第八章　長柱ノ强度

第一節　概　　論

既ニ第三章ニ說明シタ如ク短柱ニ於テハ應力ハ等布的ニ分布サレ

$$\sigma = \frac{P}{F} \leqq k_c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (49)式參照$$

然ルニ長柱(Long column)デハ斯樣ニ簡單ニハ取扱ヒ難イ,斷面ノ或部分ニ於ケル應力ハ他ノ部分ヨリ大ナル强度トナリ均等强度ヲ示サナイ。此原因ハ彎曲(Sidewise bending)ニ起因スル彎曲應力(Transverse stress)ノ加ハルタメデアツテ斯クノ如キ長柱ガ受ケ得ル荷重ハ同ジ斷面ヲ有スル短柱ヨリ遙カニ小ナルモノデアル。而シテ長サガ增セバ增ス程此荷重ハ減ズルモノデアル。長柱ノ破壞ニ就イテハ多クノ實驗ガ行ハレテ居ルガ其破壞荷重ハ其抗壓材ノ長ノ約自乘ニ反比例スル事ガ示サレテ居ル。然シ單ニ長サノミナラズ端狀(End condition)モ亦大ナル影響ヲ有スルノデアツテ端狀ハ之ヲ三ツニ別チ得ル。Fig. 506ニ記號的ニ圖示サレタル@圖ハ所謂**圓端**(Round end or Pin end)ト稱セラレルモノデアツテ荷重ヲ受ケテ彎曲スル場合ニ軸ハ宛モ荷重ヲ受ケタ單桁支點ノ場合ノ如ク自由ノ方向ニ曲ガリ得ル。©圖ハ**定端**(Fixed end or

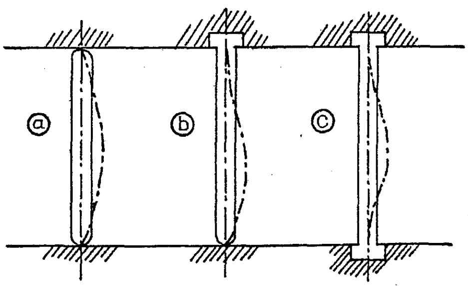


Fig. 506

Flat end)ト稱スルモノデアツテ荷重ヲ受ケテ彎曲シタ時其端ニ於テ其曲線ニ引カレタ切線ハ元ノ軸ノ方向ヲ保持スル。ⓑ圖ハ一方ガⓐ一方ガⓒ卽チ一端圓端他端定端ノ場合デアツテ其曲線ハ上揭二樣ノ兩方ヲ具備スルモノデアル。以上三者ノ强度ニ就イテハ ⓒ＞ⓑ＞ⓐ ノ順序デアル事ハ論ヲ俟タヌ。

一體長柱强度ノ理論ハ桁ノ夫レニ於ケル如ク完成ノ域ニ達シテ居ナイ。從テ實際的ニ用ヒラレル公式ノ如キモ大部分實驗的性質ヲ帶ビタモノデアル。然シナガラ其式ノ形ハ一般ニ或理論的考察ニ據ツテ決定セラレコレニ實驗ヨリ得タ數値ヲ加味シタモノトナツテ居ル。斯クノ如キ理論的考察ハ之ヲ二ツノ部類ニ分チ得ル。卽チ

(1) 實際ニハ殆ンド實現サレナイ樣ナ純理想的ノ計算

(2) 經驗的計算 嚴格ナル合理的基礎ハ無イガ實驗トハヨク一致スルト云フ點カラ形成サレタ計算

節ヲ更メテ其詳細ヲ說明シヤウ。

第二節 「ゴルドン」氏公式 (Gordon's Formula)

Fig. 507 ハ兩定端 (Both end fixed) ノ長柱ガ荷重ヲ受ケテ彎曲シタ場合デアツテ其最大撓度 δ ヲ爲シタ部分ノ斷面 AB ヲ採ツテ考ヘルニ此部分ノ應力ハ二部カラ成ルモノト云ヒ得ル。Fig. 507 ⓒニ示ス應力ノ分解カラ明カナル如ク

σ' ＝直荷重 P ニ因ツテ生ズル應力

σ'' ＝抗壓材ガ最モ撓メ易キ (Flexible) 方向ニ起コル彎曲ニ因ル應力

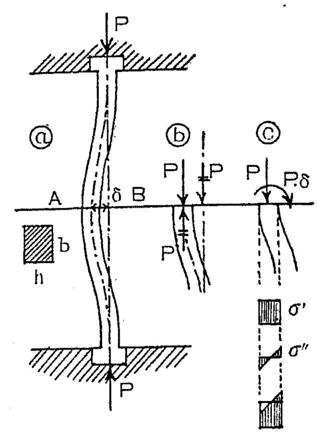


Fig. 507.

此內直荷重 P ハ勿論斷面內ニ均等的ニ分布サレルカラ

$$\sigma' = \frac{P}{F} \qquad F = \text{斷面積}$$

他ノ彎曲ニ因ル σ'' ハ彎曲力率 $M = P.\delta$ ニ因ルモノデアツテ

$$\sigma'' = \frac{6M}{bh^2} \text{(矩形斷面トシテ)}$$

$$= \frac{M}{nbh^2} \text{(一般的ニ)}$$

$$= \frac{P\delta}{nbh^2} \backsim \frac{P\delta}{bh^2}$$

式中 h ＝其斷面ニ於ケル小サイ方ノ邊長又ハ直徑

b ＝ 〃 〃 〃 大キイ方ノ 〃 〃

此式ノ δ ニ關シテハ既ニ第六章第二十四節ニ求メタ如ク

$$\delta = n'\frac{\sigma l^2}{Eh} \backsim \frac{l^2}{h}$$

此 δ ヲ前式ニ挿入シ

$$\sigma'' = \frac{n'}{n}\,\frac{\sigma}{E}\,\frac{Pl^2}{bh^3} \backsim \frac{Pl^2}{Fh^2}$$

$$\backsim \sigma'\left(\frac{l}{h}\right)^2$$

此式ニヨリ σ' モ σ'' モ共ニ荷重狀態ト斷面寸法トガ與ヘラルレバ計算サレル事トナリ而シテ緣維應力 $\sigma'+\sigma''$ ガ其材料ノ强度ヲ超エテハナラヌ條件カラ次式ヲ得ル。

$$K_c \geqq \sigma' + \sigma'' = \sigma' + \alpha\sigma'\left(\frac{l}{h}\right)^2$$

$$\geqq \sigma'\left\{1 + \alpha\left(\frac{l}{h}\right)^2\right\}$$

$$\geqq \frac{P}{F}\left\{1 + \alpha\left(\frac{l}{h}\right)^2\right\}$$

式中　$\alpha=\dfrac{n'}{n}\,\dfrac{\sigma}{E}$

從ツテ極限ニ於テハ

$$P=\frac{K_c F}{1+\alpha\left(\dfrac{l}{h}\right)^2}\quad\cdots\cdots(351)$$

コレガ兩定端ノ長柱ニ對スル「ゴルドン」氏公式デアツテ α ハ實驗カラ求メラレル値デアル。

其他ノ端狀ノ場合ニ對シテハ Fig. 508 ニ示ス如ク其場合ニ應ジ適當ナル有效長ヲ採ル事ニヨツテ兩定端ノ長柱ト同一ノ撓度ヲ生ズルモノトスル事ヲ得ルガ故ニ兩圓端ノ場合ニハ l ニ $2l$ ヲ挿入シ

$$P=\frac{K_c F}{1+\alpha\left(\dfrac{2l}{h}\right)^2}=\frac{K_c F}{1+4\alpha\left(\dfrac{l}{h}\right)^2}\quad\cdots\cdots(352)$$

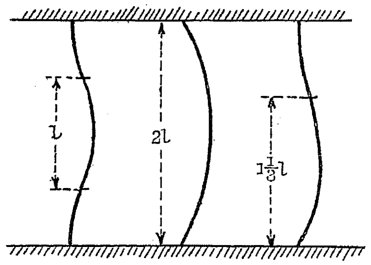


Fig. 508.

一端圓端他端定端ノ場合ニハ l ニ $1\frac{1}{3}l$ ヲ挿入シ

$$P=\frac{K_c F}{1+\alpha\left(\dfrac{\frac{4}{3}l}{h}\right)^2}=\frac{K_c F}{1+\dfrac{16}{9}\alpha\left(\dfrac{l}{h}\right)^2}\quad\cdots\cdots(353)$$

式中　P = 總荷重

K_c = 許容應力又ハ材料ノ强度

l = 抗壓材ノ長サ

h = 抗壓材斷面ニ於ケル外接矩形ノ最小邊(l ト同單位)

(Fig. 509 參照)

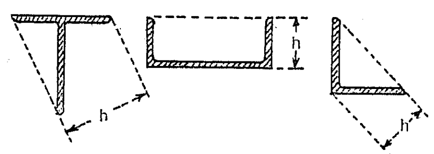


Fig. 509.

玆ニ實驗ヨリ得タ α 及 K_c ノ値ヲ種々ノ斷面ノ抗壓材ニ對シ表示シテ第十五表ヲ得ル。

第十五表　「ゴルドン」氏公式ニ於ケル K_c 及 α ノ値

材料	斷面形狀	K_c(#/□″)	α	材料	斷面形狀	K_c(#/□″)	α
鑄鐵	矩形實柱	80,000	$\frac{1}{450}$	軟鋼	圓形實柱	67,000	$\frac{1}{1400}$
	圓形實柱	80,000	$\frac{1}{400}$		圓形中空柱	67,000	$\frac{1}{2500}$
	矩形中空柱	80,000	$\frac{1}{500}$	硬鋼	矩形實柱	114,000	$\frac{1}{1400}$
	圓形中空柱	80,000	$\frac{1}{600}$		圓形實柱	114,000	$\frac{1}{900}$
錬鐵	矩形實柱	36,000	$\frac{1}{3000}$		圓形中空柱	114,000	$\frac{1}{1500}$
	圓形實柱	36,000	$\frac{1}{2250}$	松材	矩形實柱	5,000	$\frac{1}{250}$
	圓形中空柱	36,000	$\frac{1}{5500}$		圓形實柱	5,000	$\frac{1}{250}$
軟鋼	矩形實柱	67,000	$\frac{1}{2000}$	樫材	(乾燥)	7,200	$\frac{1}{250}$

第三節　「ランキン」氏公式

(Schwarz-Rankine Formula)

前節ニ述ベタ「ゴルドン」氏公式ニ於ケル係數 α ハ定數デハナイ。材料ノ性質及端狀ニ依ツテ變化スルノミナラズ又抗壓材ノ斷面形ニ依ツテモ變ル。然ルニ其斷面形ニ基因スル變化ハ最小橫寸法 (Least transverse dimension) ノ代リニ最小環動半徑 (Least radius of gyration) ヲ用レバ之ヲ消去スル事ガ出來ルノデアツテ斯クスル事ニ據ツテ公式ガ一層精確ナモノトナル。此兩者ノ關係ヲ示サン

ニ最小環動半徑ヲrトスレバ

$$r^2=\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{F}}=\frac{nbh^3}{n_1bh}=\frac{n}{n_1}h^2$$

$$h^2=\frac{n_1}{n}r^2$$

$$\therefore\quad \alpha\left(\frac{l}{h}\right)^2=\alpha\frac{n}{n_1}\left(\frac{l}{r}\right)^2$$

今　$\alpha\dfrac{n}{n_1}=\beta$ ト置ケバ此式ノn及n_1ハ斷面形ニ關スル係數デアツテ最小橫寸法hノ代リニ最小環動半徑rヲ挿入スル事ニ據ツテ此斷面形ニ關スル變化ハ全部rノ內ニ含マレ結局今採用シタβナル係數ハ斷面形ニ關係ノ無イ係數トナルノデアル。從ツテ「ゴルドン」氏公式ハ書換エテ次ノ如クナル。

$$\mathrm{K}_c\geqq\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{F}}\left(1+\beta\frac{l^2}{r^2}\right)$$

或ハ

定端ニ對シ　$$\mathrm{P}\leqq\frac{\mathrm{K}_c\mathrm{F}}{1+\beta\left(\dfrac{l}{r}\right)^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(354)$$

圓端ニ對シ　$$\mathrm{P}\leqq\frac{\mathrm{K}_c\mathrm{F}}{1+4\beta\left(\dfrac{l}{r}\right)^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(355)$$

一端圓端
他端定端ニ對シ　$$\mathrm{P}\leqq\frac{\mathrm{K}_c\mathrm{F}}{1+\dfrac{16}{9}\beta\left(\dfrac{l}{r}\right)^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(356)$$

式中　$$\beta=\alpha\frac{r^2}{h^2}=\alpha\left(\frac{r}{h}\right)^2$$

(354) 乃至 (356) 式ガ所謂「ランキン」氏公式デアツテ同式ニ於ケルK_c及βニ對スル一般ニ認容サレタル數値ハ大略第十六表ノ如シ。

第十六表　「ランキン」氏公式ニ於ケルK_c及βノ値

材料	K_c		β
	#/□"	kg/cm²	
軟鋼	47,000—67,000	3,300—4,700	$\frac{1}{25,000}$—$\frac{1}{30,000}$
錬鐵	36,000	2,500	$\frac{1}{36,000}$
鑄鐵	80,000	5,600	$\frac{1}{6,400}$
乾燥木材	7,200	510	$\frac{1}{3,000}$

「ランキン」氏公式ノβノ値ニ就イテ多クノ實驗ヲ行ツタ「テトマイヤー」氏 (Tetmajer) ノ定メタ結果ヲ第十七表ニ示ス。

第十七表　「ランキン」氏公式ノβノ値ニ關スル
「テトマイヤー」氏ノ實驗結果

材料	木材	鑄鐵	錬鐵	鋼	建築用鋼平均
$\frac{l}{r}$	20—200	20—150	20—250	20—250	20—250
β	0.000 057 5 $=\frac{1}{17,500}$	0.000 175 $=\frac{1}{5,700}$	0.000 040 $=\frac{1}{25,000}$	0.000 035 $=\frac{1}{28,500}$	0.000 037 5 $=\frac{1}{26,650}$

前掲「ランキン」氏公式ハ廣ク用ヒラレ特ニ米佛ニテハ專ラ此式ニ據ツテ居ル。其米國ニ用ヒラルヽ形式ノ一例ヲ示セバ簡單ニ次ノ如ク採ラレテ居ル。

$$安全荷重=\frac{k_c\mathrm{F}}{1+\beta\left(\dfrac{l}{r}\right)^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(357)$$

式中　$k_c=8{,}000$ #/□"　錬鐵ニ對シ
$=10{,}000$　鋼

$$\beta = \frac{1}{40{,}000} \quad \text{兩端定端ノ場合}$$

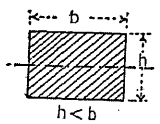
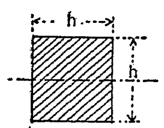
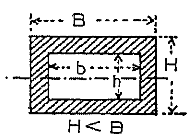
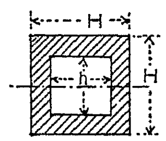
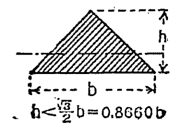
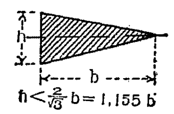
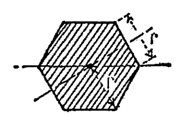
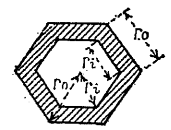
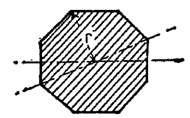
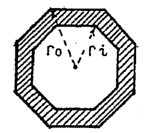
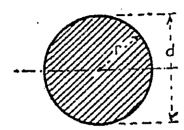
$$= \frac{1}{30{,}000} \quad \text{一端定端他端圓端}$$

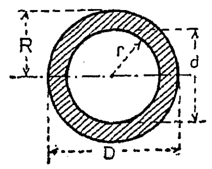
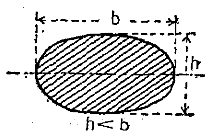
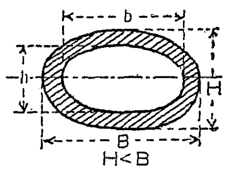
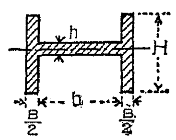
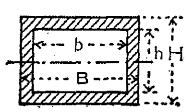
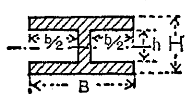
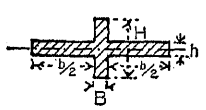
$$= \frac{1}{20{,}000} \quad \text{兩端圓端}$$

$\frac{l}{r}$ ノ比ハ**細長度**(Slenderness ratio) ト命名シ部材ノ細長サヲ示ス尺度ト考ヘラレル。

第十八表ニ最小環動半徑ニ關スル算式ヲ列擧シヤウ。

第十八表　最小環動半徑ノ表

番號	斷面	斷面積 F	最小慣性能率 I_{min}	最小環動半徑 $r_{min}=\sqrt{\frac{I_{min}}{F}}$
1		bh	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{h}{2\sqrt{3}}$ $=0.2887\,h$
2		h^2	$\frac{h^4}{12}$	$\frac{h}{2\sqrt{3}}$ $=0.2887\,h$
3		$BH-bh$	$\frac{1}{12}(BH^3-bh^3)$	$\sqrt{\frac{BH^3-bh^3}{12(BH-bh)}}$
4		H^2-h^2	$\frac{1}{12}(H^4-h^4)$	$\frac{\sqrt{H^2+h^2}}{2\sqrt{3}}$ $=0.2887\sqrt{H^2+h^2}$
5		$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{48}$	$\frac{h}{3\sqrt{2}}$ $=0.2357\,h$
6		$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{48}$	$\frac{h}{2\sqrt{6}}$ $=0.2041\,h$
7		$\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$ $=2.598\,r^2$	$\frac{5\sqrt{3}}{16}r^4$ $=0.5413\,r^4$	$\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}r$ $=0.4564\,r$
8		$2.598(r_o^2-r_i^2)$	$0.5413(r_o^4-r_i^4)$	$0.4564\sqrt{r_o^2+r_i^2}$
9		$2.828\,r^2$	$0.6381\,r^4$	$0.4750\,r$
10		$2.823\,(r_o^2-r_i^2)$	$0.6381(r_o^4-r_i^4)$	$0.4750\sqrt{r_o^2+r_i^2}$
11		$\pi r^2=\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi r^4}{4}=\frac{\pi d^4}{64}$ $=0.7854\,r^4$ $=0.0491\,d^4$	$\frac{r}{2}=\frac{d}{4}$

12		$\pi(R^2-r^2)$ $=\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)$	$\frac{\pi}{4}(R^4-r^4)$ $=\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$	$\frac{1}{2}\sqrt{R^2+r^2}$ $=\frac{1}{4}\sqrt{D^2+d^2}$
13		$\frac{\pi}{4}bh$ $=0.7854\,bh$	$\frac{\pi}{64}bh^3$ $=0.0491\,bh^3$	$\frac{h}{4}$
14		$\frac{\pi}{4}(BH-bh)$ $=0.7854(BH-bh)$	$\frac{\pi}{64}(BH^3-bh^3)$ $=0.0491(BH^3-bh^3)$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{BH^3-bh^3}{BH-bh}}$
15		$BH+bh$	$\frac{1}{12}(BH^3+bh^3)$	$\sqrt{\frac{BH^3+bh^3}{12(BH+bh)}}$
16		$BH-bh$	$\frac{1}{12}(BH^3-bh^3)$	$\sqrt{\frac{BH^3-bh^3}{12(BH-bh)}}$
17		$BH-bh$	$\frac{1}{12}(BH^3-bh^3)$	$\sqrt{\frac{BH^3-bh^3}{12(BH-bh)}}$
18		$BH+bh$	$\frac{1}{12}(BH^3+bh^3)$	$\sqrt{\frac{BH^3+bh^3}{12(BH+bh)}}$

第四節　「オイラー」氏公式 (Euler's formula)

「オイラー」氏ノ長柱ニ對スル理論ハ斷面形ニ對シ長サノ極メテ大ナル柱ニ對スルモノデアツテ其柱ハ完全ニ直線デ完全ニ均質(Hom-geneous)デアリ荷重ハ精確ニ軸ニ沿フテ作用スルモノト假定スル。斯クノ如キ總テノ理想的條件ノ下ニアル長柱ハ同ジ斷面ノ短柱ノ抗壓荷重ヨリハ遙カニ低イ荷重デ以テ彎折(Buckle, Collapse)スルノデアルガ其彎折荷重(Buckling load)卽チ限界荷重(Critical load)ニ達スル迄ハ少シノ彎曲ヲモ生ゼズシテ此限界荷重ニ達スルヤ否ヤ忽チ彎折スルモノト考ヘルノデアル。長柱ガ此彎折ニ對シ抵抗スル强度ハ勿論端狀ニ依ツテ非常ニ異ナルノデアツテ其種々ノ場合ニ對シ研究ヲ進メヤウ。

[I] 一端固定シ他端自由ナル場合

一端Aガ固定シ他端Bガ最初BニアツタモノガB荷重ヲ受ケタ時自由ニ横ニ動キ得テ且ツ任意ノ傾斜ヲ成スモノトスル。此場合固定端カラxナル距離ノD點ガD′ニ動イタ時ニ受ケル力率ハ

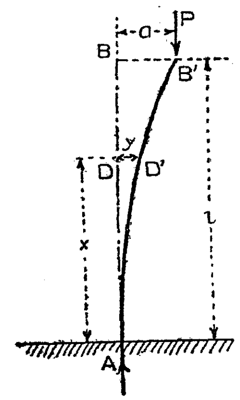


Fig. 510.

$$M=P(a-y)$$

從ツテ　$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M=P(a-y)$　ヨリ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P}{EI}(a-y)$$

今　$\frac{P}{EI}=\alpha^2$　ト置ケバ

$$\frac{d^2y}{dx}+\alpha^2y=\alpha^2a \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

此微分方程式ノ解答ハ

$$y = \mathrm{A}\,\sin ax + \mathrm{B}\cos ax + a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

式中A及Bハ積分係數デアツテ端狀ニ依ツテ決定サルベキモノデアル。Fig. 510 ニ於テ $x=0$ ノ時ニハ $y=0$ トナルベキガ故ニ(ii)式ニ此値ヲ挿入シ

$$0 = 0+\mathrm{B}+a$$

$$\therefore\quad \mathrm{B} = -a$$

又 $x=0$ ノ時ニハ $\dfrac{dy}{dx}=0$ (固定端ナレバ) トナル故ニ

$$\frac{dy}{dx} = a(-\mathrm{B}\sin ax + \mathrm{A}\cos ax) \qquad \text{ニ於テ}$$

$$0 = a(-0+\mathrm{A})$$

$$\therefore\quad \mathrm{A} = 0$$

故ニ(ii)式ハ次ノ如ク表ハサレル

$$y = a(1-\cos ax) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{iii})$$

此撓度ノ關係式ハ x ノ總テノ値ニ對シテ成立スベキ筈デアル。故ニ今特ニ自由端ヲ考ヘレバ $x=l$ ニ於テ $y=a$ デアル故ニ

$$a = a - a\cos al$$

$$a\cos al = 0$$

此結果ヨリ見テ $a=0$ ナルカ又ハ $\cos al=0$ ナル事ヲ要ス。然ルニ $a=0$ ナル事ハB點ノ撓度ノ零ナル事ヲ示シ不合理デアル故ニ結局 $\cos al=0$ トナラネバナラヌ。卽チ

$$\cos al = 0$$

$$al = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \cdots\cdots$$

是等ノ解答ノ內カラPノ最小量ヲ與ヘル $\dfrac{\pi}{2}$ ヲ採レバ

$$a^2l^2 = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{EI}}\,l^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$\therefore\quad \mathrm{P} = \frac{\pi^2\mathrm{EI}}{4l^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(358)$$

此(358)式ガ極メテ長キ柱ノ一端固定他端自由ナルトキノ彎折荷重ヲ與ヘルノデアツテ今其長柱斷面ノ最小環動半徑ヲ r トセバ $r^2 = \dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{F}}$ デアル故ニ

$$\mathrm{P} = \frac{\pi^2\mathrm{EF}}{4}\left(\frac{r}{l}\right)^2 = \frac{\pi^2\mathrm{EF}}{4\left(\dfrac{l}{r}\right)^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(359)$$

應壓力平均强度

$$\sigma_o = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{F}} = \frac{\pi^2\mathrm{E}}{4\left(\dfrac{l}{r}\right)^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(360)$$

此 σ_o ハ普通ノ應壓彈性限度ヨリ遙カニ小ナル値デアル。

[II] 兩端圓端 (Both end on pivot or frictionless hinges)

此場合ニハ Fig. 511 ニ示ス如ク其抗壓材ノ半長ヲ採ツテ考フレバ其端狀モ荷重狀態モ[I]ト全ク等シクナル故ニ彎折荷重ハ前ノ結果ノ l ノ代リニ $\dfrac{l}{2}$ ヲ置イテ求メラレ

$$\mathrm{P} = \frac{\pi^2\mathrm{EI}}{4\left(\dfrac{l}{2}\right)^2} = \frac{\pi^2\mathrm{EI}}{l^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(361)$$

$$\sigma_o = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{F}} = \frac{\pi^2\mathrm{E}}{\left(\dfrac{l}{r}\right)^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(362)$$

此場合ハ[I]ニ比シテ4倍大ナル荷重ニ耐エ得ル事ヲ知ル。

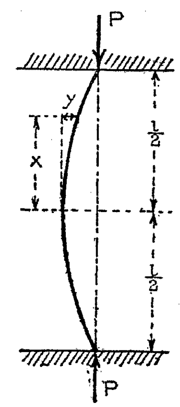


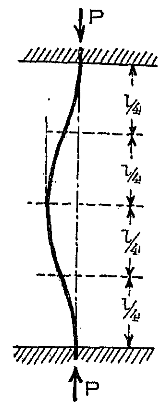
Fig. 511.

[III] 兩端定端 (Both end rigidly fixed in position and direction)

此場合ニハ Fig. 512 ニ示ス如ク此抗壓材ヲ4等分シテ考フレバ其各部ガ [I] ノ端狀及荷重狀態ニ一致スル故ニ此場合ノ彎折荷重ヲ求メルニハ (358) 式ノ l ノ代リニ $\frac{l}{4}$ ヲ挿入シ

$$P=\frac{\pi^2 EI}{4\left(\frac{l}{4}\right)^2}=\frac{4\pi^2 EI}{l^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(363)$$

$$\sigma_0=\frac{P}{F}=\frac{4\pi^2 E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(364)$$



Fg. 512.

[IV] 一端定端他端圓端 (One end A rigidly fixed and the other end B hinged without friction, i. e. free to take any angular position but not to move laterally)

此場合若シ荷重ニヨツテ此抗壓材ガ彎屈シ始メタナラバ茲ニVナル水平力ガ圓端ニ働キ始メル。然ラバAヨリxナル距離ノ任意點Dヲ採リ其彎曲力率ヲ求ムルニ

$$M=V(l-x)-P.y$$

$$\therefore\quad EI\frac{d^2y}{dx^2}=V(l-x)-Py$$

$$\frac{d^2y}{d^2x}+\frac{P}{EI}y=\frac{V}{EI}(l-x)\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

今 $\frac{P}{EI}\equiv a^2$ ト置イテ此微分方程式ヲ解ケバ

$$y=A\sin ax+B\cos ax+\frac{V}{P}(l-x)\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

其積分定數ヲ求メルタメニ $x=0,\ y=0$ ト置キ

$$0=0+B+\frac{V}{P}l$$

$$\therefore\quad B=-\frac{V}{P}l.$$

又 (ii) 式ヲ微分シコレニ $x=0,\ \frac{dy}{dx}=0$ ト置キ

$$0=Aa-0-\frac{V}{P}$$

$$\therefore\quad A=\frac{V}{P}\cdot\frac{1}{a}$$

此値ヲ (ii) ニ挿入シ

$$y=\frac{V}{P}\left(\frac{1}{a}\sin ax-l\cos ax+l-x\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{iii})$$

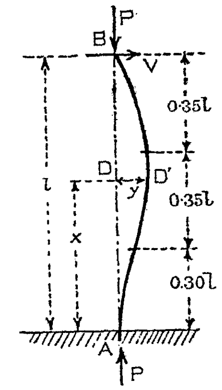


Fig. 513.

此式ハ x ノ總テノ値ニ對シテ眞デアルガ故ニ $x=l$ ト置イタトキニ $y=0$ トナリ

$$0=\frac{V}{P}\left(\frac{1}{a}\sin al-l\cos al\right)$$

此關係ハ $V=0$ 又ハ $\frac{1}{a}\sin al-l\cos al=0$ 即チ $\tan al=al$ ナルトキニ成立ス。$V=0$ ハ無撓度ヲ意味スルガ故ニ此場合ノ解答トシテ $\tan al=al$ ナル條件ヲ得ル。即チ

$$\tan\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l=\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l$$

コレハ正切 (Tangent) ニ對スル三角函數表ヲ用ヒテ容易ニ解キ得ル關係デアル。$P=0$ ナラザル最モ小ナル數値トシテ

$$al=4.494\text{ radians}=4.5\text{ radians}$$

ヲ得ルガ故ニ此値ヲ $\sqrt{\frac{P}{EI}}\,l$ ニ等シク置キ

$$P=20.1958\frac{EI}{l^2}$$

$$\fallingdotseq 2\frac{\pi^2 EI}{l^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(365)$$

コレニ對スル平均强度

$$\sigma_o = \frac{P}{F} = 2\frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (366)$$

上ニ求メタ (iii) 式ヲ x ニツキテ二度微分シ $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ ト置ケバ零力率 (Zero moment) ノ位置卽變曲點 (Inflection point) ガ求メラレ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 = \frac{V}{P}(-a\sin ax + a^2 l\cos ax)$$

卽チ　$al = \tan ax$

$$4.5 = \tan\frac{4.5\,x}{l}$$

$\therefore$　$x = l$ 或ハ $x = 0.30\,l$

卽チ變曲點ハ A ヲ去ル事 $0.30l$ ノ點 (Fig. 513 參照) 卽チ B カラ $0.70l$ ノ點ニ起ル事ヲ知ル。從ツテコレヲ二分シタル $0.35l$ ダケノ長サノ部分ガ [I] ト同ジ狀態ニアル事ヲ示スノデアル。

[V] 結　論

以上四ツノ場合ノ何レヲ見テモ抗壓材ノ强度ハ長サノ自乘ニ逆比例スルヲ見ル。コレヲ比較セバ (358) (361) (363) 及 (365) 式ニツキ其强度ハ順次 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ 及 $0.35\left(=\frac{7}{20}\right)$ ノ自乘ニ逆比スル事ヲ知ル。而シテ其數ハ變曲點ト最大曲率點トノ間ノ長サニ相當スル分數デアル。卽チ强度ハ順次 1, 4, 16 及 8 倍トナル事 Fig. 514 ニ示ス通リデアル。

是等ノ式ニ於ケル慣性能率 I ハ其斷面ノ最小能率ヲ意味ス。從ツテ r モ亦最小環動半徑ナルベキ事ヲ忘レテハナラヌ。

斯ク求メタル「オイラー」氏公式ニ於ケル P ノ値ハ抗壓材ガ將ニ側方ニ屈折セントスル極限ニ於ケル平衡狀態ニアル爲メノ値デ

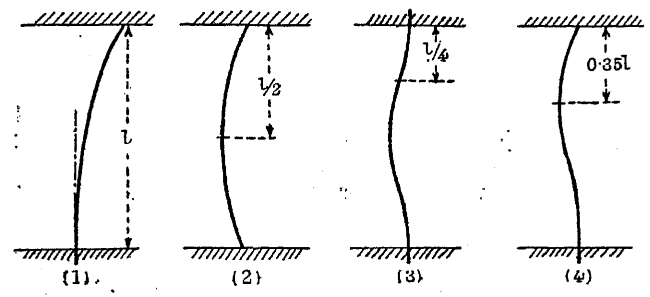


Fig. 514.

端　狀	彎　折　荷　重	平均强度
Fig. 514 (1)	$P = \frac{1}{4}\frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2 EF}{\left(\frac{l}{r}\right)^2}$,	$\sigma_o = \frac{1}{4}\frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2}$
Fig. 514 (2)	$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EF}{\left(\frac{l}{r}\right)^2}$,	$\sigma_o = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2}$
Fig. 514 (3)	$P = 4\frac{\pi^2 EI}{l^2} = 4\frac{\pi^2 EF}{\left(\frac{l}{r}\right)^2}$,	$\sigma_o = 4\frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2}$
Fig. 514 (4)	$P = 2\frac{\pi^2 EI}{l^2} = 2\frac{\pi^2 EF}{\left(\frac{l}{r}\right)^2}$,	$\sigma_o = 2\frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2}$

アル。故ニ若シ荷重ガ此値ヨリ少シデモ大ナレバ急ニ屈折シテ彎曲ヲ增加シ遂ニ破壞スルニ至ルモノデアツテ上式ハ此中立平衡 (Indifferent equilibrium) 卽限界點 (Critical point) ニ於ケル P ヲ與ヘル。

此理論ハ理想的ノ抗壓材又ハ極メテ長イ抗壓材ノミニ適用サルベキモノデアツテ普通ニ用ヒル樣ナ柱ニハ此儘適用スル事ハ出來ナイ。其一二ノ不合理ナ點ヲ指摘シヤウ。

1°. $\frac{l}{r} = 0$ ノトキニ「オイラー」氏公式ニヨルト $\sigma_o = \frac{P}{F} = \infty$ トナル。然シ何程短クトモ應壓力ガ無限大トナル事ハ勿論アリ得ナ

イノデアツテ此場合σ_oハ其材料ノ極强ニ等シキ値ヲ示サナケレバナラヌ。

2°. 圓端ト雖モ幾分ノ摩擦アルヲ免レズ又定端ト云フモ完全ニ固定スル事ハ困難デアル。從ツテ「オイラー」氏公式ヲ實際ニ適用スル爲メニハコレヲ次ノ形ニ書直シ係數μハ理論的ニ上述ノ如ク見出シタ四ツノ値トハ異ナツタモノヲ採用シナケレバナラヌデアラウト思ハレル

$$P=\mu\frac{\pi^2 EI}{l^2}\cdots\cdots(367)$$

多クノ實驗ヨリ得タ結果ヲ比較スレバ「オイラー」氏公式ハ

圓端ノ場合 $\dfrac{l}{r}>150$

定端ノ場合 $\dfrac{l}{r}>200$

ナル如キ長イ抗壓材ニ對シテμノ値ヲ次ノ如キ値ニ採レバ稍々實際ト適合シタ數値ヲ與ヘル。

兩端圓端(又ハ鉸端)ノトキ $\mu=\dfrac{5}{3}$ (1ヲ用ヒズシテ)

兩端定端(又ハ平端)ノトキ $\mu=\dfrac{5}{2}$ (4ヲ用ヒズシテ)

一端圓端他端定端ノトキ $\mu=\dfrac{25}{12}$ (2ヲ用ヒズシテ)

斯クノ如キ不都合アル故ニ「オイラー」氏公式ハ獨乙ヲ除イタ他ノ諸國デハ餘リ用ヒラレテ居ラヌ。獨乙ニ用ヒラルヽ公式ニ於テモ$\dfrac{l}{r}<100$ノ場合ニ對シテハ猶「オイラー」公式ヲ採用セズシテ後述拋物線公式ノ一種ヲ採用シテ居ルヲ見レバ其應用ノ範圍モ自ラ大ナラザルヲ知リ得ラレヤウ。獨乙規定ノ長柱强度算定法ニ就テハ更ニ第六節ニ之ヲ說明スル。

第五節 公式ノ選擇ニ就イテ

若シ細長度$\dfrac{l}{r}>150$ナル如キ極メテ細長イ柱ニ於テハ「オイラー」氏公式ハ次ニ掲グル安全率ヲ用ヒテ安全ニ適用セラレ得ル。

鑄鐵	8	錬鐵	5
軟硬鋼	5	木材	10

第十九表 「オイラー」氏公式ニヨル斷面算出ノ表

	鑄鐵	錬鐵	軟鋼	硬鋼	木材
抗壓極强 (kg/cm^2)	7500	3750	4400	6250	280
許容應壓力 (kg/cm^2)	500	750	875	1250	60
彈性係數 (kg/cm^2)	1,000,000	2,000,000	2,150,000	2,200,000	120,000
長柱トシテノ安全係數	8*	5	5	5	10
危險斷面ニ必要ナル最小慣性能率 (cm^4)	$\dfrac{Pl^2}{125}=8P_1l^2$	$\dfrac{Pl^2}{400}=2.5P_1l^2$	$\dfrac{Pl^2}{430}=2.33P_1l^2$	$\dfrac{Pl^2}{445}=2.24P_1l^2$	$\dfrac{Pl^2}{12}=83.3P_1l^2$
極限長 $l_o:r=$	50.0	72.5	69.5	59.0	44.4
短形斷面 $\left(r=\sqrt{\frac{1}{12}}h\right)$ $l_o:h=$	14.4	21.0	20.1	17.1	12.8
圓形斷面 $\left(r=\frac{1}{4}d\right)$ $_o:d=$	12.5	18.0	17.4	14.8	11.1
中空肉薄圓形斷面 $\left(r=\sqrt{\frac{1}{8}}d\right)$ $l_o:d=$	17.7	25.6	24.6	20.9	15.7

表中 P＝許容荷重 (kgs)
P_1＝同 ($tons$)
l＝柱長 (m)
h＝矩形ノ短邊 (cm)
d＝圓形ノ直徑 (cm)

注意 柱ハ何レモ圓端ヲ有スルモノトス。

* 完全ニ軸ニ沿フ壓力ナラバ8ニテ可ナルモ荷重ガ僅カニテモ偏倚スル恐アルトキニハ尚幾何カ増加スルヲ要ス。

若シ $\frac{l}{r}<150$ ナル場合ニハ「ランキン」氏公式ヲ用ヒ安全率ハ鋼材ニ對シ 3 乃至 4 ヲ用ヒテ充分デアル。

「オイラー」氏公式ノ長所トスル所ハ荷重ガ與ヘラレテ其柱ノ適當ナ斷面ヲ直接ニ求メ得ラルヽノ便アルコトデアル。故ニ上述ノ注意ヲ以テ此公式ヲ使用スレバ極メテ便利デアラウト思ハレル。

第十九表ハ「オイラー」氏公式ヲ用ヒ荷重及柱長ヲ與ヘテ所要最小慣性能率ヲ求ムル爲メノ計算表デアル。

「ランキン」氏公式ハ斷面ガ與ヘラレテ其荷ヒ得ル荷重ヲ求メルニハ便利デアルガ荷重ガ與ヘラレテ之ニ適應スル斷面寸法ヲ求メントナラバ斷面形ニ關スル數値 F 及 r ガ先ヅ必要デアルカラ試算ニヨラナケレバナラヌ。コレ其不便ナル所以デアル。此點ニ於テハ「オイラー」氏公式ノ方ガ遙カニ便利デアル。

例題第四十三 兩端ガ鉸トナレル軟鋼抗壓材アリ T 字形斷面ヲ有シ斷面積 3.634 in^2., 最小慣性能率 4.70 in^4 ナリ。長ヲ 6 ft. トシテ「ランキン」氏公式ニ據リ彎折荷重ヲ求ム。但シ抗壓極强ヲ 21 $ton/\square''$ ト採レ。

(答) 最小環動半徑ノ自乘ハ

$$r^2=\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{F}}=\frac{4.70}{3.634}=1.293\,in^2.$$

$$\therefore\quad\left(\frac{l}{r}\right)^2=\frac{6^2\times12^2}{1.293}=4000$$

第十六表ニ與ヘタル數値 $\beta=\frac{1}{25000}$ ヲ用ヒ

$$\mathrm{P}=\frac{\mathrm{K}_c\,\mathrm{F}}{1+4\beta\left(\frac{l}{r}\right)^2}=\frac{21\times3.634}{1+4\times\frac{1}{25000}\times4000}=46.5\ tons.$$

例題第四十四 Fig. 515 ニ示ス斷面ヲ有スル軟鋼抗壓材アリ。其斷面積 39.88 in^2, 最小環動半徑 3.84 in, 長 40 ft ナルトキ兩端ヲ固定トシテ「オイラー」氏及「ランキン」氏公式ニ據リ彎折荷重ヲ求ム。

(答) (1)「オイラー」氏公式ニヨレバ $\mathrm{E}=13000\ tons/in^2$ トシテ

$$\mathrm{P}=4\mathrm{EI}\frac{\pi^2}{l^2}=\frac{4\pi^2\times13000\times39.88\times3.84^2}{40^2\times12^2}=1307\ tons.$$

若シ $\mu=4$ ノ代リニ $\mu=\frac{5}{2}$ ヲ用フレバ $\mathrm{P}=817\ tons$ ヲ得ル。

(2)「ランキン」氏公式ニヨレバ $\mathrm{K}_c=30\ tons$,

$\beta=\frac{1}{25000}$ トシテ

$$\mathrm{P}=\frac{\mathrm{K}_c\,\mathrm{F}}{1+\beta\left(\frac{l}{r}\right)^2}=\frac{30\times39.88}{1+\frac{1}{25000}\left(\frac{40\times12}{3.84}\right)^2}$$

$$=787\ tons.$$

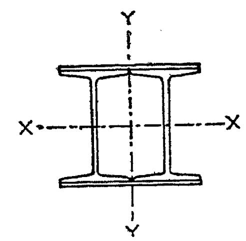


Fig. 515.

第六節 他ノ長柱公式

(Practical Formulae for Long Strut)

實際ニ長柱ニ就イテ行ハレタ多クノ實驗ノ結果ヲ圖示スレバ Fig. 516 ニ示ス如ク相當廣イ範圍ノ面積ヲ占メテ居ルノデアルカラ其材ノ抗壓極强ニ相當スル點 A ヲ通ジ「オイラー」曲線ニ接觸スル樣ナ任意ノ曲線ハ何レモ實驗ノ結果ト一致スル平均數値ヲ與ヘル事ヲ知ル。此事實ニ立脚シテ多クノ實驗公式ガ案出セラレテ居ル。

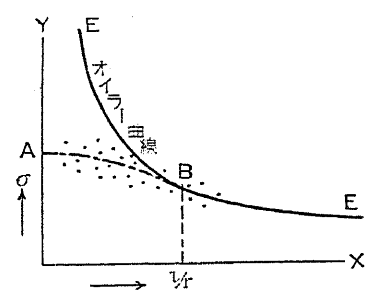


Fig. 516.

[I] 直線式 (Straight Line Formula)

最モ簡單デアルタメニ廣ク用ヒラレテ居ルモノデアツテ「ジョンソン」氏 (Thomas H. Johnson) ノ提案スル所ニ係ル。此公式ハ Fig. 516 ニ就イテ A カラ出發シテ EE ナル「オイラー」曲線ニ切線トナル樣

ナ直線ヲ引キ其式ヲ求メタノデアル。而シテ $\frac{l}{r}$ ノ値ガ切點Bヨリモ大ナル抗壓材ニ對シテハ「オイラー」氏公式ヲ適用シ夫レヨリモ短イ抗壓材ニ對シテハ直線式ヲ用ヒル事トシテ居ル。Aヲ通ズル直線ノ方程式ハ

$$y=\mathrm{K}+bx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

「オイラー」氏曲線ノ方程式ハ

$$y=\frac{\mu\pi^2\mathrm{E}}{x^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

B點ニ對シテハ(i)式ト(ii)式トガ等シイ縱距ト共通ノ切線トヲ有スベキ條件カラ b ノ値ト其切點Bノ横距卽チ二式ノ限界トナルベキ $\frac{l}{r}$ ノ値ガ求メラレルノデアツテ(i)式及(ii)式ヲ微分セバ夫々

$$\frac{dy}{dx}=b \quad 及 \quad \frac{dy}{dx}=-2\frac{\mu\pi^2\mathrm{E}}{x^3}$$

ヲ得此二ツノ $\frac{dy}{dx}$ ヲ等シク置キ $x=\frac{l}{r}$ ヲ挿入セバ

$$b=-\frac{2\mu\pi^2\mathrm{E}r^3}{l^3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{iii})$$

次ニ(i)式及(ii)式ヲ等シク置キ $x=\frac{l}{r}$ ヲ挿入セバ

$$\mathrm{K}+bx=\frac{\mu\pi^2\mathrm{E}r^2}{l^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{iv})$$

(iii)式及(iv)式カラ $\frac{l}{r}$ ノ極限値卽チ限界點ガ求メラレ

$$\frac{l}{r}=\sqrt{\mu}\,\pi\sqrt{\frac{3\mathrm{E}}{\mathrm{K}}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{v})$$

$$\therefore \quad b=-\frac{2\mathrm{K}\sqrt{\mathrm{K}}}{3\pi\sqrt{\mu}\,\sqrt{3\mathrm{E}}}$$

此 b ヲ(i)式ニ入レ $y=\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{F}}$, $x=\frac{l}{r}$ ト置ケバ

$$\sigma_o=\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{F}}=\mathrm{K}\left\{1-\frac{2\sqrt{\mathrm{K}}}{3\pi\sqrt{\mu}\,\sqrt{3\mathrm{E}}}\frac{l}{r}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(368)$$

但 $\frac{l}{r}<\pi\sqrt{\mu}\sqrt{\frac{3\mathrm{E}}{\mathrm{K}}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(369)$

式中 r＝最小環動半徑

(368)式ハ(369)式ノ範圍内ニ於テノミ適用セラレル。$\frac{l}{r}$ ガ此限界ヲ越ユレバ「オイラー」氏公式ヲ適用シ

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_o=\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{F}}=\dfrac{\mu\pi^2\mathrm{EI}}{l^2} \\ 但 \quad \dfrac{l}{r}>\pi\sqrt{\mu}\sqrt{\dfrac{3\mathrm{E}}{\mathrm{K}}} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(370)$$

直線式ハ簡單デアリ其應用ガ容易デアルタメニ北米合衆國ニ於テ最近廣ク採用セラレル。其實驗係數ハK, E及 μ ノ三個デアル。此公式ハ $\frac{l}{r}$ ノ小ナル場合卽チAニ近イ點ニ於テ實驗數値ヨリ稍々小ナル値ヲ與ヘル傾キガアル。

今假ニ(368)式ニ實際ノ數値ヲ入レテ見ンニ軟鋼建築材ニ對シ

$\mathrm{K}=66{,}000$ #/□″, $\mathrm{E}=30{,}000{,}000$ #/□″,

$\mu=\frac{5}{3}$(圓端) 及 $\frac{5}{2}$(定端) ト採リ

$$\left.\begin{array}{lll} 圓端: & \dfrac{l}{r}\leqq 150 & \sigma_o=66000-293\left(\dfrac{l}{r}\right) \\ 定端: & \dfrac{l}{r}\leqq 205 & \sigma_o=66000-210\left(\dfrac{l}{r}\right) \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(371)$$

本邦市街地建築物法施行規則ニ其適用地域ニ於ケル構造物ニ對スル計算ノ規定ガアツテ,其第百七條ニ於テ抗壓鐵材ニ對スル荷重ハ下式ニ依リ算定セルモノヲ超過スベカラズト規定シテアル。

$$P = Af_c\left(1 - C\frac{l}{r}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots(372)$$

式中　P＝荷重，A＝斷面積，f_c＝鐵材ニ對スル許容應壓強度(鋼材ニ對シ 1150 kg/cm^2)，C＝定數(鋼及錬鐵ニアリテハ 0.003，其兩支端回轉自由ナル時ハ 0.004)，單位ハ kg. 及 cm.

上式ヲ書直セバ定端柱ニ對シ

$$\left.\begin{aligned} P &= A.\ 1150\left(1 - 0.003\frac{l}{r}\right) \\ \sigma_o &= \frac{P}{A} = 1150 - 3.45\frac{l}{r} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(373)$$

圓端柱ニ對シ

$$\left.\begin{aligned} P &= A.\ 1150\left(1 - 0.004\frac{l}{r}\right) \\ \sigma_o &= \frac{P}{A} = 1150 - 4.60\frac{l}{r} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(374)$$

コレモ一種ノ直線式ニ外ナラヌ。

[II]　拋物線公式 (Parabola Formula)

此式ハ「ジョンソン」氏 (J. B. Johnson) ノ提案ニ成ル。曲線 AB ヲ拋物線ト假定シタノデアツテ抗壓極強 K ヲ示ス點 A ニ通ズルガ故ニ式ノ形ハ

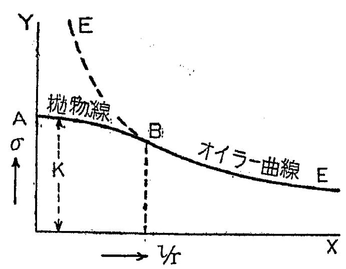


Fig.　517.

$$y = K - bx^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

然ルニ「オイラー」氏公式ハ

$$y = \frac{\mu\pi^2 E}{x^2} \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

此 (i) (ii) 式ガ同一點ニ於テ共通切線ヲ有スルタメノ條件カラ b ヲ定メ樣トスルノデアツテ兩式ノ $\frac{dy}{dx}$ 及 y ヲ等シク置キ

$$\frac{dy}{dx} = -2bx = -\frac{2\mu\pi^2 E}{x^3}$$

$$\therefore\quad b = \frac{\mu\pi^2 E}{x^4} = \frac{\mu\pi^2 E r^4}{l^4} \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{iii})$$

更ニ共通縱距ヲ有スル條件カラ

$$y = K - b\frac{l^2}{r^2} = \frac{\mu\pi^2 E r^2}{l^2} \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{iv})$$

(iii) 及 (iv) 式カラ $\frac{l}{r}$ ノ極限値及 b ガ求メラレ

$$\frac{l}{r} = \pi\sqrt{\frac{2\mu E}{K}} \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{v})$$

$$b = \frac{K^2}{4\mu\pi^2 E} \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{vi})$$

此値ヲ (i) 式ニ挿入シテ求ムル拋物線公式ヲ得ベク

$$\sigma_o = \frac{P}{F} = K - \frac{K^2}{4\mu\pi^2 E}\left(\frac{l}{r}\right)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(375)$$

但　$$\frac{l}{r} < \pi\sqrt{\frac{2\mu E}{K}} \cdots\cdots\cdots\cdots(376)$$

式中　　r＝斷面ノ最小環動半徑

(376) 式ノ範圍內ニ於テ (375) 式ハ適用サレ得ル。夫レ以上ノ $\frac{l}{r}$ ニ對シテハ「オイラー」氏公式ヲ用ヒ

$$\sigma_o = \frac{\mu\pi^2 E r^2}{l^2}$$

拋物線式ニ實驗定數ヲ入レテ「ジョンソン」氏ノ發表セシ所ハ次ノ如シ。

圓端ニ對シ　$\mu\pi^2 = 16$,　　定端ニ對シ　$\mu\pi^2 = 25$,

鋼材ニ對シ　E＝28,500,000 #/□″　K＝42,000 #/□″

錬鐵ニ對シ　E＝27,000,000 #/□″　K＝34,000 #/□″

ヲ假定シテ長柱ノ極強ニ對シ

$$\text{錬鐵：圓端}\quad \left.\begin{array}{ll} \dfrac{l}{r}\leqq 170 & \sigma=34{,}000-0.67\left(\dfrac{l}{r}\right)^2 \\[2ex] \dfrac{l}{r}\geqq 170 & \sigma=\dfrac{432{,}000{,}000}{\left(\dfrac{l}{r}\right)^2} \end{array}\right\}\cdots\cdots(377)$$

$$\text{〃\quad 定端}\quad \left.\begin{array}{ll} \dfrac{l}{r}\leqq 210 & \sigma=34{,}000-0.43\left(\dfrac{l}{r}\right)^2 \\[2ex] \dfrac{l}{r}\geqq 210 & \sigma=\dfrac{675{,}000{,}000}{\left(\dfrac{l}{r}\right)^2} \end{array}\right\}\cdots\cdots(378)$$

$$\text{鋼材：圓端}\quad \left.\begin{array}{ll} \dfrac{l}{r}\leqq 150 & \sigma=42{,}000-0.97\left(\dfrac{l}{r}\right)^2 \\[2ex] \dfrac{l}{r}\geqq 150 & \sigma=\dfrac{456{,}000{,}000}{\left(\dfrac{l}{r}\right)^2} \end{array}\right\}\cdots\cdots(379)$$

$$\text{〃\quad 定端}\quad \left.\begin{array}{ll} \dfrac{l}{r}\leqq 190 & \sigma=42{,}000-0.62\left(\dfrac{l}{r}\right)^2 \\[2ex] \dfrac{l}{r}\geqq 190 & \sigma=\dfrac{712{,}000{,}000}{\left(\dfrac{l}{r}\right)^2} \end{array}\right\}\cdots\cdots(380)$$

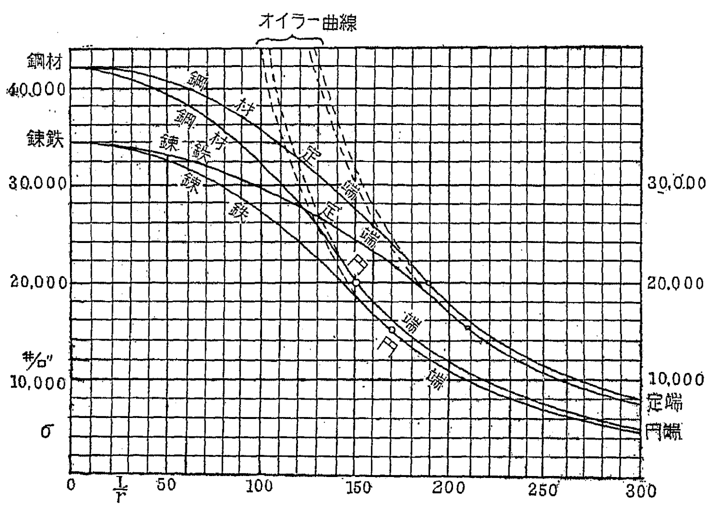


Fig. 518.

實際ニ我々ノ遭遇スル $\frac{l}{r}$ ハ殆ンド常ニ 150 以下デアリ普通ハ 100 以下デアルガ故ニ拋物線式ガ普通使用ノ全範圍ヲ占ムルモノト考ヘル事ガ出來ル。更ニ上掲公式ヲ曲線ヲ以テ圖示スル時ハ Fig. 518 ノ如クナル。

[III] 獨乙政府規定長柱算定法

鐵道橋及建築物ニ於ケル長柱ノ計算ニ對シテ獨乙政府ニテ規定セラレタルモノハ「オイラー」公式ト稱スルモ拋物線公式ノ一種ト見做スコトノ出來ルモノデアッテ茲ニ其概要ヲ説明シヤウ。

普通ニ直線公式ト稱セラルヽモノハ其材料ノ極强ヲ規準トシテ Fig. 516 ニ示シタA點カラ一ツノ直線ヲ引キ「オイラー」曲線ニ連接セシメタモノデアリ又拋物線公式ト稱セラルヽモノハ同ジク Fig. 517 ノ A點カラ一ツノ拋物線ヲ假定シテ「オイラー」曲線ニ圓滑ニ連續セシメタモノデアルガ獨乙政府規定ニ定メタルモノハ其材料ノ應壓彈性限度 (Quetschgrenze) ヲ規準トシテ二ツノ直線卽チ一ツノ水平線 KL トコレニ連續スル一ツノ傾斜線 LM トヲ「オイラー」曲線 MN ニ連接スル事 Fig. 519 ニ示ス如クシ同時ニ $\frac{l}{r}$ ノ値ニ應ジテ安全率ヲ變化セシメ許容彎折應力トシテ拋物線 AB ヲ假定シテコレヲ「オイラー」曲線(安全率 3.5 ニテ割リタル) BC ニ接續シタモノデアル。

長柱ガ彎折セントスル極限ニ於テ其重心軸ニ受クル平均應壓力ヲ彎折應力 (Knickspannung) ト云ヒ σ_K ニテ表ハスモノトセバ此規定ニ定メラルヽ所ニ據レバ $\frac{l}{r}=0\sim60$ ノ範圍ニ對シテハ此彎折應力ハ其材料ノ應壓彈性限度 σ_s ニ等シク卽チ σ_s ヲ縱距トスル水平線 KL ニテ與ヘラレ次ニ $\frac{l}{r}=60\sim100$ ノ範圍ニ於テハ $\frac{l}{r}$

＝60 ニ對シテ既ニ求メラレタL點ヨリ $\frac{l}{r}=100$ ノ場合ニ對シ「オイラー」曲線 $\sigma_K=\frac{\pi^2E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2}$(兩鉸端ノ場合)ノ上ニ生スベキM點マデヲ直線ニテ結ベバヨロシク更ニ $\frac{l}{r}\geqq100$ ノ場合ニハ「オイラー」曲線MNヲ其儘採用スルノデアル,以上三ツニ分チテ求メタKLMNハ則チ σ_K 線デアル。普通鋼材(Flusstahl, St. 37)ニ對シテハ彈性限度 $\sigma_s=2400\,kg/cm^2$ ト規定セラルヽガ故ニ $\frac{l}{r}=0\sim60$ ノ範圍内ニテハ $\sigma_K=\sigma_s=2400\,kg/cm^2$ デアリ $\frac{l}{r}=60\sim100$ ノ範圍ニテハ σ_K ハ徐々ニ變化シテ $\frac{l}{r}=60$ ニ對スル $\sigma_K=2400$ ヨリ $\frac{l}{r}=100$ ニ對スル「オイラー」曲線上ノ値 $\sigma_K=\frac{\pi^2E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2}=\frac{\pi^2\times2,100,000}{100^2}=2073\,kg/cm^2$ ニ直線的ニ變化スル。即チ之レヲ式ニテ表ハセバ

$$\left.\begin{array}{lll}\frac{l}{r}\leqq60 & \sigma_K=2400\,kg/cm^2 & (\text{直線})\\ 60\leqq\frac{l}{r}\leqq100 & \sigma_K=2890.5-8.175\frac{l}{r} & (\text{直線})\\ \frac{l}{r}\geqq100 & \sigma_K=\frac{20,726,000}{\left(\frac{l}{r}\right)^2} & (\text{オイラー曲線})\end{array}\right\}\cdots(381)$$

特種高級鋼材(Hochwertiger Baustahl, St. 48)ニ對シテハ $\sigma_s=3120\,kg/cm^2$, $E=2,100,000\,kg/cm^2$ ト採ラレル。

彎折應力 σ_K ハ上述ノ如キ二直線KL, LMト「オイラー」曲線MNトニテ與ヘラレルノデアルガ更ニ許容彎折應力(Zulässige Druckspannung) $\sigma_{d\,zul.}$ ヲ求メルニハ之レヲ求メル爲メノ安全率(Knicksicherheit) ν ヲ後述スル如キ法則ニ從ツテ $\frac{l}{r}=0$ ノ場合ニ對スル $\nu=$

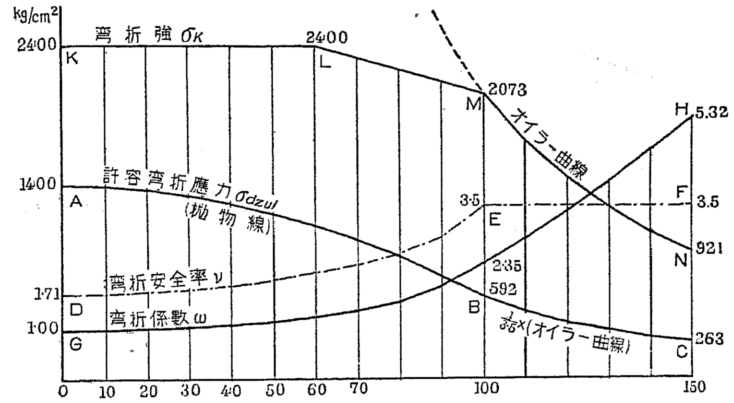


Fig. 519.

1.71 ヨリ $\frac{l}{r}\geqq100$ ノ場合ニ對スル $\nu=3.5$ マデ漸次之ヲ變化セシメル。$\sigma_{d\,zul}$ ハ許容應力デアツテ其安全率トノ關係ハ明カニ

$$\nu=\frac{\sigma_K}{\sigma_{d\,zul}}\quad\cdots\cdots(382)$$

ナル式ニテ與ヘラレル。尚又此長柱ニ作用スル外力Pトノ關係ハ

$$\sigma_{d\,zul}\geqq\frac{P}{F}$$

ナル式ニテ與ヘラレ得ベクPハ安全荷重ヲ表ハシFハ此長柱ノ斷面積デアル。$\sigma_{d\,zul}$ ノ値ハ普通鋼材ニ對シ

$$\frac{l}{r}=0\ \text{ノトキ}\ \sigma_{d\,zul}=\frac{\sigma_K}{\nu}=\frac{2400}{1.71}=1400\,kg/cm^2$$

$$\frac{l}{r}=100\ \text{ノトキ}\ \sigma_{d\,zul}=\frac{\pi^2E}{\nu\left(\frac{l}{r}\right)^2}=592\,kg/cm^2$$

此二ツノ値ノ中間ニ於テハ許容應力ハ漸變スルノデアツテ其變化ノ狀態ハ次ニ述ベル方則ニ從フ。

許容彎折應力 $\sigma_{d\,zul}$ ノ變化ノ狀態ハ $0\leqq\frac{l}{r}\leqq100$ ノ範圍ニ於テ

一ツノ抛物線(AB)(Fig. 519 參照)ト假定セラレル。$\frac{l}{r}=0$ ニ對スル $\sigma_{d\,zul}=1400$ (A點) カラ $\frac{l}{r}=100$ ニ對スル $\sigma_{d\,zul}=592$ (B點) マデ抛物線的ニ變化スルト規定セラレルノデアッテ従ッテ上述シタ安全係數 $\nu=\frac{\sigma_K}{\sigma_{d\,zul}}$ ノ値ハ此許容應力 $\sigma_{d\,zul}$ ヲ與ヘル爲メノ條件カラ逆ニ計算セラレルベキデアル。此抛物線ノ方程式ヲ求メンニハ普通鋼材ニ對シ $\left(\frac{l}{r}=0,\quad \sigma_{d\,zul}=1400\right)$ ナル一點ヲ通過スル一般式

$$\left(\frac{l}{r}\right)^2=2p\,(1400-\sigma_{d\,zul})$$

ニ於テ $\frac{l}{r}=100$ ニ對スル $\sigma_{d\,zul}=592$ ヲ挿入シテ

$$2p=\frac{100^2}{1400-592}=\frac{10,000}{808}$$

ヲ得ベク従ッテ

$$\sigma_{d\,zul}=1400-0.0808\left(\frac{l}{r}\right)^2 \quad \cdots\cdots(383)$$

此價ハ $0\leqq\frac{l}{r}\leqq100$ ノ範圍内ニ適用セラレ夫レ以上卽チ $\frac{l}{r}\geqq100$ ニ對シテハ「オイラー」曲線 MN ニ安全率 $\nu=3.5$ (一定不變) ヲ適用シ

$$\sigma_{d\,zul}=\frac{20,726,000}{3.5\left(\frac{l}{r}\right)^2}=\frac{5,921,700}{\left(\frac{l}{r}\right)^2} \quad \cdots\cdots(384)$$

ガ用ヒラレル。Fig. 519 ニ於テ BC 曲線ニテ示スモノハ卽チコレデアル。

今彎折係數 (Knickzahl) ω ヲ以テ純直應力卽チ應張力等ニ對スル許容應力 σ_{zul} ト許容彎折應力 $\sigma_{d\,zul}$ トノ比ヲ表ハスモノトセバ

$$\omega=\frac{\sigma_{zul}}{\sigma_{d\,zul}} \quad \cdots\cdots(385)$$

此式ニ依レバ $\sigma_{d\,zul}\geqq\frac{P}{F}$ ナル一般公式ニ於ケル極限ニ對シテ

$$F=\frac{\omega P}{\sigma_{zul}} \quad \cdots\cdots(386)$$

ナル關係ヲ得ベク卽チ ω サヘ既知ナラバ與ヘラレタ荷重 P ニ ω ヲ乘ジコレヲ σ_{zul} (普通鋼材ニ對シ 1400 kg/cm^2, 特種高級鋼材ニ對シ 1820 kg/cm^2) ニテ割レバ直チニ必要ナル斷面積 F ガ計算セラレ得ル。ω ナル係數ハ $\frac{l}{r}$ ノ比ニ應ジ豫メ計算シテ置ク事ノ出來ル數値デアッテ第二十表ニ其普通鋼材及特種高級鋼材ニ對スル値ヲ示ス。$\frac{l}{r}$ ノ中間數値ニ對シテハ比例部分ヲ用ヒテ之ヲ算定シ得。

第二十表　獨乙規定ニ據ル彎折係數 ω ノ表

普通鋼材				特種高級鋼材			
$\frac{l}{r}$	彎折强 σ_K kg/cm^2	彎折係數 ω	比例部分	$\frac{l}{r}$	彎折强 σ_K kg/cm^2	彎折係數 ω	比例部分
0	3400	1,00	0,001	0	3120	1,00	0,001
10		1,01	0,001	10		1,01	0,002
20		1,02	0,003	20		1,03	0,003
30		1,05	0,005	30		1,06	0,006
40		1,10	0,007	40		1,12	0,008
50		1,17	0,009	50		1,20	0,012
60		1,26	0,013	60		1,32	0,017
70	2318	1,39	0,020	70	2858	1,49	0,027
80	2237	1,59	0,029	80	2597	1,76	0,045
90	2155	1,88	0,048	90	2335	2,21	0,086
100	2073	2,36	0,050	100	2073	3,07	0,065
110	1713	2,86	0,055	110	1713	3,72	0,071
120	1439	3,41	0,059	120	1439	4,43	0,077
130	1226	4,00	0,064	130	1226	5,20	0,083
140	1057	4,64	0,068	140	1057	6,03	0,089
150	921	5,32		150	921	6,92	

第七節　合成柱 (Composite Column)

簡單ナル柱トシテ鑄鐵ハ古クヨリ用ヒラレ圓形又ハ方形斷面ヲ有スル實柱又ハ中空柱トシテ一般ニ採用セラレテ居ル。然シナガラ其柱ニ來ル荷重ガ增加シ又僅カニテモ偏倚シテ作用スル恐アレバ遂ニハ鑄鐵デハ充分ナ强度ヲ發揮スルコトガ出來ナクナツテ玆ニ展鋼 (Rolled steel) ガ柱材料トシテ用ヒラルルニ到ツタノデアル。展鋼トシテ一般市場ニ存スル斷面ハ山形鋼工字鋼等デアツテ其缺點トスル所ハ是等ノ斷面ガ其一方ノ主軸ニ對シテハ比較的剛性ヲ發揮シ强度ヲ有スルニ反シ他ノ主軸ニ對シテハ普通强度ガ餘程小トナリ此方向ニ容易ニ彎折スル恐レアルコトデアル。コノ缺點ヲ救フタメニ展鋼ヲ柱トシテ用フル場合ニハ一般ニ展鋼二個又ハ四個ヲ適當ノ間隔ニ併列シテ Fig. 520 ニ示ス如キ斷面ヲ採用スルノデアツテ此二個又ハ四個ノ展鋼ハコレヲ Fig. 523 ⓐ乃至ⓒニ示ス如ク補强材ニテ相互連結シ一體トシテ柱ノ作用ヲ爲サシメル。斯クノ如キ柱ヲ玆ニ合成柱 (Composite column) ト命名シ以下少シク其强度並ビニ部分斷面配置ノ詳細ニ就イテ說明シヤウ。

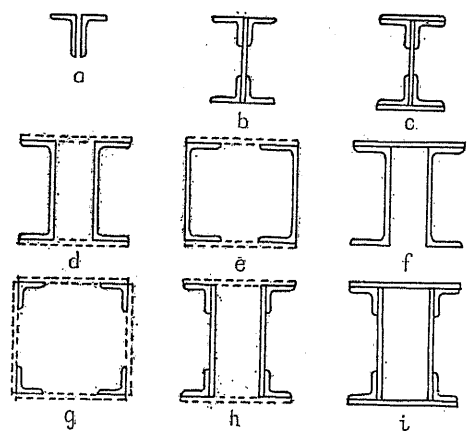


Fig. 520.

今此長柱ノ全長ヲ l, 其斷面積ヲ 2F トシ二個ノ等形斷面ヲ合成シテ成ルモノトスレバ其各部分斷面ノ斷面積ハ F デアル。

Fig. 521 ニ示ス如ク此柱全斷面ノ主軸ヲ X, Y, コレヲ合成スル各部分斷面ノ重心 S′ ヲ通ズル主軸ヲ X′, Y′ トシ全斷面ガ X 及 Y 軸ニ對スル慣性能率ヲ I_x, I_y, 同ジク一個ノ部分斷面ガ X′ 及 Y′ 軸ニ對スル慣性能率ヲ $I_{x'}$, $I_{y'}$, トスルトキハ次ノ關係ガ成立スル。

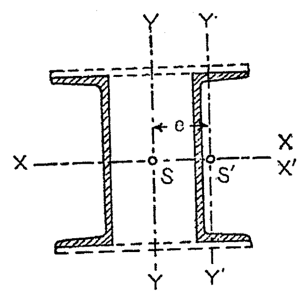


Fig. 521.

$$\left.\begin{aligned} I_x &= 2I_{x'}, \\ I_y &= 2\left(I_{y'} + Fe^2\right) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (387)$$

玆ニ e ハ部分斷面ノ重心 S′ ガ全斷面ノ重心 S ヨリノ偏倚ヲ示シ F ハ部分斷面一個ノ斷面積デアル。

扨既ニ前數節ニ涉ツテ說明シタル如ク長柱トシテノ强度ハ其斷面ノ最小慣性能率從ツテ最小環動半徑ノ大小ニヨツテ定マルガ故ニ (387) 式ニテ與ヘラルル I_x 及 I_y ハ其何レモガ共ニ出來ルダケ大デアルコトガ望マシイノデアツテ其何レカ一方例ヘバ I_y ガ特ニ小ナルコトアリトセバ此柱ノ强度ハ全ク此 I_y ニ支配セラレ I_x ガ如何程大デアツテモ無意味デアルコトトナル。從ツテ今若シ部分斷面ガ與ヘラレテ居ツテ其配置ヲ求メヤウト云フ場合ナラバ其部分斷面自身ノ慣性能率 $I_{x'}$, $I_{y'}$ ハ既知デアルガ故ニ (387) 式ノ前式ニヨリ I_x ハ與ヘラレタコトヽナル。從ツテ問題ハ I_y ヲ出來ルダケ大キクシテ少クトモ I_x ダケノ大キサヲ有セシムレバヨイノデアツテ其爲メニハ (387) 式ノ後式ヨリ明カナルガ如ク可變量 e ヲ增加スルコトニヨツテ I_y ヲ增加シ此條件ヲ滿足セシメル。卽チ此條件ヲ式ニテ表ハセバ

$$I_x = I_y = 2(I_{y'} + Fe^2)$$

此式ヨリ e ヲ求ムレバコレガ二ツノ部分斷面ノ最小距離ヲ與ヘルモノデアツテ

$$e=\sqrt{\frac{I_x-2I_{y'}}{2F}}=\sqrt{\frac{I_{x'}-I_{y'}}{F}} \cdots\cdots\cdots\cdots(388)$$

此レハ Fig. 521 ニ示ス如ク二個ノ部分斷面ヨリ成ル場合デアツテ若シ Fig. 522 ニ示ス如ク四個ノ部分斷面ヨリ成ル場合ニハ全ク同樣ニシテ次式ヲ得ル。

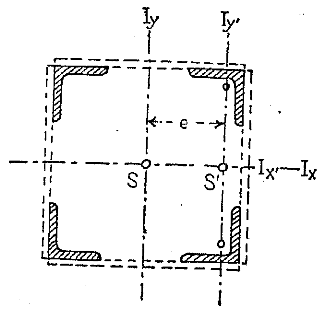


Fig. 522.

$$e=\sqrt{\frac{I_x-4I_{y'}}{4F}}\cdots\cdots\cdots(389)$$

(388) 及 (389) 式ニテ與ヘラレタ e ノ二倍 $2e$ ダケノ距離少ナクトモ部分斷面ヲ隔テヽ置ケバ一方ノ軸ニ對シテ特ニ弱イト云フコトガ無クナル譯デアル。

次ニ斯ク隔テラレタ二ツ又ハ四ツノ部分斷面ガ合成セラレタル一體トシテ長柱ノ働キヲ爲スト云フノデアルカラ各斷面ガ相互確實ニ連結セラレテ居ツテ各自ガ別々ニ變形彎折シナイコトヲ必要トスルコトハ勿論デアツテ此目的ニ綾釬 (Lattice bar) 又ハ連結鈑 (Connecting plate) ヲ挿入スル。Fig. 523 ⓐ及ⓑハ單複綾釬ノ例デアリ同ⓒ圖ハ連結鈑ノ例デアル。綾釬又ハ連結鈑ノ間隔卽チ圖上 λ ニテ示ス長サハ部分斷面ガ彎折ヲ起コサナイ爲メノ條件カラ計算セラルベキモノデアツテ今柱全斷面ノ最小環動半徑ヲ r, 各部分斷面ノ夫レヲ r' トスレバ柱全長ヲ採ツテ考ヘタ細長

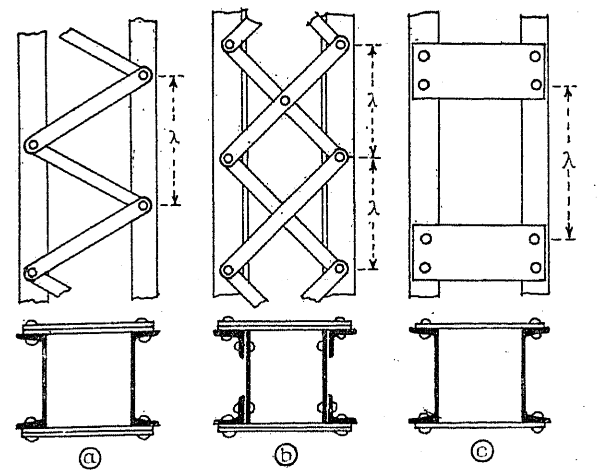


Fig. 523.

度 (Slenderness ratio) ハ $\frac{l}{r}$ デアリ部分斷面ヲ採ツテ考ヘタ細長度ハ $\frac{\lambda}{r'}$ デアルガ故ニ部分斷面ニ對スル $\frac{\lambda}{r'}$ ガ全斷面ニ對スル $\frac{l}{r}$ ヨリ大トナツテハナラナイ。斯クテ始メテ柱全體トシテ彎折スル以前ニ其柱ヲ組成スル各部分斷面ガ先ヅ彎折破壞スルヤウナ危險ヲ生ズル恐レガ無イ譯デアル。卽チ

$$\frac{\lambda}{r'}\leq\frac{l}{r}$$

其極限ニ相當スル最大間隔トシテ

$$\lambda=\frac{r'}{r}l\cdots\cdots\cdots\cdots(390)$$

式中　$r'=\sqrt{\frac{I_{y'}}{F}},\quad r=\sqrt{\frac{I}{2F}}$

(390) 式ニ於テハ長 l ニツイテモ又長 λ ニツイテモ共ニ兩端圓端トシテ計算セラレテ居ル。從ツテ若シ今全長 l ノ柱ノ端狀ガ圓端以外ノ他ノ狀態デアツタトキニハ (390) 式ニ挿入スベキ l トシテハ其柱ノ變曲點間ノ距離ヲ用ヒネバナラヌ。例ヘバ兩端定端ナラバ $\frac{l}{2}$, 一端定端他端圓端ナラバ $0.70l$ ヲ用フベキデアル。

例題第四十五　獨乙標準溝形鋼 NP30 二個ヲ以テ長 5.00 m ノ柱ヲ作ル場合ニ其各部分寸法ヲ求ム。

(答) 與ヘラレタ溝形鋼ハ上卷附錄第十六表ニ示ス如ク

$$F=58.8\,cm^2,\quad I_{x'}=8026\,cm^4,\quad I_{y'}=495\,cm^4,\quad r'=\sqrt{\frac{I_{y'}}{F}}=\sqrt{\frac{495}{58.8}}=2.90\,cm$$

デアルガ故ニ(388)式ヨリ溝形鋼重心點間ノ最小距離ハ

$$2e=2\sqrt{\frac{I_{x'}-I_{y'}}{F}}=2\sqrt{\frac{8026-495}{58.8}}=22.6\,cm$$

卽チ溝形鋼底面間最小距離ハ $22.6-2\times2.7=17.2\,cm$ トナルモ玆ニハ Fig. 524 ⓒ ニ示ス如ク底面間間隔 $25\,cm$ ニ採ルモノトスル。從ツテ合成セラレタル此全斷面ノ最小慣性能率ハ明カニX軸ニ對スルモノデアッテ

$$I_x=I_{min}=2\times8026=16052\,cm^4$$

此X軸ニ關スル最小環動半經ハ

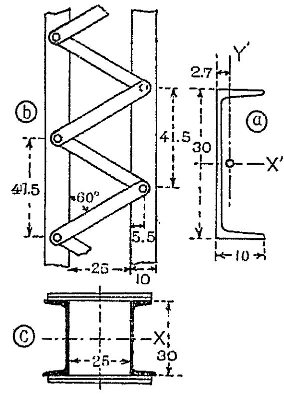


Fig. 524.

$$r_x=r_{min}=\sqrt{\frac{I_{min}}{2F}}=\sqrt{\frac{16052}{2\times58.8}}=11.68\,cm.$$

今與ヘラレタ長柱ノ兩端ヲ圓端ト假定シ(390)式ヨヨッテ綾釬ノ最小間隔ヲ求ムルニ

$$\lambda=\frac{r'}{r}l=\frac{2.90}{11.68}\times500=124\,cm.$$

玆ニハ綾釬傾斜ヲ60°ト採リ $\lambda=41.5\,cm$ ヲ採用スルモノトス。其配置ヲFig. 524 ⓑ ニ示ス。

第八節　鐵筋混凝土長柱

一般ニ鐵筋混凝土ノ抗壓材ヲ長柱トシテ取扱フハ $\dfrac{l}{h}\geqq18$ ナル場合デアッテコレニ對シ「オイラー」氏公式ヲ適用センニハ普通其兩端ヲ圓端ト假定シテ次ノ如キ式ヲ用ヒル。

$$P=\frac{\pi^2EI}{sl^2}\quad\cdots\cdots(861)\text{式參照}$$

此式ヲ鐵筋混凝土ニ適用スルニハ書直シテ

$$P=\frac{\pi^2}{sl^2}(E_cI_c+E_sI_s)$$

$$=\frac{\pi^2E_c}{sl^2}(I_c+nI_s)\quad\cdots\cdots(391)$$

s ナル安全率ハ普通 $s=10$ ト採ルガ故ニ、$E_c=\dfrac{2{,}100{,}000}{15}=140{,}000\,kg/cm^2$, $n=15$, $\pi^2=10$ ト置キ尙 l ヲ單位 m ニテ表ハストキハ(391)式ハ

$$P=\frac{10\times140{,}000}{10\times(100l)^2}(I_c+15I_s)$$

$$=\frac{14}{l^2}(I_c+15I_s)\quad\cdots\cdots(392)$$

此式ニ於ケルPハ kg, l ハ m, I_c 及 I_s ハ cm^4 ヲ單位トスル。

鐵筋柱ハ其構造常ニ定端トナル如ク造ラルルガ故ニ圓端ト假定シテ(392)式ヲ適用スル事ハ $s=10$ トスルヨリモ餘程高イ安全率ヲ假定スル事ニ相當スル。

尙鐵筋柱ノ計算ニ當ツテハ柱自身ノミデナク內ニ入レタ鐵筋其物ガ長柱トシテ取扱ツテ差支ナキヤ否ヤヲ調ベネバナラヌ。若シ鐵筋ニ大ナル壓力ガ加ハツタトキニ結束繫筋(Stirrup)ノ間隔ガ過大デアレバ其周圍ノ混凝土ヲ外方ヘ押シ出シ鐵筋ノ彎折ニヨツテ破損スル事ガアリ得ルカラデアル。此點ニ關シテ獨乙政府ノ規定ニハ鐵筋ヲ結束スル間隔ハ鐵筋直徑ノ12倍或ハ柱ノ外徑ヲ超ユベカラズトシテアルガコレヲ計算ニ據ツテ決定センニハ次ノ如クスレバヨイ。

縱鐵筋其物ヲ長柱トシテ取扱フ場合ニコレハ鐵材デアルカラ安全率ヲ5トシテ「オイラー」氏公式ヲ用ヒ

$$P=\frac{\pi^2EI}{sl_1^2}$$

ニ於テ　P＝一本ノ鐵筋ノ總應力

$$=f_s\sigma_s=\frac{\pi d^2}{4}\sigma_s$$

更ニ　$\pi^2=10,\ s=5,\ I=\frac{\pi d^4}{64},\ E=2,100,000\ kg/cm^2$

ト置ケバ

$$P=\frac{\pi d^2}{4}\sigma_s=\frac{10\times 2,100,000\times \pi d^4}{5l_1^2\times 64}$$

$$\therefore\ l_1^2=\frac{10\times 2,100,000\times \pi d^4\times 4}{5\times 64\times \pi d^2\sigma_s}$$

$$\therefore\ l_1=512.4\frac{d}{\sqrt{\sigma_s}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(393)$$

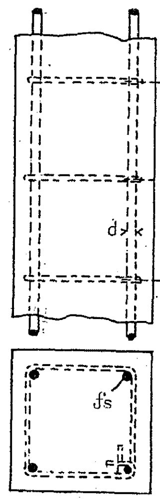


Fig. 525.

式中　d＝鐵筋ノ直徑 (cm)

σ_s＝鐵筋ノ應力 (kg/cm^2)

l_1＝結束線ノ間隔 (cm)

以上計算シタ(392)及(393)式ヲ呎單位ニ換算スレバ

$$P=\frac{6.2}{l^2}(I_c+15I_s)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(394)$$

$$l_1=161.4\frac{d}{\sqrt{\sigma_s}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(395)$$

式中　P＝總應力 (ton)

l及l_1＝柱長及結束線間隔 ($ft.$)

次ニ獨乙政府ニテ規定セル鐵筋長柱算定法ハ $\frac{l}{h}\geqq 15$ ナル場合ニ對シ第六節[III]ニ説明シタル方法卽チ荷重Pヲω倍シテ彎折ノ影響ヲ考慮スルノ法ヲ採用シ其彎折係數ωハ第二十一表ニ示ス値ヲ採ル事トシテ居ル。$\frac{l}{h}$ ノ中間値ハ比例部分ヲ用ヒテ之ヲ算出スル。

第二十一表　鐵筋混凝土長柱ニ對スル彎折係數ωノ表

(獨乙規定)

斷面形	$\frac{l}{h}$	彎折係數 ω	比例部分
正方形及矩形	15	1.00	0.05
	20	1.25	0.10
	25	1.75	
螺旋筋ヲ有スル柱	13	1.00	0.1
	20	1.70	0.2
	25	2.70	

「バッハ」氏 (C. Bach) ハ實驗ノ結果次式ヲ推擧シテ居ル。

$$P=\frac{1.25\sigma_cF}{1+\frac{1}{10,000}\left(\frac{l}{r}\right)^2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(396)$$

コレハ「ランキン」氏公式ニ外ナラヌ。

佛國規定デハ鐵筋混凝土柱ニシテ $\frac{l}{r}\geqq 20$ ノ場合ハ是ヲ長柱ト考ヘ「ランキン」氏公式ヲ用ヒル事トシ其端狀ニ因リ區別シテ

(a)　兩圓端　$P\leqq\frac{\sigma_cF}{1+\frac{1}{10,000}\left(\frac{l}{r}\right)^2}\ \cdots\cdots\cdots(397)$

(b)　一端定端他端圓端　$P\leqq\frac{\sigma_cF}{1+\frac{1}{20,000}\left(\frac{l}{r}\right)^2}\ \cdots\cdots\cdots(398)$

(c)　兩定端　$P\leqq\frac{\sigma_cF}{1+\frac{1}{40,000}\left(\frac{l}{r}\right)^2}\ \cdots\cdots\cdots(399)$

尙此三ツノ如ク端狀ノ確定セル場合以外ニ對シ(b)ノ場合ニ於テ若シ定端ガ不完全ナル構造ナレバ係數βヲ $\frac{1}{10,000}$ ト $\frac{1}{20,000}$ トノ

間ノ數値ヲ用ヒ又(c)ノ場合ニ於テ其一端ガ不完全ナラバ係數ハ$\frac{1}{20,000}$ト$\frac{1}{40,000}$トノ間ノ平均値ヲ用ヒ更ニ兩端共不完全定端ナレバ$\frac{1}{10,000}$ト$\frac{1}{40,000}$トノ平均ヲ用ヒル。是等ノ公式ニ於ケルσ_cニ對シテハ20 cm立方ノ立方體供試體ヲ製作後90日ニ於テ其破壞抗壓强ヲ調ベ其28％ヲσ_cトシテ用フト規定セラル。

例題第四十六　Fig. 526ニ示ス抗壓材ガ荷重25,000 kgヲ負フ時混凝土及鐵筋ノ應力並ビニ結束線間隔ヲ求ム。

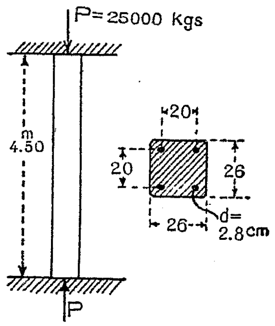


Fig.　526.

(答)　$F_c = 26^2 = 676\ cm^2,\quad F = 4\times\frac{\pi\times 2.8^2}{4} = 24.63\ cm^2,$

$P = 25,000\ kg,\quad \frac{l}{h} = \frac{450}{26} = 17.3$

長柱限界$\frac{l}{h} = 18$ニ近キガ故ニ長柱トシテ計算スル事ヲ要スル。玆ニハ長短兩樣ノ計算ヲ示ス。

(1)　短柱トシテ:——

$$\sigma_c = \frac{P}{F} = \frac{25,000}{676+15\times 24.63} = 24\ kg/cm^2.$$

$$\sigma_s = n\sigma_c = 15\times 24 = 360\ kg/cm^2.$$

(2)　長柱トシテ:——

$$I_c = \frac{bh^3}{12} = \frac{26^4}{12} = 38,081\ cm^4.$$

$$I_s = 4\left(\frac{\pi d^4}{64}+f_s\,.\,e^2\right) \doteqdot 4 f_s\, e^2 = 24.63\times 10^2 = 2,463\ cm^4.$$

(392)式ヲ適用シテ安全荷重ヲ求ムレバ

$$P = \frac{14}{l^2}(I_c+nI_s) = \frac{14}{4.5^2}(38,081+15\times 2,463) = 51,843\ kgs.$$

然ルニ作用スル荷重ハ25,000 $kgs.$ナルガ故ニ長柱トシテ充分安全ナル事ヲ知ル。此場合ノ安全率ハ何程ニナツテ居ルカト云フニ(391)式ヨリ

$$s = \frac{\pi^2 E_c}{Pl^2}(I_c+nI_s) = \frac{10\times 140,000}{25,000\times 450^2}(38,081+15\times 2,463)$$

$$= 21$$

(3)　結束線間隔:——

(393)式ニ據リ

$$l_1 = 512.4\frac{d}{\sqrt{\sigma_s}} = 512.4\times\frac{2.8}{\sqrt{360}} = 75\ cm$$

或ハ　$l_1 \leqq 12\,d = 12\times 2.8 = 33\ cm.$(鐵筋徑ノ12倍)

$\leqq h = 26\ cm$(抗壓材邊長)

普通ハ　$l_1 = 25\ cm$ 内外ニ採ル.

第九節　柱ノ撓度 (Deflection of Column)

理想的ノ長柱ハ其荷重P_1ガ「オイラー」氏公式ノ與ヘル荷重P_Eヨリ少ナケレバ常ニ軸ニ沿フテ働キ柱ハ直線ニ存在シテ彎曲シナイ。且ツ玆ニ僅カノ横力ヲ適用セバ柱ハ其爲メニ曲ガルケレドモ其少量ノ横力ヲ取去レバ再ビ直線ヲ回復ス。斯クノ如ク横力ヲ加ヘテ彎曲シタトキニ其撓度δト最大應力σトノ間ニハ一定ノ關係ガアルノデアツテ

$$\sigma = \frac{P_1}{F} + \sigma_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

$$\sigma_2 = \frac{M}{I}\ \frac{h}{2}$$

而シテ $M = P_1.\delta,\ I = Fr^2$ デアル故ニ

$$\sigma_2 = \frac{P_1.\delta}{Fr^2}\ \frac{h}{2}$$

$$\therefore\quad \sigma = \frac{P_1}{F} + \frac{P_1.\delta}{Fr^2}\ \frac{h}{2}$$

$$\delta = \left\{\frac{\sigma}{\frac{P_1}{F}} - 1\right\}\frac{r^2}{\frac{h}{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (b)$$

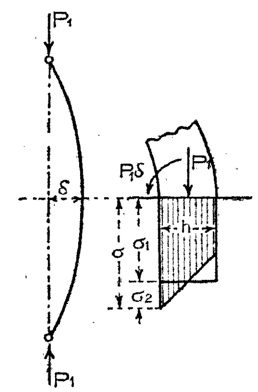


Fig.　527.

(b)式ヨリ見テδハσト共ニ増加ス。然ルニ若シP_1ナル軸壓力ガ漸次増加シ横力ヲ取除イテモ其柱ガ直線ヲ回復シナイ樣ナ程度ニ達シタトスレバ其時ノP_1ハ「オイラー」氏公式ガ與ヘルP_Eニ達

シタモノデアル。(*b*)式ノP_1ノ代リニ此P_Eヲ挿入シ

$$\delta=\left\{\frac{\sigma}{\dfrac{\mu\pi^2 EI}{Fl^2}}-1\right\}\frac{r^2}{\dfrac{h}{2}}=\frac{\sigma}{\dfrac{\mu\pi^2 Er^2}{l^2}}\,\frac{r^2}{\dfrac{h}{2}}-\frac{r^2}{\dfrac{h}{2}}$$

$$\therefore\quad \delta=\frac{\sigma l^2}{\mu\pi^2 E\dfrac{h}{2}}-\frac{r^2}{\dfrac{h}{2}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

(*b*)式ニ於ケルσハ不定デアル。何トナレバP_1ガP_Eニ達スル迄ノ多クノ異ナツタδニ對シテ各別々ノ平衡ヲ保ツテオルカラデアル。然シ若シδガ大キクナツテ其爲メニσガ材料ノ彈性限度ニ達スレバソレカラ先キハ破壞ガ伴フノデアツテ從ツテ最大可能撓度ヲ求メンニハ(*c*)式ノσニ其材料ノ彈性限度ヲ挿入スレバヨク

$$\delta_{max}=\frac{\sigma_{elas.}\,l^2}{\mu\pi^2 E\dfrac{h}{2}}-\frac{r^2}{\dfrac{h}{2}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(400)$$

式中　　σ_{elas} = 材料ノ彈性限度ニ於ケル單位應力

問題集第十

(1) 徑20*cm*, 長3*m* ノ丸太ヲ柱トシテ用フレバ荷重何程ニ耐ユルカ。但シ一端定端他端鉸トス。　(答)　51 *tons.*

(2) 兩端固定セル鑄鐵中空柱長20*ft*, 外徑8*in.* アリ。荷重80*t*ヲ受クル場合安全率ヲ6トシテ此圓柱ノ肉厚ヲ求ム。　(答)　1.96″

(3) 荷重 2000# ヲ受クル長 30*ft.* ノ足場丸太アリ。E=1,200,000#/□″, 安全率3トシテ其徑ヲ求ム。　(答)　6.04″

(4) 2″×6″ノ木柱ノ長16*ft.* ナルモノガ其中點ニ於テ左右ヨリ支ヘラレタルトキ其彎折荷重ヲ求ム。E=1,?00,000#/□″トス。

(答)「ランキン」氏公式 2280 *lbs*;「オイラー」氏公式 4235 *lbs.*

(5) 直徑4″, 長5′0″ノ錬鐵圓柱ガ受ケ得ル安全荷重ヲ求ム。但一端圓端他端定端トシ「ランキン」氏公式ヲ用ヒ安全率ヲ8トス。　(答)　21.4 *tons.*

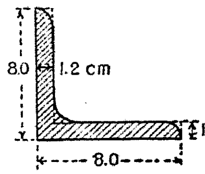
(6) 長5.0*m*ノ鑄鐵柱ガ4,000*kg*ノ荷重ヲ負ヒテ安全率20ヲ有スルタメニハ柱ノ徑ヲ何程トスベキカ。但柱斷面ハ中空ニシテd:D=0.6ノ比ヲ有シ端狀ハ圓端トシテ E=1,000,000*kg*/*cm*²ト採レ。　(答)　14.75 *cm*

(7) 徑12″, 厚1″鑄鐵中空柱アリ。コレト等シキ强度ヲ有スル軟鋼實柱ニテ置換ヘントスル場合其徑ヲ求ム。但シ彈性係數ハ鑄鐵 14,500,000#/□″, 軟鋼 29,000,000#/□″トス。　(答)　8.58″; 安全率ヲ8及5トスレバ5.81″。

(8) 內徑d, 外徑Dノ中空柱ト徑dノ實柱トノ强度ノ和ト徑Dノ實柱ノ强度トヲ比較セヨ。

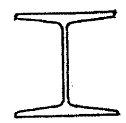
(9) 內徑d, 外徑Dノ中空柱ノ强度ガ徑dノ實柱ノ强度ト相等シキタメノd:Dノ比ヲ求ム。　(答)　0.841.

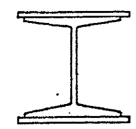
(10) 圖示ノ山形鋼長6*m*ニテ兩端緊定サレタルトキノ安全耐荷力ヲ求ム。「オイラー」公式ヲ用ヒ安全率ヲ10ト採レ。

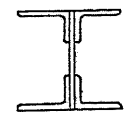


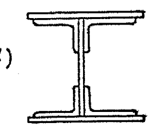
(答)　斷面ノ隅角ノ丸味ヲ無視スレバ
I_{min}=43.3*cm*⁴トナリ安全耐荷力 250 *kgs*; 上卷附錄第七表ニヨレバ I_{min}=43.0 *cm*⁴ トナリ 248 *kgs.*

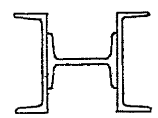
(11) 次ニ示ス斷面ノ面積,最小慣性能率及最小環動半徑ヲ求ム。

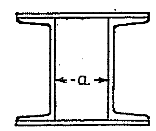
(*a*)

1-獨乙 Grey 型 H 字鋼 30 B (上卷附錄參照)

(*b*)

1-獨乙 Grey 型 H 字鋼 30 B
2-350.10 鈑

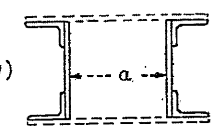
(*c*)

1-300.13 鈑
4-獨乙標準型山形鋼 100.150.12

(*d*)

1-300.12 鈑
4-獨乙標準山形鋼 100.150.12
2-350.10 鈑

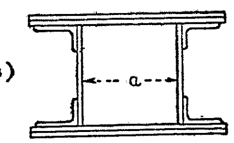
(*e*)

1-I 字鋼 20
2-溝形鋼 30

(*f*)


2-溝形鋼 30
2-400.12 蓋鈑
間隔 a=190 *mm*

(*g*)


2-300.10 腹鈑
4-80.120.10
間隔 a=300

(*h*)


2-300.10 腹鈑
4-80.120.10
4-600.10 蓋鈑
a=300 *mm*

(答)　(*a*)　152.1 *cm*², 　7494 *cm*⁴, 　7.02 *cm*;　　(*b*)　222.1, 　14,640, 　8.12;

(*c*) 150.8, 6060, 6.34; (*d*) 220.8, 13,206, 7.73;

(*e*) 151.1, 16169, 10.32; (*f*) 213.6, 31,294, 12.10;

(*g*) 136.4, 17904, 11.45; (*h*) 256.4, 46,744, 13.50.

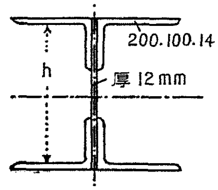
(12) 前題各斷面ニツキ柱長ヲ$10m$トシテ次ノ公式ニヨリ許容應壓力ヲ求ム。

(*a*) 鐵道省規定公式(附錄第一參照)

(*b*) 內務省規定公式(附錄第二參照)

(*c*) 市街地建物法施行規則公式

(*d*) 獨乙政府規定公式

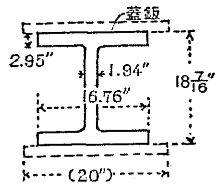


(13) 圖示ノ斷面ニ於テX, Y軸ニ對スル慣性能率ガ相等シキタメノ最小柱幅hヲ求ム。 (答) 22.9 *cm.*

(14) 市街地建築物法公式ヲ用ヒ中心荷重$1000t$ニ耐ユル長柱斷面ヲ求ム。其柱長$40ft.$トシ Bethlehem 製鋼會社製品 H 16 ヲ用ヒ, コレニ蓋鈑ヲ附スルモノトス。上記斷面ハ次ノ如シ。

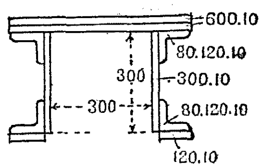
$I_x = 6416.2\,in^4$, $I_y = 2355.9\,in^4$, $F = 125.72\,in^2$,

重量 427 #/*ft.*



(15) 圖示ノ抗壓材ニ就キ其長ヲ$7.0\,m$トシテ許容應壓力ヲ求ム。但鐵道省規定公式ニ據レ。

(答) $r_{min} = 12.89\,cm$; 260.4 *tons.*



(16) 長lナル垂直柱アリ。自重ヲ受ケテ挫折セントスル極限ニ於ケル最大自重ヲ求ム。「オイラー」氏公式ヲ假定セヨ。 (答) 單位長自重 $\frac{27}{32}\,\frac{\pi^2 EI}{l^3}$

(17) 荷重 40,000# ヲ受クル長 20′ ノ長柱アリ。圖示ノ如ク 10″×10″ ノ方形斷面ヲ假定シテ必要ナル鐵筋量ヲ求ム。

(答) $0.434\square'' = 4 \sim \frac{3''}{4}\,\phi$.