00000	−3.00000	26.00000	2.00000	24.00000
(4)÷(−3) = (8)	1.00000	−0.33333	−0.66667	−16.66667	−8.00000
(5)−(6) = (9)	0	−8.76190	0.64762	−0.34286	−1.10476
(6)−(7) = (10)	0	12.00000	−26.60000	−1.80000	−22.80000
(7)−(8) = (11)	0	−2.66667	26.66667	18.66667	32.00000
(9)÷(−8.76190) = (12)		1.00000	−0.07391	0.03913	0.12609
(10)÷(12.00000) = (13)		1.00000	−2.21667	−0.15000	−1.90000
(11)÷(−2.6667) = (14)		1.00000	−10.00000	−7.00000	−12.00000
(12)−(13) = (15)		0	2.14276	0.18913	2.02609
(13)−(14) = (16)		0	7.78333	6.85000	10.10000
(15)÷2.14276 = (17)			1.00000	0.08826	0.94555
(16)÷7.78333 = (18)			1.00000	0.88009	1.29765
(17)−(18) = (19)			0	−0.79183	−0.35210
(19)÷(−0.79183) = (20)				1.00000	0.44467

即チ求メタル結果 $\theta_4=+0.44467\frac{qh^2}{12EK}$ デアル。求メタ θ_4 ヲ (17), (12), (5) 式

ニ順次挿入シテ次ノ表ヲ得ル。

方程式番號	左邊	右邊 $\left(\text{單位}\frac{qh^2}{12EK}\right)$	
(20)	$\theta_4=$		0.44467
(17)	$\theta_3+0.08826\,\theta_4=$	0.94555	
	$0.08826\times0.44467=$	0.03925	
	$\theta_3=$		0.90630
(12)	$\theta_2-0.07391\,\theta_3+0.03913\,\theta_4=$	0.12609	
	$0.07391\times0.90630=$	0.06698	
	$0.03913\times0.44467=$	0.01740	0.19307
	$\theta_2=$		0.17567
(5)	$\theta_1+0.23810\,\theta_2+0.04762\,\theta_3-0.14286\,\theta_4=$	0.09524	
	$0.23810\times0.17567=$	0.04183	
	$0.04762\times0.90630=$	0.04316	0.05341
	$0.14286\times0.44467=$	0.06353	0.01025
	$\theta_1=$		0.07378

從ツテ各階ニ於ケル撓度Rハ求メタル θ ヲ(6)式ニ挿入シテ次ノ如クナル。

$$\text{二階}\quad R_2=\frac{1}{4}(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)+\frac{qh^2}{48EK_2}=0.90011\quad\left(\text{單位}\frac{qh^2}{12EK}\right)$$

$$\text{一階}\quad R_1=\frac{1}{4}(\theta_3+\theta_4)\qquad+\frac{qh^2}{16EK_1}=1.83774\qquad〃$$

(*c*) 合成荷重——與ヘラレタル水平等布荷重(强度 $2q$)ニ對シ (*a*) 及 (*b*) ニ求メタル結果ヲ其儘代數的ニ加ヘ合セテ

$\theta_1=-0.18697+0.07378=-0.11319$　　$\theta_2=+0.04799+0.17567=+0.22366$

$\theta_{2'}=-0.04799+0.17567=+0.12768$　　$\theta_{1'}=+0.18697+0.07378=+0.26075$

$\theta_3=+0.02586+0.90630=+0.93216$　　$\theta_4=-0.00997+0.44467=+0.43470$

$\theta_{4'}=+0.00997+0.44467=+0.45464$　　$\theta_{3'}=-0.02586+0.90630=+0.88044$

$R_2=+0.90011$　　$R_1=+1.83774$

(567) 及 (568) 式ニ挿入シテ ($2q=2$ ton/m ニ對シ)

$$M_{12}=-2EK(-2\times0.11319+0.22366)\frac{qh^2}{12EK}=+0.00544\frac{qh^2}{12}=+0.0073\text{ ton-m}$$

$M_{21}=-0.8910$ ton-m　　$M_{22'}=-1.5333$　　$M_{2'2}=-1.2774$

$M_{2'1'}=-1.3763$　　$M_{1'2'}=-1.7311$

$$M_{13}=-2EK_h(-2\times0.11319+0.93216-3\times0.90011)\frac{qh^2}{12EK}-\frac{(2q)h^2}{12}=-0.0073$$

$M_{31}=+3.9323$　　$M_{24}=+2.4245$　　$M_{42}=+2.1430$

$M_{2'4'} = +2.6533$　　$M_{4'2'} = +2.2178$　　$M_{1'3'} = +1.7312$

$M_{3'1'} = +0.9049$

$M_{34} = -6.1307$　　$M_{43} = -4.8042$　　$M_{44'} = -3.5308$

$M_{4'4} = -3.5339$　　$M_{4'3'} = -4.7726$　　$M_{3'4'} = -5.9080$

$M_{35} = +2.1985$　　$M_{53} = +8.7747$　　$M_{46} = +6.1918$

$M_{64} = +6.7714$　　$M_{4'6'} = +6.1386$　　$M_{6'4'} = +6.7448$

$M_{3'5'} = +5.0031$　　$M_{5'3'} = +6.1770$

Fig. 634 ニ此場合ニ對スル剛構ノ變形圖ヲ示シ Fig. 635 ニ同ジク彎曲力率圖ヲ示ス。荷重ガ q ニ非ズシテ $2q = 2$ ton/m ナル事ニ注意ヲ要ス。

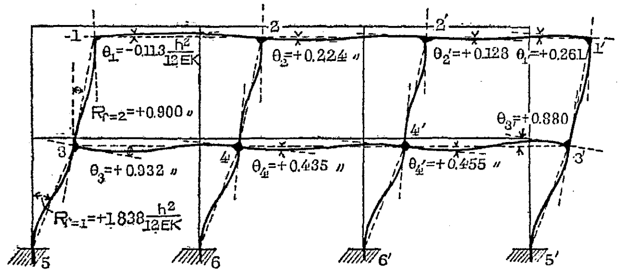


Fig. 634.

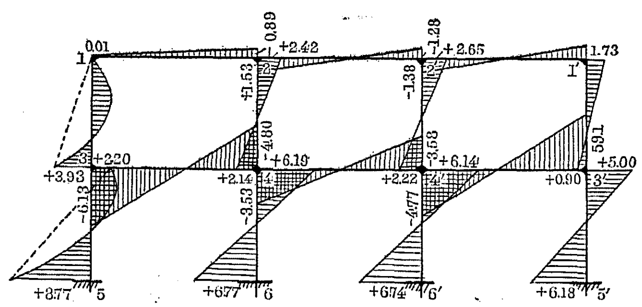


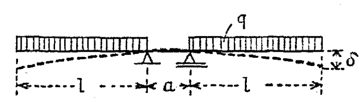
Fig. 635.

問 題 集 第 十 六

(1) 等布荷重ヲ受クル單桁任意點ノ撓度ヲ求ム。　(答) $\delta = \dfrac{qxx'(l^2+xx')}{24EI}$

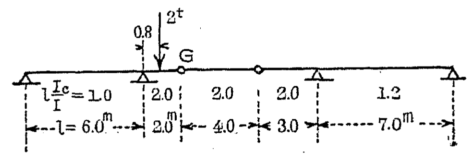
(2) 中心荷重ヲ受クル固定桁任意點ノ撓度ヲ求ム。　(答) $\delta = \dfrac{Plx(3x'-x)}{48EIx'}$

(3) 圖示ノ廻旋橋ガ廻旋セルトキ最危險荷重ヲ受ケテ生ズル自由端ノ支點ニ對スル撓度ヲ求ム。　(答) $\delta = \dfrac{ql^3}{8EI}(l+2a)$



(4) 圖示ノ如キ荷重ヲ受ケタル「ゲルバー」桁橋ノ鉸 G ニ生ズル相對的偏角ヲ求ム。　但 E = 2,000,000 kg/cm², I_c = 10 000 cm⁴ トス。

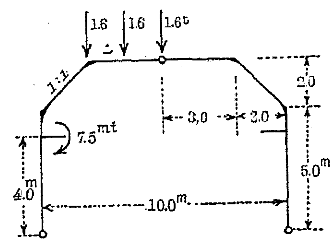
(答) 1°35′



(5) 三鉸剛構圖示ノ如キ二種ノ荷重ヲ受ク。

其夫々ニ對シ頂鉸ニ生ズベキ角變位ヲ求ム。

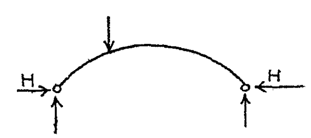
但 $l\dfrac{I_c}{I}$ ノ値柱ニ對シ 1,0 傾斜材 1,5 水平桁 1,2 トス。　(答) $EI_c\tau = -35.67$ 及 -4.11 t-m².



(6) 連續桁ノ奇數番目ノ全徑間ニ等布荷重ヲ受ケタルトキノ支點彎曲力率ハ偶數番目ノ全徑間ニ等布荷重ヲ受ケタルトキノモノニ等シキ事ヲ證セヨ。

(7) 二鉸拱 (Two-hinged arch) ニ生ズル支點水平反力ハ次式ニテ與ヘラルヽ事ヲ證セヨ。

$$H = \frac{\int \frac{Mm}{EI} ds}{\int \frac{m^2}{EI} ds}$$

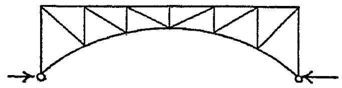


式中　M = 與ヘラレタル荷重ニヨリ同一徑間ノ桁ニ生ズル彎曲力率

m = 水平反力 1 ガ作用スルトキノ彎曲力率。

(8) 二鉸構拱 (Two-hinged braced arch) ノ支點水平反力ハ次式ニテ與ヘラルヽ事ヲ證セヨ。

$$H=\frac{\Sigma S_0 S_1 \frac{F_c}{F} s + E F_c \Sigma S_1 \alpha t s}{\Sigma S_1^2 \frac{F_c}{F} s}$$



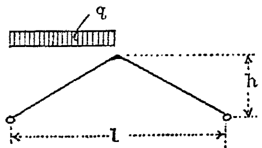
式中　S_0＝荷重ニヨル任意部材應力

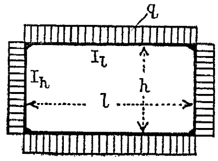
S_1＝支點反力１ニヨル任意部材應力。

(9)　撓角撓度法ヲ用ヒテ「カステリアノ」定理ヲ證明セヨ。

(10)　撓角撓度法ヲ用ヒ第二十五表ニ示シタル剛構ニ生ズル彎曲力率ヲ驗セヨ。

(11)　次ニ示ス剛構ニ生ズル彎曲力率ヲ求ム。





(答)　隅點ニテ　$-\frac{ql^2}{64}$;　$-\frac{q}{12}\frac{l^2+h^2\nu}{1+\nu}$,　$\nu=\frac{I_l}{I_h}\frac{h}{l}$.

(12)　例題第七十 (Fig. 623) ヲ撓角撓度法ニヨリテ解ケ。

(13)　第十一章第六節 (488) 式ニ示シタル剛構ノ近似的解式ヲ誘導セヨ。但シ活死重ガ一徑間ノミニ働クトキヲ假定ス。