第十二章　圓筒及曲桁ノ强度

第一節　厚キ圓筒(中空圓壔)

(Thick Hollow Cylinder)

[I] 內壓及外壓ヲ受クル場合

Fig. 580 ニ示ス厚肉ノ中空圓壔アリテ其內徑 $2r_i$, 外徑 $2r_o$ ナルモノガ內壓 p_i, 外壓 p_o ヲ受クルモノトシ其圓筒兩端ハ厚キ版ニテ閉サレ居リ且ツ其端ノ變形ハ圓筒ノ變形ニ何等影響ナキモノトスル。斯クノ如キ圓筒ヲ三軸 X, Y, Z ニ對シテ考ヘ茲ニ XZ 平面內ニ任意點 P ヲ採リ其 YZ 平面カラノ距離ヲ x, 圓筒軸カラノ距離ヲ z トスル(尤モ此 x, z ハ變形前ノ距離デアル)。然ルトキハ壓力ヲ受ケタタメニ z ノ値ガ ξ ダケノ變化ヲ受ケタモノトセバ其變化ヲ受ケタ後モ矢張 P 點ハ XZ 平面內ニアル事ハ明カデアル。斯クノ如キ變形ヲ受ケタトキ P 點ニ於テ各軸ノ方向ニ次ノ三ツノ應力ガ呼起サレル。

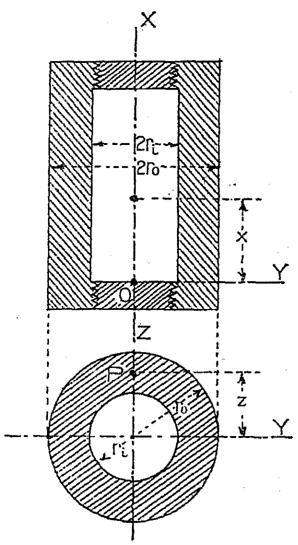

Fig. 580.

σ_x………X 軸ノ方向卽圓筒ノ軸ニ平行ナル方向ニ於テ

σ_y………Y 軸ノ方向卽圓筒ニ切線ノ方向ニ於テ

σ_z………Z 軸ノ方向卽圓筒ノ半徑ノ方向ニ於テ

然ルトキハPノ周圍ニ極微面積ヲ採ツテ考ヘルト其關係ハ Fig. 581 ニ示ス如ク軸ヨリ z 及 $z+dz$ ナル面ニ働ク應力ハ上述ノ應力ニ面積ヲ掛ケ

$\sigma_z.2.z\,d\varphi.dx$………內方ニ向ヒ (Radially inward)

$\left(\sigma_z+\dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz\right).2\,(z+dz)\,d\varphi.dx$………外方ニ向ヒ (Radially outward)

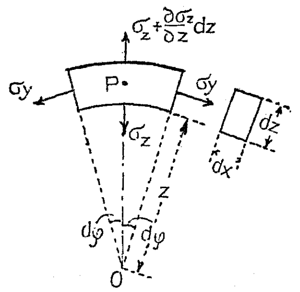

Fig. 581.

今考ヘタ極微容積ノ平衡條件カラ或一ツノ方向例ヘバZ軸ノ方向ニ於ケル應力ノ總和ガ零デナケレバナラヌ。卽チ

$$\sigma_z.2zd\varphi.dx-\left(\sigma_z+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz\right).2\,(z+dz)\,d\varphi dx+2\sigma_y dz.dx\sin d\varphi=0$$

今 $\sin d\varphi=d\varphi$ ト置キ他ノ項ニ比シテ小ナル $2\dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z}d\varphi dx dz^2$ ヲ無視スレバ次ノ關係ヲ得ル

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=\frac{1}{2}(\sigma_y-\sigma_z)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i})$$

尙此場合ニハ三軸ノ方向ニ應力ガ存在スル故ニ嚴密ナ計算ニ於テハ横縮ノ影響ヲ考ヘ第五章第六節ニ說明シタ如ク三軸ノ方向ノ變形ハ次ノ如ク與ヘラレル。

$$\left.\begin{aligned}&\text{X軸ノ方向}\quad \varepsilon_1=\frac{1}{E}\left(\sigma_x-\frac{\sigma_y+\sigma_z}{m}\right)\\&\text{Y軸ノ方向}\quad \varepsilon_2=\frac{1}{E}\left(\sigma_y-\frac{\sigma_z+\sigma_x}{m}\right)\\&\text{Z軸ノ方向}\quad \varepsilon_3=\frac{1}{E}\left(\sigma_z-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{m}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{(85)式參照}$$

從ツテ

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\frac{1}{E}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z-2\,\frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{m}\right)$$

$$\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=\frac{m}{m-2}E(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)$$

茲ニ於テ $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3\equiv e$ ト置ケバ

$$\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=\frac{m}{m-2}Ee\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii})$$

(85)式ノ第一式カラ

$$m.\sigma_x-\sigma_y-\sigma_z=mE\varepsilon_1$$

ナル事ヲ知ル故ニコレヲ(ii)式ト結合シ

$$m.\sigma_x+\sigma_x=\frac{m}{m-2}Ee+mE\varepsilon_1$$

$$\therefore\quad \sigma_x=\frac{m}{m+1}E\left(\varepsilon_1+\frac{e}{m-2}\right)$$

コレト同樣ノ手續ニヨリ

$$\sigma_y=\frac{m}{m+1}E\left(\varepsilon_2+\frac{e}{m-2}\right)$$

$$\sigma_z=\frac{m}{m+1}E\left(\varepsilon_3+\frac{e}{m-2}\right)$$

更ニ $G=\dfrac{m}{2(m+1)}E$ ナル事ヲ知ルガ故ニ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=2G\left(\varepsilon_1+\frac{e}{m-2}\right)\\\sigma_y&=2G\left(\varepsilon_2+\frac{e}{m-2}\right)\\\sigma_z&=2G\left(\varepsilon_3+\frac{e}{m-2}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{iii})$$

尙 z ナル距離ハ ξ ダケノ變化ヲ受ケタノデアル故ニPニ於ケル切線變形 ε_2 ハ此關係カラ直チニ求メラレ

$$\varepsilon_2=\frac{2\pi(z+\xi)-2\pi z}{2\pi z}=\frac{\xi}{z}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{iv})$$

又距離 dz ガ $d\xi$ ダケノ變化ヲ受ケタモノトスレバ半徑ノ方向ニ於ケル變形 ε_3 ハ次式デ與ヘラレル

$$\varepsilon_3 = \frac{d\xi}{dz} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{v})$$

求メタ(iv)(v)式ノ値ヲ(iii)式ニ入レ

$$\sigma_x = 2\mathrm{G}\left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1 + \frac{\xi}{z} + \frac{d\xi}{dx}}{m-2}\right)$$

$$\sigma_y = 2\mathrm{G}\left(\frac{\xi}{z} + \frac{\varepsilon_1 + \frac{\xi}{z} + \frac{d\xi}{dz}}{m-2}\right)$$

$$\sigma_z = 2\mathrm{G}\left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{\varepsilon_1 + \frac{\xi}{z} + \frac{d\xi}{dz}}{m-2}\right)$$

此第一式カラ

$$\varepsilon_1 = \frac{m-2}{2(m-1)\mathrm{G}}\sigma_x - \frac{\frac{\xi}{z} + \frac{d\xi}{dz}}{m-1}$$

ヲ得ベクコレヲ他ノ二式ニ挿入スレバ

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{2}{m-1}\mathrm{G}\left(m\frac{\xi}{z} + \frac{d\xi}{dz}\right) + \frac{\sigma_x}{m-1} \\ \sigma_z &= \frac{2}{m-1}\mathrm{G}\left(\frac{\xi}{z} + m\frac{d\xi}{dz}\right) + \frac{\sigma_r}{m-1} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{vi})$$

而シテ圓筒ノ兩端ニ働ク軸壓力ハ圓筒ノ斷面ニ一樣ニ分布スルト假定セバ次ニ示ス如ク其値 σ_x ハ容易ニ求メラレル。卽チ軸壓力ノ總量ハ $\pi r_i^2 p_i - \pi r_o^2 p_o$ デアリ其分布サル、面積ハ $\pi r_o^2 - \pi r_i^2$ デアル故ニ內外力ノ平衡條件カラ

$$\pi(r_o^2 - r_i^2)\sigma_x = \pi(p_i r_i^2 - p_o r_o^2)$$

$$\therefore \quad \sigma_x = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{vii})$$

コレ卽チ軸應力デアツテ斷面內全體ニ對シ不變値デアル。

次ニ(vi)式ノ σ_y, σ_z ノ値ヲ(i)式ニ挿入シテ次ノ關係ヲ得ル。

$$z\frac{d^2\xi}{dz^2} + \frac{d\xi}{dz} - \frac{\xi}{z} = 0$$

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} + \frac{d\left(\frac{\xi}{z}\right)}{dz} = 0$$

此式ヲ積分スレバ

$$\frac{d\xi}{dz} + \frac{\xi}{z} = \mathrm{C}_1 \qquad \mathrm{C}_1 : 定數$$

$$\therefore \quad z\frac{d\xi}{dz} + \xi = \mathrm{C}_1 z$$

$$\frac{d(z\xi)}{dz} = \mathrm{C}_1 z$$

再ビ積分シテ

$$z\xi = \frac{1}{2}\mathrm{C}_1 z^2 + \mathrm{C}_2$$

$$\therefore \quad \xi = \frac{\mathrm{C}_1}{2}z + \frac{\mathrm{C}_2}{z}$$

$$\frac{d\xi}{dz} = \frac{\mathrm{C}_1}{2} - \frac{\mathrm{C}_2}{z^2}$$

是等ノ値デ(vi)式ヲ書換ヘルト

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{2}{m-1}\mathrm{G}\left[\frac{\mathrm{C}_1}{2}(m+1) + \frac{\mathrm{C}_2}{z^2}(m-1)\right] + \frac{\sigma_x}{m-1} \\ \sigma_z &= \frac{2}{m-1}\mathrm{G}\left[\frac{\mathrm{C}_1}{2}(m+1) - \frac{\mathrm{C}_2}{z^2}(m-1)\right] + \frac{\sigma_x}{m-1} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (\mathrm{viii})$$

而シテ此二ツノ積分定數 C_1 及 C_2 ハ次ノ條件カラ決定サレル。

卽チ

$z = r_i$ ナルトキ卽チ圓筒內面ニ於テハ $\sigma_z = -p_i$

$z = r_o$ ナルトキ卽チ圓筒外面ニ於テハ $\sigma_z = -p_o$

此値ヲ(viii)式ニ入レルト次ノ如クナル

$$-p_i = \frac{2}{m-1}\mathrm{G}\left[\frac{\mathrm{C}_1}{2}(m+1) - \frac{\mathrm{C}_2}{r_i^2}(m-1)\right] + \frac{\sigma_x}{m-1}$$

$$-p_o=\frac{2}{m-1}\,G\left[\frac{C_1}{2}(m+1)-\frac{C_2}{r_o^2}(m-1)\right]+\frac{\sigma_x}{m-1}$$

此二式カラ C_1 ト C_2 トヲ決定シ得テ

$$C_1=\frac{m-1}{m+1}\,\frac{1}{G}\left(\frac{p_i r_i^2-p_o r_o^2}{r_o^2-r_i^2}-\frac{\sigma_x}{m-1}\right)$$

$$C_2=\frac{p_i-p_o}{2}\,\frac{1}{G}\,\frac{r_o^2 r_i^2}{r_o^2-r_i^2}$$

此値ヲ(viii)式ニ挿入シ(vii)式ヲ應用スレバ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y&=\frac{p_i r_i^2-p_o r_o^2}{r_o^2-r_i^2}+(p_i-p_o)\frac{r_o^2 r_i^2}{r_o^2-r_i^2}\,\frac{1}{z^2}\\ \sigma_z&=\frac{p_i r_i^2-p_o r_o^2}{r_o^2-r_i^2}-(p_i-p_o)\frac{r_o^2 r_i^2}{r_o^2-r_i^2}\,\frac{1}{z^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(489)$$

(vii)式ノ σ_x ノ値及ビ(489)式ノ σ_y 及 σ_z ノ値ヲ用ヒテ三軸ノ方向ノ變形ヲ更ニ書直セバ

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1&=\frac{m-2}{m}\,\frac{1}{E}\,\frac{p_i r_i^2-p_o r_o^2}{r_o^2-r_i^2}\\ \varepsilon_2&=\frac{m-2}{m}\,\frac{1}{E}\,\frac{p_i r_i^2-p_o r_o^2}{r_o^2-r_i^2}\\ &\qquad+\frac{m+1}{m}\,\frac{1}{E}\,\frac{r_o^2 r_i^2}{r_o^2-r_i^2}(p_i-p_o)\frac{1}{z^2}\\ \varepsilon_3&=\frac{m-2}{m}\,\frac{1}{E}\,\frac{p_i r_i^2-p_o r_o^2}{r_o^2-r_i^2}\\ &\qquad-\frac{m+1}{m}\,\frac{1}{E}\,\frac{r_o^2 r_i^2}{r_o^2-r_i^2}(p_i-p_o)\frac{1}{z^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(ix)$$

橫縮ヲ考ヘタ場合ノ三軸ノ主變形ガ上ノ如ク求メラレコレニ相當スルP點ノ眞應力ハコレニEヲ掛ケテ夫々次ノ如クナル

圓筒軸ノ方向(X軸ノ方向)

$$\sigma_1=\varepsilon_1 E=\frac{m-2}{m}\,\frac{p_i r_i^2-p_o r_o^2}{r_o^2-r_i^2}$$

圓周ノ方向(Y軸ノ方向)

$$\left.\begin{aligned}\sigma_2=\varepsilon_2 E&=\frac{m-2}{m}\,\frac{p_i r_i^2-p_o r_o^2}{r_o^2-r_i^2}\\ &\qquad+\frac{m+1}{m}\,\frac{r_o^2 r_i^2}{r_o^2-r_i^2}(p_i-p_o)\frac{1}{z^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(490)$$

半徑ノ方向(Z軸ノ方向)

$$\begin{aligned}\sigma_3=\varepsilon_3 E&=\frac{m-2}{m}\,\frac{p_i r_i^2-p_o r_o^2}{r_o^2-r_i^2}\\ &\qquad-\frac{m+1}{m}\,\frac{r_o^2 r_i^2}{r_o^2-r_i^2}(p_i-p_o)\frac{1}{z^2}\end{aligned}$$

[II] 內壓ノミノ作用スル場合

此時ニハ $p_o=0$ ト置ケバヨイ。任意點Pノ眞應力ハ次ノ如クナル。尙 m ナル橫縮係數ヲ $\frac{10}{3}$ ト採ツタ時ノ數値ヲ附記スル。

軸ニ沿フテ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1=\varepsilon_1 E&=\frac{m-2}{m}\,\frac{r_i^2}{r_o^2-r_i^2}p_i\\ &=0.4\frac{r_i^2}{r_o^2-r_i^2}p_i\end{aligned}\right.$$

切線的ニ

$$\begin{aligned}\sigma_2=\varepsilon_2 E&=\frac{m-2}{m}\,\frac{r_i^2}{r_o^2-r_i^2}p_i+\frac{m+1}{m}\,\frac{r_o^2 r_i^2}{r_o^2-r_i^2}p_i\frac{1}{z^2}\\ &=0.4\frac{r_i^2}{r_o^2-r_i^2}p_i+1.3\frac{r_o^2 r_i^2}{r_o^2-r_i^2}p_i\frac{1}{z^2}\end{aligned}\quad\cdots\cdots(491)$$

向心的ニ

$$\begin{aligned}\sigma_3=\varepsilon_3 E&=\frac{m-2}{m}\,\frac{r_i^2}{r_o^2-r_i^2}p_i-\frac{m+1}{m}\,\frac{r_o^2 r_i^2}{r_o^2-r_i^2}p_i\frac{1}{z^2}\\ &=0.4\frac{r_i^2}{r_o^2-r_i^2}p_i-1.3\frac{r_o^2 r_i^2}{r_o^2-r_i^2}p_i\frac{1}{z^2}\end{aligned}$$

第一式ノ軸應力ハ切線應力(第二式)ニ比シテ非常ニ小サイ。故ニ之ヲ考慮スルヲ要シナイ場合ガ多イ。第二,第三式ノ應力ヲ考ヘルニ是等ガ最大トナルハ $z=r_i$ ナルトキデアル。即チ圓筒內面ニ於テ最大應力ヲ生ズル事ヲ知ル。從ツテ今材料ノ許容應張力

ヲ k_t, 許容應壓力ヲ k_c トセバ(491)式カラ次ノ關係ヲ得ル。

$$\left.\begin{aligned} {}_{max}\sigma_2 &= \frac{(m+1)r_o^2+(m-2)r_i^2}{m(r_o^2-r_i^2)}p_i = \frac{1.3r_o^2+0.4r_i^2}{r_o^2-r_i^2}p_i \leqq k_t \\ -{}_{max}\sigma_3 &= \frac{(m+1)r_o^2-(m-2)r_i^2}{m(r_o^2-r_i^2)}p_i = \frac{1.3r_o^2-0.4r_i^2}{r_o^2-r_i^2}p_i \leqq k_c \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(xi)$$

此二式ヲ比較シ切線應張力ノ方ガ絶對値ニ於テ向心應壓力ヨリ大ナル事ヲ知ル。故ニコレヲ標準トシテ其關係ヲ示セバ

$$\left.\begin{aligned} k_t &\geqq \frac{\dfrac{m+1}{m}r_o^2+\dfrac{m-2}{m}r_i^2}{r_o^2-r_i^2}p_i = \frac{1.3r_o^2+0.4r_i^2}{r_o^2-r_i^2}p_i \\ r_o &\geqq r_i\sqrt{\frac{k_t+\left(1-\dfrac{2}{m}\right)p_i}{k_t-\left(1+\dfrac{1}{m}\right)p_i}} = r_i\sqrt{\frac{k_t+0.4p_i}{k_t-1.3p_i}} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(492)$$

此關係カラ見ルモ若シ内壓ノ關係ガ

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)p_i = 1.3p_i = k_t$$

ナルトキ $r_o=\infty$ トナリ如何ニ小ナル内徑又ハ如何ニ大ナル外徑ヲ有スルモノモコレニ耐エ得ナイ事ヲ示ス。故ニ此式ノ成立スルハ

$$p_i < \frac{m}{m+1}k_t = \frac{k_t}{1.3}$$

ナル範圍ニ限ラレル。

尚此切線應力ハ(491)式ニ見ル如ク $\dfrac{1}{z^2}$ ニ比例シテ增減スル故ニ内面カラ外面ニ向ツテ急激ニ減ズル樣ナ分布ヲナスモノデアル。

例題第五十 $2r_o=200\,mm$, $2r_i=80\,mm$ ナル鑄鋼製圓筒ガ $p_i=1200\,kg/cm^2$ ノ内壓ヲ受クルモノトシテ應力分布ヲ求ム。

(答) 厚ハ $r_o-r_i=100-40=60\,mm.$

(491)式ノ第二式ニ於テ z ノ値ヲ種々ニ變化サセテ見ル。

1) 内面ニテ $z=4\,cm$ ノトキ

$$\sigma_2 = 0.4\times\frac{4^2}{10^2-4^2}\times1200+1.3\times\frac{10^2\times4^2}{10^2-4^2}\times1200\times\frac{1}{4^2} = 1950\,kg/cm^2.$$

2) $z=7\,cm$ ノトキ $\sigma_2=700\,kg/cm^2.$

3) 外面ニテ $z=10\,cm$ ノトキ

$\sigma_2=390\,kg/cm^2.$

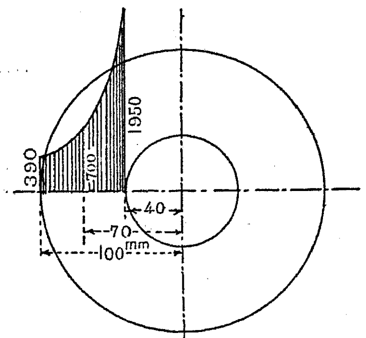

Fig. 582.

卽チ外面ニ於ケル應力ハ内面ノ約 $\frac{1}{5}$ ニ過ギザル事 Fig. 582 ニ示ス如キモノデアル。内面ハ大ナル應力ヲ受クルモ其以外ハ極メテ僅カノ應力ヲ受ケテ居ルニ過ギナイ。

厚肉ノ中空圓壔ニ於テハ本例題ニ示ス如ク極メテ不均等ノ應力分布ヲ爲スモノデアツテ斯クノ如キ缺點ヲ救フ法ハ複成圓筒(Compound cylinder) ヲ用フルニアル。卽チ圓筒ヲ内外二管ヨリ作ルノデアツテ前例ニ就イテコレヲ説明スレバ先ヅ内部 30 mm ノモノヲ鑄成シ殘リノ 30 mm ノモノハ後カラ其外部ヘ鑄成 (Mount) スルノデアル。斯クスルトキハ外部ノ熱セラレタ管ガ冷却スルニ從ツテ内部ノ管ヲ壓スル事トナリ初應力 (Initial stress) トシテ切線壓力ガ内部ノ管ニ發生シテ居ル故ニ内壓ヲ受ケタ時ノ應張力ヲ救フ事トナルノデアル。

[III] 薄キ圓筒ガ内壓ヲ受クル場合

若シ圓筒ノ厚 $t=r_o-r_i$ ガ徑ニ比シテ非常ニ小ナルトキニハ應力分布ハ厚イ場合ト異ヒ等布的デアルト考ヘテ差支ナク簡單ニ

$$2r_ilp_i = 2tl\sigma_t$$

$$\therefore\quad \sigma_t = p_i\frac{r_i}{t} \leqq k_t$$

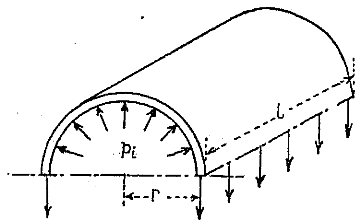

Fig. 583.

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} k_t \geqq p_i \dfrac{r_i}{t} \\ t \geqq r_i \dfrac{p_i}{k_t} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(493)$$

此(493)式ハ前ノ一般式(492)ノ第二式カラ誘導サレ得ル。卽チ薄キ故ニ横縮ヲ無視シ $m=\infty$ ト置キテ

$$r_o = r_i\sqrt{\frac{k_t+p_i}{k_t-p_i}} = r_i\sqrt{1+2\frac{p_i}{k_t-p_i}}$$

尙又 p_i ハ k_t ニ比シテ小ナリト見レバ

$$r_o \doteqdot r_i\sqrt{1+2\frac{p_i}{k_t}} \doteqdot r_i\left(1+\frac{p_i}{k_t}\right)$$

$$r_o - r_i = t = r_i\frac{p_i}{k_t}$$

[IV] 外壓ノミノ作用スル場合

若シ此圓筒ガ正シク其形ヲ保留シ外壓ヲ受ケテ挫折(Collapsing)スルコト無キモノト假定スレバ一般式ニ $p_i=0$ ト置ケバ求メラレ

$$\left.\begin{array}{l} \text{軸ニ沿フテ} \\ \sigma_1 = -\dfrac{m-2}{m}\dfrac{r_o^2}{r_o^2-r_i^2}p_o \\ \text{切線的ニ} \\ \sigma_2 = -\dfrac{m-2}{m}\dfrac{r_o^2}{r_o^2-r_i^2}p_o - \dfrac{m+1}{m}\dfrac{r_o^2 r_i^2}{r_o^2-r_i^2}p_o\dfrac{1}{z^2} \\ \text{向心的ニ} \\ \sigma_3 = -\dfrac{m-2}{m}\dfrac{r_o^2}{r_o^2-r_i^2}p_o + \dfrac{m+1}{m}\dfrac{r_o^2 r_i^2}{r_o^2-r_i^2}p_o\dfrac{1}{z^2} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(494)$$

此場合ニモ第一式ハ小サク第二,第三式ハ z ノ値ノ最小ナルトキニ最大値ヲ得ル。卽チ圓筒內面ニ於テ最大應力ヲ生ジ前式ニ

$z=r_i$ ト置ケバ

最大切線應力(應壓力)

$$-{}_{max}\sigma_2 = \frac{2m-1}{m}\frac{r_o^2}{r_o^2-r_i^2}p_o = 1.7\frac{r_o^2}{r_o^2-r_i^2}p_o$$

最大法線應力或ハ向心應力(應張力)

$${}_{max}\sigma_3 = \frac{3}{m}\frac{r_o^2}{r_o^2-r_i^2}p_o = 0.9\frac{r_o^2}{r_o^2-r_i^2}p_o$$

切線應力ハ壓力ヲ受ケ法線應力或ハ向心應力ハ張力ヲ受ケル。故ニ兩方ノ吟味ヲスル事ガ必要デアル。

$$\left.\begin{array}{ll} k_c \geqq 1.7\dfrac{r_o^2}{r_o^2-r_i^2}p_o \quad \text{或ハ} & r_o = \dfrac{r_i}{\sqrt{1-1.7\dfrac{p_o}{k_c}}} \\ k_t \geqq 0.9\dfrac{r_o^2}{r_o^2-r_i^2}p_o \quad \text{或ハ} & r_o = \dfrac{r_i}{\sqrt{1-0.9\dfrac{p_o}{k_t}}} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(495)$$

コノ二式ニヨリ其材料ノ性質ニ從ヒ何レカ大ナル r_o ヲ與ヘル方ヲ採用スル事ヲ必要トス。

若シ外壓ガ

$$1.7\,p_o = k_c, \qquad 0.9\,p_o = k_t$$

ナル如キ場合ニハ r_i ノ如何ニ關セズ $r_o=\infty$ トナル。故ニ(495)式ヲ用ヒ得ル範圍ハ

$$p_o < \frac{k_c}{1.7}$$

$$< \frac{k_t}{0.9}.$$

[V] 薄キ圓筒ガ外壓ヲ受クル場合

$t=r_o-r_i$ ナル厚ガ徑ニ比シテ非常ニ小ナルニ拘ラズ茲ニ挫折

ナキモノト假定スレバ内壓ヲ受クル場合ニ於ケルト同樣ニシテ

$$2r_o l p_o = 2tl\sigma$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} k_c \geqq p_o \dfrac{r_o}{t} \\ t \geqq r_o \dfrac{p_o}{k_c} \end{array}\right\} \cdots\cdots(496)$$

第二節　薄キ圓筒ノ挫折

(Collapse of Thin Cylinder)

直徑ニ比シ厚ノ小ナル圓筒ガ外壓ヲ受ケタ場合ニ其形ガ少シデモ圓形ナルヲ缺クカ又ハ材料ガ均質ナラザルカ或ハ壓力分布ガ一樣ナラザルカノ如キ缺點アレバ玆ニ生ズル應力ハ直應力卽チ張力又ハ壓力ノミトナラズシテ圓筒ハ圓形カラ遠ザカラントスル卽チ挫折セントスル傾向アルモノデアル。カヽル場合ニハ(496)式ヲ用ヒテ其應力ヲ計算スル事ハ出來ナイ。此挫折(Collapsing)ノ現象ニ關シテハ幾多ノ假定ヲ以テ算定シ且ツ常ニ實驗的性質ヲ帶ブルモノデアル。玆ニ其二三ヲ摘出スル事トシヤウ。

「フェーアバーン」氏公式 (Fairbairn's formula)

$$p = 806{,}300\,\frac{t^{2.19}}{l\mathrm{D}} \cdots\cdots(497)$$

式中　p = 挫折壓力 (#/□″)

t = 鈑厚 (*in.*)

l = 圓筒長 (*ft.*)

D = 圓筒直徑 (*in.*)

「アンウイン」氏公式 (Unwin's formula)

$$\left.\begin{array}{l} \text{縱襲接合 (Longitudinal lap joint) ヲ有スル管} \\ p = 7{,}363{,}000\,\dfrac{t^{2.1}}{l^{0.9}\mathrm{D}^{1.16}} \\ \text{縱衝頭接合 (Longitudinal butt joint) ヲ有スル管} \\ p = 9{,}614{,}000\,\dfrac{t^{2.21}}{l^{0.9}\mathrm{D}^{1.16}} \\ \text{縱橫ニ接合ヲ有スル普通ノ汽罐煙道 (Boiler flue)} \\ p = 15{,}547{,}000\,\dfrac{t^{2.35}}{l^{0.9}\mathrm{D}^{1.16}} \end{array}\right\} \cdots\cdots(498)$$

式中　l = 圓筒長 (*in.*)

「バッハ」氏公式 (C. Bach's formula)

$$t = \frac{p.d}{4k_c}\left\{1+\sqrt{1+\frac{a}{p}\,\frac{1}{1+\dfrac{d}{l}}}\right\} \cdots\cdots(499)$$

式中　t = 管ノ厚サ (*cm*)

p = 挫折外壓 (kg/cm^2)

d = 管ノ直徑 (*cm.*)

l = 管ノ長 (*cm.*)

a = 管ノ形狀ニ關スル係數

= 100　縱單列襲接ノ場合

= 80　縱單列衝頭接合ノ場合

k_c = 其材料ノ許容抗壓强度

$\fallingdotseq 500\,kg/cm^2$.

第三節　厚キ中空球 (Thick Hollow Sphere)

中空球ニ對スル式ノ誘導ハ圓筒ニ於ケルト同樣ニ行ハレ得ルノデアッテ今球ノ內半徑ヲ r_i, 外半徑ヲ r_o トシ其材料ノ許容抗

張强度ヲ k_t, 同ジク抗壓强度ヲ k_c トスレバ誘導ノ結果ハ次ノ如クナル。

[I] 內壓 p_i ノミノ作用スルトキ

最大應力ハ球ノ內面ニ生ズベク其方向ハ二樣ニ採ラレ

切線方面ニ於テ

$$k_t \geqq \frac{\frac{m+1}{2m}r_o^3+\frac{m-2}{m}r_i^3}{r_o^3-r_i^3}p_i=\frac{0.65r_o^3+0.4r_i^3}{r_o^3-r_i^3}p_i$$

向心方向ニ於テ　……(500)

$$k_c \geqq \frac{\frac{m+1}{m}r_o^3-\frac{m-2}{m}r_i^3}{r_o^3-r_i^3}p_i=\frac{1.3r_o^3-0.4r_i^3}{r_o^3-r_i^3}p_i$$

コノ二ツノ場合ノ內大ナル答ヲ與フル方ヲ採ル。

[II] 薄キ中空球ニ內壓 p_i ノミノ作用スルトキ

此場合ニハ

$$\pi r_i^2 p_i \leqq k_t . 2\pi r_i t$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} k_t &\geqq \frac{1}{2}p_i\frac{r_i}{t} \\ t &\geqq \frac{1}{2}r_i\frac{p_i}{k_t} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(501)$$

[III] 外壓 p_o ノミノ作用スルトキ

切線方向ニ於テ

$$k_c \geqq \frac{3(m-1)}{2m}\frac{r_o^3}{r_o^3-r_i^3}p_o=1.05\frac{r_o^3}{r_o^3-r_i^3}p_o$$

向心方向ニ於テ　……(502)

$$k_t \geqq \frac{3}{m}\frac{r_o^3}{r_o^3-r_i^3}p_o=0.9\frac{r_o^3}{r_o^3-r_i^3}p_o$$

[IV] 薄キ中空球ガ外壓 p_o ヲ受クルトキ

$$\left.\begin{aligned} k_c &\geqq \frac{1}{2}p_o\frac{r_o}{t} \\ t &\geqq \frac{1}{2}r_o\frac{p_o}{k_c} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(503)$$

第四節　曲　桁 (Curved Beam)

既ニ第六章第三節ニ於テ直桁ガ彎曲力率Mヲ受ケタ場合ニ生ズル應力 σ ハ次式ニテ與ヘラレル事ヲ說明シタ

$$\sigma=\frac{M}{I}y \cdots\cdots(93)\text{式參照}$$

此直桁公式ハ桁ノ中心線ガ曲線ヲ爲ス一般的ノ場合ニ適用スル事ハ出來ナイノデアツテ斯クノ如キ曲桁ニ於テハ曲率ノ外側ニ當ル緣維ハ內側ニ當ルモノニ比シテ其長サ大ナルガ故ニ彎曲力率ヲ受ケタトキ軸長 dx ニ相當スル外側緣維ニ生ズル總變形ハ內側ノモノヨリ大トナリ中立軸ハ此場合中心軸(斷面重心軸)ト一致セズ遙カニ曲率內側ノ方ヘ移動スルモノデアル。

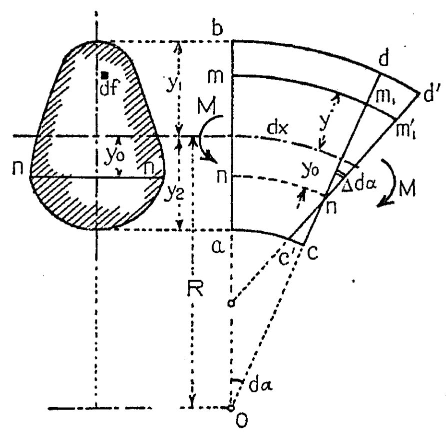

Fig. 584.

Fig. 584 ニ於テ軸長 dx ニ對スル曲桁一部 $ab-cd$ ヲ採リ其曲率中心ヲO, 曲率半徑ヲRトシ此曲桁ガ彎曲力率Mヲ受ケテ彎曲シタルタメ斷面 ab ニ對シテ cd ガ $c'd'$ ニ來タモノトシ此斷面ガ彎曲後モ猶平面ノ狀態ヲ保ツモノト假定スレバ中立軸 nn カラ y_o+y ノ距離隔ツタ極微面積 df ニ生ズル

應力ハ

$$\sigma = \varepsilon \mathrm{E} = \frac{m_1 m_1'}{m m_1}\mathrm{E}$$

$$= \frac{(y_0+y)\Delta d\alpha}{(\mathrm{R}+y)d\alpha}\mathrm{E} \cdots\cdots (\mathrm{i})$$

此曲桁ガ單ニ彎曲力率ノミヲ受クル單純ナル場合ヲ考フレバ一斷面內ニ生ズル應力ノ平衡條件カラ

$$\int \sigma df = 0 \cdots\cdots (\mathrm{ii})$$

ヲ得ル。(ii)式ヘ(i)式ノ値ヲ挿入スレバ

$$\int \frac{(y_0+y)\Delta d\alpha}{(\mathrm{R}+y)d\alpha}\mathrm{E}df = 0 \cdots\cdots (584)$$

式中一ツノ斷面ニ對シテ定數デアル $\Delta d\alpha, d\alpha, \mathrm{E}$ ヲ積分符號ノ前ニ出シ

$$\frac{\mathrm{E}\Delta d\alpha}{d\alpha}\int\frac{(y_0+y)}{(\mathrm{R}+y)}df = 0$$

卽チ

$$\int \frac{y_0+y}{\mathrm{R}+y}df = 0 \cdots\cdots (\mathrm{iii})$$

或ハ書直シテ

$$\int \frac{(\mathrm{R}+y)-(\mathrm{R}-y_0)}{\mathrm{R}+y}df = 0$$

$$\int df - \int \frac{\mathrm{R}-y_0}{\mathrm{R}+y}df = 0$$

$\int df = \mathrm{F}$ ＝斷面積デアル故ニ

$$\mathrm{F}-(\mathrm{R}-y_0)\int\frac{df}{\mathrm{R}+y} = 0$$

此式カラ中立軸ノ位置ヲ與ヘル距離 y_0 ガ求メラレ

$$y_0 = \mathrm{R} - \frac{\mathrm{F}}{\int\frac{df}{\mathrm{R}+y}} \cdots\cdots (504)$$

次ニ第二ノ平衡條件卽チ外力ニ因ル彎曲力率ハ內力ニ因ツテ生ズル抵抗力率ニ等シキ條件ヲ式ニ示サンガ爲メ力率中心ヲOヲ通シ紙面ニ直角ナル軸ニ採レバ

$$\mathrm{M} = \int \frac{(y_0+y)\Delta d\alpha}{(\mathrm{R}+y)d\alpha}\mathrm{E}.df.(\mathrm{R}+y)$$

$$= \frac{\mathrm{E}.\Delta d\alpha}{d\alpha}\int (y_0+y)df$$

然ルニ $\Delta d\alpha = \dfrac{\frac{\sigma}{\mathrm{E}}(\mathrm{R}+y)d\alpha}{y_0+y}$ デアル故ニコレヲ挿入シ

$$\mathrm{M} = \frac{\sigma(\mathrm{R}+y)}{y_0+y}\left[\int y_0 df + \int y df\right] \cdots\cdots (\mathrm{iv})$$

y ハ重心カラノ距離デアル故ニ $\int y df = 0$ トナリ且ツ

$$\int y_0 df = y_0.\mathrm{F}$$

デアル故ニ(iv)式ヲ簡單化シ

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{M} &= \frac{\sigma(\mathrm{R}+y)y_0\mathrm{F}}{y_0+y}\\ \sigma &= \frac{\mathrm{M}(y_0+y)}{\mathrm{F}y_0(\mathrm{R}+y)}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (505)$$

(504)式ニヨツテ求メタ y_0 ヲ(505)式ニ挿入スレバ求ムル彎曲應力ヲ計算スルコトヲ得ル。

以上取扱ツタノハ單ニ彎曲力率ノミデアツタ。若シ其以外ニ重心ニ働ク張力又ハ壓力ガアツタナラバ之ヲ別ニ加ヘル事ヲ必要トスル。

(504)式末項ノ値ハ單ニ曲桁斷面形ノミニ關スル定數デアツテ與ヘラレタ斷面ニ對シテ容易ニ計算サレ得ル。玆ニ簡單ナ二三ノ例ヲ示ス。

(I) 矩形斷面 (Fig. 585 參照)

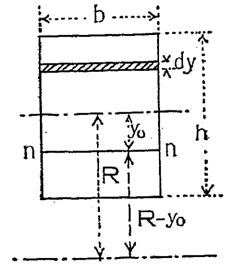

Fig. 585.

$df = b\,dy$ ヲ用ヒ

$$\int \frac{df}{R+y} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{dy}{R+y} = b \log_e \frac{R+\frac{h}{2}}{R-\frac{h}{2}}$$

從ツテ(504)式ハ次ノ如クナル

$$y_o = R - \frac{h}{2.303 \log_{10} \frac{R+\frac{h}{2}}{R-\frac{h}{2}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (506)$$

(II) 丁字形斷面　合成斷面ハ一般ニ積分ノ計算ヲ行フトキ積分限界ヲ數段ニ分チ行フヲ要シ丁字形斷面ハ突緣ト腹部トヲ二段トシテ積分スレバヨイ。

(III) 圓形斷面 (Fig. 586 參照)

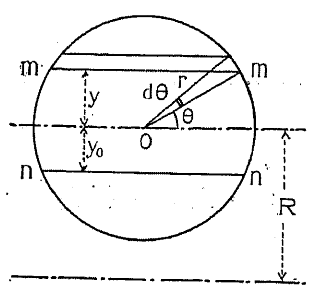

Fig. 586.

$$df = 2r\cos\theta . r d\theta . \cos\theta = 2r^2 \cos^2\theta\, d\theta$$

$$\therefore \int \frac{df}{R+y} = 2\int \frac{r^2 \cos^2\theta}{R + r\sin\theta} d\theta$$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ ノ關係ヲ挿入シテ式ヲ展開スレバ

$$\int \frac{df}{R+y} = 2\left[R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta - r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta - (R^2 - r^2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{R + r\sin\theta} \right]$$

$$= 2\left[\pi R + 0 - 2\sqrt{R^2 - r^2} \left(\tan^{-1} \frac{r+R}{\sqrt{R^2 - r^2}} - \tan^{-1} \frac{r-R}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right) \right]$$

然ルニ一般式 $\tan^{-1} u - \tan^{-1} v = \tan^{-1} \frac{u-v}{1+uv}$ ヲ利用シ最後ノ括弧ノ中ヲ計算スルニ

$$\tan^{-1} \frac{r+R}{\sqrt{R^2 - r^2}} - \tan^{-1} \frac{r-R}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \tan^{-1} \left\{ \frac{2R}{\sqrt{R^2 - r^2}} \Big/ \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{R^2 - r^2} \right) \right\}$$

$$= \tan^{-1} \infty = \frac{\pi}{2}$$

故ニ

$$\int \frac{df}{(R+y)} = 2\pi \left(R - \sqrt{R^2 - r^2} \right)$$

$$y_o = R - \frac{r^2}{2\left(R - \sqrt{R^2 - r^2}\right)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (507)$$

例題第五十一　幅 4″ 高 12″ ノ矩形斷面ヲ有スル曲桁其內側面ニ於ケル半徑 3″ ヲ有ス。60,000 *ft-lbs.* ノ彎曲力率ヲ受ケタルトキニ生ズル應力ヲ求ム。

(答) 矩形斷面ナルガ故ニ(506)式ニヨリ

$$y_o = \left(3 + \frac{12}{2}\right) - \frac{12}{2.303 \log \frac{3+12}{3}} = 9 - \frac{12}{2.303 \times 0.6990}$$

$$= 9 - 7.458 = 1.542\, in.$$

從ツテ生ズル應力ハ(505)式ニヨリ

外側緣維ニ於テ　$\sigma_1 = \dfrac{60{,}000 \times 12 \times (1.542+6)}{4 \times 12 \times 1.542 \times (3+6+6)} = 4890\ \#/\square''$

內側緣維ニ於テ　$\sigma_2 = \dfrac{60{,}000 \times 12 \times (1.542-6)}{4 \times 12 \times 1.542 \times (3+6-6)} = -14460\ \#/\square''$

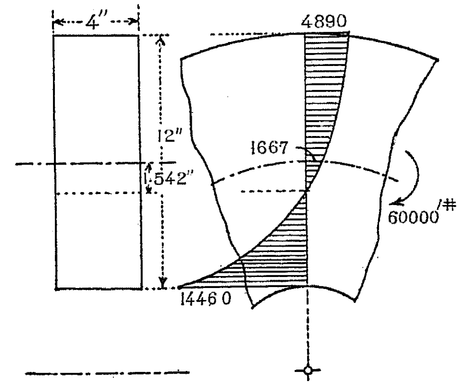

Fig. 587.

卽チ一方ハ應張力一方ハ應壓力デアル。

重心軸上ニ於テハ

$$\sigma_o = \frac{60{,}000 \times 12 \times 1.542}{4 \times 12 \times 1.542 \times (3+6)} = 1667\ \#/\square''$$

應力分布ノ狀態ヲ圖示スレバ大約 Fig. 587 ニ示ス如クナル。

問題集第十四

(1) 鋼製ノ大砲アリ。內徑 $7\frac{1''}{2}$, 厚 $1\frac{3''}{4}$ トシテ爆發ニヨリ生ズル應力 10,000 #/□″ ヲ受クルトキ生ズル最大應張力ヲ求ム。　(答) 27300 #/□″

(2) 內徑 8″ ノ水管ガ 520 #/□″ ノ內壓ヲ受ケタルトキ最大許容應力ヲ 10000 #/□″ トシテ必要ナル肉厚ヲ求ム。　(答) 0.22″

(3) 外徑 7″, 內徑 5″ ノ水壓機水筩ガ許容應力 3,000 #/□″ ヲ超過セザルタメノ最大內壓ヲ求ム。　(答) 973 #/□″

(4) 內徑 $3\frac{1''}{4}$ ノ砲身ガ爆發壓力 15000 #/□″ ヲ受ケテ許容應力 30000 #/□″ ヲ超過セザルタメニハ外徑ヲ何程トスベキカ。　(答) 5.63″

(5) 鋼管內徑 6″ ナルモノ內壓 400 #/□″ ヲ受ケ應張力 6000 #/□″ ヲ超過セザル爲メニ必要ナル管厚ヲ求ム。此管ヲ豫メ徑 0.05″ ノ針金ニテ密接ニ卷キツケ內壓ノ作用セザル狀態ニ於テ針金ニ 15000 #/□″ ノ張力ヲ有セシムルモノトセバ 4000 #/□″ ノ內壓ヲ與ヘタルトキ管ニ生ズル平均張力及ビ針金ノ受クル張力ヲ求ム。　(答) 0.20″, 2070 #/□″, 20015 #/□″.

(6) 矩形曲桁ノ高ヲ h トスルトキハ其中立軸ノ變位ハ約 $h^2/12R$ ニテ與ヘラルヽ事ヲ證セヨ。

(7) 幅 1″, 高 2″ ノ矩形斷面ヲ有スル鐵棒ヲ半徑 4″ ニ曲ゲテ鉤 (Hook) ニ用ヒタル場合其曲率中心ヲ通ジテ 10000 *lbs* ノ荷重ガ懸垂サレタルトキニ生ズル最大應力ヲ求ム。　(答) 7700 #/□″.

(8) 內側面曲率半徑 1″ ニ鑄造シタル 1″ 角ノ鑄鐵曲桁ガ耐エ得ル最大彎曲力率ヲ求ム。但シ鑄鐵ノ許容應張力ヲ 3000 #/□″ 同應壓力 15000 #/□″ トス。

(答) 曲率內側ニ壓力ノ生ズルトキ 614 *in-lbs*; 同ジク張力ノ生ズルトキ 386 *in-lbs.*

(9) 圖示斷面ノ丁形曲桁アリ。中立軸ノ位置ヲ求メ且ツ 100,000 *in-lbs.* ノ力率ヲ受ケタルトキノ應力ヲ求ム。

(答) 曲率中心ヨリ 4.446″; 9130, 8700 #/□″.

(10) 前題ニ於テ曲率中心ヲ反對側ニ緣維ヨリ 3″ 隔ツテ存スルトセバ生ズル應力ハ如何。

(答) 4650, 17900 #/□″