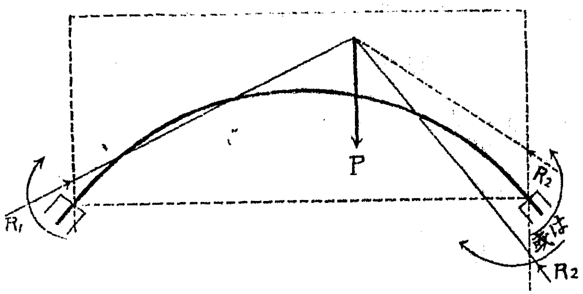
第　五　章

無　鉸　拱

第二十四節　平衡多邊形ヲ決定スル條件ヲ論ズ

無鉸拱ニアリテハ拱肋ハ端ヨリ端迄連續シ拱ノ兩端ハ固定セラルヽヲ以テ其平衡多邊形ハ何レノ點ヲ通過スベキヤヲ豫定シ難シ故ニ反動力ノ方向其大サ及其働點ニ就テ豫メ一モ知ルコトナシ今第五十九圖ニ於テ任意ノ位置ニPナル荷重アリトスレバ拱ノ兩端ガ固定ナルガ故ニ反動力R_1及R_2ハ

第　五　十　九　圖



兩端ヲ通過セズシテ其上若クハ下ヲ通過シ玆ニ力率ヲ生ズベシ此場合ニ於テ平衡多邊形ヲ決定セントスルニハ次ノ條件ヲ以テスベシ。

第一條件トシテハ兩端ニ於ル正切線ハ拱端ガ固定セラルヽガ故ニ其方向ニ變化ナシ換言スレバ荷重ヲ負

フ時ト荷重ナキ時ト兩端ニ於ル正切線ハ其方向ニ毫モ變化ナシ式ヲ以テ之ヲ表ハセバ

$$\triangle\varphi=\int\frac{Mds}{EI}=0$$

第二及第三條件トシテハ拱ノ一端ノ移動ガ他端ト其正切線トニ對シテ比對的ニモ亦絕對的ニモ皆無ナリトス式ヲ以テ之ヲ表ハセバ

$$\triangle x=\int\frac{Myds}{EI}=0$$

$$\triangle y=\int\frac{Myds}{EI}=0$$

此理論ハ近來石拱ニモ往々用ヒラルヽ所ナリト雖モ正確ナリトハ斷言シ難シ,又無鉸鐵筋混凝土拱ニ對シテハ此理論ヲ適用スベキハ無論ナリトス,其場合ニハ第二十一節ノ末尾〔注意〕ニ述ベシ如ク前式ハ次ノ如ク變ズ。

$$\triangle\varphi=\int\frac{Mds}{E_c\left(I_c+\frac{E_m}{E_c}I_m\right)}=0$$

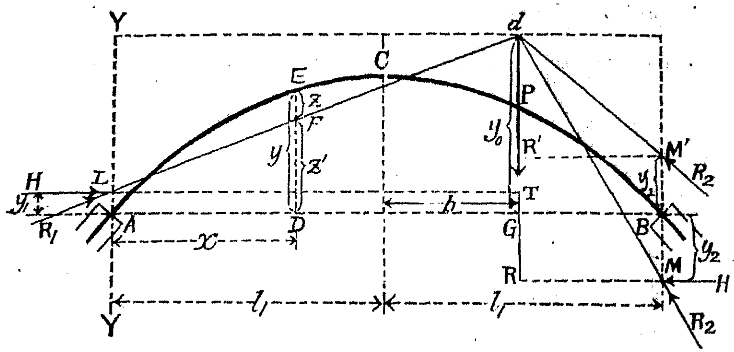
$$\triangle x=\int\frac{Myds}{E_c\left(I_c+\frac{E_m}{E_c}I_m\right)}=0$$

$$\triangle y=\int\frac{Mxds}{E_c\left(I_c+\frac{E_m}{E_c}I_m\right)}=0$$

第二十五節　抛物線形無鉸拱

第一欵　平衡多邊形ヲ論ズ

第六十圖



第六十圖ニ於テPヲ任意ノ荷重トシ

y_1 ヲ拱ノ一端(荷重ヨリ遠ク距リタル端)ニ於ル垂直線上該端ヨリ平衡多邊形ノ一邊ニ至ル垂直距離トシ。

y_2 ヲ他端(荷重ニ近キ端)ニ於ル垂直線上該端ヨリ平衡多邊形ノ一邊ニ至ル垂直距離トシ。

y_0 ヲ荷重Pト平衡多邊形トノ交切點 d ヨリ拱ノ兩端ヲ結合セル水平線迄ノ垂直距離トス。

此 y_1, y_2 及 y_0 ハ共ニ未知數ニシテ此等ノ値ヲ知ル以上ハ直ニ平衡多邊形ヲ畫クコトヲ得ベシ今此等未知數ノ値ヲ求ムルニハ前述ノ條件卽左ノ三方程式ヲ以テス。

$$\triangle\varphi=\int\frac{\mathrm{M}ds}{\mathrm{EI}}=0$$

$$\triangle x=\int\frac{\mathrm{M}yds}{\mathrm{EI}}=0$$

$$\triangle y=\int\frac{\mathrm{M}xds}{\mathrm{EI}}=0$$

抛物線形二鉸拱ニ於ケルト同一ノ假定卽Eヲ定數トシ, $\mathrm{I}=\mathrm{I}_0\sec i$ (第十三節參照)トスル時ハ $ds=dx\sec i$ ナリ, 而シテHヲ示力圖ノ極點距離トシ, Zヲ拱ノ任意ノ點Eト平衡多邊形ノ一邊トノ間ノ垂直距離トシ,其他第六十圖ニ示セル記號ヲ用ヰE點ニ於ル彎曲率ヲ採レバ

$$\mathrm{M}=\mathrm{H}z=\mathrm{H}(y-z')$$

之ヲ前述ノ三條件ノ式ニ代入スレバ

$$\int_0^{2l_1}ydx-\int_0^{2l_1}z'dx=0\text{.............................}(31)$$

$$\int_0^{2l_1}y^2dx-\int_0^{2l_1}z'ydx=0\text{.............................}(32)$$

$$\int_0^{2l_1}xydx-\int_0^{2l_1}z'xdx=0\text{.............................}(33)$$

第二欵　y_0, y_1 及 y_2 ノ値

次ニ以上ノ三式(31), (32) 及 (33) ニ依リ y_0, y_1 及 y_2 ノ値ヲ求メントス。

〔第一〕 (31) 式ノ積分ノ値

先ヅ $y=\frac{hx}{l_1^2}(2l_1-x)$......(14) ヲ (31) 式ノ第一項ニ代入シ之ヲ積分スレバ

$$\int_0^{2l_1} y\,dx = \int_0^{2l_1} \frac{hx}{l_1^2}(2l_1 - x)\,dx = \frac{h}{l_1^2}\int_0^{2l_1}(2l_1 x - x^2)\,dx$$

$$= \frac{h}{l_1^2}\left(l_1 \times 4l_1^2 - \frac{8l_1^2}{3}\right) = \frac{4}{3}hl_1 \ldots\ldots (a)$$

次ニ(31)式ノ第二項ハ之ヲ圖式ヲ以テ表ハセバ

$$\int_0^{2l_1} z'\,dx = \Sigma \mathrm{DF} = \Sigma z'$$

即チ縱距ノ總和ニシテ兩端ヲ結合セルABナル水平線ト平衡多邊形トノ間ニアル面積ニ等シ,故ニ又單ニALdG及BM′dG(若クハBMdG)ナル二個ノ四邊形ノ面積ノ和ニ等シ,但此場合BMdGトハ二個ノ三角形GdB及GBMノ面積ノ差ヲ云フ,何トナレバy_2ノ符號ガ負(−)ナル時ハ一方ノ三角GBMノ面積ハ負トナレバナリ,今此正負(±)ヲy_2ナル文字其物ノ内ニ含有スルモノトシ換言スレバy_2ヲ代數的ニ採レバ第二項ノ積分ノ値ハ次ノ如シ

$$\int_0^{2l_1} z'\,dx = \frac{y_1 + y_0}{2}(l_1 + b) + \frac{y_2 + y_0}{2}(l_1 - b) \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

但y_2ナル文字ノ内ニ正負ヲ含有セザルモノトシテ而シテy_2ガ負ナル時ハ(b)式ハ次ノ如クナルベシ。

$$\int_0^{2l_1} z'\,dx = \frac{y_1 + y_0}{2}(l_1 + b) + \frac{y_0 - y_2}{2}(l_1 - b)$$

(b)式ヨリ(a)式ヲ減ジ更ニ之ヲ約スレバ次ノ式ヲ得

$$2l_1 y_0 + (l_1 + b)y_1 + (l_1 - b)y_2 - \frac{8}{3}hl_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

〔第二〕(32)式ノ積分ノ値

第一項ノ積分ノ値ハ第(15)式ヨリ

$$\int_0^{2l_1} y^2\,dx = \frac{16}{15}h^2 l_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

第二項ニ對シテハAGノ間ニアルz'ノ値ハ等三角ノ關係ヨリ　$z' = y_1 + \frac{y_0 - y_1}{l_1 + b}x$

又G及BノGニアルz'ノ値ハBヲ原點トシテxヲ左方ニ採レバ　$z' = y_2 + \frac{y_0 - y_2}{l_1 - b}x$

第一項第二項トモyノ値ハ(14)式ヨリ

$$y = \frac{hx}{l_1^2}(2l_1 - x)$$

玆ニ於テAトGトノ間即0ヨリ$(l_1 + b)$迄ノ積分ニハz'ノ初ノ値ヲ用ヒ又Bヲ原點トシテ0ヨリ$(l_1 - b)$迄ノ積分ニハz'ノ第二ノ値ヲ用ユル時ハ

AトGトノ間ニアリテハ

$$\int_0^{l_1+b}\left(y_1 + \frac{y_0 - y_1}{l_1 + b}x\right)\frac{h}{l_1^2}(2l_1 x - x^2)\,dx$$

$$= \frac{h}{l_1^2}y_1\int_0^{l_1+b}(2l_1 x - x^2)\,dx + \frac{h}{l_1^2}\cdot\frac{y_0 - y_1}{l_1 + b}\int_0^{l_1+b}(2l_1 x^2 - x^3)\,dx$$

$$= \frac{h}{l_1^2}y_1\left[l_1(l_1 + b)^2 - \frac{1}{3}(l_1 + b)^3\right] + \frac{h}{l_1^2}(y_0 - y_1)$$

$$\left[\frac{2}{3}l_1(l_1 + b)^2 - \frac{1}{4}(l_1 + b)^3\right] \ldots\ldots (d)$$

GトBトノ間ニアリテハ

$$\int_0^{l_1-b}\left(y_2+\frac{y_0-y_2}{l_1-b}x\right)\frac{hx}{l_1^2}(2l_1-x)dx$$

$$=\frac{h}{l_1^2}y_2\left[l_1(l_1-b)^2-\frac{1}{3}(l_1-b)^3\right]+\frac{h}{l_1^2}(y_0-y_2)$$

$$\left[\frac{2}{3}l_1(l_1-b)^2-\frac{1}{4}(l_1-b)^3\right]\ldots\ldots(e)$$

(d) 及 (e) ヲ加ヘ而シテ (c) ト合スル時ハ

$$\frac{h}{6l_1^2}\left[y_0(5l_1^3-l_1b^2)+\frac{1}{2}y_1(l_1+b)^2(3l_1-b)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}y_2(l_1-b)^2(3l_1+b)\right]-\frac{16}{15}h^2l_1=0$$

更ニ之ヲ約スレバ

$$2l_1(5l_1^2-b^2)y_0+(l_1+b)^2(3l_1-b)y_1+(l_1-b)^2(3l_1+b)y_2$$

$$-\frac{64}{5}hl_1^3=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(35)$$

〔第三〕 (33)式ノ積分ノ値

此式ヲ圖式ヲ以テ表ハセバ

$$\int_0^{2l_1}xydx-\int_0^{2l_1}z'xdx=\Sigma AD\cdot DE-\Sigma AD\cdot DF=0$$

第一項ハ抛物線トABナル兩端線トノ間ニアル面積ニAヲ通過スル垂直軸ヨリ該面積ノ重心ニ至ル水平距離ヲ乘ジタル所謂**幾何的力率** (Geometrical moment) ニ等シ而シテ此面積ハAトBトノ間ニアリテハ抛物線ニ依リ境界セラルヽ面積即 $\frac{4}{3}hl_1$ ニ等シ故ニ

$$\int_0^{2l_1}xydx=\frac{4}{3}hl_1\times l_1=\frac{4}{3}hl_1^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(f)$$

第二項モ亦タ同ジクAYヲ回轉軸トシテALdMB若クハALdM'Bナル面積ノ幾何的力率ナリ此面積ハ二個ノ矩形ト二個ノ三角形トヨリ成ル即

ALTG 及 GBMR (若クハ GBM'R')

LdT 及 dMR (若クハ dM'R')

是レナリ其値ハ次ノ如シ

面　積	AY軸ヨリ重心迄ノ水平距離
$ALTG=y_1(l_1+b)$	$\frac{l_1+b}{2}$
GBMR (若クハ GBM'R') $=y_2(l_1-b)$	$2l_1-\frac{l_1-b}{2}$
$LdT=(y_0-y_1)\frac{l_1+b}{2}$	$\frac{2}{3}(l_1+b)$
dMR (若クハ dM'R') $=(y_0-y_2)\frac{l_1-b}{2}$	$2l_1-\frac{2}{3}(l_1-b)$

故ニ

$$\int_0^{2l_1}z'xdx=\frac{y_1(l_1+b)^2}{2}+y_2(l_1-b)\left[2l_1-\frac{l_1-b}{2}\right]$$

$$+(y_0-y_1)\frac{l_1+b}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(l_1+b)+(y_0-y_2)\frac{l_1-b}{2}$$

$$\left[2l_1-\frac{2}{3}(l_1-b)\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(g)$$

但 y_2 ノ符號ハ文字其モノヽ内ニ含有スルモノトス。

今 (f) ヨリ (g) ヲ減ジ之ヲ約スレバ次ノ式ヲ得

$$2l_1(3l_1+b)y_0+(l_1+b)^2y_1+(l_1-b)(5l_1+b)y_2-8l_1^2h=0\ldots\ldots(36)$$

〔第四〕 結　論

是ニ於テ三方程式 (34), (35), (36) ヨリ三個ノ未知數 y_0

y_1, y_2 ノ値ヲ求ルコトヲ得即次ノ如シ

$$y_0=\frac{6}{5}h \qquad (37)$$

$$y_1=\frac{2}{15}\cdot\frac{l_1+5b}{l_1+b}h \qquad (38)$$

$$y_2=\frac{2}{15}\cdot\frac{l_1-5b}{l_1-b}h \qquad (39)$$

若シ $b=kl_1$ トスレバ

$$y_1=\frac{2}{15}\cdot\frac{1+5k}{1+k}h \qquad (38)a$$

$$y_2=\frac{2}{15}\cdot\frac{1-5k}{1-k}h \qquad (39)a$$

此 y_2 ハ荷重ニ近キ拱端ヨリコヽヲ通過スル垂直線ガ平衡多邊形ト交切スル點迄ノ垂直距離ヲ云フ,若シ荷重ガ拱ノ中央ニ在レバ $b=0$ ニシテ $y_1=y_2=\frac{2}{15}h$ トナルベシ,又 y_0 ハ荷重ノ位置ノ如何ニ關セザル定數ナルガ故ニ此拱ノ反動力軌跡ハ AB 線以上 $\frac{6}{5}h$ ノ高ニアル水平直線ナリ。今荷重ノ種々ノ位置即 b ノ種々ノ値ニ對シ y_1 及 y_2 ノ値ヲ求ムレバ b ノ値ガ $\frac{1}{5}l_1$ ヨリ大ナル時ハ y_2 ハ負(−)トナルヲ看ルベシ,而シテ

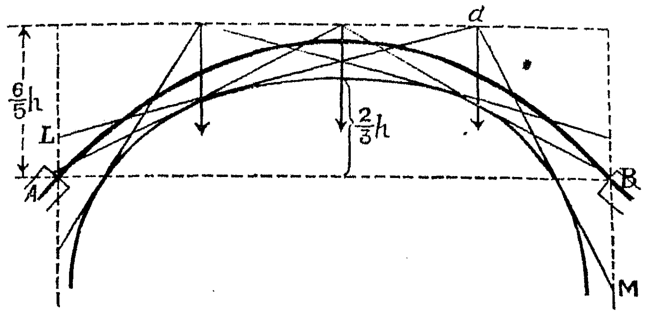
$b=-l_1$ ノ時ハ　　$y_1=-\infty$　　$y_2=\frac{2}{5}h$

$b=+l_1$ ノ時ハ　　$y_1=\frac{2}{5}h$　　$y_2=-\infty$

$b=0$ ノ時ハ　　$y_1=\frac{2}{15}h$　　$y_2=\frac{2}{15}h$

例ヘバ第六十一圖ニ於テ各荷重ニ對スル y_1 及 y_2 ノ

第六十一圖



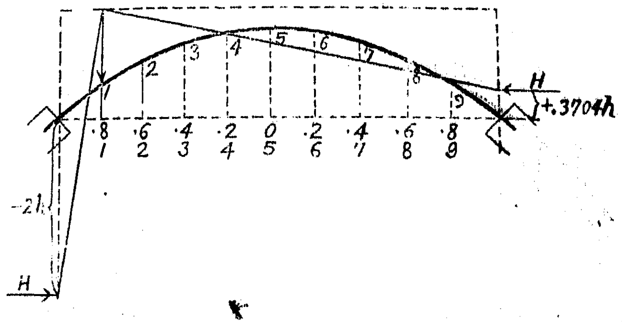
値ヲ求メ Ld, dM ノ如キ反動力ノ方向線ヲ畫キ之レヲ正切線トシタル一ノ曲線ヲ畫ク時ハ其曲線ハ二個ノ雙曲線ヲ成シ AB 線以上 $\frac{2}{3}h$ ナル高ニアル一點ニ於テ交切スベシ,而シテ拱端ヲ通過スル垂直線ハ此曲線ト漸近線(アシムプトート)タルベシ。

徑間ヲ十個ニ等分シ次表ニ掲グル y_1 及 y_2 ノ値ヲ以テ數多ノ反動力ノ方向線ヲ畫ク時ハ容易ニ此曲線ヲ畫クコトヲ得ベシ。

第四表　y_1 及 y_2 ノ値

分點		5	4 / 6	3 / 7	2 / 8	1 / 9	0 / 10	
	$K=\frac{b}{l_1}=$	0	.2	.4	.6	.8	1.	
	$\frac{1+5K}{1+K}=$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2.0}{1.2}$	$\frac{3.0}{1.4}$	$\frac{4.0}{1.6}$	$\frac{5.0}{1.8}$	$\frac{6}{2}$	
y_1	$=\frac{2}{15}\cdot\frac{1+5K}{1+K}$	=0.1333	0.2222	0.2857	0.3333	0.3704	0.4	×h
	$\frac{1-5K}{1-K}$	$=\frac{1}{1}$	$\frac{0}{0.8}$	$\frac{-1.0}{0.6}$	$\frac{-2.0}{0.4}$	$\frac{-3.0}{0.2}$	$\frac{-4.0}{0}$	
y_2	$=\frac{2}{15}\cdot\frac{1-5K}{1-K}$	=0.1333	0	−0.2222	−0.6667	−2.0	−∞	×h

第六十二圖



若シ荷重ガ第六十二圖ニ示メス如ク左端ヨリ.8ノ點卽第一ノ分點ニ在ル時ハ $y_2=-2h$ ニシテ左端ニ於ル垂直線上Hノ働點ヲ示メシ而シテ $y_1=+0.3704h$ ニシテ右端ニ於ル垂直線上Hノ働點ヲ示メスベシ。

第三款　H, V_1 及 V_2 ノ値

或ル荷重ノ位置ニ對シ(37), (38)及(39)式ヨリ算出セル y_0, y_1 及 y_2 ヲ以テ平衡多邊形ヲ畫キ又之ニ對スル示力圖ヲ畫ク時ハ等三角ノ關係ヨリ次ノ比ヲ得ベシ(第六十三圖ヲ見ヨ)。

$$(y_0-y_1):(l_1+b)=V_1:H$$

$$(y_0-y_2):(l_1-b)=V_2:H$$

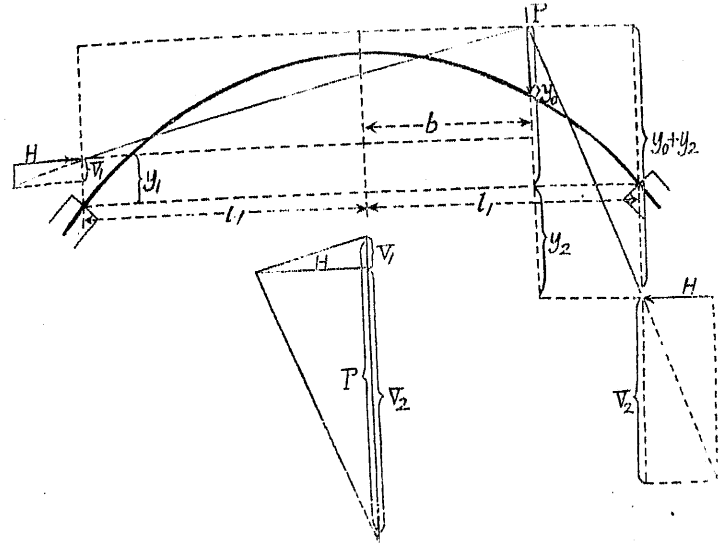
但 y_2 ノ正負ハ其文字中ニ含有スルモノトス。

依テ　$$V_1=\frac{y_0-y_1}{l_1+b}H$$

$$V_2=\frac{y_0-y_2}{l_1-b}H$$

然ルニ垂直力ノ總和ハ零ナルガ故ニ　$V_1+V_2=P$

第六十三圖



依テ　$$H=\frac{P}{\dfrac{y_0-y_1}{l_1+b}+\dfrac{y_0-y_2}{l_1-b}}$$

今(37), (38), (39)式ヨリ y_0, y_1, y_2 ノ値ヲ之ニ代入スレバ

$$H=\frac{15}{32}\cdot\frac{(l_1^2-b^2)^2}{l_1^3h}P\ \cdots\cdots(40)$$

$$V_1=\frac{1}{4}\left(2+\frac{b}{l_1}\right)\left(1-\frac{b}{l_1}\right)^2P\ \cdots\cdots(41)$$

$$V_2=\frac{1}{4}\left(2-\frac{b}{l_1}\right)\left(1+\frac{b}{l_1}\right)^2P\ \cdots\cdots(42)$$

若シ $b=kl_1$ トスレバ

$$H=\left[\frac{15}{32}(1-k^2)^2\right]\frac{l_1}{h}P\ \cdots\cdots(40)a$$

$$V_1=\left[\frac{1}{4}(2+k)(1-k)^2\right]P\ \cdots\cdots(41)a$$

$$V_2=\left[\frac{1}{4}(2-k)(1-k)^2\right]P\ \dotfill\ (42)a$$

又 (40)a 式ヨリ　$P=\frac{32}{15}\cdot\frac{1}{(1-k^2)^2}\cdot\frac{h}{l_1}H$　ナルガ故ニ

$$V_1=\frac{8}{15}\cdot\frac{(2+k)}{(1+k)^2}\cdot\frac{h}{l}H\ \dotfill\ (41)b$$

$$V_2=\frac{8}{15}\cdot\frac{(2-k)}{(1-k)^2}\cdot\frac{h}{l_1}H\ \dotfill\ (42)b$$

今徑間ヲ十個ニ等分シ (40)a, (41)a, (42)a 式ニ依リ H, V_1 V_3 ノ値ヲ算スレバ次ノ如シ。

第五表　H, V_1 及 V_2 ノ値

分點	5	4 / 6	3 / 7	2 / 8	1 / 9	
$k=$	0	.2	.4	.6	.8	
$1-k^2=$	1	.96	.84	.64	.36	
$(1-k^2)^2=$	1	.9216	.7056	.4096	.1296	
$H=\frac{15}{32}(1-k^2)^2=$	.4687	.4320	.3308	.1920	.0607	$\times\frac{l_1}{h}P$
$V_1=\frac{(2+k)(1-k)^2}{4}=$	.5	.352	.216	.104	.028	$\times P$
$V_2=\frac{(2-k)(1+k)^2}{4}=$	.5	.648	.784	.896	.972	$\times P$

又數多ノ荷重アル場合ニ其合成反動力ノ働點ノ位置ヲ求ムルニハ各 H ニ對スル y_1 若クハ y_2 ヲ乘ジ其和ヲ求メテ H ノ和ニテ之ヲ除スベシ卽

$$\frac{\Sigma Hy_1}{\Sigma H}=y_1\quad 若クハ\quad \frac{\Sigma Hy_2}{\Sigma H}=y_2$$

又合成反動力ノ垂直分力ヲ求ムルニハ各荷重ニ對スル V_1 若クハ V_2 ヲ求メテ後其總和ヲ採ルベシ。

第二十六節　抛物線形無鉸拱ニ於テ垂直力ヨリ生ズル彎曲率ノ値

拱軸ノ或ル任意ノ點ニ於ル彎曲率ノ値ハ第十四節ニ於テ論ゼシ如ク

$$M=Hz=H(y-z')$$

又抛物線ノ縱距 y ノ値ハ　$y=\frac{hx}{l_1^2}(2l_1-x)=(1-k^2)h$

而シテ z' ハ平衡多邊形ノ縱距ニシテ之ヲ求ムルニハ次ノ如クスベシ,卽 x ヲ拱ノ左端ヨリ又 x' ヲ其右端ヨリ縱距 z' 迄ノ水平距離トスル時ハ

荷重ノ左ニアリテハ　$z'=y_1+\frac{y_0-y_1}{l_1+b}x$

荷重ノ右ニアリテハ　$z'=y_2+\frac{y_0-y_2}{l_1-b}x'$

但 y_2 ニ屬スル正負ノ符合ハ y_2 ナル文字ノ內ニ含有スルモノトス。

今一例ヲ揭ゲテ之ヲ說明セントス。

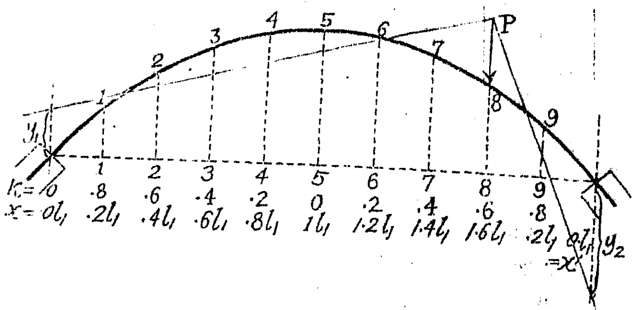
第六十四圖ハ徑間ヲ十個ニ等分シタル拱抽ヲ示メスPナル荷重ガ左端ヨリ第八分點ニアル時各分點ニ於ル彎曲率ノ値ヲ求ム。

茲ニ　$k=0.6$　　$b=kl_1=.6l_1$

$H=0.192\frac{l_1}{h}P$　　$y_0=\frac{6}{5}h=1.2h$

$y_1=0.3333h$　　$y_2=-0.6667h$

第 六 十 四 圖



$$\frac{y_0-y_1}{l_1+b}=\frac{y_0-y_1}{l_1\left(1+\frac{b}{l_1}\right)}=\frac{(1.2-.3333)}{1.6}\cdot\frac{h}{l_1}=0.5417\frac{h}{l_1}$$

$$\frac{y_0-y_2}{l_1-b}=\frac{y_0-y_2}{l_1\left(1-\frac{b}{l_1}\right)}=\frac{(1.2+.6667)}{.4}\cdot\frac{h}{l_1}=4.6667\frac{h}{l_1}$$

$y=(1-k^2)h=0.36h$；　$0.64h$；　$0.84h$；等

故ニ荷重ノ左ニアリテハ

$$z'=0.3333h+0.5417\frac{h}{l_1}x$$

荷重ノ右ニアリテハ

$$z'=-.6667h+4.6667\frac{h}{l_1}x'$$

式　　$M=H(y-z')$

依テ各分點ニ於ル彎曲率ノ値ハ次ノ如クシテ得ラルベシ。

荷重ガ第八分點ニ在ル時彎曲率 M ノ値

分點	0	1	2	3	4	5
$x=$	$0l_1$	$.2l_1$	$.4l_1$	$.6l_1$	$.8l_1$	$1l_1$
	之ニ $0.5417\frac{h}{l_1}$ ヲ乘ジ					
積	0	.1083	.2167	.3250	.4334	.5417
y_1 …………	.3333	.3333	.3333	.3333	.3333	.3333
z' …………	.3333	.4416	.5500	.6583	.7667	.8750
$y=$ ………	0	.36	.64	.84	.96	1.00
$(y-z')=$	$-.3333$	$-.0816$	$+.0900$	$+.1817$	$+.1933$	$+.1250$
	之ニ $H=0.192\frac{l_1}{h}P$ ヲ乘ジ					
$M=$	$-.0640$	$-.0157$	$+.0173$	$+.0349$	$+.0371$	$+.0240$

分點	6	7	↓P 8	9	10	
$x=$	$1.2l_1$	$1.4l_1$	$1.6l_1$	$.2l_1$	$0l_1$	$=x'$
				之ニ $0.46667\frac{h}{l_1}$ ヲ乘ジ		
積	.6500	.7584	.8667	.9333	0	
y_1 …………	.3333	.3333	.3333	$-.6667$	$-.6667$	………… y_2
z' …………	.9833	1.0917	1.2000	.2667	$-.6667$	………… z'
$y=$ ………	.96	.84	.64	.36	0	$\times h$
$(y-z')=$	$-.0233$	$-.2517$	$-.5600$	$+.0933$	$+.6667$	$\times h$
	之ニ $H=0.192\frac{l_1}{h}P$ ヲ乘ジ					
$M=$	$-.0045$	$-.0483$	$-.1075$	$+.0179$	$+.1280$	$\times l_1P$

斯ノ如クシテ計算セル彎曲率ノ値ハ荷重ノ位置ニ依リテ差アリ之ヲ次表ニ掲グ。

第六表*　彎曲率 $M=mPl_1$ ガ ノ値

荷重ノ位置 ＼ 分點	0	1	2	3	4	5
P ガ 9 ニ在ル時	−.022	−.006	+.005	+.012	+.018	+.010
〃 8 〃 〃	−.064	−.016	+.017	+.035	+.037	+.024
〃 7 〃 〃	−.095	−.019	+.031	+.054	+.050	+.020
〃 6 〃 〃	−.096	−.011	+.040	+.056	+.037	−.016
〃 5 〃 〃	−.062	+.006	+.037	+.031	−.012	−.094
〃 4 〃 〃	0	+.026	+.017	−.026	−.104	−.016
〃 3 〃 〃	+.073	+.036	−.028	−.119	−.036	+.020
〃 2 〃 〃	+.128	+.018	−.107	−.048	−.004	+.024
〃 1 〃 〃	+.121	−.051	−.028	−.011	+.002	+.010

荷重ノ位置 ＼ 分點	6	7	8	9	10	H＝
P ガ 9 ニ在ル時	+.002	−.011	−.028	−.051	+.121	$.061\frac{l_1}{h}P$
〃 8 〃 〃	−.004	−.048	−.107	+.018	+.128	.192 〃
〃 7 〃 〃	−.036	−.119	−.028	+.036	+.073	.331 〃
〃 6 〃 〃	−.104	−.026	+.017	+.026	0	.432 〃
〃 5 〃 〃	+.012	+.031	+.037	+.006	−.062	.469 〃
〃 4 〃 〃	+.037	+.056	+.040	−.011	−.096	.432 〃
〃 3 〃 〃	+.050	+.054	+.031	−.019	−.095	.331 〃
〃 2 〃 〃	+.037	+.035	+.017	−.016	−.064	.192 〃
〃 1 〃 〃	+.013	+.012	+.005	−.006	−.022	.061 〃

第二十七節　拋物線形無鉸拱ニ於テ腹材ノ抵抗スベキ垂直剪力ノ値

第十六節ニ於テ論ゼシ如ク此垂直剪力ハ拱ノ形狀ガI形ナルカ若クハ開腹材ヲ有スル構拱ナル場合ニ於テノミ初メテ之ヲ考フルノ必要アルベシ而シテ之ヲ算出

* 徑間ヲ 20 ＝等分セル m ノ値ハ附錄第十七表ニアリ。

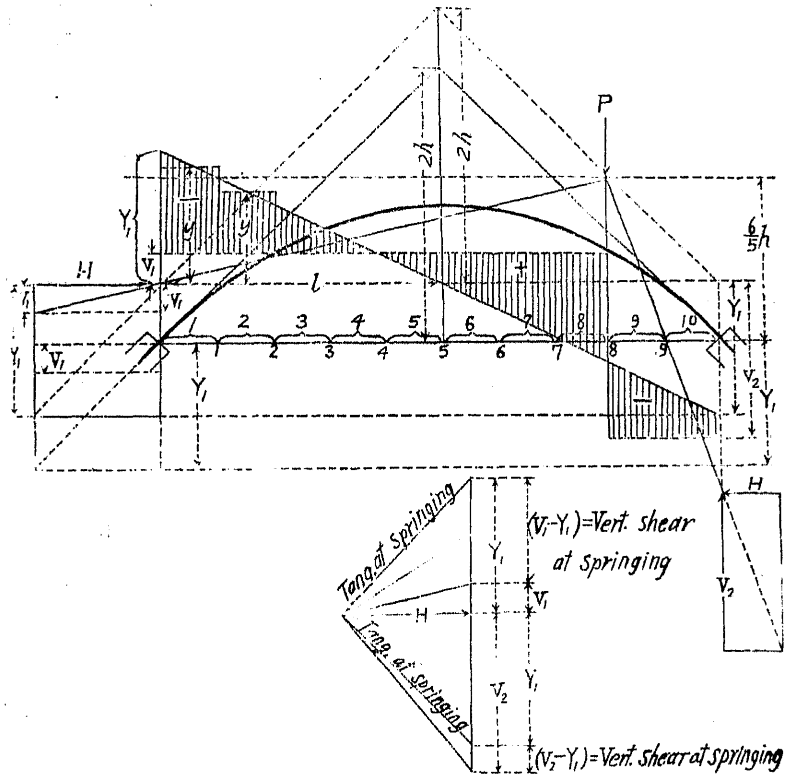
スルノ方法ハ全然二鉸拱ニ於ルト同一ノ算法ニ倣フヲ以テ茲ニハ唯大體ノ說明ヲ與フルノミ。

Y_1 ヲ以テ拱ノ一端ニ於テ其腹材ガ負擔シ得ベキ垂直剪力トシ。

(V_1-Y_1) 若クハ (V_2-Y_1) ヲ以テ其腹材ガ抵抗スベキ垂直剪力トス(第十六節參照)

第六十五圖ハ第三十圖ト同樣ノ方法ヲ以テ畫キタル

第六十五圖



垂直剪力圖ナリ但此場合反動力ハ兩端ヲ通過セズシテ他ノ點ヲ通過ス,先ヅ徑間ヲ十個ノ區劃ニ等分シ一區劃ニ屬スル垂直剪力ハ之ヲ定數トシ,茲ニ一例トシテ假ニ荷重ガ第八分點(卽區劃 8 ト 9 トノ間)ニ在ルモノトシテ各區劃ノ剪力ヲ求ム。

第六十五圖ニ於テ等三角ノ關係ヨリ

$$Y_1 : H = 2h : l_1 \quad 卽 \quad Y_1 = \frac{2h}{l_1}H$$

$$V_1 = 0.104P \qquad V_2 = -.896P$$

$$H = 0.1920\frac{l_1}{h}P$$

$$Y_1 = \frac{2h}{l_1}H = \frac{2h}{l_1} \times \frac{l_1}{h} \times 0.1920 \times P = 2 \times 0.1920P = 0.3840P$$

初ノ　$Y = \left(.3840 - \frac{0.3840}{10}\right)P = 0.3456P$

次ノ　$Y = \left(0.3456 - \frac{0.3840}{5}\right)P = 0.2688P$

次ノ　$Y = \left(0.2688 - \frac{0.3840}{5}\right)P = 0.1920P$　等

初ノ　$(V_1 - Y) = (0.104 - 0.346)P = -0.242P$

順次 V_1 ヨリ(若クハ V_2 ヨリ) y ヲ減ジ次ノ垂直剪力ヲ得ベシ。

荷重ガ第八分點ニ在ル時垂直剪力 V ノ値

(P ハ第八分點ニ作用ス)

分點	0–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9	9–10	
區劃……	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
V_1…………	+.104	+.104	+.104	+.104	+.104	+.104	+.104	+.104	−.896	−.896	
Y …………	+.346	+.269	+.192	+.115	+.038	−.038	−.115	−.192	−.269	−.346	
$V=(V_1-Y)$	−.242	−.165	−.088	−.011	+.066	+.142	+.219	+.296	−.627	−.550	×P

斯ノ如クシテ計算セル垂直剪力ノ値ハ荷重ノ位置ニ依リ差アリ次ニ之ヲ揭グ。

第七表　垂直剪力 $V = nP$　n ノ値

荷重ノ位置 ＼ 區劃	1	2	3	4	5
P ガ第 9 分點ニ在ル時	−.081	−.057	−.033	−.008	+.016
〃 8 〃 〃	−.242	−.165	−.088	−.011	+.066
〃 7 〃 〃	−.379	−.247	−.115	+.017	+.150
〃 6 〃 〃	−.426	−.253	−.080	+.093	+.256
〃 5 〃 〃	−.343	−.156	+.031	+.219	+.406
〃 4 〃 〃	−.130	+.043	+.216	+.389	+.438
〃 3 〃 〃	+.180	+.321	+.453	−.414	−.282
〃 2 〃 〃	+.550	+.627	−.296	−.219	−.142
〃 1 〃 〃	+.863	−.113	−.089	−.064	−.040

荷重ノ位置 ＼ 區劃	6	7	8	9	10
P ガ第 9 分點ニ在ル時	+.040	+.064	+.089	+.113	−.863
〃 8 〃 〃	+.142	+.219	+.296	−.627	−.550
〃 7 〃 〃	+.282	+.414	−.453	−.321	−.189
〃 6 〃 〃	+.438	−.389	−.216	−.043	+.130
〃 5 〃 〃	−.406	−.219	−.031	+.156	+.343
〃 4 〃 〃	−.266	−.093	+.080	+.253	+.426
〃 3 〃 〃	−.150	−.017	+.115	+.247	+.379
〃 2 〃 〃	−.066	+.011	+.088	+.165	+.242
〃 1 〃 〃	−.016	+.008	+.033	+.057	+.081

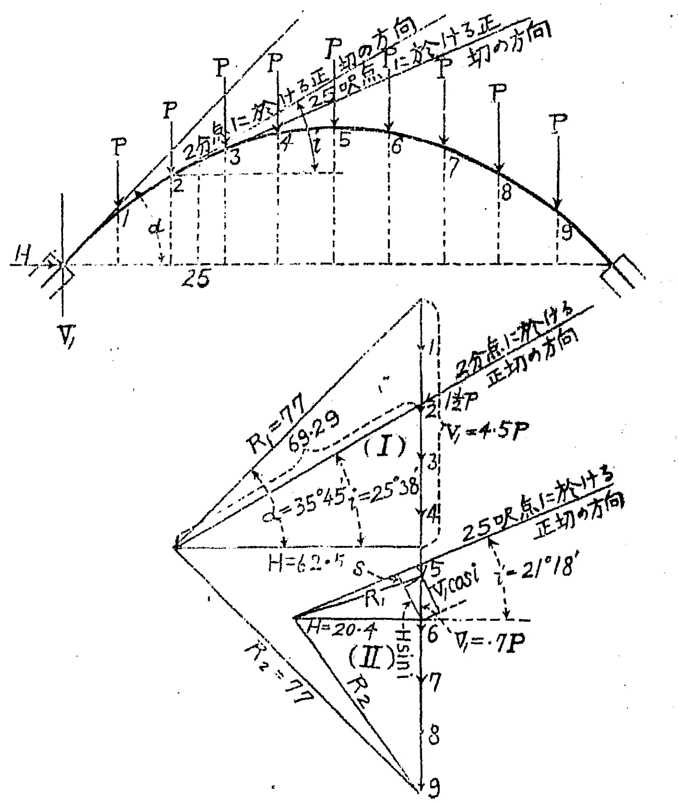
第二十八節　拋物線形無鉸拱ニ於ル軸推力

無鉸拱ニ於ケル軸推力ノ理論ハ第十五節二鉸拱ニ於テ說述セシ所ト毫モ異ナルコトナシ(次ニ例題ヲ設ケテ之レガ計算ヲ試ム)。

第六十六圖

(甲)

(乙)



無鉸拱　例題一

工字形拋物線無鉸拱アリ徑間百呎中央ニ於ル拱軸ノ高(拱矢)二十呎ニシテ徑間ヲ十個ニ等分シ拱ノ各分點ニ十噸宛ノ荷重ヲ負フモノトス。

(第一問)　左端ヨリ水平ニ二十呎距リタル分點ニ於テ拱軸ノ上ニ懸ル彎曲率,拱肋ノ軸推力及反動力働點ノ位置ヲ求ム。

(第二問)　拱ノ右半ニ於テ第六ヨリ第九ニ至ル各分點ニノミ十噸宛ノ荷重ヲ負ヒ左半第一ヨリ第五ニ至ル各分點ニハ荷重ナキ場合ニ於テ左端ヨリ水平ニ二十五呎距リタル點ニ於ル拱腹ノ負擔スベキ向心剪力ヲ求ム。

解

第六十六圖(甲)(乙)參照

(I)			(第六表ヨリ) 第2分點ニ於ル	第五表ヨリ H ノ係數	第五表ヨリ V_1 ノ係數
荷重ガ	1	ニ在ル時, m ノ值	=−.028,	=.0607,	=.972
〃	2	〃　〃	=−.107,	=.1920,	=.896
〃	3	〃　〃	=−.028,	=.3308,	=.784
〃	4	〃　〃	=+.017,	=.4320,	=.648
〃	5	〃　〃	=+.037,	=.2687,	=.500
〃	6	〃　〃	=+.040,	=.4320,	=.352
〃	7	〃　〃	=+.031,	=.3308,	=.216
〃	8	〃　〃	=+.017,	=.1920,	=.104

荷重ガ 9 ニ在ル時, m ノ値 $= +.005$ $\qquad = .067$ $\qquad = .028$

$$M = \Sigma m \times P \times l_1 = -0.080 \times 10 \times 50, \quad H = 2.5 \times \frac{l_1}{h} P, \quad V_1 = 4.50 \times P$$

$$= -8.\text{呎噸}; \qquad = 2.5 \times \frac{50}{20} \times 10, \qquad = 4.5 \times 10$$

$$= 62.5\text{噸}; \qquad = 45\text{噸} = V_2$$

20呎ノ分點ニ於ル $\tan i = \frac{dy}{dx} = \frac{2hk}{l_1} = \frac{2 \times 20 \times .6}{50} = .48$

$i = 25°38'$　　$\sin i = .433$　　$\cos i = .901$

$R_1 = \sqrt{\overline{62.5}^2 + \overline{45}^2} = 77\text{噸} = R_2$　　$\tan\alpha = \frac{V_1}{H} = \frac{45}{62.5} = .72$

$\alpha = 35°45'$　　$\sin\alpha = .584$　　$\cos\alpha \doteqdot .811$

R_1 ノ第 2 分點ニ於ル正切上ノ射影

$$= H\cos i + V_1 \sin i = 62.5 \times .901 + 45 \times .433 = 75.79\text{噸}$$

$(P_1 + \frac{1}{2}P_2)$ ノ第 2 分點ニ於ル正切上ノ射影

$$= (P_1 + \tfrac{1}{2}P_2)\sin i = 15 \times .433 = 6.5\text{噸}$$

第 2 分點ニ於ル軸推力 $= 75.79 - 6.5 = 69.29$噸

次ノ別法ヲ以テ此計算ノ誤ナキヲ證ス

(別法)　$R_1 = H\cos 35°45' + V_1 \sin 35°45' = 62.5 \times .811 + 45 \times .584 = 77$噸

(別法)　軸推力 $= R_2 \cos 61°23' + \Sigma(\frac{1}{2}P_2$ ヨリ P_9 ニ至ル$) \cos 64°22'$

$$= 77 \times .478 + 75. \times .433 = 69.28\text{噸}$$

	(第五表ヨリ) H ノ係數		(第四表ヨリ) y_1 ノ係數		Hy_1	(第六表ヨリ) 左端ニ於ル M ノ係數
荷重ガ 1 ニ在ル時,	$=.0607$,	$=$	$.3704$,	$=$	$.0225$,	$=+.121$
〃 2 〃	$=.1920$,	$=$	$.3333$,	$=$	$.0640$,	$=+.128$
〃 3 〃	$=.3308$,	$=$	$.2857$,	$=$	$.0945$,	$=+.073$

荷重ガ 4 ニ在ル時,	$=.4320$,	$=$	$.2222$,	$=$	$.0960$,	$=\ 0$
〃 5 〃	$=.4687$,	$=$	1.3333,	$=$	$.0625$,	$=-.062$
〃 6 〃	$=.4320$,	$=$	0 ,	$=$	0 ,	$=-.096$
〃 7 〃	$=.3308$,	$=-$	$.2222$,	$=-$	$.0734$,	$=-.095$
〃 8 〃	$=.1920$,	$=-$	$.6667$,	$=-$	$.1280$,	$=-.064$
〃 9 〃	$=.0607$,	$=-$	2.0 ,	$=-$	$.1214$,	$=-.022$

$$\Sigma H = 2.5 \times \frac{Pl_1}{h} \qquad \Sigma H y_1 = +.0167 \times Pl_1; \quad \Sigma M = +.017 \times Pl_1;$$

$$y_1 = \frac{\Sigma H y_1}{\Sigma H} = \frac{+.0167}{2.5} h = \frac{+.0167}{2.5} \times 20 = +0.135\text{呎} = y_2$$

(別法)　$z = \frac{\Sigma M}{\Sigma H} = \frac{+.017}{2.5} \times 20 = +0.136\text{呎} = y_1 = y_2$

(II)　25呎ノ點ニ於ル $\tan i = \frac{2 \times 20 \times .5}{50} = .4$

$i = 21°18'$　　$\sin i = .371$　　$\cos i = .928$

	(第七表ヨリ) V ノ係數 n	(第五表ヨリ) H ノ係數	V_1 ノ係數
荷重ガ 9 ニ在ル時,	$=-.033$,	$=.0607$,	$=.028$
〃 8 〃	$=-.088$,	$=.1920$,	$=.104$
〃 7 〃	$=-.115$,	$=.3308$,	$=.216$
〃 6 〃	$=-.080$,	$=.4320$,	$=.352$

$$V = -.316 \times P, \quad H = 1.0155 \times \frac{50}{20} \times P, \quad V_1 = .700 \times P$$

$$= -.316 \times 10, \qquad = 25.39\text{噸}; \qquad = 7.\text{噸}$$

$$= -3.16\text{噸};$$

25呎ノ點ニ於ル向心剪力 $S=V\cos i=-3.16\times .928$

$$=-2.93\text{噸}$$

(別法) $S=V_1\cos i-H\sin i=7\times .928-25.39\times .371=-2.92\text{噸}$

例題二

拱ノ形ハ前例ト同一ニシテ其各分點ニ於テ二十噸ノ荷重ガ全部ニ懸ルモノトシ拱肋ノ深ヲ平等ニ三呎トス今計算ヲ簡便ナラシムル爲メ其死重,溫度ノ變化及肋縮ノ影響ヲ無視シ且軸推力及彎曲應力ハ全部拱肋ノ突緣ガ負擔スルモノト假定シ拱頂ニ於ル上下各突緣ノ負擔スベキ全應力及彎曲應力ヲ求ム。

解

$$\text{拱肋ノ深}=h_1=3\text{呎}$$

拱軸ヲ中心トセル拱頂ニ於ル彎曲率公式 $M=mPl_1$

第六表ヨリ $m=(+.010+.024+.020-.016-.094-.016$

$$+.020+.024+.010)=-0.018$$

$$M=-.018\times 20\times 50=-18\text{呎噸}$$

即上部突緣ニ應壓力ヲ生ズ

水平推力 $H=2.501\dfrac{Pl_1}{h}=2.501\times\dfrac{50}{20}\times 20=125.05\text{噸}$

軸推力 $T=H\cos i+V_1\sin i$

然ルニ拱頂ニ於テハ $i=0,\ \cos i=1,\ \sin i=0$

故ニ $T=H=125.05\text{噸}$

$$\frac{T}{2}=62.525$$

拱軸ヨリ平衡多邊形ニ至ル垂直距離$=z$

$$M=Hz \quad \text{故ニ} \quad z=\frac{M}{H}=\frac{18}{125.05}=0.144\text{呎}$$

上部突緣ヨリ平衡多邊形ニ至ル垂直距離

$$=z-\frac{h_1}{2}=0.144-1.50=-1.356\text{呎}$$

下部突緣ヨリ平衡多邊形ニ至ル垂直距離

$$=z+\frac{h_1}{2}=0.144+1.50=1.644\text{呎}$$

下部突緣ニ於ル彎曲率 $M_B=H\left(z+\dfrac{h_1}{2}\right)=125.05\times 1.644$

$$=205.5822\text{呎噸}$$

上部 〃 〃 $M_A=H\left(z-\dfrac{h_1}{2}\right)=125.05\times 1.356$

$$=169.5678\text{呎噸}$$

故ニ上部突緣ニ於ル全應壓力$=\dfrac{M_B}{h_1}=\dfrac{205.5822}{3}$

$$=-68.5274\text{噸} \quad \text{(答)}$$

下部 〃 〃 $=\dfrac{M_A}{h_1}=\dfrac{169.5678}{3}$

$$=-56.5226\text{噸} \quad \text{(答)}$$

上部突緣ニ於ル彎曲應力$=62.525-68.5274$

$$=-6.0024\text{噸} \quad \text{(答)}$$

下部 〃 〃 $=62.525-56.5226$

$$=+6.0024\text{噸} \quad \text{(答)}$$

本例ニ於テハ軸推力ガ彎曲應力ヨリ强大ナルヲ以テ拱肋ノ全部皆ナ應壓力ヲ受ク(第四節參照)。

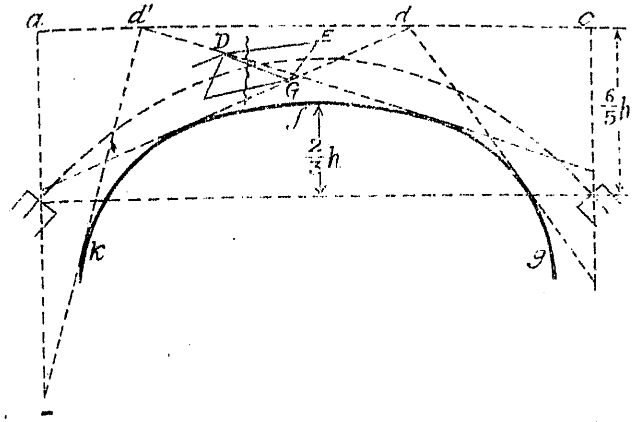
第二十九節　拋物線形無鉸拱ノ一臥材ニ最大應力ヲ生ズベキ荷重ノ位置ヲ論ズ

三鉸拱若クハ二鉸拱ニアリテハ荷重ノ位置既ニ決定セル以上ハ反動力軌跡ノ一定點ヨリ兩端ニ至ル線ヲ引キテ直ニ反動力ノ方向ヲ決定スルコトヲ得ベシ又或ル臥材ニ對スル彎曲率ノ中心ノ位置ヲ決定スル以上ハ兩端ヨリ該中心ヲ通ジテ一線ヲ引キ之ヲ反動力軌跡迄延長シテ之ガ交切點ヲ求メ其交切點ニ於ル荷重ハ該臥材ニ應力ヲ生ゼザルコトヲ知ルベシ何トナレバ其反動力ヨリ生ズル彎曲率ハ零ナレバナリ然ルニ無鉸拱ニアリテハ平衡多邊形ガ兩端ヲ通過セザルガ故ニ斯ノ如キ簡單ナル方法ヲ用ユル能ハズ此場合ニ於テ任意ノ臥材ニ應力ヲ生ゼザル荷重ノ位置ヲ求メントスルニハ先ヅ荷重ノ種々ノ位置ニ對シテ種々ノ反動力方向線ヲ引キ然ル後之ニ接觸スル包線(エンヴェロープ)ヲ畫クヲ便ナリトス。

例ヘバ第六十七圖ニ於テ ac 線ヲ高 $\frac{6}{5}h$ ニ在ル反動力軌跡トシ kfg ナル雙曲線ヲ種々ナル反動力方向線ニ接觸スル包線トス。

今 DE ナル臥材ノ應力ヲ求メントスルニハ彎曲率ノ中心ヲ G 點ニ定ムルヲ要ス故ニ G 點ヲ通ジテ雙曲線ニ

第六十七圖



正切ナル Gd 線ヲ引キ反動力軌跡ノ一點 d ヲ求ムル時ハ該點ニ在ル荷重ハ臥材 DE ニ應力ヲ生ゼザルベシ何トナレバ其反動力ヨリ生ズル彎曲率ガ零ナレバナリ。

臥材ニ應力ヲ生ゼザル荷重ノ位置ガ決定セル以上ハ如何ナル位置ニ在ル荷重ガ該臥材ニ最大應力ヲ與フベキカハ三鉸拱若クハ二鉸拱ニ於ルト同樣ノ方法ヲ以テ容易ニ之ヲ求ムルコトヲ得ベシ。

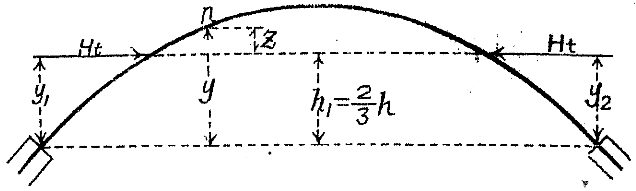
第三十節　拋物線形無鉸拱ニ於ル溫度應力ヲ論ズ

無鉸拱ニアリテハ平衡多邊形ガ拱ノ兩端ヲ通過セザルガ故ニ溫度ノ昇騰ニ依リ徑間ヲ延長セントスル力ニ抵抗スル H_t ナル水平推力ハ兩端ニ起ラズシテ夫レ以上 y_1 若クハ y_2 ダケ離レタル點ニ來ルベシ故ニ兩端ニ於テ

ハ彎曲率ヲ生ズ而シテ該彎曲率ハ兩端ニ於テ相等シク且 H_t ノ位置ハ同一水平線上ニ來ルベシ依テ $y_1=y_2$ ナリトス。

之ヲ h_1 ヲ以テ示メス(第六十八圖)

第六十八圖



故ニ第(31)式ニ於ル z' ノ代リニ h_1 ヲ以テスレバ

$$\int_0^{2l_1} y\,dx-\int_0^{2l_1} h_1\,dx=0 \qquad \text{(43)}$$

然ルニ $\int_0^{2l_1} y\,dx=\frac{4}{3}hl_1$ 又 $\int_0^{2l_1} h_1\,dx=2l_1h_1$

ナルガ故ニ之ヲ(43)式ニ代入シテ h_1 ヲ求ムレバ

$$h_1=\frac{2}{3}h=\text{定數} \qquad \text{(44)}$$

e ヲ拱肋ノ膨脹係數トスル時ハ溫度ノ昇騰 t° ニ對スル徑間ノ伸長ハ $2l_1te$ ニシテ第十九節ニ於テ論ゼシ如ク

$$\frac{1}{EI_0}\int_0^{2l_1} My\,dx=2l_1te \qquad \text{(45)}$$

但 E ハ彈性係數 又 $I_0=\frac{I}{\sec\theta}$

此水平反動力 H_t ニ屬スル拱ノ或ル任意ノ點 n (第六十八圖)ニ於ル彎曲力ハ

$$M=H_tz=H_t(y-h_1)$$

ニシテ之ヲ(45)式ニ代入スレバ

$$\frac{H_t}{EI_0}\left[\int_0^{2l_1} y^2dx-h_1\int_0^{2l_1} y\,dx\right]=2l_1te \qquad \text{(46)}$$

然ルニ $\int_0^{2l_1} y^2dx=\frac{16}{15}h^2l_1$ $\int_0^{2l_1} y\,dx=\frac{4}{3}hl_1$ $h_1=\frac{2}{3}h$

ナルガ故ニ之ヲ(46)式ニ代入シ H_t ヲ求ムレバ

$$H_t=\frac{45EI_0te}{4h^2} \qquad \text{(47)}$$

H_t ノ量及方向ヲ知ル以上ハ之ニ依リテ應力ヲ算出スルコトヲ得ベシ。

之ヲ第(24)式ト比較スルニ同一ノ溫度ノ變化ニ對シ拋物線形無鉸拱ニ於ル溫度推力ハ二鉸拱ノ夫レニ六倍スルヲ見ルベシ而シテ彎曲率ヲ比較スルニ拱頂ト拱端トヲ採レバ次ノ如シ。

	拋物線形二鉸拱	拋物線形無鉸拱
拱頂に於る彎曲率 M=	H_th	$\frac{1}{3}h\times 6H_t=2H_th$
拱端に於る彎曲率 M=	0	$-\frac{2}{3}h\times 6H_t=-4H_th$

第三十一節　拋物線形無鉸拱ノ肋縮ニ屬スル應力ヲ論ズ

第十九節二鉸拱ノ場合ニ於テ論ゼシ如ク肋縮ナルモノハ畢竟溫度ノ降下ト同一ノ結果ヲ拱ニ生ズルガ故ニ今f'ヲ抽推力ノ平均強度トシ,Eヲ彈性係數トシ,第(47)式ニ於テtcノ代リニ$\frac{f'}{E}$ヲ用ユレバ此肋縮ニ抵抗スベキ外向キノ水平推力卽$-H_s$ヲ得ベシ依テ

$$H_s = -\frac{45}{4}\cdot\frac{f'}{h^2}I_0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (48)$$

但f'ノ値ハ初メ未知ナルヲ以テ拱ノ二三ノ點ニ於ル強度(例ヘバ一平方吋ニ付キ封度)ヲ求メ其平均ヲ用ユベシ。

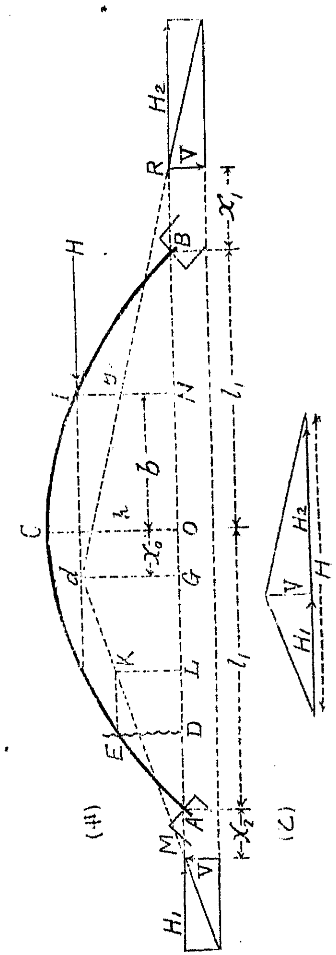
此水平推力ノ働點ハH_tノ働點ト同一ナルベキハ明カニシテ拱ノ兩端ヲ結合セル水平線以上$\frac{2}{3}h$ノ點ニ來ルベシ而シテ之ニ屬スル應力ハ二鉸拱ノ場合ニ說述セルモノト同一ノ計算法ニ依リ之ヲ求ムルコトヲ得(第二十節參照)。

肋縮ニ屬スル應力モ亦タ無鉸拱ニアリテハ二鉸拱ノ夫レニ六倍ス而シテ肋縮ハh^2ニ反比例ヲ爲ス故ニ拱矢ノ比較的大ナル拱ニアリテハ其影響頗ブル小ナリト雖モ扁平ナル拱ニアリテハ著シク感ズルモノト知ルベシ。

第三十二節　水平ナル外力ヲ受クル拋物線無鉸拱ノ平衡ヲ論ズ

此**水平外力**トハ第二十一節ニ於テ論究セシ場合ト同一ニシテ風壓其他何種ノ水平力タルヲ問ハズト雖モ橋拱ノ方向ニ働ク風壓ハ概シテ其影響大ナラザルヲ以テ實際ニハ蓋シ鐵筋混凝土拱ノ場合ニ於テ詰込土砂ヨリ生ズル壓力ノ水平分力ナルベシ。

第六十九圖ニ於テ茲ニ一個ノ水平力Hガ拱ノ或ル任意ノ點Iニ働クモノト假定シ先ヅ之ニ對スル平衡多邊形(甲圖)及示力圖(乙)ヲ畫キテ說明スベシ。



第六十九圖

圖中MA$=x_2$. BR$=x_1$. OG$=x_0$ハ今未知數ト假定シ其値ヲ求ムルコト次ノ如シ。

Hノ働キツヽアル水平線迄ノ縱距dGハ

$$= IN = \frac{h}{l_1^2}(l_1^2 - b^2) = y_{11}$$ トス

今 ED ナル截斷面ヲ假定スル時ハ E 點ヨリ平衡多邊形迄ノ水平距離 EK ハ次ノ如シ　$\overline{EK}=ML-MD$

相似三角形ノ關係ヨリ

$$\frac{ML}{KL}=\frac{MG}{dG}\qquad 即\qquad ML=\frac{KL.MG}{dG}$$

$$\overline{EK}=\frac{ED.MG}{dG}-MD$$

x ヲ左端 A ヨリ起算スルモノトスレバ**以上ノ値ハ次**ノ如シ

$$ED=\frac{h}{l_1^2}(2l_1x-x^2)\qquad MG=l_1+x_2-x_0$$

$$dG=\frac{h}{l^2}(l_1^2-b^2)\qquad MD=x_2+x$$

故ニ　$$\overline{EK}=\frac{(2l_1x-x^2)(l_1+x_2-x_0)}{(l_1^2-b^2)}-(x_2+x)\ \ldots\ldots\ldots(49)$$

第二十一節第(27)式ノ如ク E 點ニ於ル力率ノ値ハ

$$M_E=V.\overline{EK}\qquad ニシテ$$

$\overline{EK}$ ノ中ニハ未知數 x_0, x_1 及 x_2 ヲモ含ム其値ヲ求ムルニハ三個ノ條件ヲ要ス其一ハ**徑間ノ變化ハ零ナリ**ト云フニアリ算式ヲ以テ之ヲ示メセバ

$$\Delta x=\int y\frac{Mds}{EI}=\frac{V}{EI_0}\int y.\overline{EK}.dx=0$$

然ルニ $y=\dfrac{h}{l_1^2}(2l_1x-x^2)$ ニシテ先ヅ A 點ヨリ I 點迄ノ積分ハ

$$\int_A^I y.\overline{EK}dx=\frac{h}{l_1^2}\int_0^{l_1+b}\Big[\frac{l_1+x_2-x_0}{l_1^2-b^2}(4l_1^2x^2-4l_1x^3+x^4)$$

$$-(x_2+x)(2l_1x-x^2)\Big]dx$$

次ニ B 點ヨリ I 點迄ノ積分ハ x ヲ右端 B ヨリ起算シ MG ノ代リニ GR ヲ又 x_2 ノ代リニ x_1 ヲ用ユベシ然ル時ハ

$$\int_B^I y.\overline{EK}.dx=\frac{h}{l_1^2}\int_0^{l_1-b}\Big[\frac{l_1+x_1+x_0}{l_1^2-b^2}(4l_1^2x^2-4l_1x^3+x^4)$$

$$-(x_1+x)(2l_1x-x^2)\Big]dx$$

以上二個ノ積分ハ一ハ應壓力ヲ一ハ應張力ヲ示メスベキモノナレバ反對ノ符合ヲ有ス而シテ第一條件タル徑間ノ變化ヲ零ニスル爲メニハ其量ハ互ニ相等シカラザル可ラズ依テ此等ノ積分ノ値ヲ求メ全體ニ $(l_1^2-b^2)$ ヲ乘スレバ次ノ式ヲ得

$$(l_1+x_2-x)\left[\frac{4}{3}l_1^2(l_1+b)^3-l_1(l_1+b)^4+\frac{1}{5}(l_1+b)^5\right]$$

$$-(l_1^2-b^2)\left[l_1x_2(l_1+b)^2-\frac{1}{3}x_2(l_1+b)^3+\frac{2}{3}l_1(l_1+b)^3-\frac{1}{4}(l_1+b)^4\right]$$

$$=(l_1+x_1+x_0)\left[\frac{4}{3}l_1^2(l_1-b)^3-l_1(l_1-b)^4+\frac{1}{5}(l_1-b)^5\right]$$

$$-(l_1^2-b^2)\left[l_1x_1(l_1-b)^2-\frac{1}{3}x_1(l_1-b)^3+\frac{2}{3}l_1(l_1-b)^3-\frac{1}{4}(l_1-b)^4\right]$$

更ニ之ヲ約スレバ

$$8l_1^5x_0-(l_1^5-5l_1^3b^2+5l_1^2b^3-b^5)x_1+(l_1^5-5l_1^3b^2-5l_1^2b^3+b^5)x_2$$

$$=10l_1^3b^3-2l_1b^5\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

其第二條件ハ**拱ノ傾斜ノ變化ハ零ナリ**ト云フニアリ即

$$\Delta\varphi=\int\frac{Mds}{EI}=\frac{V}{EI_0}\int\overline{EK}.dx=0$$

之ニ對シA點ヨリI點迄ノ部分ノ積分ハ

$$\int_A^I\overline{EK}.dx=\int_0^{l_1+b}\left[\frac{l_1+x_2-x_0}{l_1^2-b^2}(2l_1x-x^2)-(x_2+x)\right]dx$$

而シテB點ヨリI點迄ノ部分ノ積分ハ

$$\int_B^I\overline{EK}.dx=\int_0^{l_1-b}\left[\frac{l_1+x_1+x_0}{l_1^2-b^2}(2l_1x-x^2)-(x_1+x)\right]dx$$

以上二個ノ積分ノ値ヲ求メ之ヲ相等シクシ更ニ約スレバ次ノ式ヲ得

$$(l_1+x_2-x_0)\left[l_1(l_1+b)^2-\frac{1}{3}(l_1+b)^3\right]-(l_1^2-b^2)\left[x_2(l_1+b)+\frac{1}{2}(l_1+b)^2\right]$$
$$=(l_1+x_1+x_0)\left[l_1(l_1-b)^2-\frac{1}{3}(l_1-b)^3\right]$$
$$-(l_1^2-b^2)\left[x_1(l_1-b)+\frac{1}{2}(l_1-b)^2\right]$$

即　$4l_1^2x_0-(l_1^3-3l_1b^2+2b^3)x_1+(l_1^3-3l_1b^2-2b^3)x_2=4l_1b^3$…………(b)

次ニ其第三條件トシテハ拱端ノ撓度(デフレクション)ハ零ナリト云フニアリ即

$$\Delta y=\int\frac{Mxds}{EI}=\frac{V}{EI_0}\int\overline{EK}.x.dx=0$$

今前述ノ$\overline{EK}$ノ値ヲ採用シI點ヨリ左方ニ於テハADヲxトシ其右方ニ於テハxノ代リニ$(2l_1-x)$ヲ用ユル時ハ

I點ヨリ左方ノ部分ニ對シテハ

$$\overline{EK}.x=\frac{(l_1+x_2-x_0)(2l_1x-x^2)x}{(l_1^2-b^2)}-(x_2+x)x$$

而シテI點ヨリ右方ノ部分ニ對シテハ

$$\overline{EK}.(2l_1-x)=\frac{(l_1+x_1+x_0)(2l_1x-x^2)(2l_1-x)}{(l_1^2-b^2)}-(x_1+x)(2l_1-x)$$

故ニA點ヨリI點ニ至ル部分ニ對スル積分ハ

$$\int_0^{l_1+b}\left[\frac{l_1+x_2-x_0}{l_1^2-b^2}(2l_1x^2-x^3)-(x_2+x)x\right]dx$$

又B點ヨリI點ニ至ル部分ノ積分ハ

$$\int_0^{l_1-b}\left[\frac{l_1+x_1+x_0}{l_1^2-b^2}(4l_1^2x-4l_1x^2+x^3)-(x_1+x)(2l_1-x)\right]dx$$

而シテ此二個ノ積分ノ値ヲ求メ之ヲ相等シクスレバ次ノ式ヲ得

$$(l_1+x_2-x_0)\left[\frac{2}{3}l_1(l_1+b)^3-\frac{1}{4}(l_1+b)^4\right]$$
$$-(l_1^2-b^2)\left[\frac{1}{2}x_2(l_1+b)^2+\frac{1}{3}(l_1+b)^3\right]$$
$$=(l_1+x_1+x_0)\left[2l_1^2(l_1-b)^2-\frac{4}{3}l_1(l_1-b)^3+\frac{1}{4}(l_1-b)^4\right]$$
$$-(l_1^2-b^2)\left[2l_1x_1(l_1-b)+\frac{1}{2}(2l_1-x_1)(l_1-b)^2-\frac{1}{3}(l_1-b)^3\right]$$

更ニ之ヲ約スレバ

$$16l_1^4x_0-(7l_1^4-18l_1^2b^2+8l_1b^3+3b^4)x_1+(l_1^4-6l_1^2b^2-8l_1b^3-3b^4)x_2$$
$$=2l_1^5-4l_1^3b^2+16l_1^2b^3+6l_1b^4\text{……………………………}(c)$$

以上(a), (b), (c)ナル三個ノ方程式ヨリ次ノ式ヲ得

$$(l_1^3-b^3)x_1-(l_1^3+b^3)x_2=2l_1b^3$$

$$(l_1^2-b^2)x_1+(l_1^2-b^2)x_2=\frac{2}{3}l_1^3+2l_1b^2$$

之ヲ解ケバ　$x_1=\frac{1}{3}\left(l_1+\frac{4b^2}{l_1-b}\right)$

而シテ又　$x_2=\frac{1}{3}\left(l_1+\frac{4b^2}{l_1+b}\right)$ ……………………… (50)

$x_0=\frac{2b^3}{l_1^2}$

若シ $b=kl_1$　$x_1=\frac{1}{3}l_1\left(1+\frac{4k^2}{1-k}\right)$

トスレバ　$x_2=\frac{1}{3}l_1\left(1+\frac{4k^2}{1-k}\right)$ ……………………… (50)a

$x_0=2\mathrm{K}^3l_1$

又第六十九圖ニ依リ H, H_1 及 H_2 ノ間ニ次ノ比例ノ成立スルヲ見ルベシ

$$H_1:H_2:H=(l_1+x_2-x_0):(l_1+x_1+x_0):(2l_1+x_1+x_2)$$

依テ

$$H_2=H\frac{l_1+x_1+x_0}{2l_1+x_1+x_2}=H\left[\frac{1}{2}+(5l_1^2-3b^2)\frac{b^3}{4l_1^5}\right]$$

$$=\frac{1}{2}H\left[1+\frac{1}{2}k^3(5-3k^2)\right] \quad \cdots\cdots (51)$$

$$H_1=H\frac{l_1+x_2-x_0}{2l_1+x_1+x_2}=H-H_2$$

又 V 及 H ノ間ニ次ノ關係ノ存スルヲ見ルベシ

$$V:H=\frac{h}{l_1^2}(l_1^2-b^2):(2l_1+x_1+x_2)$$

依テ

$$V=H\frac{3}{8}h\frac{(l_1^2-b^2)^2}{l_1^5}=\frac{3}{8}H\frac{h}{l_1}(1-k^2)^2 \quad \cdots\cdots (52)$$

以上 x_0, x_2, V, H_2 及 H_1 ノ値ヲ表出スルコト次ノ如シ

第八表　x_0, x_1, x_2, V, H_2 及 H_1 ノ値

分格點	5	6/4	7/3	8/2	9/1	
$K=\frac{b}{l_1}$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	
$x_0=$	0.000	0.016	0.128	0.432	1.024	$\times l_1$
$x_1=$	0.33	0.40	0.69	1.53	4.60	$\times l_1$
$x_2=$	0.33	0.38	0.49	0.63	0.81	$\times l_1$
V=	0.375	0.346	0.265	0.154	0.049	$\times\frac{h}{l_1}H$
$H_2=$	0.500	0.510	0.572	0.711	0.894	×H
$H_1=$	0.500	0.490	0.428	0.289	0.106	×H

〔**注意**〕第二十一節ノ末尾ニ於テ述ベシ如ク無鉸拱ニ關スル公式モ亦之ヲ**鐵筋混凝土**ノ如キ合成體ニ應用スルニ當リテハ式中ノ E.I ノ代リニ

$\mathrm{E.I}=\mathrm{E_c}\left(\mathrm{I_c}+\frac{\mathrm{E}_m}{\mathrm{E_c}}\mathrm{I}_m\right)$ ヲ用フベシ。

第三十三節　無鉸拱ニ於ケル水平推力 H ヲ求ムル圖算法

本法ハ第十七節二鉸拱ニ於テ設述セシモノト同一ノ理論ニ基キタル圖算法ニシテ先ヅ一個ノ據線(レフアレンスライン)ヲ假設シ

y 及 x ヲ拱軸ノ任意ノ點ノ縱橫距トシ

z ヲ拱軸ト眞ノ平衡多邊形トノ間ノ垂直距離トシ

z' ヲ拱軸ト據線トノ間ノ垂直距離トシ

z'' ヲ眞ノ平衡多邊形ト據線トノ間ノ垂直距離トスベシ

但 z 及 z'' ハ眞ノ平衡多邊形ノ位置決定スル迄ハ未知數ナリ

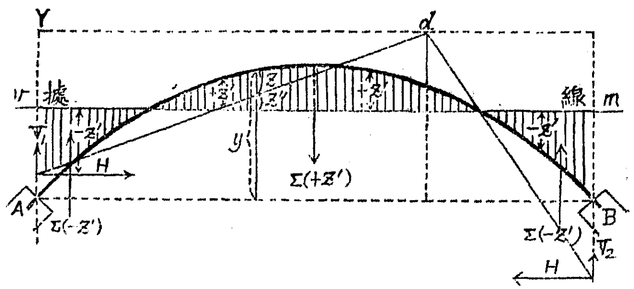
$$\text{必要條件タル}\begin{cases}\Delta\varphi=\int\frac{\mathrm{M}ds}{\mathrm{EI}}=0\\ \Delta y=\int\frac{\mathrm{M}xds}{\mathrm{EI}}=0\\ \Delta x=\int\frac{\mathrm{M}yds}{\mathrm{EI}}=0\end{cases}$$

ナル三方程式ハEI及Iヲ定數トスル時ハ次ノ如ク變ズ。

$$\left.\begin{array}{l}\int zds=0\\ \int xzds=0\\ \int yzds=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A})$$

玆ニ於テ先ヅ初メノ二方程式ヲ滿足セシムベキ條件ノ下ニ第七十圖ニ於テ vm ナル據線ヲ假設スベシ之ヲ引クニハ

第七十圖



$$\left.\begin{array}{l}\int z'ds=0\\ \int xz'ds=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{B})$$

ナル二條件ヲ充タセバ足ル。

此據線ニ依リ $z=z'-z''$ ナルガ故ニ(A)式ハ次ノ如ク變ズ。

$$\int(z'-z'')ds=0\quad\text{故ニ(B)式ヨリ}\quad\int z''ds=0\cdots\cdots\cdots(\mathrm{C})$$

$$\int x(z'-z'')ds=0\quad\text{故ニ(B)式ヨリ}\quad\int xz''ds=0\cdots\cdots\cdots(\mathrm{D})$$

$$\int y(z'-z'')ds=0\quad\text{故ニ(B)式ヨリ}\quad\int yz'ds=\int yz''ds\cdots\cdots\cdots(\mathrm{E})$$

圖算法ニ於テハ微分的單位長 ds ノ代リニ或ル一定ノ長ヲ以テセザル可ラズ之ヲ Δs トシΣヲ總和ノ記號トシ更ニ(B)ナル方程式ヲ滿足セシムベキ補助據線ヲ假設スルヲ要ス其條件次ノ如シ。

(一)　$\Sigma(z')=\Sigma(+z')+\Sigma(-z')=0$　即正號面積ト負號面積トノ和ヲ零ナラシム。

(二)　$\Sigma(xz')=0$　即AY軸ヲ中心線トセル力率ノ和ヲ零ナラシム。

而シテ後 vm ヲ據線トシテ眞ノ平衡多邊ヲ畫クニハ次ノ三條件ヲ充タサザル可ラズ。

$\Sigma(z'')=$總面積ノ和$=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$\Sigma(xz'')=$AYヲ軸トセル力率ノ和$=0\cdots\cdots(2)$

$$\Sigma(yz'')=\Sigma(yz') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

初メノ二條件(1),(2)ヲ滿足セシムルニハ無數ノ平衡多邊形ヲ用ユルコトヲ得故ニ先ヅ試ニ其内ノ一ヲ任意ニ採用シ之ヲ試驗的平衡多邊形トシ之ニ對スル試驗的示力圖ヲ畫クベシ而シテ之ヲ以テ第三條件タル $\Sigma(yz'')$ ヲ圖算シ之ヲ $\Sigma(yz')$ ト比較スルニ於テ z' ナルモノハ平衡多邊形ニ何等ノ關係ナキヲ以テ第十七節ニ於テ說述セル $\Sigma(yz')$ ノ圖算法ト同一ノ方法ヲ以テ之ヲ求ムルコトヲ得若シ此第三條件ノ滿足セザルニ於テハ試驗的示力圖ノ極點距離ヲ適當ニ變更スルヲ要ス。

次ニ例題ヲ設ケテ之レガ應用ヲ示サントス。

第七十一圖ニ於テ拱肋ヲ八個ニ等分シ各々其中央ニ於テ荷重ノ在ルモノトシ甲圖 Δs ノ中央ヲ通ジテ垂直線ヲ引クベシ而シテ拱肋ノ任意ノ點ヲ通シテ(B)條件タル $\Sigma(+z')=\Sigma(-z')$ ヲ充タスベキ據線 vm ヲ水平ニ引クベシ但便宜ノ爲メ荷重ガ拱ノ中央ヨリ其量及位置ニ於テ等對ナルモノトス卽　$P_1=P_8$, $P_2=P_7$, $P_3=P_6$, $P_4=P_5$

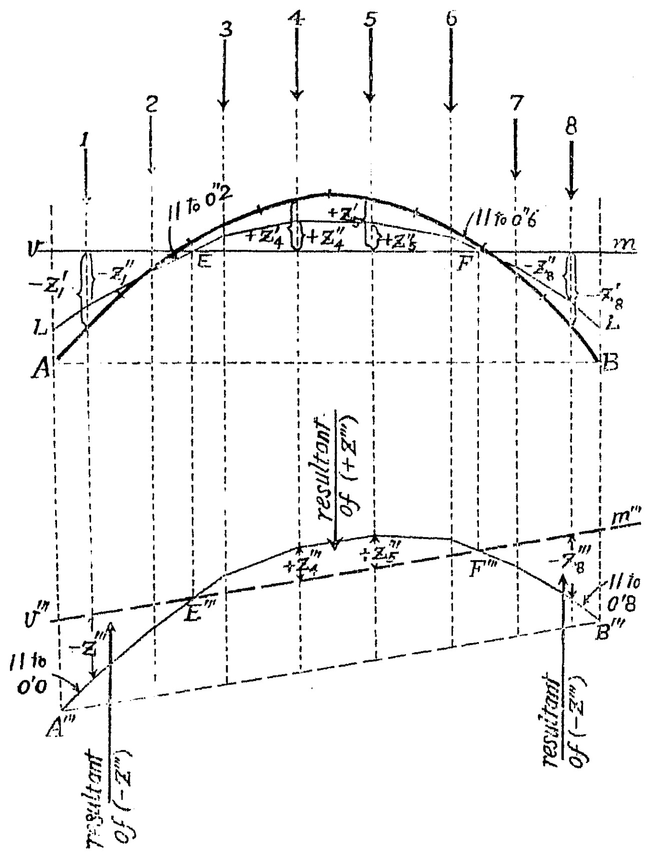
茲ニ於テ問題ハ此 vm ナル據線中何處ノ點ヲ眞ノ平衡多邊形ガ通過スベキヤヲ發見スルニアリ。

先ヅ荷重線ヲ垂直ニ引キ(乙圖)任意ノ極點O'ヲ撰定シ之ニ對スル試驗的平衡多邊形ヲ畫クベシ總テ試驗的ニ係ルモノハ三個ノだし(''')ヲ附シテ之ヲ明カニス(z''', H'''ノ如シ)卽甲圖 A''' ヨリ始メ茲ニ乙圖ノ $O'0$ ニ平行線

ヲ引キ P_1 ナル荷重ト交切スル點ヨリ更ニ $O'1$ ニ平行線ヲ引キ P_2 ナル荷重ト交切セシメ順次進デ $O'8$ ニ平行線ヲ引キ B''' 點ニ於テ終ル其終局線 $A'''B'''$ ニ平行ニ補助據線 $v'''m'''$ ヲ引クニ於テ次ノ二條件ヲ充タスヲ要ス。

(1)　$\Sigma(z''')=0$　卽　$\Sigma(+z''')=\Sigma(-z''')$

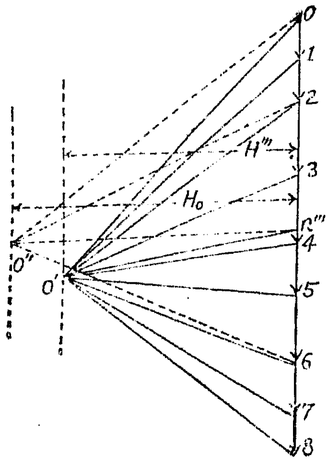
第七十一圖(甲)



(2) $\Sigma(yz''')=0$ 卽 A''' ヲ中心トセル $\Sigma(+z'''$ ノ力率)

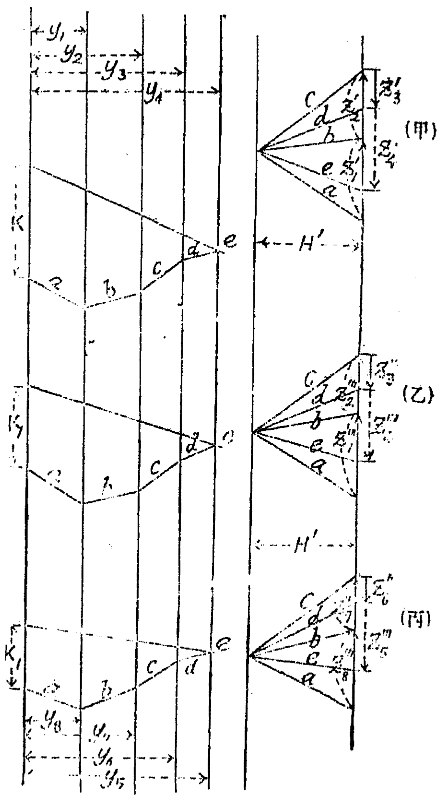
$=\Sigma(-z'''$ ノ力率)

第七十一圖 (乙)



此補助擄線 $v'''m'''$ ガ拱肋ト交切スル二點 E''' 及 F''' ヲ通シテ垂直線ヲ立テ當初ノ擄線 vm ト交切スル點 E 及 F ハ vm 線中眞ノ不衡多邊形ノ通過スベキ二點ナリ。

第七十二圖



次ニ第(3)條件ヲ充タスニハ如何ニシテ z''' ガ z'' ニ變化スベキヤ,換言スレバ如何ニシテ H''' ガ H_0 變更スベキヤヲ求ムルニアリ,卽 $\Sigma_1^8(yz'')=\Sigma_1^8(yz')$ ナル方程式中 z'' ハ未知數ニシテ已知數 z' ヨリ之ヲ圖算スベシ其法ハ第十七節ニ說述セシモノト同一ナレド

モ茲ニハ z' 及 z'' ノ內ニ負號ヲ有スルモノアリ卽 z_1', z_2', z_7', z_8' 及 $z_1''', z_2''', z_7''', z_8'''$ ハ負號卽上方ニ向ヒ殘リノ z' 及 z''' ハ正號卽下方ニ向フ數トス此圖算法ハ第七十二圖甲乙丙ニ示メス如シ。

甲圖ヨリ $\Sigma_1^4(yz')=H'K$ 而シテ荷量等對ナルガ故ニ

$$\Sigma_1^8(yz')=2H'K$$

乙圖ヨリ $\Sigma_1^4(yz''')=H'K_1$ 又
丙圖ヨリ $\Sigma_5^8(yz''')=H'K_r$ 故ニ

$$\Sigma_1^8(yz''')=H'(K_1+K_r)$$

茲ニ於テ若シ $K_1+K_r=2K$ トナレバ

$$H'(K_1+K_r)=2H'K=\Sigma_1^8(yz')$$

トナリ第(3)條件ヲ充タスガ故ニ試驗的極點距離 H''' ハ其儘眞ノ極點距離 H_0 トシテ用ユルコトヲ得レドモ實際ニハ斯ノ如ク偶然一致スルコトハ稀レニシテ其場合ニハ比例ヲ以テ之ヲ訂正スルヲ要ス卽

$$H_0=\frac{K_1+K_r}{2K}H'''$$

此 H_0 ナル距離ヲ n''' (n''' ハ終局線 $A'''B'''$ ニ平行ニ O' ヲ通シテ引キタル時ニ全荷重ヲ二個ニ分割スル點ナリ而シテ本例ノ如キ荷重ガ等對ナル場合ニハ 4 ナル點ヲ通過スベキ筈ナレドモ茲ニハ殊更ニ n''' ヲ通過スルモノト假定セリ)ヲ通過スル水平線中ニ定メ其點 (O'') ヲ眞ノ極點トシテ更ニ示力圖ヲ畫キ之レヨリ眞ノ不衡多邊形

ヲ畫クハ容易ノ業ニシテ其法次ノ如シ。

先ヅ據線中ニ既ニ求メタルE及F點ノ內其一ヲ撰ブベシ,例ヘバE點ハP_2トP_3トノ間ニアルヲ以テE點ヲ通シテ示力圖ニ於ルO″2線ニ平行ナル線ヲ引キP_3ト交切セシムベシ,若クハF點ヲ撰ブ時ハFハP_6トP_7トノ間ニアルヲ以テFヲ通シテO″6ニ平行ナル線ヲ引クベシ,斯ノ如クシテ平衡多邊形中ノ二點ガ既ニ決定セラルヽ,以上之ヨリ畫法ヲ始ムル時ハ第七十一圖甲ニ示メセル如キ眞ノ平衡多邊形ヲ得ルコト容易ナリ。

以上ハ惰率Iヲ定數ト假定セリ,若シ惰率ノ變化ヲ$n=\frac{I}{I_0}$トスレバ前述ノz'ノ代リニ$\frac{z'}{n}$ヲ用ヒ又z''ノ代リニ$\frac{z''}{n}$ヲ用ユベシ但I_0ハ一定ノ斷面ニ屬スル惰率トス。

此法ハ拋物線拱ニ限ラズ缺圓拱ニモ亦應用スルコトヲ得。

第三十四節　缺圓形及半圓形無鉸拱

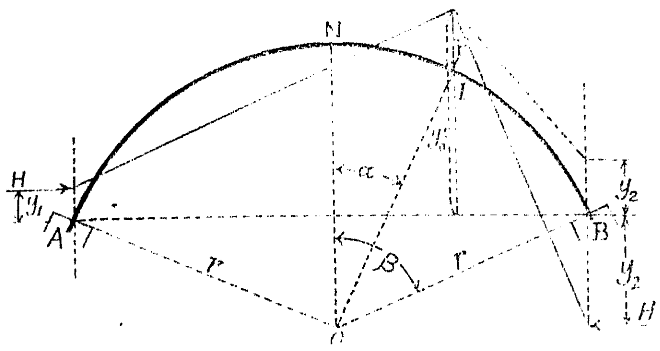
此種ノ拱ニアリテハ三個ノ條件ニ對スル積分頗ブル煩雜ヲ來タスヲ以テ茲ニハ只其y_0, y_1及y_2ヲ包含セル最終ノ式ヲ與フルコトヽセリ。

(I)　缺圓拱

第七十三圖ニ於テ　rヲ半徑トシ

βヲ角度NOB卽圓ノ中心ニ於テ半拱ノ挾ム角度トシ

第七十三圖



αヲ角度NOI卽荷重Pノ在ル位置ヨリ拱頂ニ至ル角度トス

然ル時ハ

$$\sin\beta y_0+\frac{1}{2}(\sin\beta+\sin\alpha)y_1+\frac{1}{2}(\sin\beta-\sin\alpha)y_2$$
$$=(\beta-\sin\beta\cos\beta)r \quad\text{……(1)}$$

$$-\sin\beta(\cos\alpha-\cos\beta+\alpha\sin\alpha-\beta\sin\beta)y_0$$
$$+\frac{1}{2}(\sin\beta-\sin\alpha)(\cos\alpha-\cos\beta+\alpha\sin\alpha+\beta\sin\alpha)y_1$$
$$+\frac{1}{2}(\sin\beta+\sin\alpha)(\cos\alpha-\cos\beta+\alpha\sin\alpha-\beta\sin\alpha)y_2$$
$$=(\sin\beta-\beta\cos\beta)(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)r \quad\text{……(2)}$$

$$[(\beta-\cos\beta\sin\beta)\sin\alpha-(\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\beta)\sin\beta]y_0$$
$$+\frac{1}{2}(\sin\beta-\sin\alpha)(\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\beta-\sin\beta\cos\beta-2\sin\alpha\cos\beta)y_1$$
$$+\frac{1}{2}(\sin\beta+\sin\alpha)(\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\beta+\sin\beta\cos\beta-2\sin\alpha\cos\beta)y_2$$
$$=0 \quad\text{……(3)}$$

實際ニ當リテハβハ與ヘラレタル角度(既知數)ニシテαハ荷重ノ位置ニ依リ差アリ以上ノ三式ヨリy_0, y_1及y_2ヲ算出シ平衡多邊形ヲ畫クコトヲ得。

今
$$A=\sin\beta-\sin\alpha \qquad B=\sin\beta+\sin\alpha$$
$$C=\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\beta \qquad D=\beta-\sin\beta\cos\beta$$
$$E=\cos\alpha-\cos\beta+\alpha\sin\alpha$$

トスル時ハ(1), (2), (3)式ハ次ノ如ク變ズ

$$\sin\beta y_0+\frac{1}{2}By_1+\frac{1}{2}Ay_2=Dr\dots\dots\dots(1)a$$

$$-(E-\beta\sin\beta)\sin\beta y_0+\frac{1}{2}A(E+\beta\sin\alpha)y_1+\frac{1}{2}B(E-\sin\alpha)y_2$$
$$=AB(\sin\beta-\beta\cos\beta)r\dots\dots\dots(2)a$$

$$(D\sin\alpha-C\sin\beta)y_0+\frac{1}{2}A(C+D)y_1+\frac{1}{2}B(C-D)y_2=0\dots\dots(3)a$$

(II)　半圓拱

此場合ニハ$\beta=\frac{\pi}{2}$; $\sin\beta=1$; $\cos\beta=0$ナルガ故ニ(1), (2), (3)式ハ次ノ如ク變ズ

$$y_0+\frac{1}{2}(1+\sin\alpha)y_1+\frac{1}{2}(1-\sin\alpha)y_2=\frac{\pi}{2}r\dots\dots\dots(1)b$$

$$\left(\frac{\pi}{2}-\cos\alpha-\alpha\sin\alpha\right)y_0+\frac{1}{2}(1-\sin\alpha)\left(\cos\alpha+\alpha\sin\alpha+\frac{\pi}{2}\sin\alpha\right)y_1$$
$$+\frac{1}{2}(1+\sin\alpha)\left(\cos\alpha+\alpha\sin\alpha-\frac{\pi}{2}\sin\alpha\right)y_2$$
$$=(1-\sin^2\alpha)r\dots\dots\dots(2)b$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\sin\alpha-\alpha-\sin\alpha\cos\alpha\right)y_0+\frac{1}{2}(1-\sin\alpha)\left(\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\frac{\pi}{2}\right)y_1$$

$$+\frac{1}{2}(1+\sin\alpha)\left(\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\frac{\pi}{2}\right)y_2=0\dots\dots\dots(3)b$$

今(1)bニαヲ乘ジ之ヲ(3)bニ加ヘ又(2)bニ$\sin\alpha$ヲ乘ジ前ノ和ヨリ減ズル時ハ

$$\left(\alpha+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)y_1+\left(\alpha-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)y_2$$
$$=\left(\frac{\pi}{2}\alpha-\sin\alpha\right)r\dots\dots\dots(4)$$

又(1)bニ$\left(\frac{\pi}{2}-\cos\alpha-\alpha\sin\alpha\right)$ヲ乘ジ夫レヨリ(2)$b$ヲ減ズル時ハ

$$\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\cos\alpha-\alpha\cos\alpha\right)-\cos^2\alpha}{\frac{\pi}{2}-2\cos\alpha-2\alpha\sin\alpha+\frac{\pi}{2}\sin^2\alpha}r\dots\dots\dots(5)$$

更ニ　$G=\left(\frac{\pi}{2}-\cos\alpha-\alpha\cos\alpha\right)$　トスル時ハ

$$\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{\frac{\pi}{2}G-\cos^2\alpha}{2G-\frac{\pi}{2}\cos^2\alpha}r\dots\dots\dots(5)a$$

此式ニ$\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\sin\alpha\right)$ヲ乘ジ(4)ヨリ減ズル時ハ

$$\frac{1}{2}(y_1-y_2)=\frac{\left(\frac{4}{\pi}-\frac{\pi}{2}\right)(\alpha\cos^2\alpha-G\sin\alpha)}{2G-\frac{\pi}{2}\cos^2\alpha}r\dots\dots\dots(6)$$

〔例題〕　半圓拱

茲ニ$\beta=90^\circ$ニシテ$\alpha=20^\circ$卽0.3491ナル時ハ

$$\sin\alpha=0.3420 \qquad \cos\alpha=0.9397$$

$$\frac{\pi}{2}=1.5708 \qquad G=0.5117$$

(5)a式ヨリ　$\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{-.0792}{-.3646}r=0.2172r$

(6)式ヨリ　$\frac{1}{2}(y_1-y_2)=\frac{-.2977\times.1333}{-.3646}r=0.1088r$

故ニ　$y_1=326r$　　$y_2=.108r$

之ヲ(1)b式ニ代入スル時ハ

$$y_0=(1.5708-.2187-.0356)r=1.316r$$

同様ノ方法ヲ以テ荷重ノ位置ヲ變ジy_1, y_2ヲ算出スル時ハ次ノ結果ヲ得。

第九表　半圓形無鉸拱ノ y_1, y_2 及 y_0 ノ値

α	y_1	y_2	y_0
0°	.241r	.241r	1.330r
10	.288r	.183r	1.326r
20	.326r	.108r	1.316r
30	.360r	.011r	1.298r
40	.387r	− .125r	1.275r
50	.413r	− .330r	1.245r
60	.434r	− .665r	1.210r
70	.455r	−1.333r	1.170r
80	.475r	−3.319r	1.125r