第十三章　變形ニヨル仕事ノ量

(Work Done by Deformation)

第一節　變形ニヨル仕事ノ量

仕事(Work)ノ量ハ力ト其力ノ働イタ働程(Pass)トノ積ヲ以テ表ハサレ其力ト働程トガ同方向ナリヤ又ハ反對ノ方向ナリヤニヨツテ正トナリ又負トモナル。一般ニ外力ガ構造物ニ作用スルトキニハ彈性變形ヲ生ズルト同時ニ其構造物ニ働ク外力ト其爲メニ呼起サレタ內力トガ何レモ其力ノ働ク働程ニ於テ仕事ヲ爲スノデアツテ例ヘバ結構ノ如キ一ツノ彈性體ニ於テ之レニ働ク外力(卽荷重ト反力)ガ互ニ平衡ヲ保ツ時ニハ外力ノ爲ス仕事ト其外力ニ因ツテ生ズル變形ニ抵抗スル應力卽チ內應力ノ爲ス仕事トノ間ニ或平衡ガ成立スルノデアツテ斯クノ如キ狀態ニ至ル迄其構造物ハ變形ヲ增加スルモノデアル。而シテ外力ノ作用點(結構接合點)ノ移動ニヨツテ外力ハ正ノ仕事ヲ爲シ內力ハコレニ反對シタ負ノ仕事ヲ爲シ此外力ニ因ル正ノ仕事ハ最初ハ內力ニ因ル負ノ仕事ヨリ大デアルガ故ニ其差ニ相當スルダケガ接合點ノ移動トナツテ表ハレルノデアル。然ルニ平衡ノ保タレタ瞬間ニ於テ或ハ其極微時間 dt 前カラ正負仕事ノ量ハ互ニ相等シクナリ互ニ消失スルニ到ル。

斯クノ如キ前提カラ外力ノ仕事卽チ外働(External work)ハ內力ノ仕事卽チ內働(Internal work)ニ等シイトシテ種々ノ問題ヲ解決シ得ルノデアツテ撓度ノ算定,不靜定構造物ノ解法ニ應用シテ非

常ニ簡便ナ結果ガ得ラレル。

今Pナル外力ノ爲メニ構造物ガ變形シテ生ズル働程ヲΔlトシS_pヲ一般ニ內應力トシ此內應力ニ相當シテ構造物ニ生ズル伸縮,扭レ,彎曲等ノ働程ヲΔsトセバ

$$\Sigma P.\Delta l = \Sigma S_p.\Delta s$$

或ハ

$$A_e = A_i \quad \cdots\cdots(508)$$

式中 A_e＝外力ノ爲ス仕事ノ總量, A_i＝內力ノ爲ス仕事ノ總量

玆ニ說明スル外力ハ常ニ0カラ徐々ニ其値Pニ等變的ニ增加スルモノト假定シ從ツテ內部ニ起ル應力モ亦同樣ニ同一ノ步調ヲ以テ變化スルモノト假定ス。故ニ力ノ增加ニ對スル極微時間dt間ノ內外力ノ仕事ノ量ハ相等シイト假定ス。

外力ガ減退シ從ツテ內力モ亦消去サレテ構造物ガ其變形ヲ囘復シテ原形ニ復スル場合其現象ニ伴ツテ內力ハ正ノ仕事ヲ爲シ外力ハ負ノ仕事ヲ爲スノデアル。

第二節 張力或ハ壓力ニヨル仕事ノ量

Fig. 588ニ示ス壔體ハ長l斷面積Fヲ有スルモノトシ是ニ働ク荷重Pハ0ヨリ徐々ニPニ達スル場合或任意瞬間ニ於ケル壔體內部ノ應力ハ其時壔體ニ働ク外力P_xニ等シカルベキガ故ニ

$$\sigma_x.F = P_x \quad \cdots\cdots(i)$$

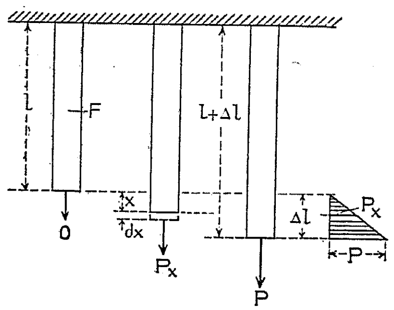


Fig. 588.

此瞬間迄ニ起ツタ長サノ變化ヲxトシ橫縮ノ影響ヲ無視スルトキ更ニdxダケ長サノ變化ヲ增加シタニ相當スル仕事ノ量ハ

$$dA_i = -\sigma_x F.dx \quad \cdots\cdots(ii)$$

同時ニ此變形ニ伴ヒ外力ノ爲ス仕事ハ

$$dA_e = P_x.dx \quad \cdots\cdots(iii)$$

而シテ一般ニ $\Delta l = \frac{\sigma}{E} l$ デアル故ニ

$$x = \frac{\sigma_x}{E} l \quad \cdots\cdots(iv)$$

$$dx = \frac{d\sigma_x}{E} l$$

此値ヲ(ii)式ノdxニ適用シ

$$dA_i = -\sigma_x.F.\frac{d\sigma_x}{E} l \quad \cdots\cdots(v)$$

而シテ應力σ_xハ0カラσニ徐々ニ增加スル故ニ內力ニヨル仕事ノ量ハ次ノ如ク書キ表ハサレル

$$A_i = \int dA_i = -\frac{Fl}{E}\int_0^{\sigma} \sigma_x.d\sigma_x$$

玆ニ $Fl = V$ ＝容積トセバ

$$A_i = -\frac{Fl}{E}\frac{\sigma^2}{2} = -\frac{V\sigma^2}{2E} \quad \cdots\cdots(509)$$

更ニ外力ニヨツテ爲サレタ仕事ノ量ヲ求メンタメニ(i)式ト(iv)式トカラ

$$x = \frac{\sigma_x}{E} l = \frac{P_x}{F}\frac{l}{E} \quad \cdots\cdots(vi)$$

$$dx = \frac{l}{EF} dP_x$$

故ニ(iii)式ヨリ

$$dA_e = P_x.dx = +P_x.\frac{l}{EF} dP_x \quad \cdots\cdots(vii)$$

而シテ外力ハ0カラP迄徐々ニ增加スルノデアルカラ外力ニヨル仕事ノ量ハ

$$\left.\begin{aligned} A_e &= \int dA_e = \frac{l}{EF}\int_0^P P_x . dP_x \\ &= \frac{P^2 l}{2EF} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(viii)}$$

コノPナル外力ニヨツテ生ズル變形xノ最大値ヲΔlトセバ(vi)式ニ於テ　$x=\Delta l,\ P_x=P$　ト置イテ

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ix)}$$

$$\therefore\quad A_e = \frac{1}{2}P.\Delta l \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(510)$$

前ニ得タ(509)式カラ伸長ニ屬スル仕事ハ容積Vニノミ關係スル事ヲ知ル。從ツテ長クテ細イ斷面ノモノモ短クテ太イ斷面ノモノデモ容積サヘ等シケレバ應力σヲ生ズル爲ニ要スル仕事ノ量ハ相等シ。

更ニ內働ト外働トノ絕對値ハ相等シキヲ要スル故ニ

$$\frac{V\sigma^2}{2E} = \frac{P.\Delta l}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(x)}$$

コノ結果ヲ圖示シテFig. 589ヲ得ル。

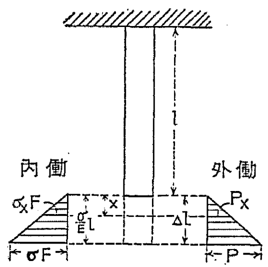


Fig. 589.

一般ニ內應力ニヨル仕事ヲ彈復働(Resilience)ト云フガ故ニ(x)式ノ關係ハ之ヲ

彈復働ハ外働ニ等シ

ト云フ事ガ出來ル。而シテ彈性限度ニ於ケル單位應力ヲσ_{elas}ニテ表ハセバ單位容積ニ就イテ內力ノ爲ス仕事ノ量ハ

$$E_R = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2_{elas}}{E} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(511)$$

コノE_Rヲ其材料ノ彈復働係數(Modulus of resilience)ト云フ。

急激負荷ノ影響(Effect of Suddenly Applied Load)

首題ノ意ハ始カラ終マデ同ジ强度ヲ以テ作用スル如キ荷重ヲ云フ。今

σ_o及Δl_o＝徐々ニ加ヘタ荷重ニヨル應力及變形

$$\sigma_o = \frac{Q}{F},\qquad \Delta l_o = \frac{Q}{F}\,\frac{l}{E}$$

式中Qハ徐々ニ加ヘラレタル荷重ト考フ。更ニ

σ及Δl＝急激ニ加ヘタ荷重ニヨル應力及變形

トスレバ

$$\sigma > \sigma_o,\qquad \Delta l > \Delta l_o$$

ナル事ハ想像スルニ難クナイ。

扨Qナル荷重ガ急激ニ加ヘラレタ時Qノ爲ス外働ハ

$$A_e = Q.\Delta l$$

デアツテ矩形デ表ハサレル。

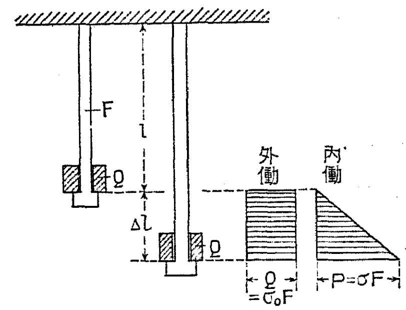


Fig. 590.

一方內力ノ爲ス働程ハΔlデアルガ若シ其壞體ガ完全彈性體デアレバ其應力ハ變形ニ比例シテ徐々ニ增加スルガ故ニ其仕事ハ三角形デ表ハサレ

$$A_i = -\frac{V\sigma^2}{2E} = -\frac{P}{2}.\Delta l \qquad (P=\sigma F)$$

此內外働ノ絕對値ヲ等シク置キ

$$\frac{1}{2}\sigma F.\Delta l = Q.\Delta l.$$

$$\therefore\quad \sigma = 2\frac{Q}{F} = 2\sigma_o \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(512)$$

又一方變形量ハ

$$\Delta l_o = \frac{Ql}{FE} = \sigma_o \frac{l}{E} = \frac{1}{2}\sigma\frac{l}{E} = \frac{1}{2}\Delta l$$

$$\therefore \quad \Delta l = 2\Delta l_o \quad \cdots\cdots(513)$$

此式ニ據レバ急激ニ加ヘタ荷重ハ徐々ニ均等的ニ增加作用セシメタ等量ノ荷重ニ比シテ二倍大ノ應力ト二倍大ノ變形トヲ生ズル事ヲ知ル。此事實ハ實際ニ於テモ認メ得ラル丶現象デアッテ Fig. 591 ニ示ス如ク急激ニ荷重Qヲ作用セシメタトキ壔體ノ端ハ $2\Delta l_o$ ダケ動キ其爲メニ應力ハ $2\sigma_o$ トナル。卽チ全應力デ云ヘバ 2Q トナルノデアル。然ルニ荷重ハ Q デアルカラ合成力ハ Q−2Q＝−Q トナリ Q ダケノ力ガ壔體ノ端ヲ後方卽チ上方ヘ押シ上ゲントスル傾向ヲ有ス。斯クノ如クニシテ何回カノ振動ヲ反復シタル後靜荷重 Q ニヨリテ生ズルト同一ノ變形 Δl_o デ靜止スルニ至ル。

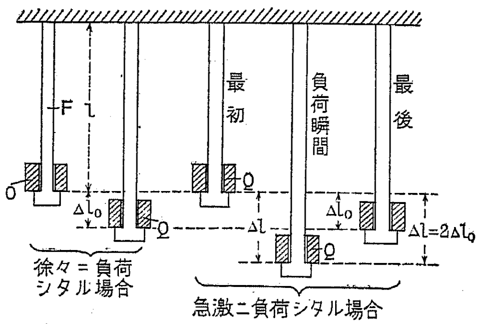


Fig. 591.

衝擊ノ影響 (Effect of Impact)

衝擊 (Impact or Shock) トハ荷重ガ或高サ h ダケ落下シテ壔體ニ作用スル如ク配置サレタ場合デアル。今

σ ＝最大應力

Δl ＝壔體ノ最大變形

トスレバ外力 Q ノ爲ス仕事ハ Q ガ全强度ヲ以テ働程 $h+\Delta l$ ダケ

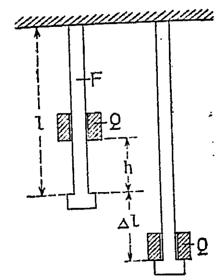


Fig. 592.

動クノデアルカラ外働ハ明カニ

$$Q(h+\Delta l)$$

デアリ更ニ內應力ニヨル仕事ハ

$$\frac{V\sigma^2}{2E}$$

デアッテ此二ツガ等シクナケレバナラヌ。卽チ

$$Q(h+\Delta l) = \frac{V\sigma^2}{2E}$$

然ルニ $\Delta l = \sigma\frac{l}{E}$ デアル故ニ

$$\frac{V\sigma^2}{2E} = Qh + \frac{Q\sigma l}{E}$$

$$\therefore \quad \sigma = \frac{Ql}{V} \pm \sqrt{\frac{Q^2l^2}{V^2} + \frac{2QhE}{V}}$$

$V = Fl,\ \frac{Q}{F} = \sigma_o,\ \frac{Q}{V} = \frac{\sigma_o}{l}$ ヲ挿入シ

$$\sigma = \sigma_o + \sqrt{\sigma_o^2 + 2\sigma_o\frac{h}{l}E} \quad \cdots\cdots(514)$$

此求メタル應力ヲ用ヒテ最大變形ハ

$$\Delta l = \frac{\sigma l}{E} \quad \cdots\cdots(515)$$

以上ハ總テ張力ニ對シテノ說明デアルガ壓力ニ對シテモ全ク同樣デ何等變化ヲ見ナイ。

第三節 彎曲ニヨル仕事ノ量

(Work Done by Flexure)

彎曲ヲ受クル壔體ノ一斷面ニ於テ中立軸カラ y ノ距離ニ極微

面積 df ヲ採ツテ考ヘ其面積ノ長 dx 間ニ作ル容積ヲ dV トスレバ桁ニ働ク彎曲力率 M_x ニヨツテ生ズル直應力 $\sigma.df$ ニヨツテ爲サレル仕事ノ總量ハ應剪力ノ影響ヲ無視シテ

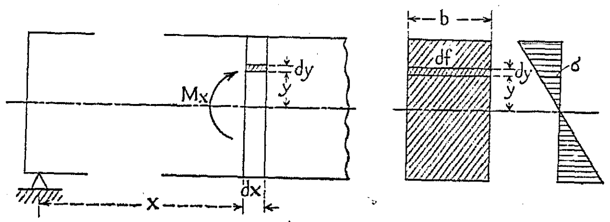


Fig. 593.

$$A_i = \frac{1}{2E}\int \sigma^2 dV$$

而シテ $\sigma=\frac{M_x}{I}y,\quad dV=df.dx$ ナルガ故ニ

$$A_i=\frac{1}{2E}\int\frac{M_x^2}{I^2}dx\int y^2 df$$

$$=\frac{1}{2E}\int\frac{M_x^2}{I}dx \quad\cdots\cdots(516)$$

若シ此斷面ガ桁全體ニ對シテ同一ナラバ

$$A_i=\frac{1}{2EI}\int M_x^2dx\cdots\cdots(517)$$

此(516)或ハ(517)式ヲ用フレバ桁ノ撓度ハ極メテ簡單ニ計算サレ得ル。即チ此內力ニヨル仕事ト桁ニ働ク外力ガ或撓度ヲ爲シテ生ズル仕事トガ相等シイトシテ解クノデアル。

例題第五十二 Fig. 594 ニ示ス肱木桁ノ荷重點ノ撓度ヲ求ム。

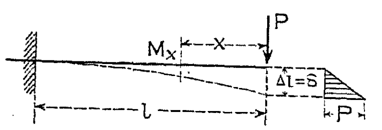


Fig. 594.

(答) 內力ニヨル仕事ハ(517)式ニヨリ

$$A_i=\frac{1}{2EI}\int M_x^2dx=\frac{1}{2EI}\int_0^l (Px)^2dx$$
$$=\frac{P^2l^3}{6EI}$$

一方外力PハOカラPニ増加シテ撓度 δ ヲ爲スガ故ニ其費シタ仕事ノ量ハ

$$A_e=\frac{1}{2}P\delta$$

斯クテ $A_e=A_i$ ト置キ

$$\frac{1}{2}P\delta=\frac{P^2l^3}{6EI}$$

$$\therefore\quad \delta=\frac{Pl^3}{3EI}\quad\cdots\cdots(182)\text{式參照}$$

例題第五十三 Fig. 595 ノ如ク桁中央ニ集中荷重ヲ受クル單桁ノ撓度ヲ求ム。

(答) $M=\frac{1}{2}Px$ デアルガ故ニ

$$A_i=2\int_0^{\frac{1}{2}l}\frac{\left(\frac{1}{2}Px\right)^2}{2EI}dx=\frac{P^2l^3}{96EI}$$

尙 $A_e=\frac{1}{2}P\delta$ デアル故ニ

$$\frac{1}{2}P\delta=\frac{1}{96}\frac{P^2l^3}{EI}$$

$$\delta=\frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EI}\quad\cdots\cdots(198)\text{式參照}$$

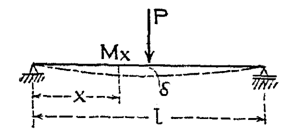


Fig. 595.

第四節 扭力ニヨル仕事ノ量

(Work Done by Torsion)

應扭剪力 (Torsional shearing stress) τ, 同變形 γ ナル長 dx, 面積 df ノ極微容積ニ於ケル內働ハ剪力 $\tau.df$ ガ $\gamma.dx$ ノ働程ノ仕事ヲ爲シ

$$dA_i=\frac{\tau.df}{2}\gamma dx$$

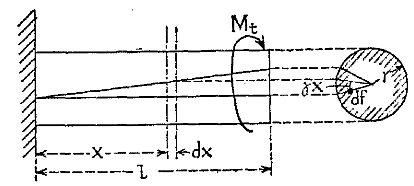


Fig. 596.

然ルニ $\gamma=\frac{\tau}{G}$, $df.dx=dV$ デアル故ニ

$$A_i=\frac{1}{2G}\int\tau^2 dV\quad\cdots\cdots(518)$$

此式ヲ用フレバ扭角ハ簡便ニ計算サレル。

例題第五十四 圓形壔體ニ於ケル扭角ヲ求ム。

(答) 任意點ノ應剪力ハ

$$\tau=\tau_1\frac{\rho}{r}$$ (τ_1 ハ外皮ニ於ケル應扭力, ρ ハ任意點ノ半徑)

ナルガ故ニ (518) 式ニ挿入シ

$$A_i=\frac{\tau^2}{2Gr^2}\iint\rho^2 df.dx=\frac{\tau_1^2 l}{2Gr^2}I_o=\frac{\tau_1^2 l}{2Gr^2}\cdot\frac{\pi r^4}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{l}{G}\tau_1^2\pi r^2$$

茲ニ $\tau_1=\frac{16}{\pi}\frac{M_t}{d^3}$ ヲ挿入シ

$$A_i=\frac{16}{\pi}\frac{M_t^2}{d^4}\frac{l}{G}$$

一方扭力率 M_t ガ作用シテ角 T ダケ扭ヂラルルモノトシテノ仕事ハ

$$A_e=\frac{1}{2}M_t.T.$$

故ニ $A_i=A_e$ ト置キ

$$\frac{1}{2}M_tT=\frac{16}{\pi}\frac{M_t^2}{d^4}\cdot\frac{l}{G}$$

$$\therefore\quad T=\frac{32}{\pi}\frac{M_t}{d^4}\frac{l}{G}$$ ……………………(414) 式參照

例題第五十五 楕圓形斷面ニ於ケル扭角ヲ求ム。

(答) 第九章 (416) 式ニヨリ

$$\tau=\frac{2}{\pi}\frac{M_t}{a^3b^3}\sqrt{a^4x^2+b^4y^2}$$

$$\therefore\quad A_i=\frac{1}{2G}\int\tau^2 dV=\frac{2M_t^2}{\pi^2Ga^6b^6}\iint(a^4x^2+b^4y^2)\,df.dx$$

而シテ

$$\int x^2 df=\frac{\pi}{4}ab^3,\quad \int y^2 df=\frac{\pi}{4}a^3b$$

$$\therefore\quad A_i=\frac{1}{2\pi}M_t^2\frac{a^2+b^2}{a^3b^3}\frac{l}{G}.$$

扭力率 M_t ニヨツテ長 l ノ壔體ノ端ヲ角 T ダケ扭ヂルニ要スル仕事 $A_e=\frac{1}{2}M_tT$ ト A_i トヲ等シク置キ

$$\frac{1}{2}M_tT=\frac{1}{2\pi}M_t^2\frac{a^2+b^2}{a^3b^3}\frac{l}{G}$$

$$T=\frac{1}{\pi}M_t\frac{a^2+b^2}{a^3b^3}\frac{l}{G}$$ ……………………第二十一表 3 參照

第五節 垂直剪力ニヨル仕事ノ量

(Work Done by Vertical Shear)

前ニ第三節ニ於テ彎曲ニヨル仕事ノ量ヲ算定シタトキ外力 P ノ爲ス仕事ハ全部桁ノ纖維ヲ伸縮スル爲メ卽チ直應力ノミニ費サルヽモノト假定シタノデアル。然シ實際ハ此直應力ニ對スル仕事ノ外ニ尙桁全體ヲ通ジテ垂直剪力ノ爲メニ辷リ (Detrusion) ヲ爲スタメノ內働ニモ費サレル。其量ヲ計算シテ見ヤウ。

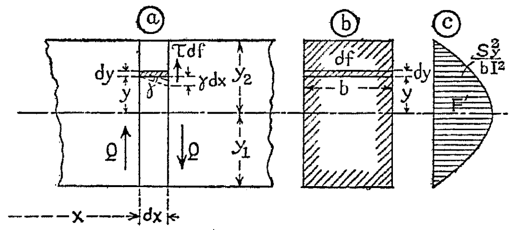


Fig. 597.

Fig. 597 ニ距離 dx ヲ隔テヽ二ツノ斷面ヲ考ヘ茲ニ df ナル極微面積ヲ採リ其高 dy, 幅 b トスル。コノ面積ガ剪力ノ爲メニ 0 カラ γ マデ徐々ニ變位サレタモノトスレバ此極微面積ノ應剪抵抗 $\tau df=\tau.b.dy$ ガ斷面ニ沿フテ $\gamma.dx$ ダケノ働程ノ仕事ヲ爲シタ事ニナリ

$$dA_i=-\frac{\tau.b.dy}{2}\gamma.dx$$ ……………………(i)

然ルニ $\gamma=\frac{\tau}{G}$ ナルガ故ニ

$$A_i=-\int_{-y_1}^{+y_2}\int_o^l\frac{b\,dy}{2G}\tau^2dx$$ ……………………(ii)

尙 $\tau=\frac{QS_y}{Ib}$ ナルガ故ニ

$$A_i=-\int_{-y_1}^{+y_2}\frac{S_y^2}{bI^2}dy\int_o^l\frac{Q^2}{2G}dx$$ ……………………(iii)

此式ノ S_y ハ長サノ第 3 次, I ハ同ジク第 4 次デアルカラ $\int\frac{S_y^2}{bI^2}dy$

ノ次數ヲ調ベルト 2×3−(1+2×4)+1＝−2 卽チ負第2次デアル。從ツテ此式ハ

$$\int \frac{S_y^2}{bI^2}\,dy = \frac{\varkappa}{F}$$

ト置ク事ガ出來ル筈デアル。同式中

$\varkappa$ ＝斷面形ニヨル係數

F ＝斷面積

$\varkappa$ ヲ求メンニハ此斷面ニ就キ $\frac{S_y^2}{bI^2}$ ヲ y ノ種々ノ値ニ對シテ計算シ Fig. 597 ⓒ ノ如ク水平縱距トシテ置ケバ玆ニ一ツノ面積ヲ得ル。此圖形全面積ヲ F′ トセバ

$$\int_{-y_1}^{+y_2} \frac{S_y}{bI^2}\,dy = F' = \frac{\varkappa}{F} \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{iv})$$

$$\therefore \quad \varkappa = FF' \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{v})$$

斯クノ如ク求メタ $\varkappa$ ヲ用ユレバ (iii) 式ハ次ノ如クナル。

$$A_i = \int_0^l \frac{\varkappa Q^2}{2GF}\,dx \cdots\cdots\cdots\cdots(518)$$

桁ノ中立軸ニ於テハ應剪力ガ最大デアルニ拘ラズ漸次上下端ノ緣維ニ行クニ從ツテ其値ヲ減少シテ遂ニ0トナルモノデアルガ故ニ之ニ因ツテ生ズル應剪變形デアル所ノ辷リノ角度モ中立軸カラ上下端緣維ニ移ルニ從ヒ最大カラ0ニ變化スル。則チ桁ノ或斷面ガ受クル辷リノ角度ハ此高サニ依リテ異ナル可變的應剪變形ノ或一種ノ平均値ノ如キ値トナルベキ筈デアツテ此關係ヲ表ハス比ガ取リモ直サズ上揭ノ係數 $\varkappa$ ニ外ナラナイ。係數 $\varkappa$ ノ値ハ斷面形ニヨツテ一定デナク其數例ヲ示セバ次ノ如シ。

矩形斷面　　$\varkappa = \frac{6}{5} = 1.2$

工字鋼 N.P. 8 (獨乙型, 桁高 8 cm)　2.4

工字鋼 N.P. 50 (同　桁高 50 cm)　2.0

第六節　桁ノ撓度—剪力ノ影響ヲ考慮スル場合

前節ニ說明シタ如ク桁ノ撓度ノ算定ニハ彎曲力率ノミナラズ剪力ノ影響モ考慮シナケレバ不精確デアル事ヲ免レナイノデアツテ特ニ桁高ニ對シテ徑間ノ小ナル時ニ然リトスル。玆ニ剪力ノ影響ヲ考ヘタ場合ノ撓度ヲ計算シテ見ヤウ。

今荷重 P ガ其作用スル點ニ δ ナル撓度ヲ生ズトセバ其荷重ガ徐々ニ加ヘラレタトキノ外働ハ

$$A_e = \frac{1}{2} P.\delta.$$

コレガ分子間ニ生ズル應力ニ因ル內働ニ等シクナケレバナラヌ。後者ハ彎曲及剪力ヨリ成リ

$$A_i = \int \frac{M^2}{2EI}\,dx + \int \frac{\varkappa Q^2}{2GF}\,dx$$

此二式ヲ等シク置キ

$$\delta = \int \frac{M^2}{PEI}\,dx + \int \frac{\varkappa Q^2}{PGF}\,dx \cdots\cdots\cdots\cdots(519)$$

式中　M＝彎曲力率

Q＝垂直剪力

此 (519) 式ヲ實際ニ應用センニハ先ヅ M 及 Q ヲ x ノ項デ表ハシテ (519) 式ニ插入シ積分スレバヨイノデアル。

例題第五十六　中心荷重 P ヲ受クル單桁ニ於テ其剪力ノ影響ヲ考ヘタルトキノ桁中點ニ於ケル撓度ヲ求ム。但桁斷面ハ矩形トス。

(答) 此場合軸壓力 N=0 ナルガ故ニ (519) 式ニ從ヒ

$$\delta=2\int_o^{\frac{l}{2}}\frac{M^2}{PEI}dx+2\int_o^{\frac{l}{2}}\frac{\varkappa Q^2}{PGF}dx$$

此式ニ於テ　$M_x=\frac{1}{2}Px,\ Q_c=\frac{1}{2}P$　ヲ挿入スレバ

$$\delta=\frac{Pl^3}{48EI}+\frac{\varkappa Pl}{4GF}$$

更ニ桁斷面ハ矩形 $b.h$ ナルガ故ニ　$I=\frac{1}{12}bh^3,\ F=bh,\ \varkappa=1.2$　ヲ用ヒテ

$$\delta=\frac{Pl^3}{4Ebh^3}+0.3\frac{Pl}{Gbh}=\frac{Pl}{4Ebh}\left(\frac{l^2}{h^2}+3\right)\cdots\cdots(520)$$

此最後ノ式ハ $G=0.4E$ ト假定シテ計算シタモノデアツテ之ハ $m=4$ ニ相當スルモノデアル。扨今此桁ノ徑間 l ヲ桁高 h ノ10倍ナリト假定スレバ此式右邊括弧ノ中ノ第一項ニ比シテ第二項ハ $10^2=100$ ニ對スル3 卽チ3%トナル。卽チ撓度ニ對スル剪力ノ影響ハ彎曲力率ノ夫レニ比シテ僅カニ3%ニ過ギナイ。普通ニ起ツテ來ル場合ニ於テハ $\frac{l}{h}$ ノ比ハ10ヨリ大デアルガ故ニ剪力ニ因ツテ生ズル影響ハ之ヲ無視シテモ差支ナイ。然シ今假ニ此比ガ $\frac{l}{h}=5$ ナル場合ヲ考ヘレバ剪力ノ影響ハ彎曲力率ノ夫レニ比シテ12%ニ及ブガ故ニ斯クノ如キ場合ニハ(198)式ヲ用フル代リニ(520)式ヲ用ヒネバナラヌ。

既ニ第六章第一節ニ於テ靜定的ナル壔體ニ任意ノ力ノ働イタ時コレヲ分解シテ直應力 N, 彎曲力率 M 及剪力 Q トナシ得ル事ヲ説明シタ。斯クノ如キ外力ヲ受クル壔體卽桁ノ或斷面ニ於テ茲ニ極微距離 dx ノ部分ヲ切除イテ考ヘ此切取ツタ間隔ニ螺旋又ハ發條裝置ヲ設備シテ軸ノ方向ニ於ケル $\varDelta dx$ ナル伸長,彎曲力率ニ因ル $\varDelta d\alpha$ ナル廻轉及ビ剪力ニ因ル $d\gamma$ ナル角變位ノ可能ナル樣ナ裝置ヲ設ケタモノトスル。斯クノ如

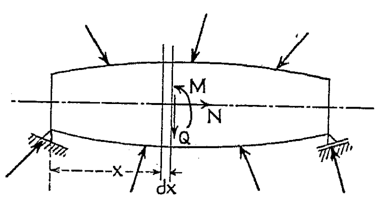


Fig. 598.

キ變形ガ起レバ其爲メニ勿論荷重 P ノ作用點ガ移動スベク若シ此變形ガ一斷面ノミデナク桁ノ上ノ多クノ斷面ニ於テ起ルナラバソノ爲メニ各荷重 P ノ作用點ガ移動スル事トナルベク今茲ニ P_1 ガ δ_1 (P_1 ノ方向ニ於テ), P_2 ガ δ_2 (同上),……ナル移動ヲ爲シタモノトスレバ假想働ノ法則 (Law of virtual work) ニ依ツテ

$$P_1\delta_1+P_2\delta_2+\cdots\cdots+P_m\delta_m+\cdots\cdots P_n.\delta_n$$
$$=\int N.\varDelta dx+\int M.\varDelta d\alpha+\int Q.d\gamma\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

ナル式ガ成立スル。

茲ニ假想働ノ法則ト云フ意ハ以上説明シタ外力ノ仕事トハ異ナリ Fig. 599 ニ就イテ例示スレバ茲ニ一ツノ荷重 P_m ガ桁ノ或點ニ働キ其爲メニ荷重ノ下ニ於テ彎曲撓下シタ量ヲ δ_m トセバ外力ニヨル仕事ハ明カニ

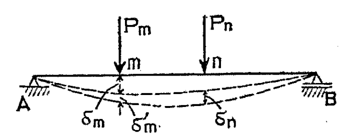


Fig. 599.

$$A_e=\frac{1}{2}P_m.\delta_m$$

斯クノ如キ荷重ヲ受クル桁ヘ更ニ他ノ事情ニヨリテ第二ノ荷重 P_n ガ働イタ爲メニ新タニ仕事ヲ爲シテ P_m ノ下デハ δ_m', P_n ノ下デハ δ_n ノ撓度ヲ爲シタモノトスレバ此場合ニ P_m ガ δ_m' ダケ動ク間ニ爲ス仕事ハ P_m ガ其全量ヲ以テ始カラ終マデ同ジ强サデ働ク故ニ

$$A_v=P_m.\delta_m'$$

斯クノ如キ仕事ハ此例ニ採リタル如ク第二ノ荷重ノ作用ニ基因シテ生ズル場合モアリ又ハ溫度ノ變化或ハ支點ノ移動ニ因ツテ

桁ガ更ニ變形シ其爲メニm點ガ撓下シテ爲ス場合モアル譯デアル。斯クノ如キ移動ガアツタ爲メニ生ズル如キ仕事ヲ假想働(Virtual work) ト云フノデアル。

扨(i)式ヲP_mニ對シテ偏微分(Partial differentiation)スレバ

$$\delta_m = \int \frac{\partial N}{\partial P_m} \Delta dx + \int \frac{\partial M}{\partial P_m} \Delta d\alpha + \int \frac{\partial Q}{\partial P_m} d\gamma \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{ii})$$

前ニ Fig. 598 ニ於テdxナル極微距離間ニ發條裝置ヲ假定シテ說明シタ變形ガ若シ其材料ノ彈性ニヨル變形ト考ヘ直スナラバ

$$\Delta dx = \frac{N}{EF} dx, \qquad \Delta d\alpha = \frac{M}{EI} dx, \qquad d\gamma = \frac{\varkappa Q}{GF} dx$$

ト置ク事ガ出來ル。此値ヲ(ii)式ニ挿入シテ

$$\delta_m = \int \frac{N}{EF} \frac{\partial N}{\partial P_m} dx + \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_m} dx$$

$$+ \int \frac{\varkappa Q}{GF} \frac{\partial Q}{\partial P_m} dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (521)$$

或ハ書直シテ

$$\delta_m = \frac{\partial}{\partial P_m} \left\{ \int \frac{N^2}{2EF} dx + \int \frac{M^2}{2EI} dx + \int \frac{\varkappa Q^2}{2GF} dx \right\} \cdots\cdots\cdots (522)$$

此(521)式括弧ノ中ノ最後ノ項ハ剪力ニヨル變形デアツテ普通實際ニ用ヒラレル樣ナ徑間ト桁高トノ關係 $\frac{l}{h}$ ニ於テハ此剪力ニヨル變形ハ彎曲力率ニ屬スルモノニ比シテ非常ニ小デアルガ故ニコレヲ無視シテモ何等不都合ヲ見ナイノデアル(例題第五十六參照)。從ツテ(522)式ハ次ノ如クナル。

$$\delta_m = \frac{\partial}{\partial P_m} \left\{ \int \frac{N^2}{2EF} dx + \int \frac{M^2}{2EI} dx \right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (523)$$

(522)及(523)式ノ括弧ノ内ハ壔體ノ變形ニヨル仕事ノ總量デア

ル。故ニコレヲ一般的ニ次ノ如ク表ハス事ガ出來ル

$$\delta_m = \frac{\partial A}{\partial P_m} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (524)$$

卽チ仕事ノ總量ヲP_mニ對シテ微分スレバ其荷重ノ變位δ_mヲ求メル事ガ出來ル。

例題第五十七　肱木桁ニ數多ノ荷重アル時其一ツノ荷重Pノ變位卽チ其作用點ノ撓度δヲ求ム。

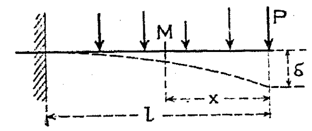


Fig. 600.

(答)　此肱木桁ニ於ケル軸壓力 N=0 デアリ任意點ノ彎曲力率ヲMトシテ剪力ノ影響ヲ無視スレバ

$$A = \int_o^l \frac{M^2}{2EI} dx$$

(524)式ニヨリ

$$\delta = \frac{\partial A}{\partial P} = \int_o^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

然ルニ彎曲力率Mハ次ノ如ク置ク事ガ出來ル

$$M = M_o + Px$$

式中　M_o=P以外ノ荷重ニヨリ生ズル彎曲力率

從ツテ

$$\frac{\partial M}{\partial P} = x$$

トナル故ニ前式ニ挿入シテ

$$\delta = \int_o^l \frac{M.x}{EI} dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (202)\text{式參照}$$

第七節　最小働ノ原理

(Principle of Least Work)

今若シ一ツノ構造物ノ或支點ガ其反力ノ方向ニ不動ナル場合ヲ考ヘルトキハ其反力ヲ荷重ト考ヘテコレガ不靜定デアル場合ニモ其支點ハ不動デアツテ δ=0 卽チ支點ニハ變位ナシトノ條

件ヲ利用シテ容易ニ其反力ノ量ヲ求メル事ガ出來ル。此場合ニ不靜定ナル反力ヲ $X_1, X_2, \cdots\cdots\cdots$ デ表ハセバソレラハ次ノ式ヲ滿足スル樣ナ量デアル事ヲ知ル。

$$\delta = \frac{\partial A}{\partial X} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (525)$$

卽チ全仕事ノ或不靜定ナル反力ニ對シテノ偏微分ハ零デアル。此 (525) 式ハ仕事 A ガ極大或ハ極小 (Maximum or Minimum) ナルベキ條件ニ外ナラナイ。卽チ X ナル反力ノ値ハ其 X ニ關シテ仕事ノ量ガ極大又ハ極小ナル如キ値ヲ持ツノデアル。然シ其極大ナリトノ說明ハ此際不適合 (Inconsistent) デアツテ極小ナリトノ條件ガ適合スルノデアル。何トナレバ若シ X ニ對シテノ仕事ガ極大ナリトセバ其 X ニ對シテハ他ノ總テノ力ガ消滅スル位ニ X ガ大トナリコレガ非常ニ大ナル仕事ニ相當スル樣ナ應力ヲ生ズル事トナツテ不合理デアルカラデアル。又純靜力學的 (Pure statically) ニ考ヘテモ仕事ニ對シテ有限ノ極大値 (Finite maximum) ハアリ得ナイ。漸次ニ增加スル X ニ對シテ漸次ニ增加スル仕事ガアルノデアルカラ極大ハアリ得ナイ。換言スレバ $\frac{\partial A}{\partial X} = 0$ ハ仕事ガ極小ナル爲メノ條件ニ外ナラナイ。卽チ

「支點ノ不靜定反力ハ最小働ニ相當スル値ヲ有ス」(A statically indeterminate reaction at support has such a value which corresponds to the minimum work done.)

以上說明シタ

$$\delta_m = \frac{\partial A}{\partial P_m} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (524) \text{式參照}$$

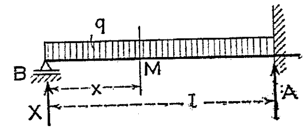
及ビ

$$\frac{\partial A}{\partial X} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (525) \text{式參照}$$

ハ所謂「**カスチリアノ**」**氏定理** (Theorem of Castigliano) トシテ知ラレテ居ルモノデアツテ (524) 式ハ撓度ノ計算ニ (525) 式ハ不靜定構造物ノ解法ニ用ヒテ極メテ肝要ナル公式デアル。是等ノ適用ニヨツテアラユル問題ヲ解決シタ計算例ハ次記書籍ニ記載サレテ居ル。

Müller-Breslau——Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, gewidmet dem Andenken an Alberto Castigliano (gest. 1885).

例題第五十八 一端緊定他端支持サルヽ桁ノ支點反力チ求ム。



Fgi. 601.

(答) 「カスチリアノ」氏第二式 $\frac{\partial A}{\partial X} = 0$ チ用ヒ B 支點反力 X チ求メントス。普通例ニ從ヒ剪力ニヨル仕事チ無視シ

$$\text{仕事} \quad A = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx$$

$$\therefore \quad \frac{\partial A}{\partial X} = \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X} dx = 0$$

EI チ定數ト考ヘレバ前式ハ

$$\int_0^l M . \frac{\partial M}{\partial X} dx = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{i})$$

然ルニ點 x ニ生ズル彎曲力率ハ

$$M = Xx - \frac{1}{2} q x^2$$

$$\therefore \quad \frac{\partial M}{\partial X} = x$$

此値チ (i) 式ニ挿入スレバ

$$\int_0^l \left(Xx - \frac{1}{2} q x^2 \right) x dx = 0$$

$$\left[\frac{Xx^3}{3} - \frac{1}{2} \frac{qx^4}{4} \right]_0^l = \frac{Xl^3}{3} - \frac{ql^4}{8} = 0$$

$$\therefore \quad X = \frac{3}{8} ql \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{第六章第二十一節(5)參照}$$

例題第五十九 三角荷重チ受クル固定桁。

(答) 此場合左支點反力 X 及 M_1 チ不靜定力トシテ

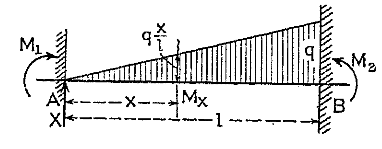


Fig. 602.

$$M_x = X.x - q\frac{x}{l}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}+M_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

(525) 式ノ最小働條件ニ於テ N＝0 ト置キ剪力ノ影響ヲ無視スレバ A 支點ガ不動不撓ノ條件カラ次ノ二式ヲ得

$$\frac{\partial A}{\partial X}=\int_o^l \frac{M_x}{EI}\,\frac{\partial M_x}{\partial X}dx=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_1}=\int_o^l \frac{M_x}{EI}\,\frac{\partial M_x}{\partial M_1}dx=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{iii})$$

(ii) 及 (iii) 式中ニアル $\frac{\partial M_x}{\partial X}$ 及 $\frac{\partial M_x}{\partial M_1}$ ヲ求メルタメニ (i) 式ヲ偏微分シテ

$$\frac{\partial M_x}{\partial X}=x, \qquad \frac{\partial M_x}{\partial M_1}=1$$

コレヲ (ii) 及 (iii) 式ニ挿入シ EI ヲ定數ト看做シテ

$$\int_o^l\left(Xx-\frac{qx^3}{6l}+M_1\right)x\,dx=\frac{Xl^3}{3}-\frac{ql^4}{30}+M_1\frac{l^2}{2}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{iv})$$

$$\int_o^l\left(Xx-\frac{qx^3}{6l}+M_1\right)dx=\frac{Xl^2}{2}-\frac{ql^3}{24}+M_1 l=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{v})$$

(iv) (v) ノ二式カラ二ツノ未知數 X 及 M_1 ガ求メラレ

$$\left.\begin{array}{l} X=\frac{3}{20}ql \\ M_1=-\frac{1}{30}ql^2 \end{array}\right\}$$ ……第六章第三十節計算例(3)参照

第八節　不靜定結構

不靜定結構ノ解法ニハ最小働ノ法則ヲ應用スルガ最モ簡便デアル。此場合ニ其未知部材ノ應力又ハ不靜定應力ヲ $X_1, X_2,\cdots\cdots$ ナル文字デ表ハスモノトセバ此結構内ニ於テ爲サレタ仕事ノ總量ハ容易ニ此 $X_1, X_2,\cdots\cdots$ ノ項デ書キ表ハシ得ルデアラウ。此構造物ガ安定ナル平衡 (Stable equilibrium) ニアルナラバ其仕事ノ總量ハ可能的最小デナケレバナラヌ。從テ其仕事ヲ未知應力ニ對シ

ヲ偏微分セバ夫々零トナラネバナラヌ。卽チ

$$\frac{\partial A}{\partial X_1}=0, \qquad \frac{\partial A}{\partial X_2}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(526)$$

斯クテ未知部材ノ數ト同數ノ方程式ガ出來コレヲ聯立方程式トシテ解ケバ未知應力 $X_1, X_2,\cdots\cdots$ ガ求メラレル。若シ部材ノ或斷面ニ於テ軸壓力 N 及彎曲力率 M ガ同時ニ働ク時ニハ此 N 及 M ヲ未知應力 X ノ項ニテ書キ表ハシコレニ

$$\frac{\partial A}{\partial X}=\int\frac{N}{EF}\,\frac{\partial N}{\partial X}dx+\int\frac{M}{EI}\,\frac{\partial M}{\partial X}dx=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(527)$$

ナル式ヲ適用スレバヨイノデアル。

例題第六十　AB 及 CD ノ垂直材アリテ BD ナル抗壓材ニテ連結セラル。側方ヨリ p ナル强度ノ水平力ヲ受ケタルトキノ抗壓材ノ應力ヲ求ム。(Fig. 603 参照)

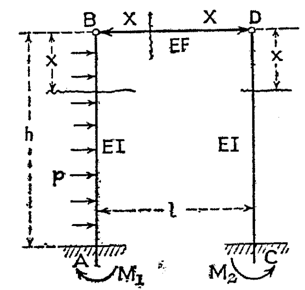


Fig. 603.

(答)　求ムル抗壓材ノ應力ヲ X トス。

垂直材 AB:　コレハ水平力 p ト BD 材カラノ横力 X トヲ受ケ軸壓力ハ無イ。從ツテ

$$N=0,\quad \frac{\partial N}{\partial X}=0,\quad M=\frac{px^2}{2}-Xx,$$

$$\frac{\partial M}{\partial X}=-x.$$

垂直材 CD:　コレハ上端ニ左カラ X ヲ受ケルノミデアルカラ $N=0,\ \frac{\partial N}{\partial x}=0,\ M=X.x,\ \frac{\partial M}{\partial X}=x.$

抗壓材 BD:　$N=X,\ \frac{\partial N}{\partial X}=1,\ M=0,\ \frac{\partial M}{\partial X}=0$

コレヲ一般式ニ挿入シ

$$\int\frac{N}{EF}\,\frac{\partial N}{\partial X}dx+\int\frac{M}{EI}\,\frac{\partial M}{\partial X}dx=0$$

$$\int_o^h\left(\frac{px^2}{2}-X.x\right)\left(-\frac{x}{EI}dx\right)+\int_o^h X.x\,\frac{x}{EI}dx+\int_o^l X\frac{1}{EF}dx=0$$

コレヲ解イテ

$$X=\frac{3}{8}\,\frac{P}{2+3\frac{I}{F}\frac{l}{h^3}}=\frac{3}{8}\,\frac{P}{1+3C\frac{I}{h^3}}$$

式中　$P = ph,\quad C = \frac{h^3}{3I} + \frac{l}{F}$

Xサヘ求メラレタナラバ支點力率ハ

$$M_1 = Xh - P\frac{h}{2} = -\frac{Ph}{8}\frac{1+12C\frac{I}{h^3}}{1+3C\frac{I}{h^3}}$$

$$M_2 = -Xh = -\frac{Ph}{8}\frac{3}{1+3C\frac{I}{h^3}}$$

以上ハ BD 部材ガ荷重ヲ受ケテ短縮スルト假定シタノデアルガ若シ此部材ノ變形ヲ無視スレバ $C = \frac{h^3}{3I}$ トナリ上ニ求メタ結果ハ次ノ如クナル。

$$X = \frac{3}{16}P,\quad M_1 = -\frac{5}{16}Ph,\quad M_2 = -\frac{3}{16}Ph.$$

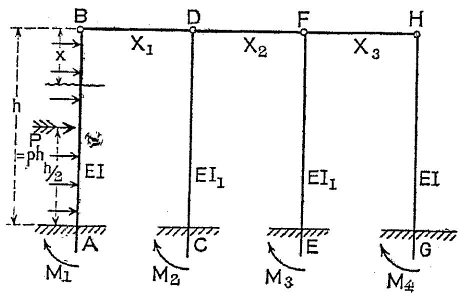


Fig. 604.

例題第六十一　Fig. 604 ニ示ス如キ結構アリ。垂直材下端ハ固定,上端ハ鉸トシ抗壓材ノ變形ヲ無視シテ其應力ヲ求ム。

(答)　BD, DF 及 FH 部材ノ應力ヲ夫々 X_1, X_2 及 X_3 トスレバ

$$\text{柱 AB:—}\quad M = \frac{px^2}{2} - X_1x,\quad \frac{\partial M}{\partial X_1} = -x,\quad \frac{\partial M}{\partial X_2} = 0,\quad \frac{\partial M}{\partial X_3} = 0$$

$$\text{柱 CD:—}\quad M = X_1x - X_2x,\quad \frac{\partial M}{\partial X_1} = x,\quad \frac{\partial M}{\partial X_2} = -x,\quad \frac{\partial M}{\partial X_3} = 0,$$

$$\text{柱 EF:—}\quad M = X_2x - X_3x,\quad \frac{\partial M}{\partial X_1} = 0,\quad \frac{\partial M}{\partial X_2} = x,\quad \frac{\partial M}{\partial X_3} = -x,$$

$$\text{柱 GH:—}\quad M = X_3x,\quad \frac{\partial M}{\partial X_1} = 0,\quad \frac{\partial M}{\partial X_2} = 0,\quad \frac{\partial M}{\partial X_3} = x.$$

最小働ノ法則ニヨリ次ノ三式ヲ得

$$1.\ \int M\frac{\partial M}{\partial X_1}\frac{dx}{EI} = 0,\qquad 2.\ \int M\frac{\partial M}{\partial X_2}\frac{dx}{EI} = 0,\qquad 3.\ \int M\frac{\partial M}{\partial X_3}\frac{dx}{EI} = 0$$

コレニ上ニ求メタ値ヲ入レ定數Eヲ乘ジテ

$$1.\ \int_o^h\left(\frac{px^2}{2} - X_1x\right)(-x)\frac{dx}{I} + \int_o^h(X_1x - X_2x)x\frac{dx}{I_1} = 0;$$

$$2.\ \int_o^h(X_1x - X_2x)(-x)\frac{dx}{I_1} + \int_o^h(X_2x - X_3x)x\frac{dx}{I_1} = 0;$$

$$3.\ \int_o^h(X_2x - X_3x)(-x)\frac{dx}{I_1} + \int_o^h(X_3x)x\frac{dx}{I} = 0.$$

此三式ヲ解イテ

$$X_1 = \frac{3}{16}P\frac{2+\frac{I}{I_1}}{1+\frac{I}{I_1}};\quad X_2 = \frac{3}{16}P;\qquad X_3 = \frac{3}{16}P\frac{\frac{I}{I_1}}{1+\frac{I}{I_1}}.$$

$$\therefore\quad M_1 = X_1h - \frac{Ph}{2} = -\frac{Ph}{16}\frac{2+5\frac{I}{I_1}}{1+\frac{I}{I_1}},$$

$$M_2 = -(X_1 - X_2)h = -\frac{3}{16}Ph\frac{2+\frac{I}{I_1}-1-\frac{I}{I_1}}{1+\frac{I}{I_1}} = -\frac{3}{16}\frac{Ph}{1+\frac{I}{I_1}},$$

$$M_3 = (X_3 - X_2)h = -\frac{3}{16}Ph\frac{\frac{I}{I_1}-1-\frac{I}{I_1}}{1+\frac{I}{I_1}} = -\frac{3}{16}Ph\frac{1}{1+\frac{I}{I_1}} = M_2,$$

$$M_4 = -X_3h = -\frac{3}{16}Ph\frac{\frac{I}{I_1}}{I+\frac{I}{I_1}}.$$

若シ $I = I_1$ ニシテ四柱ガ相等シキ慣性能率ヲ有スルトキハ

$$X_1 = \frac{9}{32}P,\qquad X_2 = \frac{6}{32}P,\qquad X_3 = \frac{3}{32}P.$$

$$M_1 = -\frac{7}{32}Ph,\quad M_2 = M_3 = -\frac{3}{32}Ph,\qquad M_4 = -\frac{3}{32}Ph.$$

第九節　剛　構 (Rigid Frame)

鐵筋混凝土構造ニ於テ屢適用サレル構造法ニ所謂剛構 (Rigid frame ; Rahmen ; Steifrahmen) ト稱セラルヽ構法ガアル。コレハ桁ト支柱トヲ剛節的 (Rigidly) ニ結合シタモノデアツテ不靜定構造ナルガ故ニ最小働ノ原理ヲ應用シテ計算ヲ行ハナケレバナラヌ。

其多次不靜定ナル場合ノ解法ハ之ヲ次章ニ讓ルコトトシ玆ニハ其簡單ナル二三ノ例ヲ示スニ止メ其各種型態ニ對スル計算ノ結果ヲ第廿五表ニ示ス。本構法ハ鐵筋混凝土ニ於テ常ニ用ヒラル丶所デアツテ其耐震的ノ價値ヲ有スル點ニ於テ推奬セラルベキモノト思ハルルガ故ニ玆ニ二三ノ參考書籍ヲ掲ゲテ讀者ニ奬ムル所以デアル。

Gehler——Der Rahmen.

von Bronneck——Biegungsfeste Rahmen.

Schlüter——Eisenbeton——Rahmen u. Gewölbe.

Kleinlogel——Rahmenformeln.

例題第六十二　二鉸矩形剛構ニ於ケル應力ヲ求ム。

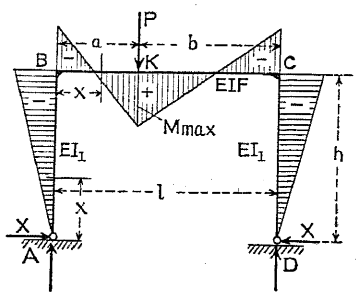


Fig. 605.

(答)　Pナル集中荷重ガ働クトキニハ其支點水平反力ヲXニテ表ハセバ

柱 AB ニ於テ

$$M=-Xx,\quad \frac{\partial M}{\partial X}=-x;$$

$$N=-A,\quad \frac{\partial N}{\partial X}=0;$$

柱 CD ニ於テ

$$M=-Xx,\quad \frac{\partial M}{\partial X}=-x;$$

$$N=-D,\quad \frac{\partial N}{\partial X}=0;$$

桁 BC ニ於テ

$$M=M_o-Xh\ (M_o\ ハ單桁ノ場合ノ彎曲力率),\quad \frac{\partial M}{\partial X}=-h;$$

$$N=-X,\quad \frac{\partial N}{\partial X}=-1.$$

求メタル數値ヲ(527)式ニ挿入シ

$$0=\int\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial X}dx+\int\frac{N}{EF}\frac{\partial N}{\partial X}dx$$

$$=2\int_o^h\frac{Xx}{EI_1}xdx-\int_o^l\frac{M_o-Xh}{EI}hdx+\int_o^l\frac{X}{EF}dx$$

$$=2X\frac{h^3}{3EI_1}-\frac{h}{EI}\int_o^l M_o dx+X\frac{h^2 l}{EI}+X\frac{l}{EF}.$$

玆ニ與ヘラレタル集中荷重ニ對シテハ

$$\int_o^l M_o dx=\frac{Pab}{l}\frac{l}{2}=\frac{Pab}{2}\quad ナルヲ以テ$$

$$2X\frac{h^3}{3EI_1}-\frac{h}{EI}\frac{Pab}{2}+X\frac{h^2 l}{EI}+X\frac{l}{EF}=0$$

從ツテ

$$X=\frac{Pab}{2hl\left(1+\frac{2}{3}\frac{Ih}{I_1 l}+\frac{I}{F}\frac{1}{h^2}\right)}$$

今　$\frac{I}{I_1}\frac{h}{l}=\nu,\quad \frac{I}{F}=r^2$ (r = 環動半徑) トセバ

$$X=\frac{Pab}{2hl\left(1+\frac{2}{3}\nu+\frac{r^2}{h^2}\right)}\quad\cdots\cdots(528)$$

分母最後ノ項 $\frac{r^2}{h^2}$ ハ軸壓力Xヨリ受クル影響デアツテ他ノ項卽チ彎曲力率ヨリ受クルモノニ比シテ極メテ小ナルガ故ニ普通之ヲ無視シテ差支ナク此場合ニハ

$$X=\frac{Pab}{2hl\left(1+\frac{2}{3}\nu\right)}\quad\cdots\cdots(529)$$

同様ニ多數ノ集中荷重ヲ有スル場合ニハ

$$X=\frac{\Sigma Pab}{2hl\left(1+\frac{2}{3}\nu\right)}\quad\cdots\cdots(530)$$

倘若シ等布荷重 q ノ作用スルトキニハ　$P=qdx,\ a=x,\ b=l-x$　ト置キ

$$X=\int\frac{qx(l-x)}{2hl\left(1+\frac{2}{3}\nu\right)}dx$$

全徑間等布荷重ヲ受クル場合ニハ $0-l$ ノ範圍ニ積分シテ

$$X=\frac{ql^2}{12h\left(1+\frac{2}{3}\nu\right)}\quad\cdots\cdots(531)$$

Xヲ求メタナラバ部材各點ノ彎曲力率ハ容易ニ求メラレ得ベク一個ノ集中荷重ヲ有スル場合ナラバ

$$M_B=M_C=-Xh=-\frac{Pab}{2l\left(1+\frac{2}{3}\nu\right)}\quad\cdots\cdots(532)$$

桁 BC 内ノ一點ニ於ケル力率ハ

$$\left.\begin{array}{ll} a\text{ノ部分} & M_x = \dfrac{Pb}{l}x + M_B \\ b\text{ノ部分} & M_x = \dfrac{Pa}{l}x + M_C \quad (x\text{ハ C ヨリノ距離}) \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots(533)$$

荷重下ニ生ズル最大彎曲力率ハ

$$M_{max} = \frac{Pab}{2l} \cdot \frac{\left(1+\frac{4}{3}\nu\right)}{\left(1+\frac{2}{3}\nu\right)} \quad \cdots\cdots\cdots(534)$$

Fig. 605 ニ示スハ此場合ノ彎曲力率圖デアル。

Fig. 606 ニ示ス如キ水平荷重 W ノ作用シタルトキモ全ク同様ニ解ク事ヲ得ルノデアツテ A 支點ノ水平反力ヲ未知力 X トスレバ D 點ノ水平反力ハ W−X トナルベク垂直反力ハ

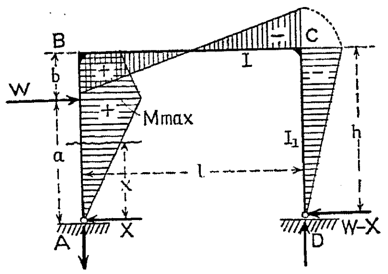


Fig. 606.

$$-A = D = \frac{W.a}{l}$$

反力ノ正ノ方向ヲ圖示ノ如シト前提シテ計算ヲ進メンニ

柱 AB: a ノ部分　$M = Xx, \quad \dfrac{\partial M}{\partial X} = x;$

b ノ部分　$M = Xx - W(x-a), \quad \dfrac{\partial M}{\partial X} = x;$

柱　CD:　$M = -(W-X)x, \quad \dfrac{\partial M}{\partial X} = x;$

桁　BC:　$M = Xh - Ax - W(h-a), \quad \dfrac{\partial M}{\partial X} = h;$

軸壓力ノ影響ヲ無視シ

$$\int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial X}dx = \frac{1}{EI_1}\left[\int_o^a Xx.xdx + \int_a^h \left[Xx - W(x-a)\right]xdx\right]$$

$$-\frac{1}{EI_1}\int_o^h (W-X)x.x.dx$$

$$+\frac{1}{EI}\int_o^l \left[Xh - \frac{Wa}{l}x - W(h-a)\right]h.dx$$

$$= \frac{1}{EI_1}\left[\frac{Xh^3}{3} - \frac{W}{3}(h^3-a^3) + \frac{W}{2}a(h^2-a^2) - (W-X)\frac{h^3}{3}\right]$$

$$+\frac{1}{EI}\left(Xh^2l + \frac{W}{2}ahl - Wh^2l\right)$$

$$= 0$$

$$\therefore \quad X = \frac{W\left\{\frac{I}{I_1}\left[\frac{2h^3-a^3}{3} - \frac{a(h^2-a^2)}{2}\right] + \left(h^2l - \frac{ahl}{2}\right)\right\}}{h^2l\left(1+\frac{2}{3}\frac{I}{I_1}\frac{h}{l}\right)}$$

$$= W\frac{\nu(4h^3+a^3-3ah^2)+(6h^3-3ah^2)}{6h^3\left(1+\frac{2}{3}\nu\right)} \quad \cdots\cdots\cdots(535)$$

例題第六十三　二鉸屋根形剛構ニ垂直荷重ノ作用スルトキノ支點水平反力ヲ求ム。

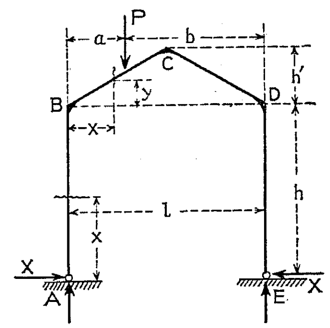


Fig. 607.

(答)　Fig. 607 ニ就キテ

柱 AB 及 DE: $M = -X.x, \quad \dfrac{\partial M}{\partial X} = -x;$

屋根 BCD: $M = M_o - X(h+y)$ (M_o ハ單桁トシテ), $\dfrac{\partial M}{\partial X} = -(h+y);$

(527) ニ挿入シ軸壓力影響ヲ無視シテ

$$\frac{2}{EI_1}\int_o^h Xx^2dx - \frac{1}{EI}\int_o^l M_o(h+y)dx$$

$$+\frac{1}{EI}\int_o^l X(h+y)^2dx = 0$$

積分シテ

$$\frac{2Xh^3}{3EI_1} - \frac{h}{EI}\int_o^l M_o dx - \frac{1}{EI}\int M_o y dx + \frac{Xh^2l}{EI}$$

$$+\frac{2Xh}{EI}\int ydx + \frac{X}{EI}\int y^2dx = 0$$

此式ニ於ケル最後ノ二項ハ屋根ノ形ニ對スル定數デアツテ今假ニ

$\int ydx = \mathfrak{F}$　BD 線以上ノ屋根ノ形 BCD ノ面積

$\int y^2dx = \mathfrak{J}$　BD 線ニ對シ面積 BCD ノ有スル靜力率

ヲ以テ表ハストキハ求ムル水平反力ハ

$$X = \frac{\int M_o dx + \frac{1}{h}\int M_o y dx}{hl\left(1+\frac{2}{3}\nu\right) + 2\left(\mathfrak{F} + \frac{\mathfrak{J}}{h}\right)} \quad \cdots\cdots\cdots(536)$$

本題ニ與ヘラレタル三角形屋根ニ於テハ

$$\mathfrak{F} = \frac{h'l}{2}, \quad \mathfrak{J} = \frac{h'l}{2}\cdot\frac{h'}{3} = \frac{h'^2 l}{6}.$$

Fig. 607 ニ示ス一個ノ集中荷重ニ對シ

$$\int M_o dx = \frac{1}{2} Pab$$

$$\int M_o y dx = \frac{2h'}{l}\int M_o x dx = \frac{h'}{12l} Pa(3l^2-4a^2)$$

(536) 式ニ挿入シテ

$$X = \frac{Pa}{4l^2}\cdot\frac{6bhl+h'(3l^2-4a^2)}{3h^2\left(1+\frac{2}{3}\nu\right)+h'(3h+h')} \quad \cdots\cdots (537)$$

屋根面上ニ等布荷重ヲ受クルトキノ解法ハ(537)式ニ於テPノ代リニ pdx, a ノ代リニ x, b ノ代リニ $l-x$ ヲ用ヒテ積分スレバ求メラレ

全徑間等布荷重ヲ受クル場合

$$X = \frac{pl^2}{32}\cdot\frac{8h+5h'}{3h^2\left(1+\frac{2}{3}\nu\right)+h'(3h+h')} \quad \cdots\cdots (538)$$

二分ノ一徑間ノミニ等布荷重ヲ受クルトキハ

$$X = \frac{pl^2}{64}\cdot\frac{8h+5h'}{3h^2\left(1+\frac{2}{3}\nu\right)+h'(3h+h')} \quad \cdots\cdots (539)$$

例題第六十二及六十三ニ示シタルハ何レモ未知數一個ノ場合デアル。未知數 n 個アルトキハ全ク同樣ニシテ

$$\left.\begin{aligned} &\int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial X_1}dx + \int \frac{N}{EF}\frac{\partial N}{\partial X_1}dx = 0 \\ &\int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial X_2}dx + \int \frac{N}{EF}\frac{\partial N}{\partial X_2}dx = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (540)$$

總計 n 個ノ方程式ヲ得之レヲ聯立方程式トシテ n 個ノ未知數 X_1, X_2, ……ヲ求メ得ル理デアルガ實際ノ計算ニ當ツテハ其計算ノ冗長到底其煩ニ耐エナイノデアツテ殊ニ其計算ノ途中ニ生ズベキ錯誤ヲ檢スベキ適當ノ方法無キガ故ニ計算ノ結果ニ信ヲ置キ

難ク實用トシテ用フルニ困難デアル。之レ則チ不靜定結構特ニ剛構ノ解法トシテ種々ノ說ノ行ハル丶所以デアツテ次ニ其一解法ヲ說明シ例題ヲ以テ其運用ヲ明カニシヤウ。

兩柱緊定サレタ固定剛構ノ解法ヲ示サンニ此兩支點固定サレタ剛構ハ各々三個宛計六個ノ反力ヲ有スルガ故ニ靜力學的平衡ノ三條件ノミヲ以テシテハ尙三個ノ未知反力ヲ生ズル理デアツテ從ツテ此解法ニハ最小働ノ原理ヲ應用シナケレバナラヌ。

Fig. 608 ⓐ ニ示ス剛構ハ任意ノ形ヲ有シ任意ノ荷重ヲ受クル

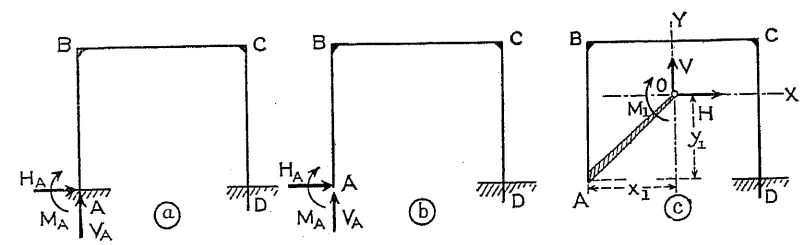


Fig. 608.

モノトス。假定スベキ未知ノ三力トシテハ何レノ反力又ハ應力ヲ採ルモ差支ナイノデアルガ今假ニA支點ニ三ツノ未知反力 H_A, V_A 及 M_A (上揭ノ說明ニハXヲ以テシタ)ヲ採用スルモノトシヤウ。扨上述シタル一般的ノ解法ニ據ルモノトスレバ先ヅ此假定シタル三未知力及ビ與ヘラレタル荷重ニ對シテ剛構各材ニ生ズルM及Nヲ計算シ(540)式ニ從ツテ三個ノ聯立方程式ヲ立テ之レヨリ三個ノ未知數 H_A, V_A 及 M_A ヲ求メルノデアル。此M及Nヲ計算スルニ當ツテ我々ハ次ノ如ク假定シテ出發シテ居ル事ニ注意シナケレバナラヌ。卽チ Fig. 608 ノ剛構ニ於テ三力 H_A, V_A, M_A ガ柱脚Aニ作用スルト假定スルコトニヨリ其柱脚Aヲ其支

點カラ切離シⓑ圖ノ如キ狀態ト假定シテ此自由柱脚A＝H_A, V_A, 及 M_A ノ三力ガ外力トシテ作用スルモノト前提シテ計算ヲ始メテ居ル事デアツテ斯ク假定スル事ニ依ツテ剛構ハ單ニD支點ノミニ固定サレタ肱木桁ノ如キ靜定構造トナリ然カモⓐ圖ニ示シタ剛構ト全ク等シキ應力ノ狀態ニアルノデアル。從ツテ今假ニ更ニ一歩進メテⓑ圖ノ肱木桁左端A＝三未知力 H_A, V_A 及 M_A ガ作用スル代リニⓒ圖ニ示ス任意ノ一點O＝作用スル三未知力H, V 及 M_1 ヲ用フル事モ出來ル筈デアツテ要ハ剛構其物ガ斯ク假定スル事ニヨツテ何等應力ニ變化ヲ生ジナケレバヨイノデアル。此任意ニ採ツタO點ハⓒ圖ニ示シタ如ク肱木桁左端Aト硬直連結 (Rigid connection) ヲ爲スモノト考ヘO點ノA點カラノ距離 x_1, y_1 及ビ座標ノ傾斜(H及Vノ作用スル方向)ハ今暫ク任意トシテ置カウ。剛構各部ニ生ズル應力ニ變化ヲ生ゼザル爲メノ條件ヲ滿足スル三未知力相互ノ關係ハ明カニ次式ニテ與ヘラレ得ル。

$$\left.\begin{aligned} H_A &= H, \qquad V_A = V \\ M_A &= M_1 + Hy_1 - Vx_1 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(541)$$

斯クテO＝働クH, V 及 M_1 ヲ假定シテ剛構各部材ニ生ズル彎曲力率ヲ求メンニ Fig. 609 ニ示ス如ク座標軸ノ正ノ方向ヲ採リ

$$M = M_o + M_1 - Hy + Vx$$

$$N = -\left[H\cos\varphi + (Q_o + V)\sin\varphi\right]$$

式中 M_o 及 Q_o＝BCヲ單桁ト考フルトキ外荷重ニヨツテ生ズル彎曲力率及剪力

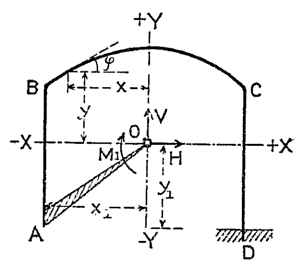


Fig. 609.

φ＝剛構部材ノ傾斜角(水平材ニ於テ $\varphi=0°$, 垂直材ニ於テ $\varphi=90°$)

是レヨリ微分係數ヲ求ムレバ

$$\frac{\partial M}{\partial H} = -y, \quad \frac{\partial M}{\partial V} = x, \quad \frac{\partial M}{\partial M_1} = 1$$

$$\frac{\partial N}{\partial H} = -\cos\varphi, \quad \frac{\partial N}{\partial V} = -\sin\varphi, \quad \frac{\partial N}{\partial M_1} = 0$$

斯ク求メタル値ヲ一般最小働方程式

$$\left.\begin{aligned} \int\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial H}ds + \int\frac{N}{EF}\frac{\partial N}{\partial H}ds &= 0 \\ \int\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial V}ds + \int\frac{N}{EF}\frac{\partial N}{\partial V}ds &= 0 \\ \int\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_1}ds + \int\frac{N}{EF}\frac{\partial N}{\partial M_1}ds &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(542)$$

ニ挿入スルトキハ

$$-\int\frac{M_o y}{EI}ds + H\int\frac{y^2}{EI}ds - V\int\frac{xy}{EI}ds - M_1\int\frac{y}{EI}ds$$
$$+H\int\frac{\cos^2\varphi}{EF}ds + \int\frac{(Q_o+V)\sin\varphi\cos\varphi}{EF}ds = 0$$

$$\int\frac{M_o x}{EI}ds - H\int\frac{xy}{EI}ds + V\int\frac{x^2}{EI}ds + M_1\int\frac{x}{EI}ds$$
$$+H\int\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{EF}ds + \int\frac{(Q_o+V)\sin^2\varphi}{EF}ds = 0$$

$$\int\frac{M_o}{EI}ds - H\int\frac{y}{EI}ds + V\int\frac{x}{EI}ds + M_1\int\frac{1}{EI}ds = 0$$

扨玆デO點ノ位置ヲ確定シヤウ。卽チ上述シタ範圍ニ於テハOナル原點ノ位置ハ之ヲ任意ニ採ルトシテ置イタガ今此求メタ聯立方程式ヲ簡單ニスル爲メニ

$$\left.\int\frac{x}{EI}ds = 0 \qquad \int\frac{y}{EI}ds = 0\right\} \cdots\cdots(543)$$

$$\int \frac{xy}{\mathrm{EI}}\,ds = 0$$

ナル三條件ヲ滿足スル如キ原點Oノ縱横距 x_1, y_1 及座標軸 X, Y ノ傾斜ヲ採用スルモノトスル。此(543)式ノ條件ハO點ガ $\frac{1}{\mathrm{EI}}ds$ ナル彈性荷重(Elastic load)ノ重心點ニ相當スル事ヲ意味シ X, Y 軸ガ此荷重ニ對スル主軸線ニ相當スルノデアル。左右對稱ナル剛構ニ對シテハ X, Y 軸ハ直角ニ交リ且ツ Y 軸ハ其對稱軸ト一致スル事ハ勿論デアル。斯クノ如キ原點ヲ採用スルトキハ上掲聯立方程式ハ次ノ如クナル。

$$\left.\begin{aligned}
-\int \frac{\mathrm{M}_o y}{\mathrm{EI}}\,ds+\mathrm{H}\int \frac{y^2}{\mathrm{EI}}\,ds+\mathrm{H}\int \frac{\cos^2\varphi}{\mathrm{EF}}\,ds & \\
+\int \frac{(\mathrm{Q}_o+\mathrm{V})\sin\varphi\cos\varphi}{\mathrm{EF}}\,ds &= 0\\
\int \frac{\mathrm{M}_o x}{\mathrm{EI}}\,ds+\mathrm{V}\int \frac{x^2}{\mathrm{EI}}\,ds+\mathrm{H}\int \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\mathrm{EF}}\,ds & \\
+\int \frac{(\mathrm{Q}_o+\mathrm{V})\sin^2\varphi}{\mathrm{EF}}\,ds &= 0\\
\int \frac{\mathrm{M}_o}{\mathrm{EI}}\,ds+\mathrm{M}_1\int \frac{1}{\mathrm{EI}}\,ds &= 0
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(544)$$

更ニ剛構ノ形ニ應ジ此式ヲ簡單ニシテ三未知反力 H, V 及 M_1 ガ求メラレ得ル。

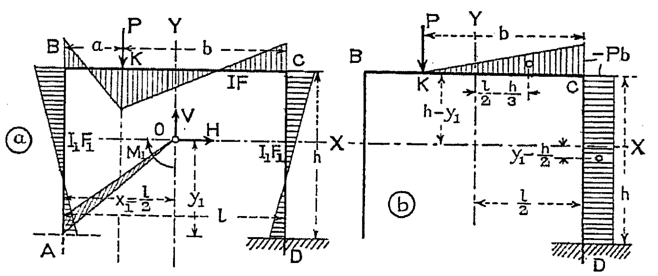


Fig. 610.

例題第六十四　固定矩形剛構ガ垂直荷重ヲ受クルトキノ應力ヲ求ム。

(答)　Fig. 610 ニ示ス如キ矩形剛構ヲ解クニ當ツテハ先ヅ原點O

ノ位置ヲ決定セネバナラヌ。原點ハ彈性荷重 $\frac{1}{\mathrm{EI}}ds$ ノ重心ナルガ故ニ各部材ニ沿ヒ其部材ノ $\frac{1}{\mathrm{EI}}$ ガ等布セラルヽモノトシテ計算シ

$$x_1 = \frac{l}{2}.$$

$$y_1 = \frac{1}{2\frac{h}{\mathrm{EI}_1}+\frac{l}{\mathrm{EI}}}\left(2\frac{h}{\mathrm{EI}_1}\cdot\frac{h}{2}+\frac{l}{\mathrm{EI}}h\right) = h\,\frac{1+\nu}{1+2\nu}$$

(柱 $\frac{h}{\mathrm{EI}_1}$, 桁 $\frac{l}{\mathrm{EI}}$ ガ支點線 AD ニ對スル靜力率ヲ求メテ計算ス)　　$\nu = \frac{\mathrm{I}h}{\mathrm{I}_1 l}$

更ニ逐次各部材寸法ニ關スル項ヲ計算スルニ

$$\int \frac{y^2}{1}\,ds = 2\left[\frac{h}{\mathrm{I}_1}\,\frac{h^2}{12}+\frac{h}{\mathrm{I}_1}\left(y_1-\frac{h}{2}\right)^2\right]+\frac{l}{\mathrm{I}}(h-y_1)^2 = \frac{h^3(2+\nu)}{3\mathrm{I}_1(1+2\nu)}$$

$$\int \frac{x^2}{\mathrm{I}}\,ds = 2\frac{h}{\mathrm{I}_1}\left(\frac{l}{2}\right)^2+\frac{l}{\mathrm{I}}\,\frac{l^2}{12} = \frac{l^3}{12\mathrm{I}}(1+6\nu)$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{I}}\,ds = \frac{l}{\mathrm{I}}+\frac{2h}{\mathrm{I}_1} = \frac{l}{\mathrm{I}}(1+2\nu)$$

$$\int \frac{\cos^2\varphi}{\mathrm{F}}\,ds = \frac{l}{\mathrm{F}}$$

$$\int \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\mathrm{F}}\,ds = 0 \qquad\qquad \int \frac{(\mathrm{Q}_o+\mathrm{V})\sin\varphi\cos\varphi}{\mathrm{F}}\,ds = 0$$

$$\int \frac{(\mathrm{Q}_o+\mathrm{V})\sin^2\varphi}{\mathrm{F}}\,ds = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{V}}{\mathrm{F}_1}h+\frac{-\mathrm{B}+\mathrm{V}}{\mathrm{F}_1}h = \frac{h}{\mathrm{F}_1}(\mathrm{A}-\mathrm{B}+2\mathrm{V})$$

次ニ桁 BC 上ニ作用スル集中荷重 P ニ因ル肱木桁トシテノ彎曲力率圖ハ ⓑ圖ニ示ス如キ三角形及矩形ニテ表ハサレルガ故ニ

$$\int \frac{\mathrm{M}_o y}{\mathrm{I}}\,ds = \frac{h-y_1}{\mathrm{I}}\int \mathrm{M}_o\,dx-\frac{y_1-\frac{h}{2}}{\mathrm{I}_1}\int \mathrm{M}_o\,dy = \frac{h-y_1}{\mathrm{I}}\,\frac{1}{2}(-\mathrm{P}b)b-\frac{y_1-\frac{h}{2}}{\mathrm{I}_1}(-\mathrm{P}b)h$$

$$= -\mathrm{P}b\left[\frac{(h-y_1)b}{2\mathrm{I}}-\frac{(2y_1-h)h}{2\mathrm{I}_1}\right] = -\mathrm{P}b\left[\frac{bh}{2\mathrm{I}}\,\frac{\nu}{1+2\nu}-\frac{h^2}{2\mathrm{I}_1}\,\frac{1}{1+2\nu}\right]$$

$$\int \frac{\mathrm{M}_o x}{\mathrm{I}}\,ds = \frac{1}{\mathrm{I}}\left(\frac{l}{2}-\frac{b}{3}\right)\frac{1}{2}(-\mathrm{P}b)b+\frac{l}{2\mathrm{I}_1}(-\mathrm{P}b)h$$

$$= -\mathrm{P}b\left[\frac{1}{2\mathrm{I}}\left(\frac{l}{2}-\frac{b}{3}\right)b+\frac{lh}{2\mathrm{I}_1}\right]$$

$$\int \frac{\mathrm{M}_o}{\mathrm{I}}\,ds = \frac{1}{\mathrm{I}}\,\frac{1}{2}(-\mathrm{P}b)b+\frac{1}{\mathrm{I}_1}(-\mathrm{P}b)h = -\mathrm{P}b\left[\frac{b}{2\mathrm{I}}+\frac{h}{\mathrm{I}_1}\right]$$

$$\frac{h}{F_1}(A-B)=\frac{h}{F_1}P\frac{b-a}{l}$$

以上求メタル數値ヲ(544)式ニ挿入セバ

$$-(-Pb)\left[\frac{bh}{2I}\frac{\nu}{1+2\nu}-\frac{h^2}{2I_1}\frac{1}{1+2\nu}\right]+H\frac{h^3(2+\nu)}{3I_1(1+2\nu)}+H\frac{l}{F}=0$$

$$-Pb\left[\frac{1}{2I}\left(\frac{l}{2}-\frac{b}{3}\right)b+\frac{lh}{2I_1}\right]+V\frac{l^3}{12I}(1+6\nu)+\frac{h}{F_1}\left(P\frac{b-a}{l}+2V\right)=0$$

$$-Pb\left[\frac{b}{2I}+\frac{h}{I_1}\right]+M_1\frac{l}{I}(1+2\nu)=0$$

求メタ結果ハ聯立方程式ニ非ズシテ單ニ未知數一ツノミヲ有スル方程式ナルガ故ニ直チニ三個ノ未知應力ガ求メラレ

$$H=\frac{\dfrac{Pbh}{2(1+2\nu)}\left[-\dfrac{b\nu}{I}+\dfrac{h}{I_1}\right]}{\dfrac{h^3}{3I_1}\dfrac{2+\nu}{1+2\nu}+\dfrac{l}{F}}=\frac{1}{2}\frac{Pab}{\left(\dfrac{2+\nu}{3}+\dfrac{1+2\nu}{\nu}\dfrac{r^2}{h^2}\right)hl}\quad\cdots(545)_1$$

$$V=\frac{\dfrac{Pb}{2}\left[\dfrac{b}{I}\left(\dfrac{l}{2}-\dfrac{b}{3}\right)+\dfrac{lh}{I_1}\right]-\dfrac{h}{F_1}P\dfrac{b-a}{l}}{\dfrac{l^3}{12I}(1+6\nu)+\dfrac{2h}{F_1}}$$

$$=\frac{\dfrac{Pb}{l^2}(3bl-2b^2+6\nu l^2)-12\nu\dfrac{r_1^2}{l^2}P(b-a)}{\left[(1+6\nu)+24\nu\dfrac{r_1^2}{l^2}\right]l}\quad\cdots\cdots(545)_2$$

$$M_1=\frac{Pb\left[\dfrac{b}{2I}+\dfrac{h}{I_1}\right]}{\dfrac{l}{I}(1+2\nu)}=\frac{Pb(b+2\nu l)}{2l(1+2\nu)}\quad\cdots\cdots(545)_3$$

今若シ$\frac{r^2}{h^2}$ノ項ハ極メテ小ナルガ故ニ之ヲ無視スレバ

$$\left.\begin{aligned}H&=\frac{3Pab}{2hl(2+\nu)}\\ V&=\frac{Pb(1+\delta-2\delta^2+6\nu)}{l(1+6\nu)}\\ M_1&=\frac{Pb(b+2\nu l)}{2l(1+2\nu)}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(546)\qquad \delta=\frac{a}{l}$$

集中荷重多數ノ作用スルトキニハ

$$\left.\begin{aligned}H&=\frac{3\Sigma Pab}{2hl(2+\nu)}\\ V&=\frac{\Sigma Pb(1+\delta-2\delta^2+6\nu)}{l(1+6\nu)}\\ M_1&=\frac{\Sigma Pb(b+2\nu l)}{2l(1+2\nu)}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(547)$$

等布荷重ニ對シテハ $P=pdx,\ a=x,\ b=l-x$ ヲ代入シテ積分スレバ求メラレ得ベク全徑間ノ等布荷重ニ對シテハ $0-l$ ノ範圍ニ積分シテ

$$\left.\begin{aligned}H&=\frac{pl^2}{4h\left[(2+\nu)+3\dfrac{2\nu+1}{\nu}\dfrac{r^2}{h^2}\right]}\cong\frac{pl^2}{4h(2+\nu)}\\ V&=0\ (\text{左右對稱ナルガ故ニ})\\ M_1&=-\frac{pl^2(1+3\nu)}{6(1+2\nu)}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(548)$$

斯クノ如クニシテ原點Oニ働ク未知力 H, V 及 M_1 既知トナラバ剛構各點ノ應力ハ容易ニ求メラレ得ベク

$$\left.\begin{aligned}M&=M_o+M_1-Hy+Vx\\ N&=-[H\cos\varphi+(Q_o+V)\sin\varphi]\\ Q&=-H\sin\varphi+(Q_o+V)\cos\varphi\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(549)$$

φ ハ其部材ガ X 軸ト爲ス角デアツテ柱ニ對シテハ $\varphi=90°$, 桁ニ對シテハ $\varphi=0°$ デアル。

更ニA點ニ生ズル支點反力ハ(550)式ヨリ之ヲ求メ得ル

$$\left.\begin{aligned}V_A&=A_o+V=\frac{\Sigma Pb}{l}+\frac{pl}{2}+V\\ H_A&=H\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(550)$$

例題第六十五　固定矩形剛構ガ水平荷重ヲ受クルトキノ應力ヲ求ム。

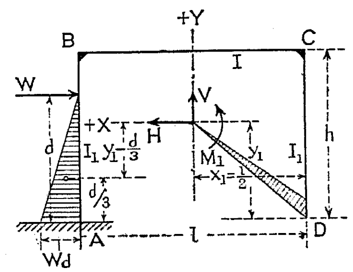


Fig. 611.

(答) 此場合ニアリテモ剛構其物ニ就キテハ前題ニ於ケルト變化ナキガ故ニ前題ニ求メタル部材寸法ニ關スル項ハ其儘利用サレ得ベク荷重ニ關スル項ハ次ノ如クナル。

$$\int\frac{(Q_o+V)\sin^2\varphi}{F}ds=0$$

$$\int\frac{M_oy}{I}ds=\frac{1}{I_1}\frac{Wd^2}{2}\left(y_1-\frac{d}{3}\right)$$

$$\int\frac{M_ox}{I}ds=-\frac{l}{2I_1}\frac{Wd^2}{2}$$

$$\int\frac{M_o}{I}ds=-\frac{1}{I_1}\frac{Wd^2}{2}$$

斯クテ不靜定未知力ノ値ハ

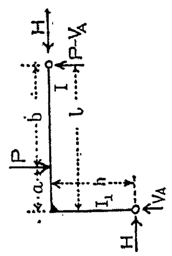
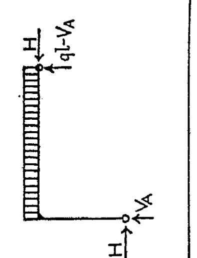
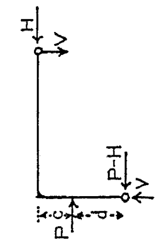
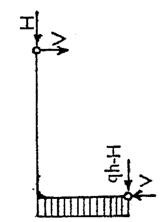
$$
\left.
\begin{aligned}
\mathrm{H} &= \frac{3\,\mathrm{W}d^2\left(y_1-\dfrac{d}{3}\right)(1+2\nu)}{4h^3\left(\dfrac{2+\nu}{2}+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2\nu+1}{\nu}\,\dfrac{r^2}{h^2}\right)} \cong \frac{3\,\mathrm{W}d^2\left(y_1-\dfrac{d}{3}\right)(1+2\nu)}{2h^3(2+\nu)} \\
\mathrm{V} &= \frac{\dfrac{3}{h}\,\mathrm{W}d^2\nu}{\left[(1+6\nu)+24\nu\dfrac{r_1^2}{l^2}\right]l} \cong \frac{3\nu\,\mathrm{W}d^2}{hl(1+6\nu)} \\
\mathrm{M}_1 &= \frac{\dfrac{3}{h}\,\mathrm{W}d^2\nu}{6(1+2\nu)} = \frac{\mathrm{W}d^2\nu}{2h(1+2\nu)}
\end{aligned}
\right\}\cdots\cdots\cdots(551)
$$

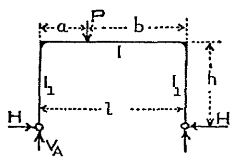
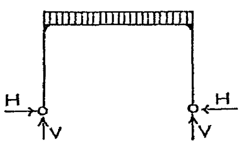
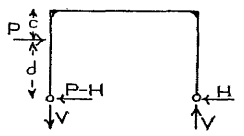
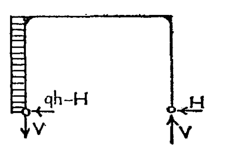
式中　$y_1-\dfrac{d}{3}=\dfrac{1+\nu}{1+2\nu}h-\dfrac{d}{3}=\dfrac{1}{3(1+2\nu)}\Big[3h(1+2\nu)-d(1+2\nu)\Big]$

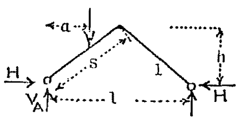
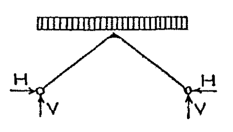
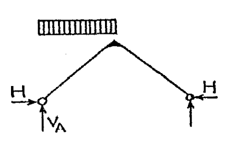
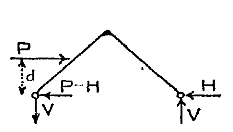
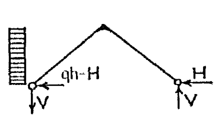
故 =

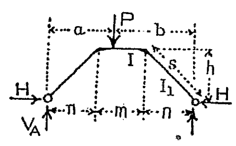
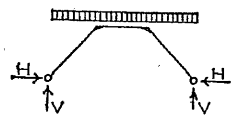
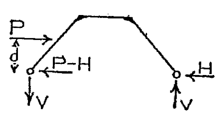
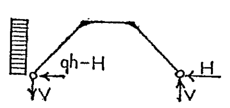
$$
\mathrm{H}=\frac{\mathrm{W}d^2}{2h^3(2+\nu)}\Big[3h(1+\nu)-d(1+2\nu)\Big]
$$

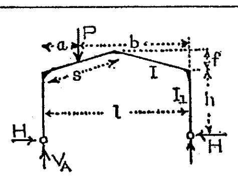
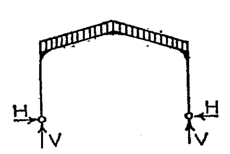
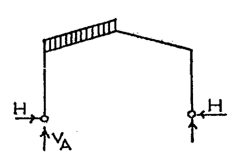
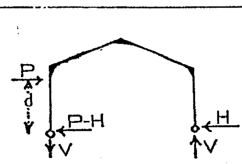
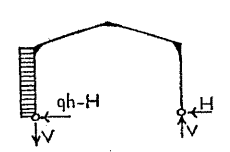
第二十五表　剛構支點反力及彎曲力率ノ表

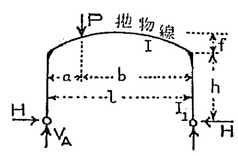
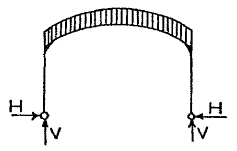
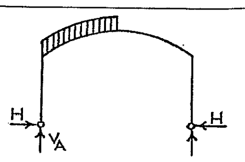
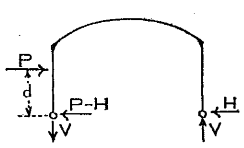
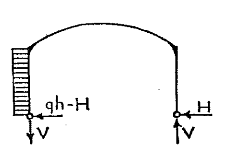
荷重狀態	支點水平反力	支點垂直反力	最大正彎曲力率	略符
	$\mathrm{H}=\dfrac{\mathrm{P}ab(l+b)}{2hl^2(1+\nu)}$	$\mathrm{V_A}=\dfrac{\mathrm{P}b}{l}+\dfrac{\mathrm{H}h}{l}$	Pノ下ニテ $\mathrm{M_P}=\dfrac{\mathrm{P}ab(2\nu l^2+3al-a^2)}{2l^3(1+\nu)}$	$\nu=\dfrac{h\mathrm{I}}{l\mathrm{I}_1}$
	$\mathrm{H}=\dfrac{ql^2}{8h(1+\nu)}$	$\mathrm{V_A}=\dfrac{ql}{8}\,\dfrac{5+4\nu}{1+\nu}$	右支點ヨリ $\dfrac{3+4\nu}{1+\nu}\,\dfrac{l}{8}$ ノ點ニテ $\mathrm{M}_{max}=\dfrac{ql^2}{128}\left(\dfrac{3+4\nu}{1+\nu}\right)^2$	
	$\mathrm{H}=\mathrm{P}\dfrac{d}{h}+\mathrm{V}\dfrac{l}{h}$	$\mathrm{V}=\dfrac{\mathrm{P}cd\nu(d+h)}{2h^2l(1+\nu)}$	Pノ下ニテ $\mathrm{M_P}=\dfrac{\mathrm{P}cd}{2h^3}\,\dfrac{2h^2+c\nu(3h-c)}{1+\nu}$	
	$\mathrm{H}=\dfrac{qh(4+5\nu)}{8(1+\nu)}$	$\mathrm{V}=\dfrac{qh^2\nu}{8l(1+\nu)}$	下端ヨリ $\dfrac{4+3\nu}{1+\nu}\,\dfrac{h}{8}$ ノ點ニテ $\mathrm{M}_{max}=\dfrac{qh^2}{128}\left(\dfrac{4+3\nu}{1+\nu}\right)^2$	

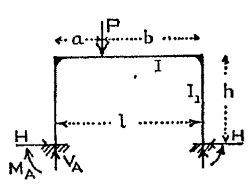
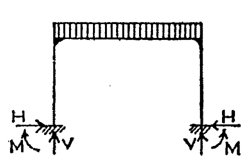
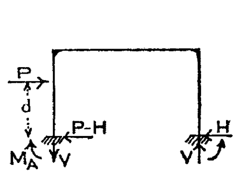
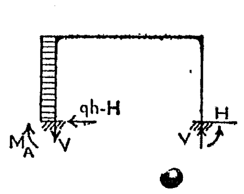
荷重狀態	支點水平反力	支點垂直反力	最大正彎曲力率	略符
	$H=\frac{3Pab}{2hl(3+2\nu)}$	$V_A=\frac{Pb}{l}$	Pノ下ニテ $M_P=\frac{3+4\nu}{3+2\nu}\frac{Pab}{2l}$	$\nu=\frac{h.I}{l.I}$
	$H=\frac{ql^2}{4h(3+2\nu)}$	$V=\frac{ql}{2}$	中點ニテ $M_{max}=\frac{1+2\nu}{3+2\nu}\frac{ql^2}{8}$	
	$H=\frac{P}{2}\cdot\frac{3dh^2-\nu(d^3-3dh^2)}{h^3(3+2\nu)}$	$V=\frac{Pd}{l}$	Pノ下ニテ $M_P=(P-H)d$	
	$H=\frac{qh}{8}\frac{6+5\nu}{3+2\nu}$	$V=\frac{qh^2}{2l}$	下端ヨリ $\frac{18+11\nu}{3+2\nu}\cdot\frac{h}{8}$ ノ點ニテ $M_{max}=\frac{qh^2}{128}\left(\frac{18+11\nu}{3+2\nu}\right)^2$	

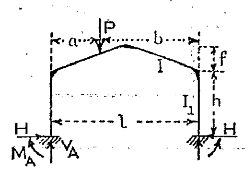
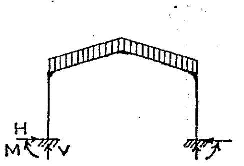
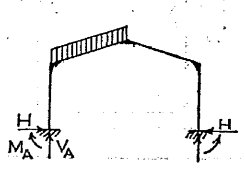
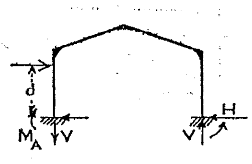
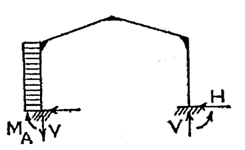
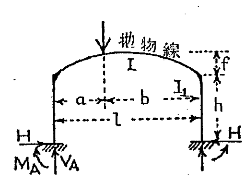
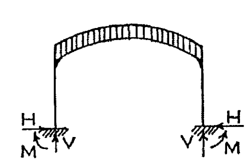
	$H=\frac{Pa}{4h}(3-4\delta^2)$	$V_A=P\left(1-\frac{a}{l}\right)$	Pノ下ニテ $M_P=Pa\left(1-\frac{5}{2}\delta+2\delta^3\right)$	$\delta=\frac{a}{l}$
	$H=\frac{5ql^2}{32h}$	$V=\frac{ql}{2}$	左端ヨリ水平距離$\frac{3}{16}l$ニ於テ $M_{max}=\frac{9}{512}ql^2=\sim\frac{1}{57}ql^2$	
	$H=\frac{5ql^2}{64h}$	$V_A=\frac{3}{8}ql$	左端ヨリ水平距離$\frac{7}{32}l$ ニ於テ $M_{max}=\frac{49}{2048}ql^2=\sim\frac{ql^2}{42}$	
	$H=\frac{P\delta}{4}(3-\delta^2)$	$V=P\frac{d}{l}$	Pノ下ニテ $M_P=\frac{Pd}{4}(4-5\delta+\delta^3)$	$\delta=\frac{d}{h}$
	$H=\frac{5}{16}qh$	$V=\frac{qh^2}{2l}$	左端ヨリ水平距離$\frac{7}{32}l$ ニ於テ $M_{max}=\frac{49}{512}qh^2$	

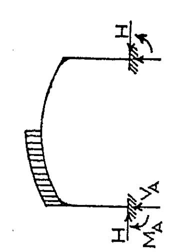
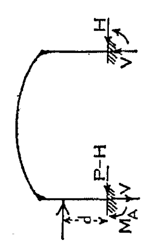
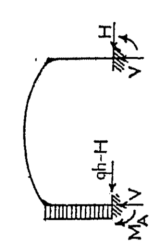
荷　重　狀　態	支　點　水　平　反　力	支點垂直反力	最大正彎曲力率	略　　符
	$H=\frac{P}{2mh}\,\frac{3(ab-n^2)+2mn\nu}{3+2\nu}$	$V_A=P\frac{b}{l}$	Pノ下ニテ $M_P=V_A.a-H.h$	$\nu=\frac{sI}{mI_1}$
	$H=\frac{q}{4h}\cdot\frac{6n(m+n)+m^2+n\nu(5n+4m)}{3+2\nu}$	$V=\frac{ql}{2}$	中點ニテ $M_{max}=\frac{ql^2}{8}-H.h$	
	$H=\frac{P\delta}{2}\,\frac{3+(3-\delta^2)\nu}{3+2\nu}$	$V=P\frac{d}{l}$	Pノ下ニテ $M_P=(P-H)d-V_A n\delta$	$\delta=\frac{d}{h}$
	$H=\frac{qh}{8}\,\frac{6+5\nu}{3+2\nu}$	$V=\frac{qh^2}{2l}$	左端ヨリ水平距離 $x_0=n-\frac{n^2}{2l}-\frac{H}{q}\,\frac{n}{h}$ ノ點ニテ $M_{max}=(qh-H)\frac{hx_0}{n}$ $-V_A x_0-\frac{qh^2x_0^2}{2n^2}$	

	$H=\frac{Pa}{4l^2}\cdot\frac{6blh+f(3l^2-4a^2)}{h^2(3+\nu)+f(3h+f)}$	$V_A=\frac{Pb}{l}$	Pノ下ニテ $M_P=V_A a-H\left(h+\frac{2fa}{l}\right)$	$\nu=\frac{hI}{sI_1}$
	$H=\frac{ql^2}{32}\,\frac{8h+5f}{h^2(3+\nu)+f(3h+f)}$	$V=\frac{ql}{2}$	頂點ニテ $M_c=\frac{ql^2}{8}-H(h+f)$	
	$H=\frac{ql^2}{64}\,\frac{8h+5f}{h^2(3+\nu)+f(3h+f)}$	$V_A=\frac{3ql}{8}$	左端ヨリ水平距離 $x_0=\frac{3}{8}l-\frac{H}{q}\,\frac{2f}{l}$ ノ點ニテ $M_{max}=V_A x_0-H\left(h+\frac{2fx_0}{l}\right)$ $-\frac{qx_0^2}{2}$	
	$H=\frac{Pd}{4}\cdot\frac{3(2h+f)+\nu\left(3h-\frac{d^2}{h}\right)}{h^2(3+\nu)+f(3h+f)}$	$V=\frac{Pd}{l}$	Pノ下ニテ $M_P=(P-H)d$	
	$H=\frac{qh^2}{16}\,\frac{6(2h+f)+5\nu h}{h^2(3+\nu)+f(3h+f)}$	$V=\frac{qh^2}{2l}$	下端ヨリ $x_0=h-\frac{H}{q}$ ノ點ニテ $M_{max}=(qh-H)x_0-\frac{qx_0^2}{2}$	

荷重狀態	支點水平反力	支點垂直反力	略符
	$H=\frac{5Pab}{2l^3}\frac{3hl^2+2f(ab+l^2)}{5h^2(3+2\nu)+4f(5h+2f)}$	$V_A=\frac{Pb}{l}$	$\nu=\frac{hI}{lI_1}$
	$H=\frac{ql^2}{4}\frac{5h+4f}{5h^2(3+2\nu)+4f(5h+2f)}$	$V=\frac{ql}{2}$	
	$H=\frac{ql^2}{8}\frac{5h+4f}{5h^2(3+2\nu)+4f(5h+2f)}$	$V_A=\frac{3}{8}ql$	
	$H=\frac{5Pd}{2h}\cdot\frac{3h^2(1+\nu)+2fh-d^2\nu}{5h^2(3+2\nu)+4f(5h+2f)}$	$V=\frac{Pd}{l}$	
	$H=\frac{5qh^2}{8}\frac{h(6+5\nu)+4f}{5h^2(3+2\nu)+4f(5h+2f)}$	$V=\frac{qh^2}{2l}$	

荷重狀態	支點水平反力	支點垂直反力	支點彎曲力率	略符
	$H=\frac{3Pab}{2hl(2+\nu)}$	$V_A=\frac{Pb}{l}\frac{1+\delta-2\delta^2+6\nu}{1+6\nu}$	$M_A=+\frac{Pab}{2l}\frac{5\nu-1+2\delta(2+\nu)}{(2+\nu)(1+6\nu)}$	$\nu=\frac{hI}{lI_1}$ $\delta=\frac{a}{l}$
	$H=\frac{ql^2}{4h(2+\nu)}$	$V=\frac{ql}{2}$	$M=+\frac{ql^2}{12(2+\nu)}=+H\frac{h}{3}$	
	$H=\frac{P\delta^2}{2(2+\nu)}\left[3(1+\nu)-\delta(1+2\nu)\right]$	$V=\frac{3Pd\delta\nu}{l(1+6\nu)}$	$M_A=-\frac{Pd\delta}{2}\left[\frac{2}{\delta}-\frac{3+2\nu-\delta(1+\nu)}{2+\nu}-\frac{3\nu}{1+6\nu}\right]$	$\nu=\frac{hI}{lI_1}$ $\delta=\frac{d}{h}$
	$H=\frac{qh}{8}\frac{3+2\nu}{2+\nu}$	$V=\frac{qh^2\nu}{l(1+6\nu)}$	$M_A=-\frac{qh^2}{24}\left[12-\frac{9+5\nu}{2+\nu}-\frac{12\nu}{1+6\nu}\right]$	

荷重狀態	支點水平反力	支點彎曲力率	略符
	$H=\frac{P}{\rho}\frac{a}{h}\left[\frac{f}{h}(3-4\delta^2)+\rho\varphi\frac{2(1-\delta)+\frac{f\varphi}{3h}(3-4\delta^2)}{4(1+\nu)-2\varphi\left(\nu-\frac{f}{h}\right)}\right]$	$M_A=+Pa\left[\frac{f}{h}\frac{3-4\delta^2}{\rho}-\frac{(1-\delta)(1-2\delta)}{2+6\nu}-(1-\varphi)\frac{2(1-\delta)+\frac{f\varphi}{3h}(3-4\delta^2)}{4(1+\nu)-2\varphi\left(\nu-\frac{f}{h}\right)}\right]$	$\nu=\frac{hI}{sI_1}$ $\delta=\frac{a}{l}$ $\rho=4\left(\nu+\frac{f^2}{h^2}\right)$ $\varphi=\frac{6}{\rho}\left(\nu-\frac{f}{h}\right)$
	$H=\frac{ql^2}{4\rho h}\left[\frac{5}{2}\frac{f}{h}+\frac{\rho\varphi}{6}\frac{8+5\varphi\frac{f}{h}}{4(1+\nu)-2\varphi\left(\nu-\frac{f}{h}\right)}\right]$	$M=+\frac{ql^2}{4}\left[\frac{5}{2\rho}\frac{f}{h}-\frac{1}{6}(1-\varphi)\frac{8+5\varphi\frac{f}{h}}{4(1+\nu)-2\varphi\left(\nu-\frac{f}{h}\right)}\right]$	
	$H=\frac{ql^2}{8\rho h}\left[\frac{5}{2}\frac{f}{h}+\frac{\rho\varphi}{6}\frac{8+5\varphi\frac{f}{h}}{4(1+\nu)-2\varphi\left(\nu-\frac{f}{h}\right)}\right]$	$M_A=+\frac{ql^2}{8}\left[\frac{5}{2\rho}\frac{f}{h}-\frac{1}{4(2+6\nu)}-\frac{1}{6}(1-\varphi)\frac{8+5\varphi\frac{f}{h}}{4(1+\nu)-2\varphi\left(\nu-\frac{f}{h}\right)}\right]$	
	$H=\frac{P\delta^2\nu}{\rho}\left[3-\delta+\rho\varphi\frac{\varphi\left(1-\frac{1}{3}\delta\right)-1}{4(1+\nu)-2\varphi\left(\nu-\frac{f}{h}\right)}\right]$	$M_A=-P\delta^2h\nu\left[\frac{1}{\delta\nu}-\frac{3}{2}\frac{1}{2+6\nu}-\frac{3-\delta}{\rho}+(1-\varphi)\frac{\varphi\left(1-\frac{1}{3}\delta\right)-1}{4(1+\nu)-2\varphi\left(\nu-\frac{f}{h}\right)}\right]$	$\delta=\frac{d}{h}$
	$H=\frac{qh}{12\rho}\nu\left[9+\rho\varphi\frac{3\varphi-4}{4(1+\nu)-2\varphi\left(\nu-\frac{f}{h}\right)}\right]$	$M_A=-\frac{qh^2}{12}\nu\left[\frac{6}{\nu}-\frac{6}{2+6\nu}-\frac{9}{\rho}+(1-\varphi)\frac{3\varphi-4}{4(1+\nu)-2\varphi\left(\nu-\frac{f}{h}\right)}\right]$	
	$H=\frac{Pab}{2hl}\left[5\frac{1+\delta-\delta^2}{\rho}\frac{f}{h}+\varphi\frac{3+2\varphi\frac{f}{h}(1+\delta-\delta^2)}{3(1+2\nu)-\varphi\left(3\nu-2\frac{f}{h}\right)}\right]$	$M_A=+\frac{Pab}{2l}\left[5\frac{1+\delta-\delta^2}{\rho}\frac{f}{h}-\frac{1-2\delta}{1+6\nu}-(1-\varphi)\frac{3+2\varphi\frac{f}{h}(1+\delta-\delta^2)}{3(1+2\nu)-\varphi\left(3\nu-2\frac{f}{h}\right)}\right]$	$\nu=\frac{hI}{lI_1}$ $\delta=\frac{a}{l}$ $\rho=5\nu+4\left(\frac{f}{h}\right)^2$ $\varphi=\frac{5}{2\rho}\left(3\nu-2\frac{f}{h}\right)$
	$H=\frac{ql^2}{2h}\left[\frac{1}{\rho}\frac{f}{h}+\frac{\varphi}{10}\frac{5+4\varphi\frac{f}{h}}{3(1+2\nu)-\varphi\left(3\nu-2\frac{f}{h}\right)}\right]$	$M_A=+\frac{ql^2}{2}\left[\frac{1}{\rho}\frac{f}{h}-\frac{1-\varphi}{10}\frac{5+4\varphi\frac{f}{h}}{3(1+2\nu)-\varphi\left(3\nu-2\frac{f}{h}\right)}\right]$	

荷重狀態	支點水平反力	支點彎曲力率	略符
	$H=\frac{ql^2}{4h}\left[\frac{1}{\rho}\frac{f}{h}+\frac{\varphi}{10}\frac{5+4\varphi\frac{f}{h}}{3(1+2\nu)-\varphi\left(3\nu-2\frac{f}{h}\right)}\right]$	$M_A=+\frac{ql^2}{4}\left[\frac{1}{\rho}\frac{f}{\rho}-\frac{1}{16(1+6\nu)}-\frac{1-\varphi}{10}\frac{5+4\varphi\frac{f}{h}}{3(1+2\nu)-\varphi\left(3\nu-2\frac{f}{h}\right)}\right]$	
	$H=\frac{P\delta^2}{2}\nu\left[\frac{5}{2}\frac{3-\delta}{\rho}+3\varphi\frac{\varphi\left(1-\frac{\delta}{3}\right)-1}{3(1+2\nu)-\varphi\left(3\nu-2\frac{f}{h}\right)}\right]$	$M_A=-\frac{P\delta^2h}{2}\nu\left[\frac{2}{\delta\nu}-\frac{3}{1+6\nu}-\frac{5}{2}\frac{3-\delta}{\rho}+3(1-\varphi)\frac{\varphi\left(1-\frac{\delta}{3}\right)-1}{3(1+2\nu)-\varphi\left(3\nu-2\frac{f}{h}\right)}\right]$	$\nu=\frac{hI}{lI_1}$ $\delta=\frac{d}{h}$ $\rho=5\nu+4\left(\frac{f}{h}\right)^2$ $\varphi=\frac{5}{2\rho}\left(3\nu-2\frac{f}{h}\right)$
	$H=\frac{qh}{8}\nu\left[\frac{15}{2\rho}+\varphi\frac{3\varphi-4}{3(1+2\nu)-\varphi\left(3\nu-2\frac{f}{h}\right)}\right]$	$M_A=-\frac{qh^2}{8}\nu\left[\frac{4}{\nu}-\frac{4}{1+6\nu}-\frac{15}{2\rho}+(1-\varphi)\frac{3\varphi-4}{3(1+2\nu)-\varphi\left(3\nu-2\frac{f}{h}\right)}\right]$	

第十節　結構ノ撓度

結構ノ撓度ヲ變位圖ヲ用ヒテ圖式的ニ求ムル方法ニ就イテハ既ニ第七章第九節(III)ニ於テ例題ヲ設ケテ其詳細ヲ說明シタ。コレヲ解析的ニ解ク算式ヲ誘導シヤウト思フ。

一ツノ結構ヲ採リ其或一點ノ變位又ハ撓度 δ ヲ考ヘテ見ンニ假ニ此點ニ此變位ノ方向ニ單位荷重 1 ヲ作用セシメテ生ズル或任意部材ノ應力ヲ k, 其部材ノ長サノ變化ヲ $\Delta s=\frac{ks}{EF}$ トセバ內働ハ外働ニ等シキガ故ニ

$$\frac{1}{2}.1.\delta=\frac{1}{2}k.\Delta s=\frac{1}{2}k.\frac{ks}{EF}$$

式中　s, F ハ其任意部材ノ長及斷面積デアル。從ツテ

$$\delta=k.\Delta s=k.\frac{k.s}{EF}.$$

此式ハ又次ノ如ク云ヒ表ハシ得ル。

或一點(m)ニ單位荷重(1)ガ働イテ任意部材(M)ニ應力 k ヲ生ズル場合ニハ此部材(M)ノ任意ノ變形(ϵ)ニヨツテ其點(m)ガ此荷重(1)ノ方向ニ受クル變位ハ此部材變形(ϵ)ノ k 倍デアル。

從ツテ若シ此部材(M)ガ應力 S ヲ受ケテ彈性變形 $\frac{Ss}{EF}$ ヲ生ジタ場合ニコレニヨツテ生ズル該點(m)ノ變位ハ

$$\delta=k\frac{Ss}{EF}$$

結構全體ノ部材ガ夫々全應力 S, 單位應力 $\sigma=\frac{S}{F}$ ヲ受ケタ場合ニ對シテ或考ヘテ居ル點(m)ノ總變位 Δ ハ

$$\Delta=\Sigma\frac{kSs}{EF}=\Sigma\frac{k\sigma s}{E}\text{...}(552)$$

溫度變化ニ對シテハ明カニ

$$\varDelta = \Sigma k\alpha t s \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(553)$$

計算ノ順序ハ先ヅ考ヘテ居ル點 (m) ニ單位荷重 1 ヲ作用セシメテ結構各部材ニ生ズル應力 k ヲ求メ次ニ與ヘラレタ荷重狀態ニ相當シテ各部材ニ生ズル應力 S ヲ計算シタル後(552)式ニ依リ考ヘテ居ル點 (m) ガ此荷重ニヨツテ受ケル撓度ヲ算定シ得ルノデアル。

例題第六十六 Fig. 612 ニ示ス 6 格間ヨリ成ル徑間36′, 高 8′ ノ「プラット」式橋構アリ。下弦格點ニ 10t ノ荷重ヲ受ケテ生ズル中點 C ノ撓度ヲ求ム。E = 28×10[6] #/□″ ト採レ。

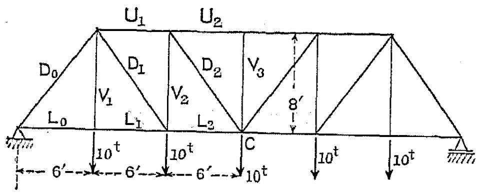


Fig. 612.

(答) 對角線ノ傾斜ヲ θ トセバ

$$\tan\theta = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \quad \sec\theta = \frac{5}{4}$$

C ノ點ノミニ荷重 1 ガ下向キニ働キタルトキノ各部材應力ヲ k, 各部材長 s, 斷面積 F, 與ヘラレタル格點荷重 10t ニヨリ生ズル應力 S 併ビニコレヨリ計算シタル $k\frac{Ss}{EF}$ ヲ表記スレバ次ノ如クナル。

部材	k	$s\,(in)$	F (in^2)	S (t)	$k\frac{Ss}{EF}\,(in)$
U_1	$-\frac{3}{4}$	72	10	− 30.00	+ 0.0130
U_2	$-\frac{9}{8}$	72	10	− 33.75	+ 0.0219
L_0	$+\frac{3}{8}$	72	4	+ 18.75	+ 0.0101
L_1	$+\frac{3}{8}$	72	4	+ 18.75	+ 0.0101
L_2	$+\frac{3}{4}$	72	5	+ 30.00	+ 0.0259
D_0	$-\frac{5}{8}$	120	10	− 31.25	+ 0.0187
D_1	$+\frac{5}{8}$	120	3	+ 18.75	+ 0.0375
D_2	$+\frac{5}{8}$	120	2	+ 6.25	+ 0.0187

V_1	0	96	2	+ 10.00	0
V_2	$-\frac{1}{2}$	96	1.5	− 5.00	+ 0.0128
V_3	0	96	1.5	0	0
計					$\frac{\Delta}{2} = +0.1687$

以上ハ徑間ノ半分ニ就イテ計算シタモノデアツテ荷重狀態其他左右對稱的デアル故ニ全徑間ニ對シテハコレヲ 2 倍シ

$$\Delta = 2\times 0.1687 = 0.337''$$

コレ求ムル C 點ノ撓度デアル。

例題第六十七 前題ニ於テ上弦材及端斜材ガ他ノ部材ヨリ 20°F 高溫ナルトキ C 點ノ垂直移動ヲ求ム。

(答) 膨脹係數 $\alpha = 0.0000062$ トシ上弦材及端斜材ノ溫度差 20°F ニヨル相對的伸長ヲ計算スレバ

部材	k	$s\ (in)$	$k\alpha t s\ (in)$
U_1	$-\frac{3}{4}$	72	− 0.0067
U_2	$-\frac{9}{8}$	72	− 0.0100
D_0	$-\frac{5}{8}$	120	− 0.0093
計			$\frac{\Delta}{2} = -0.0260$

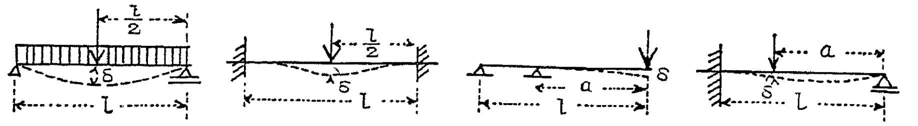
$$\therefore\quad \Delta = 2\times(-0.0260) = -0.052''\text{(上昇)}$$

問題集第十五

(1) 兩端單純支持ノ矩形桁ガ中點ニ集中荷重ヲ受ケタルトキニ爲サルヽ仕事ノ量ハ $\frac{1}{18}\frac{\sigma^2 V}{E}$ ナル事ヲ證セヨ。但 V ハ桁ノ容積, σ ハ最大應力ナリ。

(2) 兩端固定ナル場合,一端固定他端單純支持ナル場合及ビ兩端單純支持ナル場合ノ水平桁ノ爲サルヽ仕事ノ量ハ之レニ働ク荷重力度ガ夫々 $2\sqrt{6}:3:2$ ノ割合ナルトキ相等シ。

(3) 圖示ノ場合ニ荷重點ニ生ズル撓度ヲ求ム。



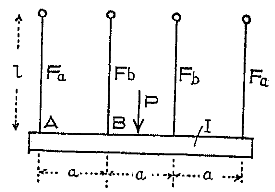
(答) $\dfrac{l^3}{48\mathrm{EI}}\left(\mathrm{P}+\dfrac{5}{8}ql\right)$, $\dfrac{1}{3}\dfrac{\mathrm{P}a^3b^3}{\mathrm{EI}l^3}$, $\dfrac{1}{3}\dfrac{\mathrm{P}a^2(l+a)}{\mathrm{EI}}$, $\dfrac{\mathrm{P}a^2(l-a)^3(3l+a)}{12\mathrm{EI}l^3}$

(4) 單桁兩支點ガ鉸構造ニ作ラレ水平ニ移動セザル場合ニ等布荷重ヲ受ケテ生ズル支點水平反力ヲ求ム。 (答) $\dfrac{ql^2}{12}\dfrac{\mathrm{F}h}{\mathrm{I}+\mathrm{F}h^2}$

(5) 桁 AB = $2a$ ノ中點ヲ C トシ此桁ヲ三點 A, C 及 B ニ於テ垂直ニ懸垂ス。懸垂材ハ等長 l ニシテ斷面相等シトシ等布荷重ヲ受ケタル時ノ張力 A, C 及 B ヲ求ム。

(答) $\mathrm{A}=\mathrm{B}=qa\dfrac{3a^2+48\nu}{8a^2+72\nu}$, $\mathrm{C}=2qa\dfrac{5a^2+24\nu}{8a^2+72\nu}$, $\nu=\dfrac{l\mathrm{I}}{a\mathrm{F}}$

(6) 等距離ナル四本ノ抗張材ニ懸垂セラル丶桁アリ。中點ニ荷重 P ノ作用ヲ受ケタルトキニ生ズル抗張材ノ應力 A 及 B ヲ求ム。但シ抗張材斷面ハ對稱的ニ F_a, F_b, F_b, F_a トス。



(a) 桁ニ撓度ナシトスル場合,

(b) 桁ノ彈性ヲ考フル場合

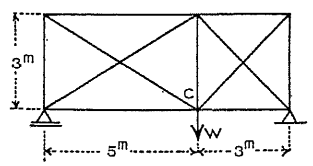
(答) (a) $\mathrm{A}=\dfrac{\mathrm{F}_a}{\mathrm{F}_a+\mathrm{F}_b}\cdot\dfrac{\mathrm{P}}{2}$, $\mathrm{B}=\dfrac{\mathrm{F}_b}{\mathrm{F}_a+\mathrm{F}_b}\cdot\dfrac{\mathrm{P}}{2}$

(b) $\mathrm{A}=\dfrac{\mathrm{PF}_a}{2\mathrm{K}}\left(\mathrm{I}l-\dfrac{1}{8}a^3\mathrm{F}_b\right)$, $\mathrm{B}=\dfrac{\mathrm{PF}_b}{2\mathrm{K}}\left(\mathrm{I}l+\dfrac{23}{24}a^3\mathrm{F}_a\right)$,

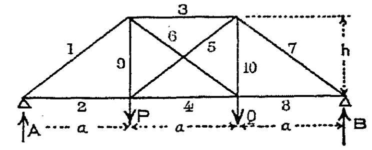
$\mathrm{K}=\mathrm{I}l(\mathrm{F}_a+\mathrm{F}_b)+\dfrac{5}{6}a^3\mathrm{F}_a\mathrm{F}$.

(7) 高 20″, 幅 $7\dfrac{1''}{2}$ ナル工字桁アリ腹鈑厚 0.6″, 突緣厚 1″ トシテ徑間 20′ ノ中點ニ集中荷重ヲ受クルトキニ生ズベキ全撓度ノ内幾割ガ剪力ニ因ルモノナリヤ。但 $\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}}=2.5$ ト假定ス。 (答) 7.4 %

(8) 圖示ノ不靜定結構ニ於ケル C 格點ニ交叉スル二斜材ノ應力ヲ求ム。但シ部材長ト斷面積トノ比ハ何レノ部材ニ對シテモ同一トス。 (答) 0.387 W, 0.467 W



(9) 圖示ノ不靜定結構部材應力ヲ求ム。荷重ハ非對稱トシ部材斷面ハ同一ナラズト假定ス。



(答) 不靜定力ヲ S_3 トセバ次式ヲ得。

$$\mathrm{S}_3=-\frac{a}{h}\,\frac{\dfrac{\mathrm{P}+\mathrm{Q}}{\mathrm{F}_4}a^3+\left(\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{F}_5}+\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{F}_6}\right)l^3+2\left(\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{F}_9}+\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{F}_{10}}\right)h^3}{\left(\dfrac{1}{\mathrm{F}_3}+\dfrac{1}{\mathrm{F}_4}\right)a^3+\left(\dfrac{1}{\mathrm{F}_5}+\dfrac{1}{\mathrm{F}_6}\right)l^3+\left(\dfrac{1}{\mathrm{F}_9}+\dfrac{1}{\mathrm{F}_{10}}\right)h^3}$$

(10) 第二十五表ニ示シタル剛構ノ數例ヲ採リ其支點反力ヲ驗算セヨ。

(11) 天井ニ 10′ 隔テ丶二點 A, B アリ。AC = 6′, BC = 8′ ノ二本ノ鋼材ニテ C ニ懸垂セル 5t ノ荷重ヲ負フトキ C 點ノ水平及垂直移動ヲ求ム。鋼ノ彈性係數ヲ 12,000 t/□″, 鋼材斷面積 1□″ トス。 (答) 0.0048″, 0.0336″.

(12) Fig. 612 ニ示ス橋構ニ於テ抗張材ガ應力 5 t/□″, 垂直材ガ 2 t/□″, 端斜材及上弦材ガ 3 t/□″ ヲ受クル場合ニ中點 C ニ生ズル撓度ヲ求ム。 (答) 0.323″