第四章

二鉸拱

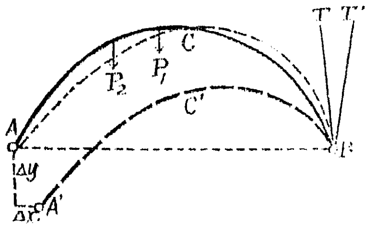
第十二節　原理

二鉸拱ハ各拱臺ニ於テ蝶鉸ヲ有シ,拱肋ハ一方ノ拱臺ヨリ他ノ拱臺迄連續スルモノニシテ,拱臺ハ固定サルヽガ故ニ,徑間ノ長ハ荷重ノ爲メニ決シテ變化スルコトナシ. 而シテ拱肋ヲ架スル場合ニハ,或ル標準溫度ニ於テ拱架ニ依リテ支持セラルヽヲ以テ其時拱自身ノ重量スラ未ダ拱ニ應力ヲ起サヾルモノト假定ス。

若シ拱架ヲ取除ク時ハ,荷重ノ爲メ若クハ溫度ノ變化ノ爲メ初メテ應力ヲ生ズ,而シテ溫度ノ變化ニ屬スル應力ハ別ニ之ヲ計算スルモノトシ,玆ニハ只荷重ノ爲メニ如何ナル平衡多邊形ガ畫カルヽ乎ニ就テ之ニ必要ナル條件ヲ論ズベシ。

第三十二圖ニ於テACBヲ拱肋ノ中軸トシ, P_1, P_2ナル荷重ヲ負フモノトス。

第三十二圖



實線ハ應力ヲ受ケザル時ノ中軸ノ位置トシ,點線ハ應力ヲ生ジタル後ノ位置トス. 其兩位置ニ於テ

B點ニ於ル切線ヲ BT (應力ナキトキ) 及 BT′ (應力ノアルトキ) トス。

今荷重ノ爲メニ生ズル拱肋ノ或ル點ノ移動ヲ考フルニ,先ヅ B ヲ原點トシテ,二種ノ移動ヨリ成立スルモノト見做スヲ得ベシ,其一ハ B ヲ中心トシテ拱肋ノ回轉ヨリ生ズルモノ,其二ハ與ヘラレタル點ト B 點トノ間ニ於テ拱肋ガ彎曲スル爲メニ生ズルモノ是レナリ. 換言スレバ此二種ノ移動ハ同時ニ發生スルモノニシテ,拱肋ガ摩擦ナシニ圓滑ニ回轉スルト同時ニ,又彎曲スル爲ニ生ズルモノナリ。

然レドモ蝶鉸 A, B ノ位置ハ固ヨリ不變ナルガ故ニ,兩點ノ絶對的轉位ハ零ニシテ,只 A 點ト B 點トヲ比較スルニ, B 點ニ於ケル切線 BT ガ BT′ ナル方向ニ移轉セル爲メ, B 點ニ對シ A 點ノ比對的轉位ハ零ナラズト云フニアリ。

此比對的轉位ノ量ヲ求ムルニハ,新位置ノ拱肋ノ B 點ヲシテ依然舊位置ノ拱肋ノ B 點上ニ置キ, BT′ ヲシテ BT ノ上ニ置キ換フルニアリ,斯ノ如クスル時ハ點線ヲ以テ畫ケル ACB ナル拱肋ハ,破線ヲ以テ畫ケル A′C′B ニ移動スベシ,故ニ B,ト BT トニ對スル A 點ノ比對的轉位ハ零ナラズシテ其實 Δx 及 Δy ナル小縱横距ヲ有スル AA′ ナルコトヲ知ルベシ。然ルニ X 軸上ニ於ル小距 Δx ハ之ヲ Δy ト比較シテ非常ニ小ニシテ,而カモ Δy ハ又之ヲ徑間ノ長ト比較スル時 非常ニ小ナルガ故ニ, 此 Δx

ハ實際零ト見做スモ妨ゲナシ。

故ニ $\Delta x=0$ ナル假定ハ二鉸拱ノ特種平衡多邊形ヲ定ムル一ノ條件トスルコトヲ得ベシ卽チ

$$\Delta x=\int\frac{Myds}{EI}=0 \qquad (10)$$

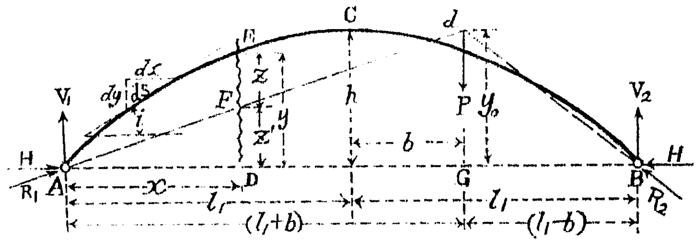
而シテ他ノ必要條件トシテハ, A 及 B 點ニ於テ彎曲率零ナルガ故ニ此特種平衡多邊形ハ必ズ A 及 B 點ヲ通過セザル可カラズト云フコト是レナリ。

第十三節　拋物線形二鉸拱 (Parabolic Arch of Two Hinges) 總論

鋼拱橋ノ十中八九ハ拋物線形ヲ用ユル所以ノモノハ,全徑間ヲ通ジテ平等ニ分布セラレタル荷重ニ對スル平衡曲線ガ,理論上拋物線ヲ作スガ爲メニシテ,若シ夫レ拱ノ死重ノ量ガ徑間一呎ニ付キ同一ナリトセバ,之ニ對スル平衡曲線ハ直ニ以テ拋物線タル拱ノ形狀ニ倣フモノニシテ,實際多クノ場合ニ於テ全然正確ナリト云フヲ得ズト雖モ,亦タ概ネ此條件ヲ充タスコトヲ得,且應力ノ算定ニ於テモ拋物線形拱ハ**缺圓拱** (Segmental Arch) ニ比シテ,亦タ大ニ容易ナル點ナクンバアラズ。

然リ而シテ拱矢ガ徑間ノ十分一以下ノ扁平ナル缺圓拱ニアリテハ,同一ノ拱矢ト徑間トヲ有スル拋物線ト其形狀殆ド一致スルヲ以テ,同一ノ公式ヲ用フルモ實際大ナル誤差ヲ生ゼザルナリ。

第三十三圖



第三十三圖ニ於テ ACB ヲ二鉸拱肋ノ中軸トシ, h ヲ拱矢トシ, l_1 ヲ半徑間トシ, b ヲ徑間ノ中央ヨリ荷重 P ニ至ル水平距離トス[但シ中央ヨリ右方ヲ(+)トシ左方ヲ(−)トス]。

y 及 x ヲ縱橫軸ノ原點タル A ヨリ拱ノ或ル點 E ニ至ル縱橫距トス。

然ルトキハ荷重 P ニ對スル平衡多邊形ハ,拱ノ兩端ニアル蝶鉸ヲ通過セザル可ラザルガ故ニ, A 及 B ニ於ケル彎曲率ハ各々零ナリトス。

此平衡多邊形ヲ A, d, B トシ,其一點 d ノ縱距 y_0 ヲ求ムレバ直ニ之ヲ畫クコトヲ得ベシ. 換言スレバ此問題ハ已知數ヲ以テ此平衡多邊形ノ最大縱距 y_0 ヲ求メ,以テ該多邊形ノ第三點ヲ定ムルニアリ。

之ヲ解決スルニハ第(10)式ノ　$\Delta x=\int\frac{\mathrm{M}yds}{\mathrm{EI}}=0$　ナル條件ヲ以テスベシ卽チ

z ヲ平衡多邊形ト拱ノ或ル任意ノ一點 E トノ間ノ垂直距離トシ

H ヲ示力圖ノ示メス眞正ノ極點距離トシ,

而シテ E 點ニ力率ノ中心ヲ採レバ $\mathrm{M} \quad \mathrm{H}z$

此式ヲ前式ニ代入シ彈性係數 E ヲ定數ト見做セバ

$$\Delta x=\int\frac{\mathrm{M}yds}{\mathrm{EI}}=\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{E}}\int\frac{zyds}{\mathrm{I}}=0$$

卽チ

$$\int\frac{zyds}{\mathrm{I}}=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

i ヲ拱ガ水平線ト爲ス傾斜角(第三十三圖參照)トシ,惰率 I ノ變化ハ傾斜角正割 ($\sec i$) ノ變化ト同一ナルモノト見做シ, I_0 ヲ以テ拱頂ニ於ル惰率トスレバ

$$\mathrm{I}=\mathrm{I}_0\sec i$$

而シテ第三十三圖ニ依リ

$$ds=dx\sec i$$

之ヲ (11) 式ニ代入スレバ

$$\int\frac{zyds}{\mathrm{I}}=\int\frac{zyds}{\mathrm{I}_0\sec i}=\frac{1}{\mathrm{I}_0}\int zydx=0$$

故ニ

$$\int_0^{2l_1} zydx=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

又第三十三圖ニ依リ　$z=y-z'$

故ニ (12) 式ハ左ノ如ク變ズ

$$\int_0^{2l_1} y^2dx-\int_0^{2l_1} z'ydx=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

此積分ノ値ヲ求ムルニハ次ノ如クスベシ。

凡ソ AB ナル徑間ヲ有スル拋物線形拱ノ或ル任意ノ二點ニ於ケル縱線ハ,各々之レガ AB ヲ二個ニ分チ,其分

割サレタル部分ヲ相乘セル積ニ比例ス,故ニ

$$y:h=x(2l_1-x):l_1^2 \quad 即 \quad y=\frac{hx}{l_1^2}(2l_1-x)\ldots\ldots(14)$$

此 y ノ値ヲ (13) 式中ノ第一項中ニ代入シテ之ヲ積分スレバ

$$\int_0^{2l_1} y^2dx=\int_0^{2l_1}\frac{h^2}{l_1^4}(2l_1x-x^2)^2dx=\frac{h^2}{l_1^4}\int_0^{2l_1}(4l_1^2x^2-4l_1x^3+x^4)dx$$

$$=\frac{h^2}{l_1^4}\left(\frac{32}{3}l_1^5-16l_1^5+\frac{32}{5}l_1^5\right)=\frac{16}{15}h^2l_1\ldots\ldots(15)$$

次ニ (13) 式中ノ第二項ノ積分ヲ求ムルニハ,之ヲ二ニ區分シ最初ニ x ヲ A 點ヨリ G 即 (l_1+b) 迄トシ,次ニ B 點ヨリ G 迄トス,而シテ z' ノ値ヲ次ノ如クシテ求ムベシ。

A, D, F 及 A, G, d ナル二個ノ三角形ヨリ

$$\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{G}d}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AG}} \quad 即 \quad \frac{z'}{y_0}=\frac{x}{l_1+b} \quad 即 \quad z'=\frac{y_0x}{l_1+b}\ldots\ldots(16)$$

此 z' ノ値ト (14) 式ノ y ノ値トヲ第二項中ニ代入スレバ

［第一］ A ヨリ G ニ至ル部分

$$\int_0^{l_1+b} z'ydx=\int_0^{l_1+b}\frac{y_0}{l_1+b}x\frac{h}{l_1^2}(2l_1x-x^2)dx=\frac{hy_0}{l_1^2(l_1+b)}\int_0^{l_1+b}(2l_1x^2-x^3)dx$$

$$=\frac{hy_0}{l_1^2(l_1+b)}\left\{\frac{2}{3}l_1(l_1+b)^3-\frac{1}{4}(l_1+b)^4\right\}$$

$$=\frac{hy_0}{l_1^2}\left\{\frac{2}{3}l_1(l_1+b)^2-\frac{1}{4}(l_1+b)^3\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

［第二］ G ヨリ B ニ至ル部分

之レガ積分ヲ求ムルニハ,B 點ヲ原點トシテ x ヲ左方ニ取ルベシ,然ル時ハ積分ノ形ハ (17) 式ト同一ニシテ,只

(l_1+b) ノ代リニ (l_1-b) ヲ以テスルノミ卽チ

$$\int_{(l_1+b)}^{2l_1} z'ydx=\frac{hy_0}{l_1^2}\left\{\frac{2}{3}l_1(l_1-b)^2-\frac{1}{4}(l_1-b)^3\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

［第一］［第二］ヲ合スレバ

$$\int_0^{2l_1} z'ydx=\frac{hy_0}{l_1^2}\left(\frac{5}{6}l_1^3-\frac{1}{6}l_1b^2\right)=\frac{hy_0}{6l_1}(5l_1^2-b^2)$$

之ト (15) 式ノ値トヲ (13) 式ニ代入スレバ

$$\frac{16}{15}h^2l_1-\frac{hy_0}{6l_1}(5l_1^2-b^2)=0$$

故ニ $$y_0=\frac{32}{5}h\frac{l_1^2}{5l_1^2-b^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

今 k ヲ以テ b ト l_1 トノ比卽

$$k=\frac{b}{l_1} \quad トスレバ \quad y_0=\frac{32}{5(5-k^2)}h\ldots\ldots\ldots(19a)$$

拱ノ中央ニ於テハ $y_0=\frac{32}{25}h\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(19b)$

拱ノ兩端ニ於テハ $y_0=\frac{32}{20}h\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(19c)$

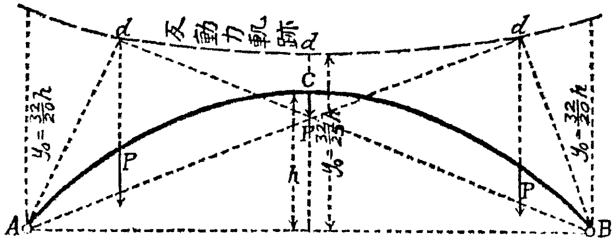
而シテ (14) 式ハ次ノ如ク變ズ

$$y=(1-k^2)h\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14a)$$

以上 y_0 ノ値ハ已知數ヲ以テ記サルヽガ故ニ,之ヲ以テ直ニ平衡多邊形ノ第三點ヲ求ムルコトヲ得,卽チ d ハ P, R_1 及 R_2 ノ相互ニ交切スル點ニシテ,荷重 P ノ位置ガ移動スルニ從ヒ d 點モ亦タ移動シ,所謂**反動力軌跡**ヲ畫クベシ,卽チ第三十四圖ニ於テ示メスモノヽ如シ。

水平推力 H ノ價ヲ代數的ニ求ムルニハ次ノ如クスベシ. 卽チ今力率ノ中心ヲ夫々 A 及 B 點ニ採ル時ハ

第三十四圖



$$V_1=P\frac{l_1-b}{2l_1}\quad 及\quad V_2=P\frac{l_1+b}{2l_1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

而シテ平衡多邊形及示力圖ナル二個ノ等三角形ノ關係ヨリ　$\frac{H}{V_1}=\frac{l_1+b}{y_0}$

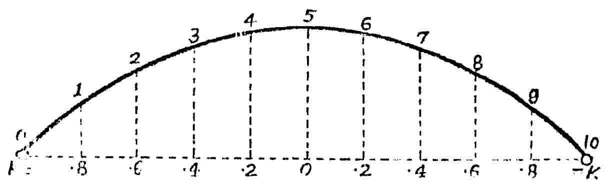
故ニ　$$H=V_1\frac{l_1+b}{y_0}=P\frac{l_1^2-b^2}{2l_1y_0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

若シ　$b=kl_1$　トスレバ

$$H=P\frac{1-k^2}{2}\cdot\frac{5(5-k^2)}{32}\cdot\frac{l_1}{h}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(21a)$$

今拱ノ徑間ヲ第三十五圖ニ示メス如ク十個ニ等分シ其分點ヲ通過スル垂直線中ノ分格點（1乃至9）ニ荷重ノ在ルモノトシテ、(19a)及(21a)式ニ依リy_0及Hノ値ヲ求メ之ヲ表記スルコト次ノ如シ。

第三十五圖



第一表　y_0及Hノ値

分格點			5	4 (6)	3 (7)	2 (8)	1 (9)
		$k=\frac{b}{l_1}=$	0	0.2	0.4	0.6	0.8
		$5-k^2=$	5	4.96	4.84	4.64	4.36
		$5(5-k^2)=$	25	24.80	24.20	23.20	21.80
y_0ノ係數＝		$\frac{32}{5(5-k^2)}=$	1.28	1.2903	1.3223	1.3793	1.4679
		$\frac{1-k^2}{2}=$	0.5	0.48	0.42	0.32	0.18
Hノ係數＝	$\frac{1-k^2}{2}$	$\cdot\frac{5(5-k^2)}{32}=$	0.3906	0.3720	0.3176	0.2320	0.1236

y_0ノ値ヲ求ムルニハ、y_0ノ係數ニhヲ乘スベシ。

Hノ値ヲ求ムルニハ、Hノ係數ニ　$P\frac{l_1}{h}$　ヲ乘ズベシ。

此表ヲ應用セントスルニハ任意ノ分格點ニ荷重ノアルモノトシータ之ニ對スルy_0及Hノ値ヲ求ムベシ、例ヘバ今各分格點ニPナル荷重アレバ之ヨリ生ズルHノ總計ハ次ノ如シ。

$$H=[0.3906+2(.3720+.3176+.2320+.1226)]\frac{l_1}{h}P$$

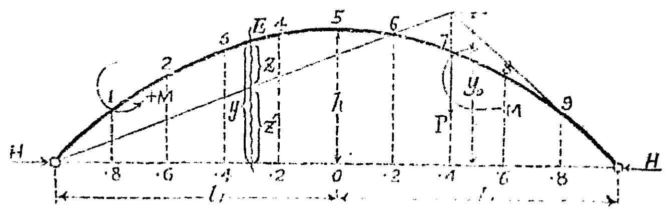
$$=2.4790\frac{l_1}{h}P$$

第十四節　拋物線形二鉸拱ニ於テ垂直力ヨリ生ズル彎曲率ノ値

拱ヲシテ徐々彎曲ナラシムル傾向ヲ生ズル彎曲率ヲ**正彎曲率** (positive bending moment) ト爲ストキハ之ヲシテ徐々扁平ナラシムル傾向ヲ生ズルモノヲ**負彎曲率**

(Negative bending moment) ト稱スルコトヲ得ベシ.前者ハ拱ノ上部ニ應張力ヲ,下部ニ應壓力ヲ生ズベシ,之ニ反シ後者ハ上部ニ應壓力ヲ,下部ニ應張力ヲ生ズベシ。

第三十六圖



第三十六圖ハ徑間ヲ10ニ等分シタル拱軸ヲ示メス,今PナルNo荷重ガ第七ノ分格點ニ在ルモノトスル時ハ,1ヨリ5迄ノ分格點ニアリテハ正彎曲率(+M)ヲ生ジ,6ヨリ9迄ノ分格點ニアリテハ負彎曲率(−M)ヲ生ズベシ,試ニ其値ヲ計算スレバ左ノ如シ。

拱軸ノ或ル任意ノ點Eニ於ケル彎曲率ノ値ハ,

$$M=Hz=H(y-z')$$

ニシテ式中拋物線ノ縱距(y)及平衡曲線迄ノ縱距(z')ハ容易ニ之ヲ算出スル事ヲ得,而シテ前表ニ依リ$y_0=1.3223h$ニシテ,z'ノ値ハPノ左方ニ於ケル各分格點ニアリテハy_0ノ$\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7}$及$\frac{6}{7}$ニシテ,其右方ニアリテハ$y_0$ノ$\frac{1}{3}$及$\frac{2}{3}$ナリトス。

又(11)式ニ依リ　$y=\frac{hx}{l_1^2}(2l_1-x)=(1-k^2)h$

而シテ　$H=0.3176\frac{Pl_1}{h}$　ナリ

今分格點ノ數ヲ左端ヨリ起算シテnトシ,右端ヨリ起算シテn'トスレバ

$$M=H(y-z')=Hh\left[(1-k^2)-\frac{n}{7}1.3223\right]$$

$$=0.3176\left[(1-k^2)-\frac{n}{7}1.3223\right]Pl_1=mPl_1$$

故ニPガ第七分格點ニ在ル時ニ各分格點ニ於ケル彎曲率ノ値ハ次ノ如シ。

分格點	1	2	3	4	5
$z'=\frac{n}{7}1.3223\times h=$	.1889	.3778	.5667	.7556	.9445
$y=(1-k^2)\times h=$	.36	.64	.84	.96	1.00
差$=(y-z')=$	.1711	.2622	.2733	.2044	.0555
之ニ$0.3176Pl_1$ヲ乘シ M＝	+ .0543	+ .0833	+ .0868	+ .0649	+ .0176

分格點	6	7	8	9	
$z'=\frac{n}{7}1.3223\times h=$	1.1334	1.3223	.8815	.4403	$=\frac{n'}{3}1.3223h$
$y=(1-k^2)\times h=$	.96	.84	.64	.36	$\times h$
差$=(y-z')=$	− .1734	− .4823	− .2415	− .0808	
之ニ$0.3176Pl_1$ヲ乘シ M＝	− .0551	− .1532	− .0767	− .0257	$\times Pl_1$

斯ノ如クシテ計算セル彎曲率ノ値ハ荷重ノ位置ニ依リ差アリ之ヲ次表ニ示メス。

第二表*　彎曲率 $M=mPl_1$　m ノ値

荷重ノ位置＼分格點	1	2	3	4	5
P ガ 9 ニ在ル時	+.024	+.039	+.043	+.038	+.023
〃 8 〃 〃	+.044	+.068	+.075	+.063	+.032
〃 7 〃 〃	+.054	+.083	+.087	+.065	+.018
〃 6 〃 〃	+.054	+.078	+.073	+.037	−.028
〃 5 〃 〃	+0.41	+.050	+.028	−.025	−.109
〃 4 〃 〃	+.014	−.002	−.047	−.123	−.028
〃 3 〃 〃	−.025	−.076	−.153	−.055	+.018
〃 2 〃 〃	−.076	−.171	−.085	−.017	+.032
〃 1 〃 〃	−.136	−.082	−.037	−.092	+.023

荷重ノ位置＼分格點	6	7	8	9	H=
P ガ 9 ニ在ル時	−.002	−.037	−.082	−.136	.123 $\frac{Pl_1}{h}$
〃 8 〃 〃	−.017	−.085	−.171	−.076	.232 〃
〃 7 〃 〃	−.055	−.153	−.076	−.025	.318 〃
〃 6 〃 〃	−.123	−.047	−.002	+.014	.372 〃
〃 5 〃 〃	−.025	+.028	+.050	+.041	.391 〃
〃 4 〃 〃	+.037	+.073	+.078	+.054	.372 〃
〃 3 〃 〃	+.065	+.087	+.083	+.054	.318 〃
〃 2 〃 〃	+.063	+.075	+.068	+.044	.232 〃
〃 1 〃 〃	+.038	+.043	+.039	+.024	123 〃

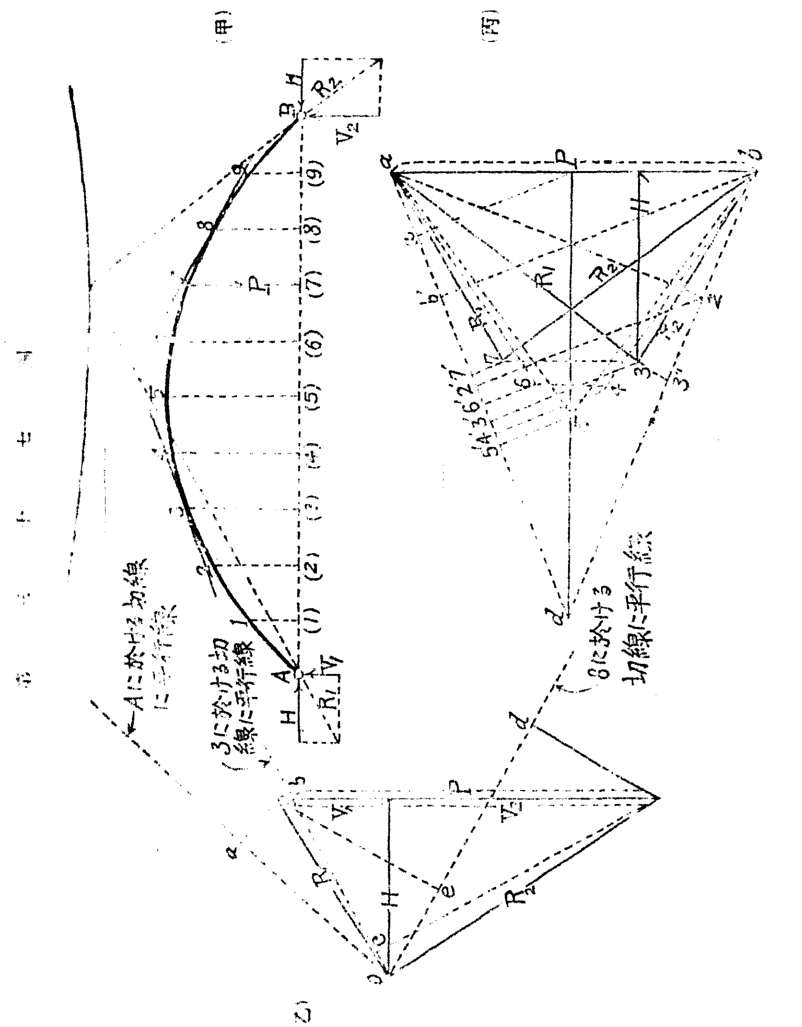
第十五節　拋物線形二鉸拱ニ於ル軸推力 (Axial Thrust) 及撓度 (Deflection)

前節ニ於テ論究セル彎曲率ノ値ハ拱軸ヲ其中心トシタルモノニシテ,之ニ屬スル彎曲應力ハ軸ヨリ離ルヽニ從ヒ其強度益々增加スベキハ論ヲ俟タズ,而シテ別ニ拱

* 徑間ヲ20ニ等分セル m ノ値ハ附錄第十六表ニアリ。

ノ斷面ニ平等ニ分布セラレ,且ツ拱軸ノ一點ニ於ケル切線ニ平行ニ働ク所ノ直接ノ推力アリ之ヲ軸推力ト云フ。

第三十七圖甲ニ於テ荷重Pガ第7分格點ノ上ニ在ルモノト假定シ,其示力圖ハ乙圖ニ示メス如クニシテ先ヅ



oaナル線ヲ左端Aニ於ケル切線ニ平行ニ又abナル線ヲ分格點3ニ於ケル切線ニ平行ニ而シテodナル線ヲ分格點8ニ於ケル切線ニ平行ニ引クベシ,然ル時ハ

Aニ於ケル軸推力$=oa=$反動力R_1ノAニ於ケル切線上ノ射影

Pヨリ左方ニ在ル第3分格點ニ於ケル軸推力$=ob=R_1$ノ3ニ於ケル切線上ノ射影

$$=oc+cb=\left\{\begin{array}{ll}R_2\text{ノ 3 ニ於ケル切線上ノ射影}\\+P\text{ノ}\qquad\qquad\text{同上ノ射影}\end{array}\right\}$$

Pヨリ右方ニ在ル第8分格點ニ於ケル軸推力$=od=R_2$ノ8ニ於ケル切線上ノ射影

$$=oc+cd=\left\{\begin{array}{ll}R_1\text{ノ 8 ニ於ケル切線上ノ射影}\\+P\text{ノ}\qquad\qquad\text{同上ノ射影}\end{array}\right\}$$

此圖法ハ一定ノ位置ニ在ル荷重ニ對シ各分格點ニ於ル軸推力ヲ上述ノ如クシテ求ムルヨリモ寧ロ一定ノ位置ニ於ケル一分格點ニ對シ荷重ノ位置ヲ移動シテ該分格點ニ於ケル軸推力ヲ求ムルヲ却テ便ナリトス,卽第三十七圖(丙)ニ於テ示メス如ク例ヘバ第3分格點ニ於ケル軸推力ヲPナル荷重ノ種々ノ位置ニ對シテ求メントス先ヅ荷重線abヲ引キ而シテ3ニ於ケル切線ニ平行ニad線ヲ引キ,又7ニ於ケル切線ニ平行ニbd線ヲ引クベシ,然ル時ハ

荷重Pガ3ニ在ル時　$R_1=3-a$　$R_2=3-b$

3ニ於ケル軸推力$=3'-a'=R_1$ノ3ニ於ケル切線上ノ射影$-\frac{1}{2}P$ノ3ニ於ル切線上ノ射影$=(3'a)-(a'a)$或ハ

$$=a'b'+b'3'=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{2}P\text{ノ 3 ニ於ケル切線上ノ射影}\\+R_2\text{ノ}\qquad\qquad\text{同上ノ射影}\end{array}\right\}$$

荷重Pガ7ニ在ル時　$R_1=7-a$　$R_2=7-b$

3ニ於ケル軸推力$=a-7'=R_1$ノ3ニ於ケル切線上ノ射影

$$=ab'+b'7'=\left\{\begin{array}{ll}P\text{ノ 3 ニ於ケル切線上ノ射影}\\+R_1\text{ノ}\qquad\qquad\text{同上ノ射影}\end{array}\right\}$$

荷重Pガ2ニ在ル時(3ノ分格點ヨリ左方ニ荷重ノアル場合)

3ニ於ケル軸推力

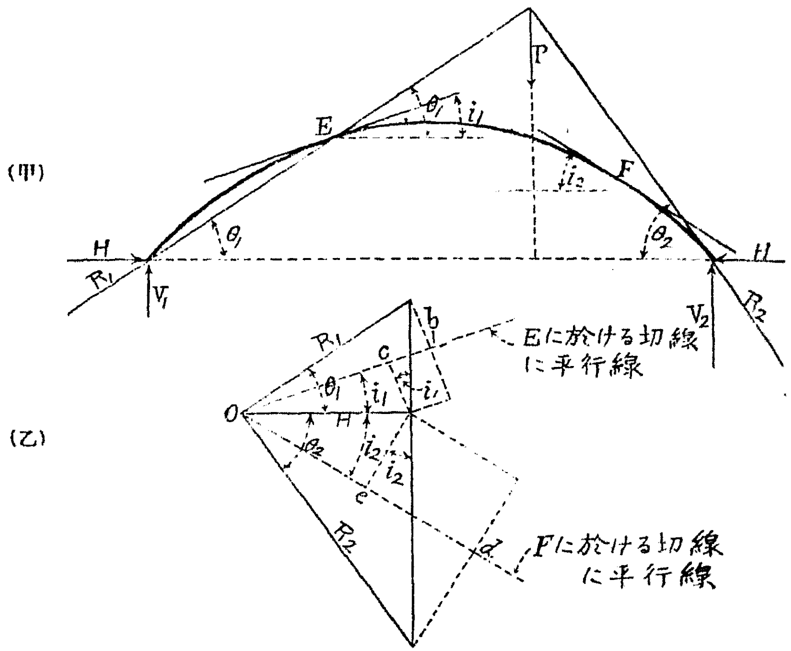
$$=a2'-ab'=\left\{\begin{array}{ll}R_1\text{ノ 3 ニ於ケル切線上ノ射影}\\-P\text{ノ}\qquad\qquad\text{同上ノ射影}\end{array}\right\}$$

此ノ如クシテ各分格點ニ於テ種々ノ位置ニアル荷重ニ對シ軸推力ヲ求メ之ヲ表記スルコトヲ得ベシ。

又軸推力ヲ代數的ニ求ムルニハ左ノ式ヲ用フベシ。

今三十八圖ニ於テPナル荷重アル時任意ノ點Eニ於ケル切線ガ水平線ト爲ス傾斜角ヲi_1トシ,又F點ニ於ケル切線ガ爲ス傾斜角ヲi_2トシ,反動力ノ傾斜角ヲθ_1及θ_2トシ,其分力をH, V_1又ハV_2トスレバ甲乙兩圖ヲ對照シテ左ノ式ヲ得ベシ。

第三十八圖



P ノ左方 E ニ於ケル軸推力 $= ob$（乙圖）

$= R_1$ ノ E 點ニ於ケル切線上ノ射影

$= R_1\cos(\theta_1 - i_1) = V_1\operatorname{cosec}\theta_1\cos(\theta_1 - i_1)$

P ノ右方 F 點ニ於ケル軸推力 $= od$（乙圖）

$= R_2$ ノ F 點ニ於ケル切線上ノ射影

$= R_2\cos(\theta_2 - i_2) = V_2\operatorname{cosec}\theta_2\cos(\theta_2 - i_2)$

又反動力ノ分力ヲ以テ軸推力ヲ表ハセバ

E 點ニ於ケル軸推力 $= oc + cb = H\cos i_1 + V_1\sin i_1 = (H + V_1\tan i_1)\cos i_1$

F 點ニ於ケル軸推力 $= oe + ed = H\cos i_2 + V_2\sin i_2 = (H + V_2\tan i_2)\cos i_2$

而シテ (20) 及 (12) 式ニ依リ

$$V_1 = P\frac{l_1 - b}{2l_1} = \frac{1-k}{2}P \qquad V_2 = \frac{l_1 + b}{2l_1} = \frac{1+k}{2}P$$

$$H = P\frac{1-k^2}{2}\cdot\frac{5(5-k^2)}{32}\cdot\frac{l_1}{h}$$

ナルガ故ニ徑間ノ長ト拱矢トノ比ガ與ヘラルヽ場合若クハ切線ノ傾斜角ヲ知ル以上ハ玆ニ軸推力ヲ算出シ

軸推力 $= cP$

ナル式トシテ係數 c ノ値ハ前節ノ彎曲率ノ係數ノ如ク之ヲ表記スルコトヲ得ベシト雖モ、c ノ値ハ拱ノ形狀大小ニ關スルガ故ニ一般ノ拋物線形拱ニ對シテハ之ヲ表記スル能ハズ。

又切線ノ傾斜角ハ (14) 式ヨリ直チニ之ヲ求ムルコトヲ得即

$$y = \frac{hx}{l_1^2}(2l_1 - x) = \frac{h}{l_1^2}(2l_1x - x^2) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

之ヲ微分スレバ（$b = kl_1 = l_1 - x$ ナル故ニ）

$$\tan i = \frac{dy}{dx} = \frac{h}{l_1^2}(2l_1 - 2x) = \frac{2h}{l_1^2}(l_1 - x) = \frac{2h}{l_1^2}b = \frac{2hk}{l_1}$$

次ニ拱頂ニ於ケル撓度ヲ論ズルニ當リテハ拱ハ荷重ノ爲メ變形ノ後依然拋物線形ヲ保持スルモノト假定スル時ハ其拱頂ニ於ル撓度ハ次ノ如クシテ其概數ヲ計算スルコトヲ得。

S = 拱軸の全長

ds = 拱軸の長の單位

dx＝其水平射影

トスレバ

$$ds=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=dx\left[1+\frac{4h^2}{l_1^4}(l_1-x)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

之ヲ二項式 (Binomial formula) ニ依リ展開スレバ

$$ds=dx\left[1+\frac{2h^2}{l_1^4}(l_1-x)^2-\frac{2h^4}{l_1^8}(l_1-x)^4\right]$$

式中四冪以上ノ項ヲ無視シ $x=0$ ヨリ $x=2l_1$ ニ至ル積分ヲ求ムレバ

$$S=\int_{x=0}^{x=2l_1}ds=\left[2l_1\left(1+\frac{2h^2}{l_1^2}\right)-\frac{2h^2}{l_1^3}(2l_1)^2+\frac{2h^2}{3l_1^4}(2l_1)^3\right]$$

$$=2l_1\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{h}{l_1}\right)^2\right]\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

次ニ　ΔS＝拱軸ノ長ノ全變形

$d\Delta S$＝單位長 ds ノ變形

T＝或ル一斷面ニ於ル軸推力

a＝其斷面積

T_m＝各斷面ニ於ル T ノ平均値

a_m＝各斷面積ノ平均値

E＝彈性係數

トスレバ

$$d\Delta S=-\frac{Tds}{aE}$$

故ニ
$$\Delta S=-\int_0^S\frac{T}{aE}ds=-\frac{1}{E}\cdot\frac{T_m}{a_m}S\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

(a) 式ト (b) 式トノ差ハ變形セル拱軸ノ全長ニシテ之ヲ S' トスレバ

$$S'=S-\Delta S$$

其時ノ拱矢 (h') ハ未知數ニシテ今 (a) 式中ノ S ニ代フルニ S' ヲ又 h ニ代フルニ h' ヲ以テスレバ h' ノ値ヲ得ベシ。

即
$$h'=\sqrt{\frac{3}{4}l_1S'-\frac{3}{2}l_1^2}=\frac{1}{2}l_1\sqrt{\frac{3S'}{l_1}-\frac{3}{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

此 h' ノ値ハ拱ガ變形ノ後ノ拱矢ナルガ故ニ h ト h' トノ差ハ則チ拱頂ノ撓度 (δ) ヲ示メス。

即
$$\delta=h-h'=h-\frac{1}{2}l_1\sqrt{\frac{3S'}{l_1}-\frac{3}{2}}$$

若シ拱ノ築造ニ當リ拱頂ガ自然此 δ ノ値ヲ保持スル迄下ガルトスレバ拱ヲ支フル架構ノ用ハ此時ニ止ルモノト見ルヲ得ベシ。

第十六節　拋物線形二鉸拱ニ於テ腹材ノ抵抗スベキ剪力ヲ論ズ

若シ拋物線形拱肋ノ形狀ガ矩形若クハ圓形ナル場合ニハ恰モ普通同形ナル桁ニ於ルト同樣剪力ノ計算ハ通例必要ナラズト雖ドモ其形狀ガ工形ナルカ若クハ開腹材 (Open web) ヲ有スル構拱ナル場合ニハ之ヲ考フルノ必要アルベシ。

第一欵 垂直剪力 (Vertical Shear)

元來拋物線ハ全徑間ニ水平ニ且平等ニ分布セラレタル荷重ニ對スル平衡曲線ナルガ故ニ臥材ガ拋物線形ニ傾斜セル場合ニハ臥材自身ガ等布荷重ヨリ生ズル總テノ剪力ヲモ分擔スルヲ以テ,別ニ此等剪力ニ抵抗スベキ腹材ヲ備フルノ必要ナキモノトス,然ラバ腹材ノ用ハ如何ナル場合ニアルカト云ヘバ徑間ノ一部ニ集合荷重アル時ニ拱ノ各所ニ起ル原垂直剪力ヨリ臥材ノ負擔スベキ垂直剪力ヲ差引シタル殘餘ノ剪力ハ腹材ノ負擔スベキモノトシテ之ヲ計算セザル可ラズ。

左ニ一例ヲ擧ゲテ此等殘餘ノ**垂直剪力**(Residual vertical shear)ヲ計算スル方法ヲ述ベン。

茲ニPナル單一ノ荷重ガ分格點7ニ在リト假定ス,然ル時ハ原垂直剪力ハ荷重ノ左ニアリテハ $V_1=P\frac{l_1-b}{2l_1}=\frac{3}{10}P$ 又右ニアリテハ $V_2=P\frac{l_1+b}{2l_1}=\frac{7}{10}P$ ナリ。

Y_1ヲ以テ拱ノ一端ニ於テ其臥材ガ負擔シ得ベキ垂直剪力トス,換言スレバ此Y_1ガ實際ノ水平推力Hト合シテ共ニ拱ニ働ク時ハ該端ニ於ル軸推力ヲ成シ拱肋ノ平衡ヲ保ツモノト假定ス,故ニ若シ實際ノ反動力ノ方向ガ拱軸ト切線ヲ爲シ其水平分力ガHナル時ハ例ヘバ左端ニ起ル垂直剪力V_1ハ恰モY_1ニ等シクシテ臥材ハ切線ノ方向ニ傾斜セルガ故ニ此剪力ハ總テ臥材ノ負擔スル所ニシテ別ニ腹材ヲ備フルノ必要ナキモノトス,然ルニ實

際ノ反動力ノ方向ハ切線ヲ爲サズシテ其水平分力ハHナレドモ其垂直分力V_1ハY_1ニ等シカラズ,其差即(V_1-Y_1)ハ左端ニ於ル腹材ノ抵抗スベキ垂直剪力ナルベシ,右端ニ於テモ亦同理ヲ應用スベシ。

第三十九圖ハ此垂直剪力ヲ圖示セルモノナリ,即荷重ガ7點ニ在ル場合Y_1ノ値ハ次ノ如シ。

$$Y_1:H=2h:l_1$$

$$H=.3176\frac{l_1}{h}P$$

故ニ

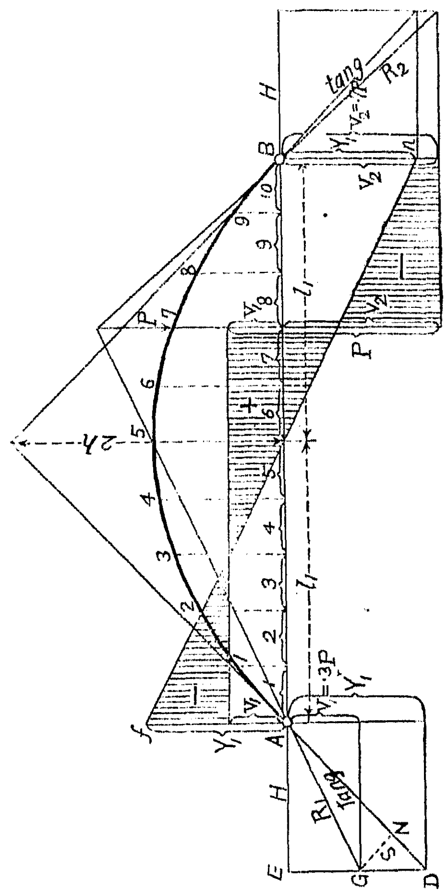
$$Y_1=\frac{2h}{l_1}H=.6352P$$

而シテ左端ニ於テ腹材ノ抵抗スベキ垂直剪力ハ

$$V_1-Y_1=0.3P-0.6352P$$
$$=0.3352P$$

其他ノ點ニ於テハ拱肋ノ平衡ヲ保ツニ必要ナル軸推力ノ垂直分力ヲYトスレバ,此分力ハ徑間ノ中央ニ於テハ零ニシテ中

第三十九圖



央ヲ離ルヽニ從テ漸次平等ニ增加スルガ故ニfnナル直線ヲ引ク時ハ其縱距ハ則チYニシテ中央ヨリ左ニアリテハ正(+)ニシテ右ニアリテハ負(−)ナリ,而シテ又原垂直剪力ヲ表ハスベキ水平直線ヲ引クベシ,卽V_1ハ荷重ヨリ左ニ在ル原垂直剪力ニシテ左端ヨリ荷重ノ位置迄ハ正(+)ナレドモ之ヲ過グレバ, $V_1-P=.3P-P=-.7P=-V_2$ トナリ負ナリ。

其差 $V=(V_1-Y)$ 若クハ $=-(V_2-Y)$ ハ圖中影線ヲ附シタル部分ニシテ卽腹材ノ負擔スベキ垂直剪力ヲ示メス。

然ルニ荷重ハ各分格點上ニ存在スルモノトスルガ故ニ徑間ヲ十個ノ區割ニ分割シ一區割ニ屬スル垂直剪力ハ之ヲ定數トスルヲ至當且便利トス,左レバ第一區割ニアリテハ $Y=\left(.635-\frac{.635}{10}\right)P=.572P$ 第二區割ニアリテハ $Y=\left(.572-\frac{.635}{5}\right)P=.445P$ 順次其次ノ區割ニアリテハ更ニ $\frac{.635}{5}P$ 宛ヲ減ズベシ,斯クノ如クシテ進ム時ハ次ノ表ヲ得ベシ。(Yハ又次ノ式ヲ以テ計算スルコトヲ得但KハYノ位置ノl_1ニ對スル分數ニシテ例ヘハ區割3ニ於テハK=0.5ニシテ $Y=\frac{2h}{l_1}\times.5\times H=\frac{2h}{l_1}\times.5\times.3176\frac{l_1}{h}P=.318P$ ナルガ如シ)

$$Y=KY_1=\frac{2hK}{l_1}H$$

荷重 P ガ第七分格點ニ在ル時垂直剪力 V ノ値

區　割	1	2	3	4	5
$V_1=$	+.3	+.3	+.3	+.3	+.3
$Y=$	+.572	+.445	+.318	+.191	+.064
V_1-Y	−.272	−.145	+.018	+.109	+.236

P ↓

區　割	6	7	8	9	10	
$V_1=$	+.3	+.3	−.7	−.7	−.7	$=-V_2$
$Y=$	−.064	−.191	−.318	−.445	−.572	$=Y$
V_1-Y	+.364	+.491	−.382	−.255	−.128	$=-(V_2-Y)$

斯クノ如クシテ計算セル垂直剪力ノ値ハ荷重ノ位置ニ依リ差アリ之ヲ次表ニ示メス。

第三表　垂直剪力 $V=nP$　n ノ値

荷重ノ位置 ＼ 區割	1	2	3	4	5
P ガ 9 ニ在ル時	−.121	−.072	−.023	+.028	+.075
〃 8 〃 〃	−.218	−.125	−.032	+.061	+.153
〃 7 〃 〃	−.272	−.145	−.018	+.109	+.236
〃 6 〃 〃	−.270	−.121	+.028	+.177	+.325
〃 5 〃 〃	−.201	−.047	+.109	+.265	+.422
〃 4 〃 〃	−.069	+.079	+.228	+.377	−.475
〃 3 〃 〃	+.128	+.255	+.382	−.491	−.364
〃 2 〃 〃	+.382	+.475	−.432	−.339	−.247
〃 1 〃 〃	+.678	−.272	−.223	−.173	−.125

荷重ノ位置 ＼ 區割	6	7	8	9	10
P ガ 9 ニ在ル時	+.125	+.173	+.223	+.272	−.678
〃 8 〃 〃	+.247	+.339	+.432	−.475	−.382
〃 7 〃 〃	+.364	+.491	−.382	−.255	−.128
〃 6 〃 〃	+.475	−.377	−.228	−.079	+.069
〃 5 〃 〃	−.422	−.265	−.109	+.047	+.204
〃 4 〃 〃	−.325	−.177	−.028	+.121	+.270
〃 3 〃 〃	−.236	−.109	+.018	+.145	+.272
〃 2 〃 〃	−.153	−.061	+.032	+.125	+.218
〃 1 〃 〃	−.075	−.026	+.023	+.072	+.121

第二款　向心剪力 (Radial or normal shear)

拱肋ノ切線ニ直角ノ剪力卽**向心剪力**ヲ求ムルニハ拱肋ノ或ル點ニ於ル**向心橫斷面**(垂直斷面ニアラズシテ切線ニ直角ナル斷面)ニ平行ナル線ヲ引キ此上ニ前述ノ垂直剪力ヲ射影スベシ, 若シ其切線ガ水平線ト i ナル傾斜角ヲ爲シ而シテ腹材ノ抵抗スベキ垂直剪力ヲ V トスレバ腹材ノ向心橫斷面ガ抵抗スベキ向心剪力 s ハ次ノ如シ。 $s=V\cos i$

換言スレバ s ハ垂直剪力ノ分力ニシテ切線ニ直角ナル方向ヲ有ス,此 s ニ抵抗スベキモノハ腹材ノ向心橫斷面ナラザル可ラズ。

例ヘバ前ノ例題左端ニ於テ腹材ノ抵抗スベキ垂直剪力ハ(第三十九圖) GD$=(V_1-Y_1)$ ニシテ之ヲ左端ニ於ル向心橫斷面ニ平行ナル線ノ上ニ射影セル GN ナル線ハ向心剪力 s ニ等シ。

第十七節　水平推力 H ヲ求ムル圖算法

本法ハ拋物線形ニ限ラズ總テノ拱肋ニ應用シ得ル圖式解法ナリ。

便宜ノ爲メ拱肋ノ各部ヲ總テ同質材料及同形ヨリ成ルモノト假定ス乃チ彈性係數 E 及惰率 I ヲ定數トス。

y 及 x ヲ拱軸ノ或ル任意ノ點ノ縱橫距トシ, z ヲ拱軸ト平衡多邊形トノ間ノ垂直距トシ, z' ヲ平衡多邊形ト

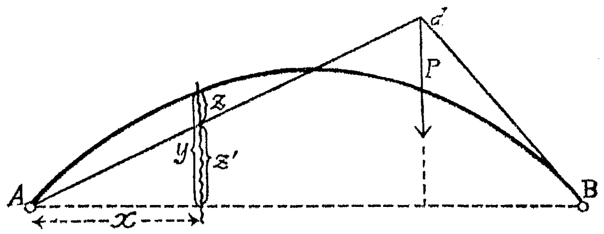
X軸トノ間ノ垂直距トシ, ds ヲ拱軸ノ微分的單位長トス。

然ル時ハ(11)式ヨリ　$\frac{1}{I}\int zyds=0$　卽　$\int zyds=0$

之ヲ一ノ條件トス而シテ前式中ニ　$z=y-z'$ (第四十圖ヲ見ヨ)ヲ代入スレバ　$\int_A^B(y-z')yds=0$　卽　$\int_A^B yyds=\int_A^B yz'ds$

圖算法ニ於テハ微分的單位長 ds ヲ應用スル事能ハザルヲ以テ ds ニ代フルニ或ル一定ノ長ヲ以テスルヲ要ス之ヲ Δs トシ又 Σ ヲ總和ノ記號トスレバ前式ハ次ノ如ク變ズ

第四十圖



$$\Sigma_A^B(yy)\Delta s=\Sigma_A^B yz'\Delta s$$

Δs ハ拱軸ヲ數個ニ不等ニ分割シ其一部ノ長ナルヲ以テ方程式ノ兩項ヨリ之ヲ除去スルコトヲ得故ニ前式ハ再ビ次ノ如ク變ズ

$$\Sigma_A^B(yy)=\Sigma_A^B(yz') \quad \text{......................................(M.)}$$

尙ホ他ノ二條件トシテハ此平衡多邊形ハ必ズ兩端ヲ通過スベキコトヲ以テス。

今一例ヲ揭ゲテ之ヲ說述センニ例ヘバ拱軸ヲ八個ニ,

等分シ各 Δs ノ中央ニ P_1, P_2, P_3 等ノ荷重ガ懸ルモノトシテ之ヲ通ジテ垂直線ヲ引クベシ而シテ便宜ノ爲メ此等ノ荷重ハ比對的ニ相互ニ等シキモノト假定ス卽 $P_4=P_5$, $P_3=P_6$, $P_2=P_7$, $P_1=P_8$ (第四十一圖ヲ見ヨ)ニシテ拱頂ヨリ左右兩側各々其量同一ニシテ位置亦相等シトス。

先ヅ第四十一圖(甲)ニ示メス如ク P_1 乃至 P_8 ニ至ル荷重線 0 ヨリ 8 迄ヲ垂直ニ引クベシ而シテ任意ノ點 O' ニ假ノ極點ヲ撰定シ玆ニ假定示力圖(甲)ヲ畫キ之ニ對スル假定平衡多邊形ヲ畫クベシ卽乙圖ニ於テ A ノ直下任意ノ點 A' ヲ通シテ甲圖ノ $O'0$ ニ平行ニ一線ヲ引キ之ガ P_1 ト交切スル點ヨリ更ニ $O'1$ ニ平行ニ一線ヲ引キ又之ガ P_2 ト交切スル點ヨリ更ニ $O'2$ ニ平行ニ順次此ノ如クシテ最終線 $O'8$ ニ平行ニ引キタル線ヲ以テ B' 點ヲ求メ A' ト B' トヲ結合セル線ハ假定平衡多邊形ノ**閉塞線** (closing line) ナルベシ。

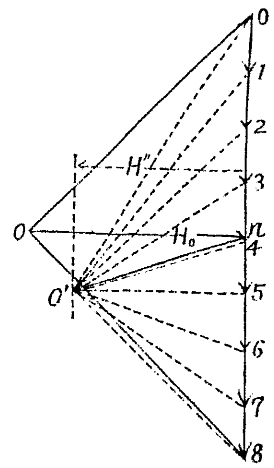
今 H'' ヲ假定示力圖ノ極點距離トシ, z'' ヲ假定平衡多邊形ノ縱距トシ,又 H_0 ヲ眞正ノ示力圖ノ極點距離トシ, z' ヲ眞正ノ平衡多邊形ノ縱距トスレバ平衡多邊形特有ノ性質卽各平衡多邊形ノ縱距ハ之ニ對スル示力圖ノ極點距離ニ夫々反比例ヲ爲スト云フ理ニ依リ

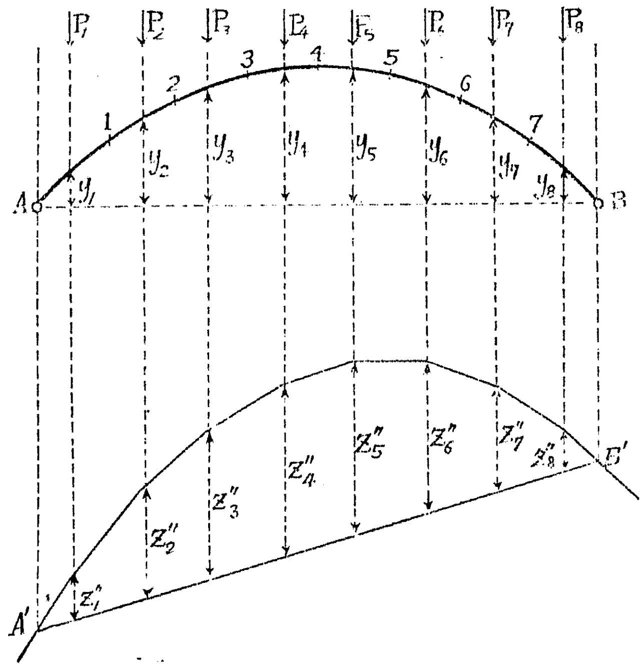
$$H_0 : H'' = z'' : z' \quad 卽 \quad H_0 z' = H'' z''$$

第四十一圖甲ニ於テ O' ヲ通ジテ $O'n$ ヲ $A'B'$ ニ平行ニ引クベシ然ル時ハ n ハ總荷重線ヲ二個ニ分割スベシ其一

ナル $n-0$ ハ左端ニ於ル反動力ノ垂直分力ヲ示メシ其二ナル $8-n$ ハ右端ニ於ル垂直分力ヲ示メスベシ但本例ニ於テハ拱頂ヨリ左右兩側ニ在ル荷重ノ量及位置相等シキモノト假定セルヲ以テ n ハ正シク 4 ナル點ヲ通過スベキ筈ナレドモ圖解ヲ明瞭ナラシムル爲メ聊カ不合理ナレドモ殊更ニ 4 點ヨリ少シク上ヲ通過セシメタリ讀者之ヲ諒セヨ。

第四十一圖 (甲)





第四十一圖 (乙)

然ルニ眞正ノ平衡多邊形ノ閉塞線ハ A'B' ナラズシテ AB 線ナラザル可ラザルハ明カナルヲ以テ之ニ對スル極點ハ必ズ0點ヲ通過スル水平線上ニ在ルベキハ多言ヲ要セズシテ明カナリ。

然ラバ其極點ハ該水平線上何處ニ在ルヤ此極點距離 H_0 ノ値ハ (M) 式卽 $\Sigma_1^8 yy=\Sigma_1^8 yz'$ ヲ應用シテ之ヲ圖算スルコトヲ得ベシ其法次ノ如シ。

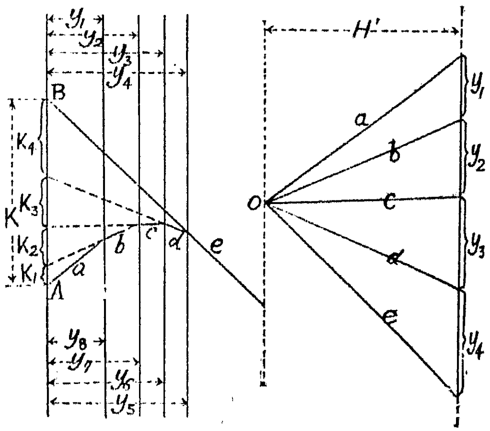
〔第一〕$\Sigma_1^8(yy)$ ノ値　y ハ拋物線ノ縱距ナルガ故ニ此式ヲ書キ換フレバ

$$\Sigma_1^8(yy)=2\Sigma_1^4(yy)=2(y_1y_1+y_2y_2+y_3y_3+y_4y_4)$$

ニシテ之ヲ圖算セントスルニハ先ヅ第四十二圖ニ於テ示メス如ク五個ノ垂直線ヲ引キ其間ノ水平距離ヲ夫々 y_1, y_2, y_3, y_4（甲圖）トシ別ニ一ノ垂直線ヲ引キ之ニ y_1, y_2, y_3, y_4（乙圖）ヲ置キ任意ノ極點 O ヲ撰定シ其極點距離ヲ H' トリ O ヲ通ジテ a, b, c, d, e ナル線ヲ引クベシ更ニ甲圖ニ於テ最モ左方ノ垂直線中任意ノ點 A ヲ撰定シ a, b, c, d, e 線ニ夫々平行ナル

第四十二圖

（甲）　（乙）



線ヲ引キ之ヲ連續シテ其最終線 e ヲ延長シテ B ニ至ラシム但甲乙兩圖ハ縮尺ヲ異ニスルモ可ナリ。

然ル時ハ等邊三角形ノ相互ノ關係ヨリ

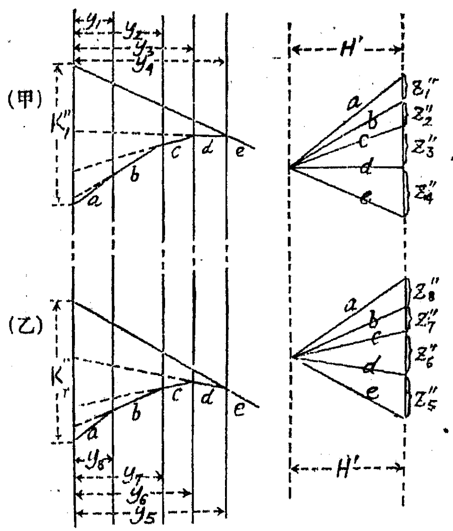
$$\left.\begin{array}{l} H':y_1=y_1:k_1 \\ H':y_2=y_2:k_2 \\ H':y_3=y_3:k_3 \\ H':y_4=y_4:k_4 \end{array}\right\} 卽 \quad \begin{array}{l} y_1y_1=H'k_1 \\ y_2y_2=H'k_2 \\ y_3y_3=H'k_3 \\ y_4y_4=H'k_4 \end{array}$$

故ニ　$\Sigma_1^8(yy)=2\Sigma_1^4(yy)=2[H'K]$

〔第二〕$\Sigma_1^8(yz'')$ ノ値　茲ニ z' ハ未知數ナルガ故ニ直ニ圖算法ヲ適用スルコト不可能ニシテ只 z'' ハ己知數ナルヲ以テ其援助ヲ籍ラザル可ラズ乃チ

$$\Sigma_1^8(yz'')=\Sigma_1^4(yz'')+\Sigma_5^8(yz'')$$

第四十三圖



前項ト同樣ノ H' ノ値ヲ用ヒ第四十二圖ト同樣ノ圖算法ニ依リ第四十三圖ヲ畫クベシ而シテ其甲圖ヨリ　$\Sigma_1^4(yz'')=y_1z_1''+y_2z_2''+y_3z_3''+y_4z_4''=H'K_1''$ ヲ得ベシ。

次ニ $\Sigma_5^8(yz'')=y_8z_8''+y_7z_7''+y_6z_6''+y_5z_5''=y_1z_8''+y_2z_7''+y_3z_6''+y_4z_5''$

ナルガ故ニ第四十三圖（乙）ヨリ $\Sigma_5^8(yz'')=H'K_r''$ ヲ得ベシ。

故ニ　　　$\Sigma_1^8(yz'')=H'(K_1''+K_r'')$

〔第三〕結論　此ニ於テ若シ $K_1''+K_r''=2K$ トナレバ

$$\Sigma_1^8(yy)=\Sigma_1^8(yz'')=2[H'K]$$

ナル條件ガ充タサルヽコトヲ證明シ假定極點距離 H''（第四十一圖）ハ直ニ以テ眞正ノ極點距離タルベシ而シテ z'' ハ z' ト一致スベシト雖モ實際ニ當リテハ此ノ如キコトハ殆ド望ム可ラザルナリ故ニ z'' ノ値ヲ z' ト一致セシムル爲メ $2K:(K_1''+K_r'')$ ナル比ヲ以テ之ヲ訂正セザル可ラズ換言スレバ凡ソ同一ノ荷重ニ對スル二個ノ平衡多邊形縱距ハ夫々極點距離ニ反比例ヲ爲ス理ニ由リ眞正ノ平衡多邊形ヲ畫クニハ假定極點距離 H'' ヲ此ノ比ヲ以テ訂正スルヲ要ス卽チ　$H_0=\dfrac{K_1''+K_r''}{2K}H''$

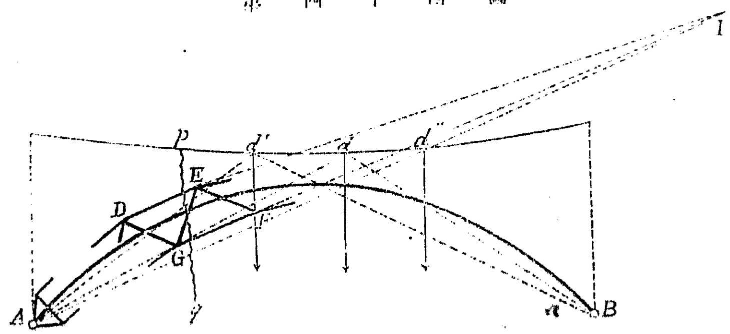
斯ノ如クシテ眞正ノ極點距離 H_0 ノ値ヲ求メタル以上ハ其極點ハ n（第四十一圖）ヲ通過スル水平線上ニ在ルヲ以テ直ニ眞正ノ平衡多邊形ヲ畫クコトヲ得若シ此平衡多邊形ニシテ A ヨリ始メ B ニ終ル時ハ畫法ニ誤ナキヲ證スベシ。

終リニ一言ス若シ惰率 I ガ變化スル場合ニハ I_0 ヲ以テ一定ノ位置（例ヘバ中央）ニ於ル拱肋ノ惰率トシ I ヲ以テ任意ノ點ノ惰率トシ其比ヲ n トスベシ卽 $n=\dfrac{I}{I_0}$ トスレバ $\Sigma_A^B\left(y\dfrac{y}{n}\right)=\Sigma_A^B\left(y\dfrac{z'}{n}\right)$ ナル故ニ前述ノ垂直線ニ於テ y ノ代リニ $\dfrac{y}{n}$ ヲ又 z'' ノ代リニ $\dfrac{z''}{n}$ ヲ用ユベシ。

第十八節　二鉸構拱ノ或ル材片ニ最大應力ヲ生ズベキ荷重ノ位置ヲ論ズ

第四十四圖ニ示メス如キ**二鉸構拱**ニ於テ上下队材及腹材ニ最大應力ヲ生ズベキ荷重ノ位置ヲ求ムルニハ第二章第七節三鉸拱ニ於テ論究セシト同一ノ原理ヲ應用スルニ過ギザルヲ以テ茲ニハ只其結果ノミヲ掲グベシ讀者若シ第七節ニ說述セル筭法ニ從ヒ原理ヲ追究スレバ容易ニ次ノ結論ニ歸着スルコトヲ發見スベシ。

第四十四圖



（一）上队材 DE ニ最大應力ヲ生ズベキ荷重ノ位置

先ヅ截斷面 pq ヲ假設シ而シテ DE ノ應力ヲ求ムルニハ力率ノ中心ヲ G 點ニ撰定スルヲ要ス今 G 點ヲ通ジテ AG 線ヲ引キ之ヲ延長シテ反動力軌跡ニ至ラシメ d ヲ以テ其交切點トス然ラバ

DE ニ最大應張力ヲ生ズベキ荷重ハ d 點ヨリ右端 B ニ至ルモノトス。

又 DE ニ最大應壓力ヲ生ズベキ荷重ハ d 點ヨリ左端 A ニ至ルモノトス。

(二)　下队材 G.F ニ最大應力ヲ生ズベキ荷重ノ位置

此場合ニハ力率ノ中心ヲ E 點ニ採ルベシ而シテ之ヲ通ズル A.E 線ヲ引キ之ヲ延長シテ反動力軌跡トノ交切點 d' ヲ定ムベシ然ラバ,

GF ニ最大應張力ヲ生ズベキ荷重ハ d' 點ヨリ左端 A ニ至ルモノトス。

又 GF ニ最大應壓力ヲ生ズベキ荷重ノ位置ハ d' 點ヨリ右端 B ニ至ルモノトス。

(三)　腹材 GE ニ最大應力ヲ生ズベキ荷重ノ位置

先ヅ DE ト GF トヲ延長シテ其交切點 I ヲ求メ之ヲ通ジテ AI 線ヲ引キ(若シ DE ト GF ト平行ナル場合ニハ A ヲ通ジテ之ニ平行線ヲ引クベシ)反動力軌跡トノ交切點 d'' ヲ定ムベシ然ラバ之ヲ三部ニ區別ス. (a), d'' 點ト右端 B トノ間ニ在ル荷重ハ總テ GE ニ應張力ヲ與フ. (b), d'' 點ト截斷面 pq トノ間ニ在ル荷重ハ總テ GE ニ應壓力ヲ與フ. (c), 截斷面 pq ト左端 A トノ間ニ在ル荷重ハ總テ GE ニ應張力ヲ與フ故ニ

GE ニ最大應張力ヲ生ズベキ荷重ハ d'' 點ヨリ右端迄及截斷面ヨリ左端迄擴ガルモノトス。

又 GE ニ最大應張力ヲ生ズベキ荷重ハ截斷面ヨリ d'' 點迄擴ガルモノトス。

第十九節　抛物線形二鉸拱ニ於ル溫度應力 (Temperature stresses) ヲ論ズ

普通ノ橋梁ハ通例橋ノ方向ニ水平ニ伸縮スルニハ自在ナル裝置ヲ有スルヲ以テ溫度ノ變化ノ爲メニ別ニ橋梁ニ應力ヲ生ズルコトナシト雖モ二鉸拱ニ於テハ其兩端ハ常ニ同一ノ距離ヲ保ツヲ以テ拱肋ニ溫度ノ變化アリタルトキハ之レガ爲メ應力ヲ生ズ之ヲ**溫度應力**ト稱ス此應力ハ別ニ計算シテ而シテ荷重ヨリ生ズル應力ニ加減スルヲ要ス今,

t ヲ拱肋ノ溫度ノ變化トシ。

ds ヲ拱肋ノ微分的單位長トシ。

e ヲ溫度一度ニ付テノ拱肋ノ膨脹係數トス。

然ル時ハ拱肋ノ各 ds ノ伸縮ハ $teds$ ニシテ ds ガ水平ト爲ス傾斜角ヲ i トスレバ其水平射影ハ $teds\cos i = tedx$ ナリ。

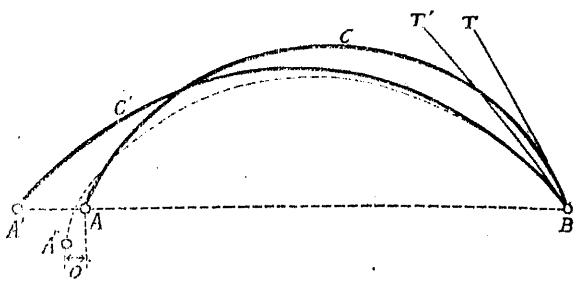
故ニ若シ拱肋ノ伸縮ガ自在ナル場合ニハ徑間 $2l_1$ ノ變化ハ

$$\int_0^{2l_1} tedx = 2l_1te \quad ナリ。$$

今之ヲ圖解センニ第四十五圖ニ於テ ACB ヲ元形ノ拱軸トシ A'C'B ヲ溫度ノ變化ヲ受ケシ後ノ拱軸トス。

然ル時ハ $AA' = 2l_1te$ ニシテ B 點ニ於ル切線ハ ACB ニ對

第四十五圖



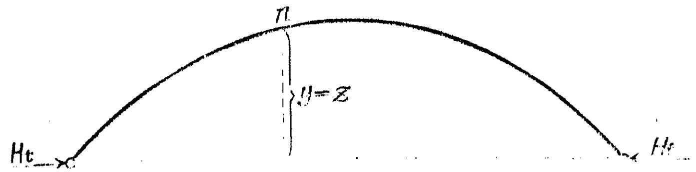
シテハBTニシテA'CBニ對シテハBT'ナリ然ルニ實際ハAA'ナル移動ハ不可能ニシテ之ニ代フルニAニ於テ水平反動力ヲ生ジ從テ拱肋ニ應力ヲ生ズ何トナレバBヲ基點トシテA點ノ移動ハ第十三節ニ於テ論究セル如ク二種ノ移動ヨリ成リ卽チ一ハBヲ中心トシテ拱肋ノ回轉ヨリ生ズルモノ,二ハ其彎曲ヨリ生ズルモノ是レナリ.此移動ハ同時ニ發生シ拱肋ガ回轉スルト同時ニ亦彎曲ス今Bニ於ル切線BTヲBT'ノ上ニ置キ換フル時ハA點ハA'ニ行カズシテA''ノ上ニ來ルベシ而シテAA''ノX軸上ニ於ル水平ノ移動ハ徑間ノ長ニ比シテ極メテ微小ナルヲ以テ之ヲ零トスル時ハA'AハA'A''ノ水平移動ト同一ナルベシ故ニ第(8)式ヨリ,　$\triangle x=\frac{Myds}{EI}=2l_1te$

而シテ拋物線形拱肋ニ於テハ $I=I_0\sec i,\ ds=dx\sec i$ ニシテ彈性係數Eヲ定數ト看做セバ,

$$\frac{1}{EI_0}\int_0^{2l_1}Myds=2l_1te\ \text{.............................(23)}$$

今第四十六圖ニ於テH_tナル水平反動力ガ拱ノ兩端ニ

第四十六圖



於テ働クトシ任意ノ點nニ力率ヲ採レバ $M_n=H_ty=H_tz$ ニシテ之ニ屬スル平衡多邊形ハ此場合單ニ一個ノ水平直線ヨリ成ル。

故ニ溫度ノ昇騰t度アル場合ノ反動力ヲH_tトスレバ(23)式ハ次ノ如ク變ズ

$$\frac{H_t}{EI_0}\int_0^{2l_1}y^2dx=2l_1te$$

而シテ(15)式ヨリ $\int_0^{2l_1}y^2dx=\frac{16}{15}h^2l_1$ ナル値ヲ代入スレバH_tヲ求ムルコトヲ得.　卽

$$H_t=\frac{15EI_0te}{8h^2}\text{..................................(24)}$$

若シ溫度ガ標準ヨリ降下スル時ハtハ負(−)ニシテ其場合ニハH_tハ內側ヨリ外側ニ向テ働クモノトス。

其最大力率ハH_tノ挺率ノ最大ナル點卽拱ノ頂點ニ於テ生ズベシ其値ハ次ノ如シ

$$M_{max}=H_th=\frac{15EI_0te}{8h}$$

第(24)式ヨリH_tノ値ヲ求メ之ヨリ生ズル拱ノ應力ヲ求メ之ヲ荷重ヨリ生ズル最大應力ニ加減スベシ而シテ又此H_tハ再ビ拱肋ニ軸推力ヲ生ズル事ヲ忘ル可カラズ。

c ノ値ハ通例次ノ如シ。

材料	華氏一度ニ付	攝氏一度ニ付
鑄鐵	.00000617	.0000111
鍛鐵	.00000666	.0000120
鋼鐵	.00000600	.0000108

第二十節　抛物線形二鉸拱ノ肋縮 (Rib-shortening) ニ屬スル應力ヲ論ズ

拱肋ハ其横斷面ニ平等ニ分布セラレタル軸推力ニ依リ短縮セラルヽモノニシテ今。

$d\lambda$ ヲ拱肋ノ微分的單位長 ds ニ對スル短縮ノ量トシ，f' ヲ軸推力ノ强度(例ヘバ一平方吋ニ付封度)トシ，E ヲ彈性係數トスレバ，彈性限度内ニアリテハ　$d\lambda=\frac{f'}{E}ds$　ナリ。

此短縮ハ溫度ノ降下シタル時ニ生ズル結果ト同一ナリ而シテ $d\lambda$ ノ水平射影ハ $\frac{f'}{E}dx$ ナルヲ以テ全徑間 $2l_1$ ニ對スル短縮ノ量ハ　$\triangle x=\int_0^{2l_1}\frac{f'}{E}dx$　ナリ。

然ルニ f' ハ各斷面ニ於テ其强度ヲ異ニスルガ故ニ定數ナラズ依テ此積分ノ値ヲ求ムルニハ f' ノ値ノ變化ヲ知ラザル可カラズ然ルニ此變化ハ未知ナルヲ以テ二三ノ斷面ニ於ル f' ノ値ヲ求メ之ヲ平均シテ暫ク之ヲ定數ト看做シ以テ此積分ノ概數ヲ求ムベシ其場合ニハ

$\triangle x=\frac{f'}{E}2l_1$ トナリ $\frac{f'}{E}$ ハ恰モ(22)式ノ tc ニ代リタルヲ見ルベシ。

故ニ今 H_s ヲ拱肋ノ短縮ニ抵抗スル水平ノ反動力トスレバ

$$H_s=-\frac{15}{8}\ \frac{I_0}{h^2}f' \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

ヲ得ベシ式中負(−)ナル符號ハ H_s ガ拱ノ内側ヨリ外側ニ向テ働クコトヲ示スモノニシテ拱肋ノ短縮ノ爲メニ徑間ノ減少ヲ妨ゲントスル力ヲ表ハス。

然ルニ f' 及 I_0 ハ共ニ未知數ナルヲ以テ先ヅ或ル斷面ヲ假定シテ I_0 ヲ決定セザル可ラズ而シテ f' ヲ求ムルニハ先ヅ以テ拱ノ二三ノ點ニ於ル最大抽推力ヲ求メ之ヲ以テ f' ノ平均數ヲ採用スベシ．此平均數ヲ(25)式中ニ代入スル時ハ H_s ノ値ヲ得ルト雖モ其 H_s ハ再ビ軸推力ヲ生ズルヲ以テ前ニ採用セル軸推力及 f' ノ値ニ再ビ變化ヲ生ズベシ。

斯ノ如ク H_s ノ變化ハ軸推力及 f' ノ値ニ影響ヲ及ボシ此計算ヲ反覆スルニ於テ理論上其影響ハ際限ナシト雖モ實際ニハ二回之ヲ反覆スレバ其影響ハ頗ブル微弱トナルモノト知ルベシ．今數理的ニ之ヲ論ズル時ハ H_s ノ値ハ次ノ如クシテ得ラルベシ。

a ヲ或ル分格點ニ於ケル拱肋ノ横斷面積トシ。

f' ヲ死活重及溫度(ノ變化)ヨリ生ズル平均抽推力强度トシ。

H_s ヲ f' ヨリ生ズル第一次ノ水平推力トシ。

f_1' ヲ H_s ヨリ生ズル第一次ノ平均抽推力强度トシ。

H_s' ヲ f_1' ヨリ生ズル第二次ノ水平推力トシ。

f_1'' ヲ H_s' ヨリ生ズル第二次ノ平均軸推力强度トシ。

順次此ノ如クシ且ツ、

I_0 ヲ拱頂ニ於ル拱肋ノ惰率トシ. h ヲ拱矢トシ. n ヲ拱肋ニ於ル分格點ノ數トシ. i ヲ拱軸ノ或ル點ニ於ル切線ガ水平線ト爲ス傾斜角トス。

然ルニ最初ノ H_s ハ内ヨリ外ニ向テ働ク故ニ負(−)ナリ.次ノ H_s' ハ外ヨリ内ニ向テ働ク故ニ正(+)ナリ.其次ノ H_s'' ハ再ビ内ヨリ外ニ向テ働ク故ニ負ナリ.斯ノ如クシテ順次ニ正負ヲ異ニス依テ

$$H_s=-\frac{15}{8}\cdot\frac{I_0}{h^2}f'=-mf' \quad 茲ニ \quad m=\frac{15}{8}\cdot\frac{I_0}{h^2}=定數$$

$$f_1'=\frac{\Sigma H_s\frac{\cos i}{a}}{n-1}=\frac{\Sigma(-mf')\frac{\cos i}{a}}{n-1}=\frac{m}{n-1}\Sigma\frac{\cos i}{a}f'=m'f'$$

$$茲ニ\quad m'=\frac{m}{n-1}\Sigma\frac{\cos i}{a}=定數$$

$$H_s'=\frac{15}{8}\cdot\frac{I_0}{h^2}f_1'=-mf_1'=-m'mf'$$

$$f_1''=\frac{\Sigma H_s'\frac{\cos i}{a}}{n-1}=\frac{\Sigma(mm'f')\frac{\cos i}{a}}{n-1}=m'f'm\frac{\Sigma\frac{\cos i}{a}}{n-1}$$

$$=(m')^2f'$$

$$H_s''=-\frac{15}{8}\cdot\frac{I_0}{h^2}f_1''=-mf_1''=-m(m')^2f'$$

$$f_1'''=-\frac{\Sigma H_s''\frac{\cos i}{a}}{n-1}=-\frac{\Sigma[-m(m')^2]\frac{\cos i}{a}}{n-1}$$

$$=\frac{m(m')^2f'\Sigma\frac{\cos i}{a}}{n-1}=(m')^3f'$$

$$H_s'''=\frac{15}{8}\cdot\frac{I_0}{h^2}f_1'''=mf_1'''=m(m')^3f'$$

以上ノ和ヲ採レバ全水平推力ヲ得故ニ

$$最終ノ\quad H_s=-mf'+mm'f'-m(m')^2f'+m(m')^3f'$$

$$=-mf'[1-m'+(m')^2-(m')^3+\ldots\ldots]$$

$$=-mf'\frac{1}{1+m'}$$

徑間ノ Initial lengthening ニ就テ

抑モ肋縮ノ大部分ハ死重ヨリ來ルモノナルガ故ニ初メヨリ設計ニ用ユベキ徑間ヨリ,實際少シク,ヨリ長キ徑間ヲ豫メ準備シ而シテ架拱ニ着手スル時ハ此肋縮ニ關スル應力ノ大部分ヲ避クルコトヲ得ベシ何トナレバ架拱終了ニ際シ拱架ヲ取除ク時ハ死重ノ全部ガ拱ニ懸ル爲メ自然ニ徑間ハ短縮セラルベケレバナリ之ヲ徑間ノ Initial lengthening ト云フ。

然ラバ其首メニ長クスベキ此 Initial lengthening ナルモノヽ量ハ幾干ニシテ可ナルヤト云フニ今此量ヲ△トスレバ恰モ溫度ノ昇騰ニ依リテ△ダケ徑間ガ延長スルト同一ノ結果ヲ生ズベキヲ以テ其量ハ $\triangle=2l_1te$ ナルベシ但シ l_1 ハ半徑間ノ長, t ハ溫度ノ昇騰度, e ハ膨脹係數此式ヨリ　$t=\frac{\triangle}{2l_1e}$

ナル値ヲ (24) 式中ニ代入シ而シテ△量ダケ徑間ヲ長ク

スル爲メニ生ズル水平推力ヲH_tトスレバ

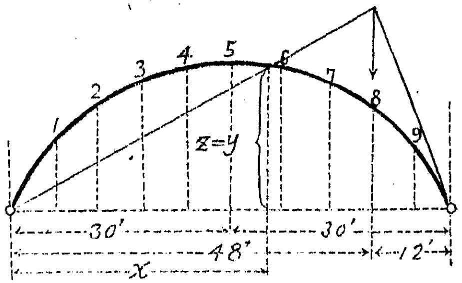
$$H_t=\frac{15EI_0\triangle}{16l_1h^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

而シテ實際拱肋ヲ設計スルニ當リ用ユベキ△ノ適當ノ値ハ先ヅ拱ガ全死重ヲ負フベキ場合ニ(25)式ニ依リ求メタルH_tノ値ヲ(26)式中ノH_tニ代入シテ之ヲ解ケバ△ノ値ヲ得ベシ斯ノ如クシテ求メタル△ノ値ヲ架拱中ニ豫メ徑間ニ附加スルコトヲ得ル裝置ヲ施セバ竣功ト同時ニ徑間ハ全然短縮スルヲ以テ死重ノ爲メ生ズル肋縮應力ハ自ラ消滅シ拱ハ設計ニ用キタル徑間ヲ有スルニ至ルベシ．然レドモ此法ハ施工上ニ頗ブル困難ヲ感ズルヲ以テ容易ニ行ハレ難シ。

二鉸拱例題

第四十七圖ハ徑間六十呎拱矢六呎ノ拋物線二鉸拱軸ヲ示メス之ヲ水平ニ十個ニ等分シ其第八分格點ニ於テ十噸ノ荷重在ルモノトス今計算ヲ簡便ナラシムル爲メ其死重及溫度ノ變化ノ影響ヲ無視シ(一)彎曲率ノ零ナル點及(二)該點ニ於ル軸推力ノ量ヲ求ム。

第四十七圖



解

(一)第一表ニ依リ　$y_0=h\times1.3796=6\times1.3796=8.2758$呎

$$y=\frac{8.2758}{48}x$$

又　$$y=\frac{hx}{l_1^2}(2l_1-x)=\frac{6x}{30\times30}(60-x)$$

$$z'=y$$

故ニ　$$(60-x)=\frac{8.2758\times30\times30}{6\times48}=25.862\text{呎}$$

故ニ　$$\left.\begin{aligned}x&=60-25.862=34.138\text{呎}\\ y&=\frac{8.2758\times34.138}{48}=5.89\text{呎}\end{aligned}\right\}\text{(答)}$$

(二)　$$\tan i=\frac{dy}{dx}=\frac{2h}{l_1^2}(l_1-x)=\frac{2\times6}{30\times30}\times4.138=0.0552$$

故ニ　$i=3°10'$　$\cos i=0.998$　$\sin i=0.0552$

第一表ニ依リ　$$H=\frac{Pl_1}{h}\times0.232=10\times\frac{30}{6}\times0.232=11.6\text{噸}$$

$$V_1=2\text{噸}\qquad V_2=8\text{噸}$$

$$\text{軸推力}=H\cos i-V_1\sin i=11.6\times0.998-2\times0.0552$$

$$=11.5\text{噸}\quad\text{(答)}$$

第二十一節　水平ナル外力ヲ受クル拋物線二鉸拱ノ平衡ヲ論ズ

第壹款　反動力ノ値

此水平外力トハ風壓若クハ土壓ノ水平分力其他何種ノ水平力タルヲ問ハズト雖モ橋拱ニアリテハ屋拱ト其趣ヲ異ニシ橋ノ方向ニ働ク風壓ハ概シテ其影響大ナラザルヲ以テ實際橋拱ニ應用スル場合ニハ蓋シ土壓ノ水平分力ノ外ナカルベシ。

玆ニ一個ノ水平力Hガ拱ノ或ル點ニ働クモノト假定シ其反動力ヲ拱ノ一端ニ於テハR_1(其分力ハH_1及V_1)トシ他端ニ於テハR_2(其分力ハH_2及V_2)トシ第十三節垂直力ノ場合ト同一ノ筆法ニ由リ之ニ屬スヲ平衡多邊形及示力圖ヲ畫クコトヲ得ベシ。

第四十八圖(甲)ニ於テH及拱ノ兩端ニ於ル反動力ハ靜力平衡ノ定義ニ依リ同一ノ點ニ於テ交切スベシ故ニ其平衡多邊形ハAdBナルベシ而シテ水平力ノ和ハ零ナル理ニ由リ　$H = H_1 + H_2$

ニシテ此H_1及H_2ハ同一ノ方向ニ働キHト正反對ノ方向ヲ有ス。

又垂直力ノ和ハ零ナル理ニ由リ

$$V_1 - V_2 = 0 \quad 即 \quad V = V_1 = V_2$$

ニシテ此V_1トV_2トハ其量ヲ同フシ其方向ハ正反對ナリ。之ヲ第十三節垂直外力ノ場合ト比較スルニ此H_1及H_2ハ垂直力ノ時ノV_1及V_2ニ又此Vハ其時ノHニ對スルモノト知ルベシ。今拱ノ一端Bニ力率ヲ採レバ

$$V = H\frac{y_H}{2l_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

但y_Hハ水平線ABヨリHニ至ル垂直距離トス。而シテHハ其一部分ヅヽ拱ノ各端ニ於テ抵抗セラルヽニ依リ之レガ示力圖ハ第四十八圖乙ニ示スガ如クナルベシ。今x_0ヲ徑間ノ中央ヨリ平衡多邊形トHトノ交切點dニ

至ル水平距離トスレバ此示力圖及平衡多邊形ノ關係ヨリ

$$\frac{H_1}{V} = \frac{l_1 - x_0}{y_H} \quad 即 \quad H_1 = \frac{(l_1 - x_0)}{y_H} V \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

$$\frac{H_2}{V} = \frac{l_1 + x_0}{y_H} \quad 即 \quad H_2 = \frac{(l_1 + x_0)}{y_H} V \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

第二欵　彎曲率ノ値

又第四十八圖甲ニ於テEDナル截斷面ヲ假定シE點ヲ中心トシテ其左方ノ力率ヲ採レバ

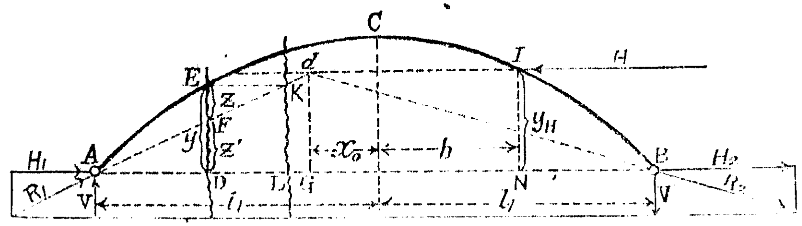
$$M_E = -V \cdot AD + H_1 \cdot DE \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

又KLナル截斷面ヲ假定シ圖中K點ヲ中心トシタル力率ハ此K點ガ平衡多邊形中ニ在ルヲ以テ其値零ナルベシ故ニ　$M_K = -V \cdot AL + H_1 \cdot KL = 0$　即　$V \cdot AL = H_1 \cdot KL$

之ヲ書キ換フレバ　$V \cdot AD + V \cdot DL = H_1 \cdot KL$　即

$$V \cdot AD + V \cdot EK = H_1 \cdot DE \quad 即 \quad V \cdot EK = -V \cdot AD + H_1 \cdot DE$$

第四十八圖(甲)

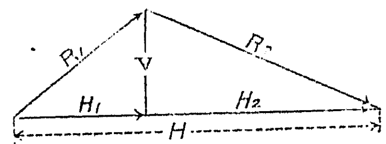


之ヲ(d)式中ニ代入スレバ

$$M_E = V \cdot EK \ldots\ldots\ldots (27)$$

式中EKハ拱軸ト平衡多邊形トノ間ノ水平距離

(乙)



ナリ語ヲ換ヘテ之ヲ言ヘバ,『拱軸ノ任意ノ點ニ於ル彎曲率ハ拱軸ト平衡多邊形トノ間ノ水平距離ニVヲ乘ジタル積ニ等シ。』

斯ノ如ク本節ニ於テ論ジタル水平力ト第十三節ニ於テ論ジタル垂直力トハ其關係相似タルモノアリト知ルベシ. 又第四十八圖ニ於テ等三角形ノ關係ヨリ

$$\frac{\mathrm{DF}}{d\mathrm{G}}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AG}}\quad 即\quad \mathrm{DF}=z'=\frac{\mathrm{AD}\cdot d\mathrm{G}}{\mathrm{AG}}$$

$$\frac{\mathrm{EK}}{\mathrm{EF}}=\frac{\mathrm{AG}}{d\mathrm{G}}\quad 即\quad \mathrm{EK}=\mathrm{EF}\frac{\mathrm{AG}}{d\mathrm{G}}$$

然ルニ　$\mathrm{AD}=x \qquad \mathrm{AG}=l_1-x_0 \qquad d\mathrm{G}=y_{11}=\frac{h}{l_1^2}(l_1^2-b^2)$

$$\mathrm{EF}=z=(y-z') \qquad y=\frac{h}{l_1^2}(2l_1x-x^2)$$

故ニ　$z'=x.\frac{h}{l_1^2}\qquad\frac{(l_1^2-b^2)}{(l_1-x_0)}$

$$\mathrm{EK}=\frac{(y-z')(l_1-x_0)}{y_{11}}=(y-z')\frac{(l_1-x_0)l_1^2}{h(l_1^2-b^2)}$$

$$=\left[(2l_1x-x^2)-x\frac{(l_1^2-b^2)}{(l_1-x_0)}\right]\frac{(l_1-x_0)}{(l_1^2-b^2)}\dots\dots\dots(e)$$

第三欵　x_0 ノ値

次ニ x_0 ノ値ヲ求ムルニハ垂直力ノ場合ト同一ノ條件即 $\triangle x=0$ ナル理由ニ依リ　$\triangle x=\int yd\varphi=\int y\frac{\mathrm{M}ds}{\mathrm{EI}}=0$

然ルニ　$\mathrm{M}=\mathrm{V}\cdot\mathrm{EK} \qquad ds=dx\sec i \qquad \mathrm{I}=\mathrm{I}_0\sec i$

ナルヲ以テ　$\int y\frac{\mathrm{M}ds}{\mathrm{EI}}=\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{EI}_0}\int y\cdot\mathrm{EK}\cdot dx=0$

之ニ y 及 EK ノ値ヲ代入スレバ

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{I}}y\cdot\mathrm{EK}\cdot dx=\int_0^{l_1+b}y(y-z')\frac{(l_1-x_0)l_1^2}{h(l_1^2-b^2)}dx$$

$$=\int_0^{l_1+b}\frac{h}{l_1^2}\left[(2l_1x-x^2)^2-(2l_1x-x^2)x\frac{(l_1^2-b^2)}{(l_1-x_0)}\right]\frac{(l_1-x_0)}{(l_1^2-b^2)}dx\dots(f)$$

此積分ハA點ヨリI點ニ至ル値ニシテB點ヨリI點ニ至ル積分ニ對シテハ其平衡多邊形ガ Bd ナル線ニ由テ境界セラルヽヲ以テ x ヲB點ヨリ左方ニ數ヘ而シテ前式 $\mathrm{AG}=l_1-x_0$ ノ代リニ $\mathrm{BG}=l_1+x_0$ ヲ以テスレバB點ヨリI點ニ至ル積分ヲ得ベシ而シテ一方ガ壓應力ナレバ他方ハ應張力タルベクシテ相互ニ平衡ヲ保持スルガ故ニ此二個ノ積分ハ相等シカルベキモノナリ而シテ $\frac{h}{l_1^2}$ 及 $(l_1^2-b^2)$ ハ兩積分トモ共有ナレバ之レヲ除去スル事ヲ得

故ニ　$(l_1-x_0)\int_0^{l_1+b}(4l_1^2x^2-4l_1x^3+x^4)dx-(l_1^2-b^2)\int_0^{l_1+b}(2l_1x^2-x^3)dx$

$$=(l_1+x_0)\int_0^{l_1-b}(4l_1^2x^2-4l_1x^3+x^4)dx-(l_1^2-b^2)\int_0^{l_1-b}(2l_1x^2-x^3)dx$$

之レヲ積分スレバ次ノ如シ

$$(l_1-x_0)\left[\frac{4}{3}l_1^2(l_1+b)^3-l_1(l_1+b)^4+\frac{1}{5}(1_1+b)^5\right]$$

$$-(l_1^2-b^2)\left[\frac{2}{3}l_1(l_1+b)^3-\frac{1}{4}(l_1+b)^4\right]$$

$$=(l_1+x_0)\left[\frac{4}{3}l_1^2(l_1-b)^3-l_1(l_1-b)^4+\frac{1}{5}(l_1-b)^5\right]$$

$$-(l_1^2-b^2)\left[\frac{2}{3}l_1(l_1-b)^3-\frac{1}{4}(l_1-b)^4\right]$$

更ニ之レヲ約スレバ　$\frac{16}{15}l_1^5x_0=\frac{4}{3}l_1^3b^3-\frac{4}{15}l_1b^5$

故ニ　$x_0=\frac{b^3}{4l_1^4}(5l_1^2-b^2)$

若シ k ヲ以テ半徑間ノ分數即 $k=\frac{b}{l_1}$ トスレバ

$$x_0=\frac{1}{4}k^3l_1(5-k^2) \qquad \ldots\ldots(g)$$

第四欵　結　　論

H_1, H_2 及 V ノ値ハ (a), (b) 及 (g) 式ヨリ

$$\left.\begin{aligned}
H_1&=\frac{(l_1-x_0)H}{2l_1}=H\left(\frac{1}{2}-\frac{x_0}{2l_1}\right)=H\left[\frac{1}{2}-\frac{b^3}{8l_1^5}(5l_1^2-b^2)\right]\\
H_2&=\frac{(l_1+x_0)H}{2l_1}=H\left(\frac{1}{2}+\frac{x_0}{2l_1}\right)=H\left[\frac{1}{2}+\frac{b^3}{8l_1^5}(5l_1^2-b^2)\right]\\
V&=H\frac{y_0}{2l_1}=H\frac{h}{2l_1^3}(l_1^2-b^2)
\end{aligned}\right\}\ldots(28)$$

若シ $k=\frac{b}{l_1}$ トスレバ

$$\left.\begin{aligned}
H_1&=H\left[\frac{1}{2}-\frac{k^3}{8}(5-k^2)\right]\\
H_2&=H\left[\frac{1}{2}+\frac{k^3}{8}(5-k^2)\right]\\
V&=H\left[\frac{h}{2l_1}(1-k^2)\right]
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(28)a$$

又 Ek ノ値ハ (e) 式ヨリ

$$EK=\left[(2l_1x-x^2)-x\frac{l_1^2(1-k^2)}{(l_1-x_0)}\right]\frac{(l_1-x_0)}{l_1^2(1-k^2)}$$

之ニ x_0 ノ値ヲ代入スレバ

$$EK=\frac{1}{l_1(1-k^2)}\left\{x(2l_1-x)\left[1-\frac{k^3}{4}(5-k^2)\right]-xl_1(1-k^2)\right\}$$

而シテ

$$M_x=V.EK=H\frac{hx}{2l_1^2}\left\{(2l_1-x)\left[1-\frac{k^3}{4}(5-k^2)\right]-l_1(1-k^2)\right\}\ldots(27)a$$

〔注意〕 以上二鉸拱肋ニ關スル概論ヲ終リ將ニ二鉸構拱ニ論及セントスルニ當リ玆ニ注意スベキ一事アリ乃チ以上論究セル彈性拱肋ニ關スル諸公式ニ於テ拱其モノハ何レノ部分ニ於テモ同一ノ物質ヨリ成リ又同一ノ横斷面ヲ有スルモノト假定セルガ故ニ彈性係數 E 及惰率 I ヲ定數ト看做セリ若シ夫レ**鐵筋混凝土**ノ如キ彈性ヲ異ニスル合成體ニ此等ノ公式ヲ應用セントスル場合ニハ EI ニ代フルニ左ノ式ヲ以テスベシ。

$$EI=E_c\left(I_c+\frac{E_m}{E_c}I_m\right)$$

式中　E_c ハ混凝土ノ彈性係數　　I_c ハ混凝土ノ惰率

　　　E_m ハ鐵筋ノ彈性係數　　I_m ハ鐵筋ノ惰率

第二十二節　二鉸腹構拱ノ應力ヲ求ムル法ヲ論ズ

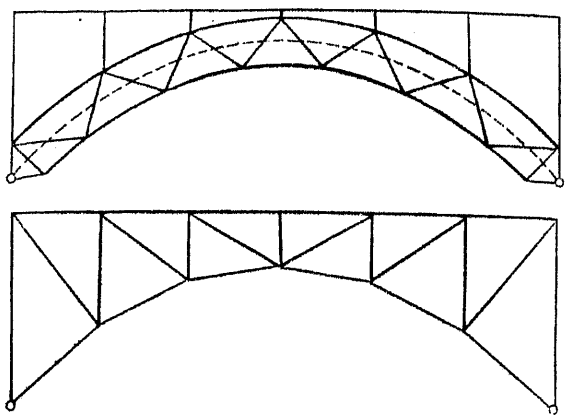
第一欵　水平推力ヲ求ムルまつくすうえる氏ノ代數的解法

此法ハ最初千八百七十三年二月十日倫敦刊行ノ雜誌えんじにーやニ於テ發表セラレ又えんさいくろぴぢやぶりたにか第九版橋梁ノ部ニ記載セラレタリ。

第四十九圖

(甲)

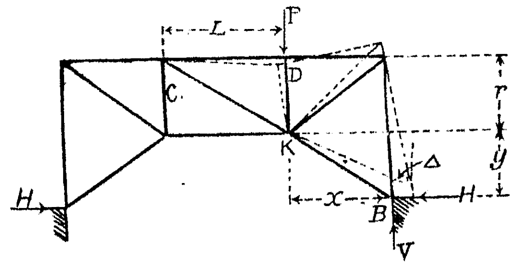
(乙)



讀者ハ第四十九圖ニ於テ甲乙兩拱ノ區別何レニアルヤヲ容易ニ發見セラルベシ乃チ兩拱トモ構拱(braced arch)ト稱スルコトヲ得レドモ甲ニアリテハ構拱ノ上ニ單ニ支柱ヲ載セタルモノニ過ギザルヲ以テ前述ノ拱肋ノ原理ヲ應用スルコトヲ得レ共乙ハ所謂二鉸腹構拱 (two hinged spandrel braced arch) ト稱シ上臥材ハ水平(若クハ略ド水平)ニシテ下臥材ハ曲線ヲ成シ斜材ヲ以テ互ニ之ヲ結合セルモノニシテ此ノ如キ構拱ニ普通ノ拱肋ノ理論ヲ應用スルコトノ困難ナル所以ノモノハ實ニ其各截斷面ニ於ケル惰率ノ變化急速ニシテ且其變化ハ一定ノ法則ニ準據ス可カラザルモノアルガ爲メナラズンバアラズ,此場合ニ於テまつくすうえる氏ノ法ヲ用ユルヲ最モ便ナリトス,次ニ之ヲ說明セントス。

第五十圖ハ最モ簡單タル二鉸腹構拱ヲ示メス兹ニ或

第五十圖



ル構材CDノ長ヲLトシ其橫斷面積ヲaトシ彈性係數ヲEトス今或ル一個ノ荷重PガD點ニ働ク時ニ該構材CDニFナル應力ヲ生ズ其時該材ノ長ニλナル變化ヲ生ズベシ其變化ハ普通ノ彈性學ノ原理ニ依リ次ノ式ヲ表ハスコトヲ得。

$$\lambda = F\frac{L}{aE}$$

若シ構拱ノ他ノ材片ノ長ニ少シモ變化ナクシテ而シテ拱ノ一端Bハ自由ニ移動スルヲ許サルヽモノト假定スレバ拱ノ徑間ニ變化ヲ生ズベシ,之ヲ△トス,換言スレバ△ハ拱ノ或ル任意ノ一個ノ構材CDガ應力Fノ爲メニ其長ニλダケノ變化ヲ生ジタル時ノ拱端ノ水平移動ナリトス,而シテ$\frac{\Delta}{\lambda}$ナル比ハ全ク拱ノ形狀ニ從フモノニシテ其値ヲTトスレバ

$$\frac{\Delta}{\lambda} = T = \text{定數}\quad\text{即}\quad \Delta = \lambda T = TF\frac{L}{aE} \cdots\cdots (1)$$

今材片CDノ長ニλダケ變化アル時ノ拱ノ各點ノ移動ヲ考フレバK點ヲ中心トシテ破線ヲ以テ示メシタル如ク回轉スルモノト見ルヲ得ベシ,而シテ其移動ハ挺率y及rニ準ズ即

$$\triangle : \lambda = y : r$$

然ルニ拱ノ兩端ノ位置ハ實際固定セラレ其移動自由ナラザル爲メ其一端ガ自由ナル時ニ生ズル△ナル水平移動ヲ起ス代リニ之ニ反抗スル爲メHナル水平推力ヲ生ズルモノトス,水平推力Hガ起レバ拱ニ應力ヲ生ズ,乃チS_1ヲ以テHノ爲メニ生ジタルCDノ應力トシ,K點ヲ中心トシテ力率ヲ採レバ次ノ比ヲ得

$$S_1 : H = y : r = \triangle : \lambda$$

換言スレバHハ拱ノ一端ガ自由ナリシ時ニPニ依リ生ジタル水平移動△ト同量ノ移動ヲ反對ノ方向ニ起スベキ水平推力(即チPニ依リテ生ジタル水平反動力)ナリト考フルヲ得ベシ,其時CDニS_1ナル應力ヲ生ズ故ニ

$$\frac{H}{S_1}=\frac{r}{y}=\frac{\lambda}{\triangle} \quad 即 \quad \frac{S_1}{H}=\frac{y}{r}=T$$

更ニ之ヲ言ヒ換ユレバTハ拱ノ一端ガ自由ナル場合ニ單位水平力(H=1)ニ依リテCDニ生ズル全應力ナリト考フルヲ得ベシ,次ニ同様ノ理由ヲ以テVヲ荷重Pニ依リテ生ジタル垂直反動力トシ,拱ノ一端ガ自由ナル時ニ材片CDニ生ジタル應力ヲSトス,然ル時ハ$\frac{S}{V}$ナル比ハ全ク拱ノ形狀ニ從フモノニシテxヲVノ挺率トスレバ

$$\frac{S}{V}=\frac{x}{r}=T' \quad 即 \quad S=\frac{Vx}{r}=T'V$$

換言スレバT'ハ拱ノ一端ガ自由ナル時ニ上方ニ向フ單位垂直力(V=1)ニ依リテCDニ生ジタル全應力ナリ

ト考フルヲ得ベシ,然ラバ拱ノ一端ニ於テ水平推力H及垂直力Vガ同時ニ働ク時ハ其合成力ハ材片CDニS_1及Sノ和ヨリ成ル應力Fヲ生スベシ即

$$F=S_1+S=TH+T'V \quad \cdots\cdots (2)$$

此Fノ値ヲ(1)式中ニ代入スレバ

$$\triangle=(T^2H+TT'V)\frac{L}{aE}$$

斯ノ如クシテ荷重Pヨリ生ズル各材片ノT及T'ヲ計算シL, a及Eハ既知數トシテ總和ヲ求ムレバ

$$\Sigma\triangle=\Sigma(T^2H+TT'V)\frac{L}{aE}$$

然ルニ拱端ノ移動ハ絶對ニ不可能ナルガ故ニ此ノ$\Sigma\triangle=0$トスレバHノ値ヲ得ベシ即

$$H=\frac{\Sigma TT'V\frac{L}{aE}}{\Sigma T^2\frac{L}{aE}}=\frac{\Sigma TS\frac{L}{aE}}{\Sigma T^2\frac{L}{aE}} \quad \cdots\cdots (29)$$

此ノ内垂直力Vノ値ハ第(20)式ニ示メセル垂直反動力ト少シモ異ナルコトナシ,故ニ應力Sハ爰ニ水平推力ガ存在セザルモノトシテ第(20)式ノV_1及V_2ヨリ計算セル應力ト同一ナリ。

總外力(P, V_1, V_2及H)ニ依リ生ズル或ル一材片ノ全應力ハFニシテ即　$F=S+S_1=S+HT$

ナリ,故ニHヲ求メタル時ニ計算セルS及Tナル應力ハ復タFナル全應力ヲ求ムル時ニ於テ其儘之ヲ用ユルコトヲ得ベシ。

第二欵　圖算法

本法ハまつくすうえる氏ノ相互法則ヲ應用スルニ在リ而シテ此法則ヲ了解スルニハ讀者ハ先ヅ彈體力學ニ關スルかすちりあのー氏定理ノ知識アルヲ要ス今之レガ説明ヲ次ニ試ミントス。

〔第一〕 まつくすうえる氏相互法則 (Maxwell's Reciprocal Law)

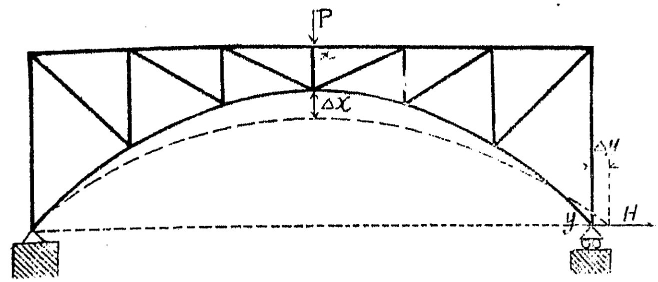
曰ク彈性的構造物ノ或ル任意ノ點 x ニ關シ他ノ點 y ニ於ル外力ノ爲メ或ル與ヘラレタル一定ノ方向ニ x 點ノ移動スル量ハ第一點 x ニ於テ與ヘラレタル方向ニ第二點 y ニ於ル外力ト同量ノ力ガ働ク時ニ y ニ於テ生ズル移動ノ量ニ同ジ (The displacement of any point x of an elastic structure in a given direction due to a force at any other point y of the structure is equal to the displacement of the second point y in the direction of the force at that point due to a force of the same amount in the given direction at the first point x)

之ヲ**まつくすうえる**氏相互法則ト云フ次ニ之レガ證左ヲ示サン。

説明及證左

例ヘバ第五十一圖ニ於テ y 點ニ於ル外力 H ハ x 點ニ於テ外力 P ノ方向ニ δx ナル垂直移動ヲ生ズ其 δx ノ量ハ x 點ニ於ケル外力 P ニ依リテ H ノ方向ニ y 點ノ水平移動 δy ノ量ニ同ジ但 P 及 H ハ必ズ同量トス。

第五十一圖



今之レガ證明ヲ爲スニハかすちりあのー氏ノ定理ヲ應用スル必要アリ。

Castigliano's first theorem ニ曰ク

一個ノ彈體ニシテ外力ヲ受クル場合ニ外力ノ方向ニ其働點ノ移動スル量ハ其移動ヲ惹キ起スベキ外力ニ關シ之ニ與ヘラレタル抵抗ノ總働程 (total work) ノ第一次微分係數ニ等シ (The displacement of the point of application of an external force in the direction of the force, acting on an elastic body subject to any loading is equal to the first differential coefficient of the total work of resistance with respect to the force whose displacement is de the sired)

仍テ第五十二圖ニ於テ

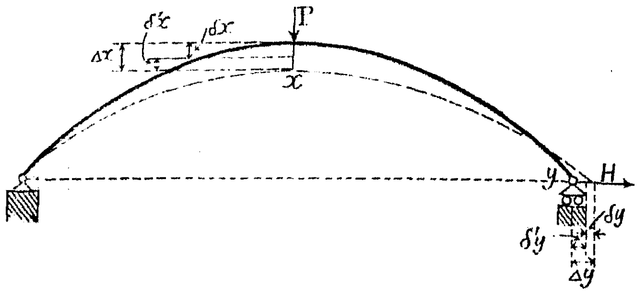
$\triangle x=$ P ノ方向ニ x 點ノ全移動

$\triangle y=$ H ノ方向ニ y 點ノ全移動

$\delta y=f(\mathrm{P})=\dfrac{\mathrm{P}}{l}=$ P ニ依リ H ノ方向ニ y 點ノ移動

但 f ハ函數ノ記號

第五十二圖



$\delta' y = f(\mathrm{H}) = \frac{\mathrm{H}}{m} = \mathrm{H}$ ニ依リテHノ方向ニy點ノ移動

$\delta x = f(\mathrm{H}) = \frac{\mathrm{H}}{n} = \mathrm{H}$ ニ依リテPノ方向ニx點ノ移動

$\delta' x = f(\mathrm{P}) = \frac{\mathrm{P}}{o} = \mathrm{P}$ ニ依リテPノ方向ニx點ノ移動

然ラバ　$\triangle x = \delta x + \delta' x = \frac{\mathrm{H}}{n} + \frac{\mathrm{P}}{o}$

$$\triangle y = \delta y + \delta' y = \frac{\mathrm{P}}{l} + \frac{\mathrm{H}}{m}$$

wヲ漸次ニ用ヒラレタル外力ノ總働程トス卽チ

$$w = \frac{\mathrm{P}}{2}\triangle x + \frac{\mathrm{H}}{2}\triangle y = \frac{\mathrm{P}}{2}\left(\frac{\mathrm{H}}{n} + \frac{\mathrm{P}}{o}\right) + \frac{\mathrm{H}}{2}\left(\frac{\mathrm{P}}{l} + \frac{\mathrm{H}}{m}\right)$$

かすちりあのー氏定理ニ依リ

$$\frac{dw}{d\mathrm{H}} = \triangle y = \frac{\mathrm{P}}{2n} + \frac{\mathrm{P}}{2l} + \frac{2\mathrm{H}}{2m}$$

而シテ若シH=oナル場合ニハ此式ハ次ノ如ク變ス。

$\frac{dw}{d\mathrm{H}} = \delta y = \frac{\mathrm{P}}{2n} + \frac{\mathrm{P}}{2l}$ =（P ニ依リテ生ジタル

y點ノ水平移動)……(1)

又　$\frac{dw}{d\mathrm{P}} = \triangle x = \frac{\mathrm{H}}{2n} + \frac{2\mathrm{P}}{2o} + \frac{\mathrm{H}}{2l}$,

而シテ若シP=oナル場合ニハ此式次ノ如ク變ス

$\frac{dw}{d\mathrm{P}} = \delta x = \frac{\mathrm{H}}{2n} + \frac{\mathrm{H}}{2l}$ =（H ニ依リテ生ジタル

x點ノ垂直移動)……(2)

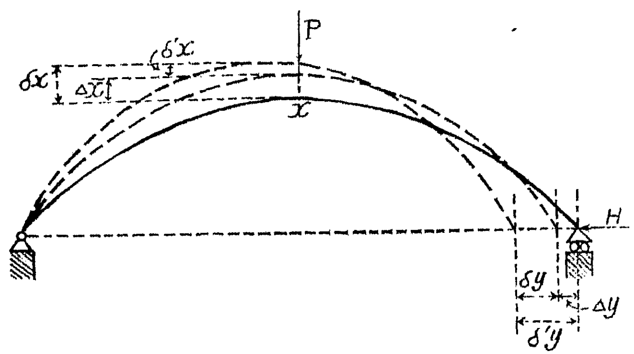
玆ニ於テ若シH及Pガ同量ナル場合ニハ(1)及(2)式ハ同一ノ結果ヲ與フ故ニ

$$\delta y = \delta x$$

是レ則チ此法則ヲ證明スルモノナリ。

若シHガ第五十三圖ニ示メス如ク反對ノ方向ニ卽推力トシテ働ク時ニ於テモ其結果ハ同一ナリ何トナレバ此場合

第五十三圖



$$\triangle x = \delta x - \delta' x = \frac{\mathrm{H}}{n} - \frac{\mathrm{P}}{o}$$

$$\triangle y = \delta' y - \delta y = \frac{\mathrm{H}}{m} - \frac{\mathrm{P}}{l}$$

故ニ前ト同一ノ推理ニ依リ $P=H$ ナル場合ハ $\delta y=\delta x$

〔第二〕應　用

此法則ヲ構拱ノ圖算法ニ應用セントスルニハ次ノ順序ヲ以テ進行スルヲ便ナリトス。

先ヅ $H=P=1$ トス。

(1) 單位水平推力 $(H=1)$ ガ拱端ニ於テ働クモノトシテ構拱ノ應力圖ヲ畫キ各構材ノ應力 T ヲ求ムベシ。

(2) $H=1$ ナル時ノ各構材ノ彈性的變形 $\left(\lambda=\dfrac{Tl}{aE}\right)$ ヲ計算スベシ。

(3) T ニ屬スル變位圖ヲ畫クベシ。

今 δx ヲ荷重 P ノ存在スル點ニ於テ $H=1$ ヨリ生ズル垂直移動トシ

δy ヲ $P=1$ ヨリ生ズル拱端ノ水平移動トシ

$\delta' y$ ヲ $H=1$ ノ時ノ拱端ノ水平移動トス

但此移動ハ $H=1$ ノ時ノ變位圖(3)ヨリ之ヲ求ムルコトヲ得。

然ラバまつくすうえる氏相互法則ニ依リ

$$H=P=1 \quad ナル時ハ \quad \delta x=\delta y$$

然ルニ $\delta' y$ ハ $H=1$ ナル時ノ拱端ノ水平移動ナルガ故ニ若シ H ガ單位1ニアラズシテ只ダ $P=1$ ナルヨリ生ズル或ル力量(即 $P=1$ ニ屬スル水平推力)トスレバ其時生ズル水平移動ハ

$$=H\delta' y=\delta y \quad ナラザル可ラズ$$

故ニ

$$H=\frac{\delta y}{\delta' y}$$

但シ此 δy ハ δx ニ等シキガ故ニ第(3)順序ノ變位圖ヨリ其値ヲ知ルコトヲ得。

(4) 斯ノ如クシテ各分格點ニ於テ順次 $P=1$ ガ働クモノトシテ H ノ値ヲ求メ之ヲ縱距トシテ H ニ對スル影響線ヲ畫クベシ。

而シテ一度ビ影響線ヲ畫キタル以上ハ實際ノ荷重ニ對スル H ノ値ハ容易ニ之レヲ計算スルヲ得。

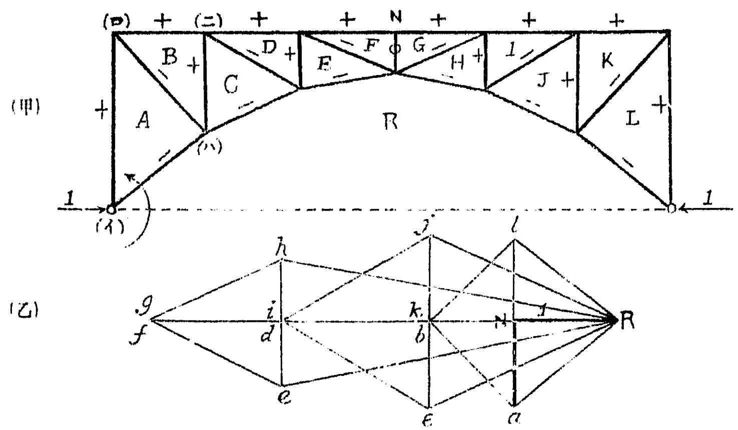
〔第三〕例　題

以上ノ順序ヲ更ニ具體的ニ説明セン爲メ次ニ一例ヲ擧ク。

第五十四圖ノ如キ構拱アリ

(1) ノ順序ハ $H=1$ トシタル時ノ應力圖(乙圖)ヲ畫キ以

第五十四圖



テ各構材ノ應力 T ヲ求ムルニアリ其法先ヅ圖式力學ニ於テ常用スル所ノ**ばう**(Bow)氏記號 A, B, C 等ヲ圖中ニ記入スベシ,此記號法ハ圖式ニ於テ構材ヲ名命スルニ最モ便利ナル一法ニシテ例ヘバ材片 AB 若クハ BA トハ A ト B トノ間ニ存在スル材片又 BN 若クハ NB トハ N ト B トノ間ニ存在スル材片ヲ謂フ今拱ノ兩端ニ於テ H=1 ガ働クモノトスレバ此ノ H ハ甲圖ニ於テ R ト N トノ間ニ存在スルヲ以ッテ RN 若クハ NR ト命名スベシ假リニ拱ノ左端ヨリ始ムルモノトシ茲ニ平衡ヲ保持スル力ハ三アリ卽チ左廻リノ順序ヲ採レバ外力 H ト下臥材(イ)—(ハ)卽 RA ノ應力及垂直材(イ)—(ロ)卽 AN ノ應力是レナリ今 H ヲ 1 トシ相當ノ縮尺ヲ以テ乙圖ニ於テ NR=H=1 トスベシ次ニ Ra ヲ RA ニ平行ニ並ニ aN ヲ AN ニ平行ニ引クベシ此ノ如クシテ Ra ハ RA ノ應力(H=1ニ對スル)及ビ aN ハ AN ノ應力ヲ示メスナリ(圖中記號(+)ハ應張材ヲ示メシ(−)ハ應壓材ヲ示メス)

次ニ甲圖(ロ)ノ點ニ移リ茲ニ平衡ヲ保持スル力ハ同ジク三アリ(イ)—(ロ)卽 AN ノ應力(已知)(ロ)—(ハ)卽 AB ノ應力(未知)及(ロ)—(ニ)卽 BN ノ應力(未知)是ナリ乙圖ニ於テ N 及 a ノ二點ガ旣ニ決定セルヲ以テ ab ヲ AB ニ平行ニ而シテ bN ヲ BN ニ平行ニ引クベシ順次此ノ如クシテ乙圖ヲ完成スル時ハ H=1 ニ對スル各構材ノ應力 T ヲ得ベシ。

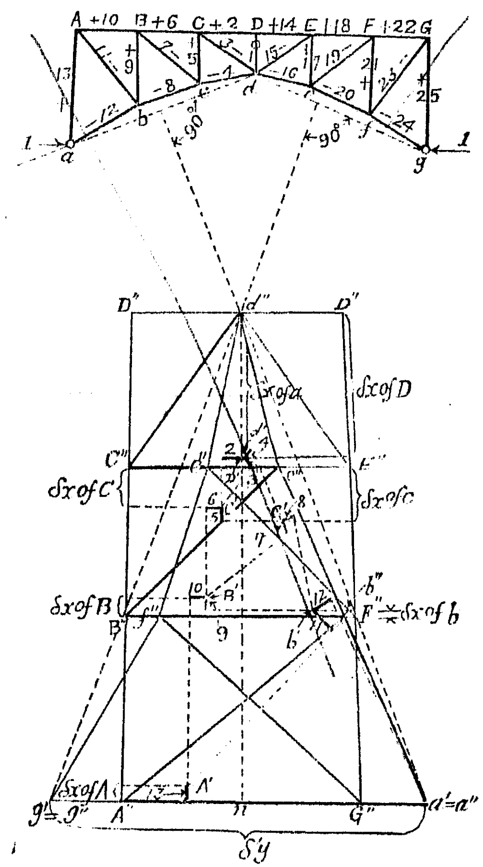
(2)ノ順序ハ構材ノ長 l 彈性係數 E 及應力 T ハ已知ニ

シテ横斷面積 a ハ往々已知ナラザルコトアルモ其概數ヲ假定シテ次ノ式ニ依リ各構材ノ彈性的變形 λ ヲ計算スルニアリ。

$$\lambda=\frac{T}{a}\ \frac{l}{E}$$

(3)ノ順序ハ此 λ ヲ以テ變位圖ヲ製シ H=1 ニ對スル $\delta' y$ 及 δx ヲ求ムルニ在リ無論 λ' ハ極メテ小數ナルヲ以テ非常ニ擴大サレタル縮尺ヲ用ユベシ其法ハ第九節第三款三鉸構拱ニ於テ說述セシ如ク先ヅ第五十五圖甲ニ於テ各構材ニ 1, 2, 3 等 25 ニ至ル迄ノ番號ヲ附スベシ但拱ノ左右兩半同形ナルヲ以テ其一半ヲ畫クヲ以テ足レリトス假ニ d ヲ原點トシ d, D ノ方向ニ變化ナキモノトシテ左方ノ拱ヨリ始ムレバ先ヅ材片

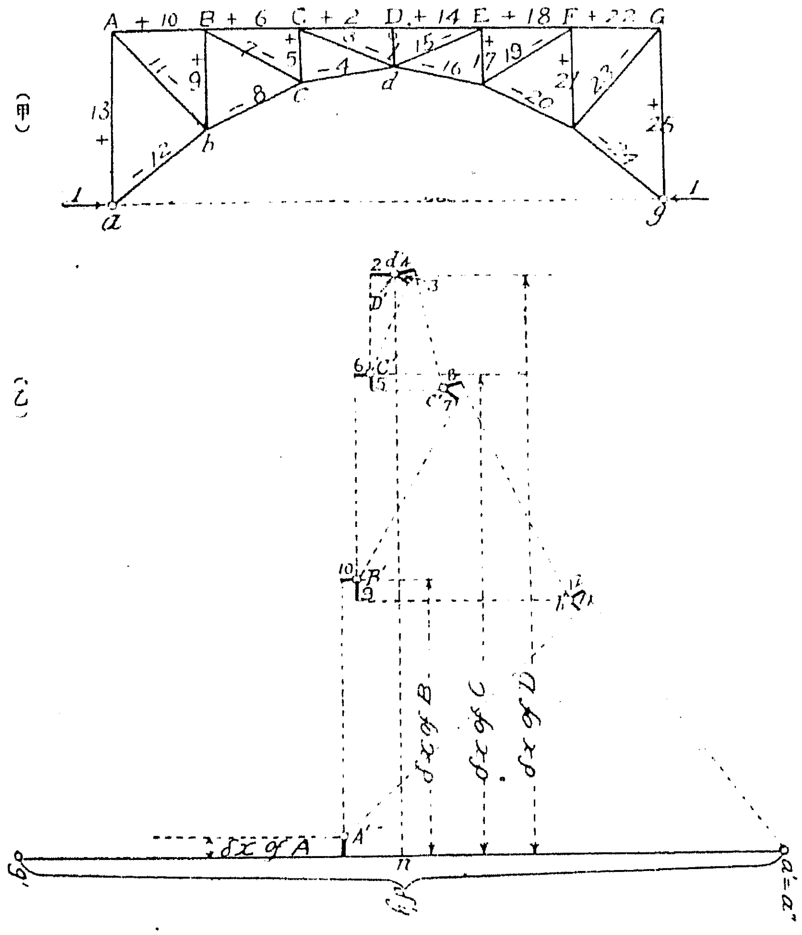
第五十五圖



1 ノ應力ハ零ナルヲ以テ $\lambda_1=0$ ニシテ變形ナシ故ニ d' ト D' トハ同一ノ點ナリ次ニ材片 2 ハ應張材(+)ナルヲ以テ D ヨリ C ノ方向(甲圖)ニ伸長ス故ニ乙圖 D' 點ヨリ 2 ニ平行ニ且伸長ノ方向ニ其變形 λ_2(乙圖中 λ_2 ヲ單ニ 2 ト記シ太線ヲ以テス其他之ニ準ズ)ヲ引クベシ次ニ材片 3 ハ應壓材(−)ナルヲ以テ C ヨリ d ノ方向(甲圖)ニ短縮ス故ニ乙圖 d' 點ヨリ 3 ニ平行ニ且短縮ノ方向ニ λ_3 ヲ引クベシ而シテ C 點ハ 2 及 3 ノ交切點ニ在ルヲ以テ λ_2 及 λ_3 ノ先端ニ立ヲタル各垂線ノ交切點ハ d ヲ原點トシテ C 點ノ移動卽變位ヲ示メス之ヲ C' 點トス次ニ c 點ハ 4 及 5 ノ交切點ニ在ルヲ以テ應壓材(−)タル 4 ハ c 點ヨリ d ノ方向ニ短縮ス故ニ d' 點ヨリ之ニ平行ニ且短縮ノ方向ニ λ_4 ヲ引クベシ又 5 ハ應張材(+)ナルヲ以テ C 點ヨリ下向ニ伸長ス故ニ C' 點ヨリ下向ニ λ_5 ヲ引クベシ而シテ λ_4 及 λ_5 ノ先端ニ立テタル垂線ノ交切點ハ d ヲ原點トシテ c 點ノ變位ヲ示メス之ヲ c' 點トス次ニ B ハ材片 6 及 4 ノ交切ニ依リ上述ノ方法ヲ以テ決定シ b ハ 8 及 9 ノ交切ニ依リ決定ス順次此ノ如クシテ進行シ終リニ a 點ノ變位卽 a' ヲ決定スベシ又中央ヨリ右方ノ拱ニ對シテモ同樣ノ方法ヲ用キテ g ノ變位 g' ヲ決定スベシ(無論 g' ハ d' ヲ通ズル垂直線中 n 點ヨリ a' 點ガ右方ニアルト同一ノ距離ニ左方ニ來ルベシ)斯クノ如クシテ d ヲ原點トシテ求メタル各點ノ變位ハ d' 點ヨリ各點ニ引キタル線(圖ニ示サズ)ヲ以テ之ヲ示メ

スベシ之ヲ水平及垂直ニ分解シ其垂直線ハ各點ノ垂直移動 δr ナリ

第五十五圖



又 d ヲ原點トシテ a ノ水平移動ハ $a''n$ ナル線ナルガ故ニ a ヲ固定點トシテ g ノ水平移動ノミヲ許ス假定ノ

下ニアリテハ其水平移動ハ之レガ二倍即 $2a''n=a''n+ng''$ $=\delta'y$ ナリ。

是ニ於テ $\dfrac{\delta x}{\delta' y}$ ノ比ヲ得ルヲ以テHノ値ヲ求ムルコトヲ得一度ビHノ値ヲ知ル以上ハ單位荷重ノ位置ニ從ヒHニ對スル影響線ヲ畫クコトヲ得之ニ依リテ實際ノ荷重ニ對スル應力ヲ算出スルハ容易ノ業ナリトス。

第二十三節　半圓形及缺圓形二鉸拱

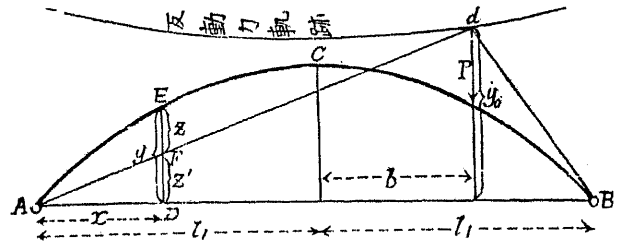
拋物線形拱ニアリテハ拱ノ長ニ關スル積分ニ於テ拱軸ニ沿ヒタル拱長ノ代リニ其水平射影ヲ用ヰタリシモ,**圓形ノ拱**ニアリテハ拱軸ニ沿ヒタル拱長ヲ積分中ニ用ユルヲ便ナリトス,換言スレバ dx ノ代リニ ds ヲ用ユベシ,故ニ拱軸ヲ等分スル場合其等分シタル一部ガ圓ノ中心ニ於テ挾ム角度ハ總テ均一ナリトス,然レドモ拱矢ガ徑間ノ十分一ニ足ラザル偏平ナル拱ニアリテハ拋物線形拱ニ關スル總テノ公式ハ直ニ之ヲ圓形ノ拱ニ應用スルモ大ナル誤差ヲ生セズ。

第一欵　半圓拱

y_0 **ノ値**　拋物線形拱肋ノ第(13)式即 $\int_0^{2l_1} y^2dx-\int_0^{2l_1} z'ydx=0$ ナル公式ハ之ヲ第五十六圖ニ應用シテ圖式ヲ以テ之ヲ言ヒ表ハセバ次ノ如クナルベシ。

$$\Sigma\overline{\mathrm{ED}}^2-\Sigma\mathrm{DFED}=0$$

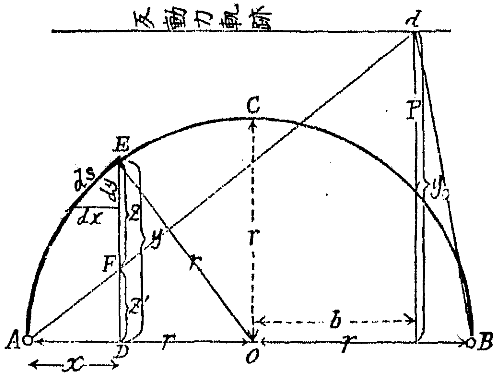
第五十六圖



第五十七圖ハ**半圓形二鉸拱**ヲ示メス今第(13)式ヲ之ニ應用スルニハ dx ノ代リニ ds ヲ用ユベシ然ル時ハ次ノ式ヲ得ベシ。

$$\int_0^{\pi} y^2ds=\int_0^{\pi} z'yds \quad\text{.................................}\quad (1)$$

第五十七圖



第五十七圖ニ於テ拱軸ノ任意ノ一點Eヨリ圓ノ中心ニ至ル半徑EOヲ引キ而シテ ds, dx 及 dy ナル三邊ヲ有スル極小ナル直角三角形ヲ畫ク時ハ次ノ比ヲ得ベシ。

$$r:y=ds:dx \quad 即 \quad yds=rdx$$

之ヲ(1)式ニ代入スル時ハ $r\int_0^{2r} ydx=r\int_0^{2r} z'dx$

第一項ノ積分 $\int_0^{2r} y\,dx$ ハ半圓形ノ面積ニシテ其値ハ $\frac{\pi r^2}{2}$ ナリ。

第二項ノ積分 $\int_0^{2r} z'dx$ ハ AdB ナル三角形ノ面積ニシテ其値ハ ry_0 ナリ故ニ $\frac{\pi r^3}{2}=r^2y_0$ ヲ得卽 $y_0=\frac{\pi r}{2}=1.5708\,r$

故ニ半圓形二鉸拱ノ或ル任意ノ一點ニ在ル荷重ニ對スル平衡多邊形ノ縱距 y_0 ハ定數ニシテ其値ハ $\pi r/2$ 卽一象限ノ長ニ等シ而シテ拱端ヨリ此長ニ等シキ高ニ一水平線ヲ畫ク時ハ拱ノ反動力軌跡ヲ得ベシ。

第二欵　缺　圓　拱

〔第一〕y_0 ノ値　缺圓形ニアリテハ y_0 ノ値ニ關スル公式稍複雜ヲ免カレズ今第五十八圖ニ於テ

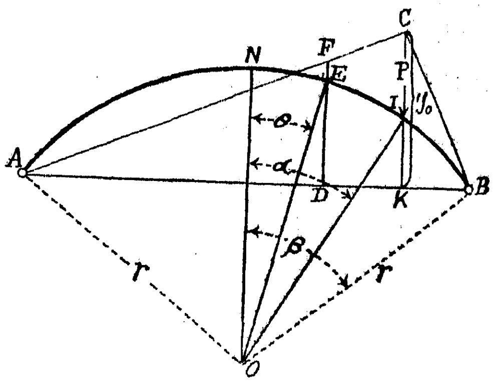
r＝圓ノ半徑

β＝角度 NOB 卽圓ノ中心ニ於テ半拱ノ挾ム角度

α＝角度 NOI 卽荷重ノ在ル位置ヨリ拱頂ニ至ル角度

θ＝角度 NOE 卽縱距 DE 及 EF ガ測定セラルル點ヨリ拱頂ニ至ル角度

第五十八圖



ACB＝平衡多邊形

CK＝y_0 トス

然ラバ
$$DE=y=r(\cos\theta-\cos\beta)$$
$$DF:CK=AD:AK \quad 卽$$
$$DF:y_0=r(\sin\beta+\sin\theta):r(\sin\beta+\sin\alpha)$$

故ニ K 點ノ左方ニアリテハ
$$DF=z'=\frac{\cos\beta+\sin\theta}{\sin\beta+\sin\alpha}y_0$$

又 K 點ノ右方ニアリテハ
$$DF=z'=\frac{\sin\beta-\sin\theta}{\sin\beta-\sin\alpha}y_0$$

之ヲ第一欵ノ公式 $\Sigma\overline{ED}^2=\Sigma DF\cdot ED$ ニ代入スル時ハ
$$\int_{-\beta}^{+\beta}y^2ds=\int_{-\beta}^{+\beta}z'yds=\int_{-\beta}^{+\alpha}z'yds+\int_{-\alpha}^{+\beta}z'yds \quad ヲ得$$

今 $ds=rd\theta$ ナルコトヲ記憶シ中心ヨリ左方ニ在ル角度ヲ負性(一)ト考フル時ハ

第一項ノ積分ニ對シテハ
$$\int_{-\beta}^{+\beta}y^2ds=r^3\int_{-\beta}^{+\beta}(\cos\theta-\cos\beta)^2d\theta=r^3\int_{-\beta}^{+\beta}(\cos^2\theta-2\cos\beta\cos\theta+\cos^2\beta)d\theta$$
$$=r^3(\beta+2\beta\cos^2\beta-3\sin\beta\cos\beta)\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

又第二項ノ積分ノ内 $-\beta$ ヨリ $+\alpha$ ニ至ル値ハ

$$\int_{-\beta}^{+\alpha} z'y\,ds = \frac{r^2 y_0}{\sin\beta+\sin\alpha}\int_{-\beta}^{+\alpha}(\sin\beta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta-\sin\beta\cos\beta-\cos\beta\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{r^2 y_0}{\sin\beta+\sin\alpha}(\sin\alpha\sin\beta-\tfrac{1}{2}\cos^2\alpha-\alpha\sin\beta\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta$$

$$+\sin^2\beta-\tfrac{1}{2}\cos^2\beta-\beta\sin\beta\cos\beta)\ldots\ldots(b)$$

又 $+\alpha$ ヨリ $+\beta$ ニ至ル値ハ

$$\int_{+\alpha}^{+\beta} z'y\,ds = \frac{r^2 y_0}{\sin\beta-\sin\alpha}\int_{+\alpha}^{+\beta}(\sin\beta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta-\sin\beta\cos\beta+\cos\beta\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{r^2 y_0}{\sin\beta-\sin\alpha}(\sin^2\beta-\tfrac{1}{2}\cos^2\beta-\beta\sin\beta\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta-\tfrac{1}{2}\cos^2\alpha$$

$$+\alpha\sin\beta\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta)\ldots\ldots(c)$$

(b) 及 (c) ナル二式ヲ加ヘテ之ヲ (a) 式ニ等シクシ而シテ更ニ之ヲ約スレバ次ノ式ヲ得

$$y_0=r\frac{(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)\left(\beta\dfrac{1+2\cos^2\beta}{\sin\beta}-3\cos\beta\right)}{(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)+2\cos\beta(\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-\beta\sin\beta\cos\beta)}\ldots(30)$$

α 及 β ノ種々ナル値ニ對シ y_0 ノ値ヲ求ムルコトハ一見煩雜ノ手數ヲ要スル如ク感ゼラルヽモ實際ハ與ヘラレタル一定ノ拱ニ對シテハ β ハ定數ナルガ故ニ容易ノ業ナリトス例ヘバ

半圓拱ニアリテハ　$\beta=\frac{\pi}{2}$ ナルガ故ニ　$y_0=\frac{\pi r}{2}\ldots\ldots(30)a$

又　$\beta=45^\circ,\ \alpha=0^\circ$　ナル時ハ　$y^0=.39r$

　$\beta=45^\circ,\ \alpha=30^\circ$　ナル時ハ　$y_0=.42r$

斯ノ如ク缺圓拱ニ對スル反動力軌跡ハ直線ナラズシテ曲線ナリ

〔第二〕H ノ値　y_0 ノ値ヲ知ル以上ハ直ニ平衡多邊形及示力圖ヲ畫キ之ニ依リテ H ノ値ヲ求ムルコトヲ得ベシ又第 (21) 式ニ依リテ直ニ H ノ値ヲ求ムレバ次ノ如シ

$$H=\frac{P}{y_0}\cdot\frac{l_1^2-l^2}{2l_1}=\frac{r(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)P}{y_0 2\sin\beta}$$