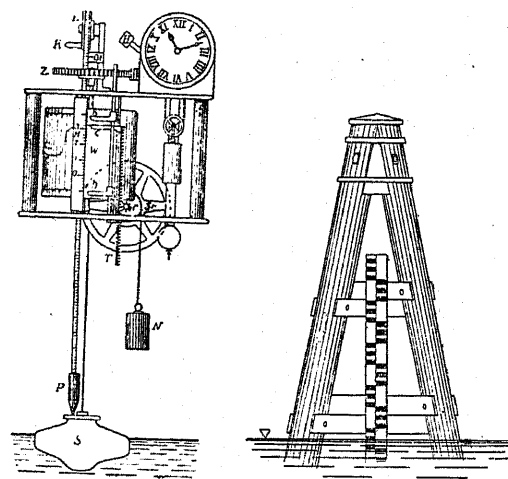


第二章 河水の流動

第1節 河水位

1.1 水位と其の變化 河の某地點に於ける水位(Water level)とは、其の水面の位置をいひ、或基準面からの高さを以て之を表はす。水位を實測するには量水標(Staff-gauge)と稱する、目盛板を河中の適當な場所に建設して、隨時其の目盛によつて水面の位置を読み取るか、或は河水と連通せる井戸内に浮標を浮べ、其の昇降を絶えず紙上に書かせる様にした自記水位計(Self-recording gauge)を用ふる(第20圖)。かくして得た水位と時間との關係曲線を水位曲線(Amplitude curve)といふ。

水位は日によつて變動するが其の直接の最大原因は勿論降雨である。然し



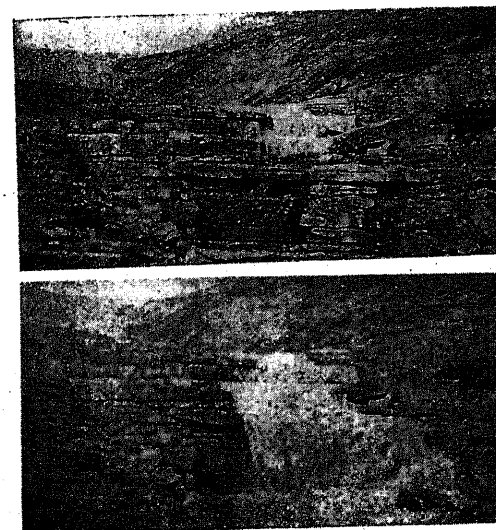
第20圖 量水標と自記水位計

同様の雨でも、川によつて著しく水位の變化に大小がある。河水の涵養が主として雨水の地面流出による川では水位の變動は最も甚だしく、之に反して地下水や湖水に涵養される川では變化が頗る緩慢且つ僅少である。又同一の川では通常上流が變化著しく、數多の支流を併合した下流では變化が

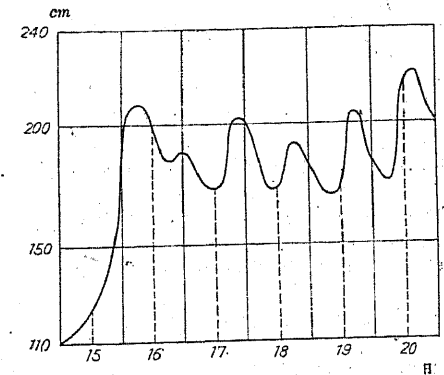
少い。

(1) 日變化 普通の川では、強雨でもなければ1日中の水位は大して變らな

いが、山の雪や氷河で涵養される寒地の溪流では、往々晝夜の水位に著しい差を示すものがある(第21圖)。即ち、日中は雪や氷が盛に融けて水位が上ぼり、夜になると融解水の供給が絶えて水位が降る。



第21圖 水位日變化の著しい小川
(カナダのアルバータ山麓)
(大阪毎日新聞社フィルムより撮影)

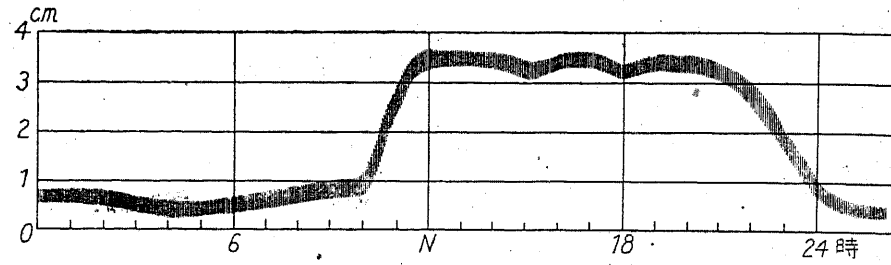


第22圖
オーデル河の雪解による水位日變化

融雪による日變化を量的に研究した例は既に1894年ブリュックナー(E. BRÜCKNER)氏がローヌ河で之を示し、グラヴェリュウス(GRAVELIUS)も

1909年3月15日より20日に互りオーデル河で第22圖の様な變化を記録した。我國でも勝谷稔氏は千代川上流地の雪汁量日變化を自記せしめ附近溪水と比較するに、溪水は位相が約2時間程遅れて略と雪汁量變化に比例し、又千代川下流水位も約10時間程遅れて其の變化に隨伴し従つて亦上流地の氣温に比例することを示した。吉田氏も旭川につき春季無降雨日の水量が示す眞に規則正しき日變化を雪解の影響に歸した。又武田氏も根尾川につき昭和9年春季の無雨の日20日間の平均日變化を調べて雪汁の影響を如實に示した。又川によつては、水車や開門可動堰などを毎日定時に開閉したり、多數の舟が朝夕きまつて集散するためにも、相當目に立つ水位の日變化を見せるのである。

然し、以上の様な人為作用や雪解けの影響のない普通の川で、顯著な日變化のある實例は從來餘り報告に接しなかつたのであるが、最近著者等が熊本縣



第23圖 阿蘇黒川の水位變化 (昭和15年6月23日京大水量所自記記録)

阿蘇の黒川で自記水位計を設けて見ると第23圖の様に明瞭な日變化を示し、特に夏期著しく日中には水位高く夜中に低くなる。冬期は其の反對に晝間に低く夜中に高くなるが、其の程度は夏季に比して僅少である。原因は氣温及び日射の變化に伴ひ、河水を涵養する地下水が温度従つて其の粘性を變じ、流動性を増減するによるか、或は山谷風の作用によるものと思はれる。

(2) 年變化 雨量と蒸發及び灌溉などの引水が季節によつて違ふため、水位も之に伴つて昇降する。日本では梅雨期に最高で冬若しくは盛夏の候に最低となるものが多い。又、雪國では何處でも其の雪の融ける春期に最高を示すを例とする。融雪と水位との關係は必然的に氣温の影響を受くること大である。季節的變化につきて榎本卓藏氏は我國に於ける積雪地方の河川を調べ之を3種に分けた。第1類は冬期の氣温が甚だ低く降雪の融るものが殆んどない程度なるも、夏季は氣温比較的高く殘雪のある山岳に乏しい地方の川で、かゝる川は冬季の渴水甚だしく春季には増水するが、夏季の前半及び秋季の前半は復渴水を來す。第2類は冬季の氣温はさまで低下せず、爲に冬季にも積雪の一部が融ける地方の川で、冬期の渴水は前者程にはなく、又春季の融雪増水も早春に終り、夏季前半及び秋季前半は矢張り渴水する。第3類は水源地の氣温最も低く四時雪を見る山岳の多い地方の川で、冬季の渴水著しく夏季は渴水なく却つて水量豊富で、秋季前半に至り始めて渴水傾向を示すが、前二者程に甚だしくはないことを實例につき説明して居る。

(3) 永年變化 ブリュックナー氏が發見した様に季候には20年乃至50年、平均約36年の週期があるので、水位變化にも亦同様の週期が認められることは疾くから諸家の注意した所であるが、特に揚子江には漢口で數百年に互り

水位觀測が行はれて居るので、其の資料に基づき速水頌一郎博士が行つた揚子江水位の研究は頗る興味あるものである。1887年から1936年まで漢口に於ける税關の日々記録を借用し、之を分析して、1年、28箇月、6年、11年、及びブリュックナー週期の五つの週期があることを明瞭にした。是等周知のもの外、更にワグナーの16年週期及び1910年頃を極小とする永年變化の存在をも認めた。而して11年及び28箇月周期はブリュックナー變化の相によつて多少變化するものゝ様である。

尙ほ永年の間には水源の森林狀態や流域の農耕事情に變化があつたり、或は河川改修などのため大いに水位の變動を來して居る川もある。

1.2 各種の水位 我が國の水力工學界には、次の様な種々の水位を定義して居る。

1. 平均水位と最高最低水位。 之は別に説明を要しまい。1日とか1箇月とか或は1年の最高或は最低乃至平均水位などが最もよく使はれる。
2. 渴水位。 1年の内で355日間はそれより低くなることなく、それより低い日は10日を越えない様な水位である。
3. 低水位一名9箇月水位。 1年を通じ275日は之より下がらない様な水位をいふ。
4. 平水位一名6ヶ月水位。 1年中で之より高い日數と低い日數とが等しい様な水位である。年平均水位とは必ずしも一致せず、大抵はそれより僅か下にある。
5. 最多水位。 1年中で其の水位になる日數が最も多いものをいひ、平水位よりも更に幾らか下になるのが普通である。
6. 平均渴水位、平均低水位、平均平水位。 年々の渴水位、低水位、平水位を夫々數年に互り平均したものをいふ。
7. 高水位。 毎年1-2回起る程度の出水時の水位である。
8. 洪水位。 數年に1回といふ程度の洪水時の水位である。ナイル河では其の高さが、渴水位上8m内外、ミシシッピー河では18mにも及ぶ處がある。日本でも10m程度の出水は珍しくない。

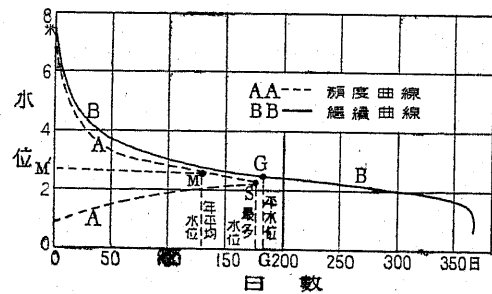
水位は年中成るべく變化の少い方が人生に好都合であるが、川によると甚だしい變動を示すものもある。それで水位變動の程度を表はすため、月平均水位の最高と最低との差を1年中の**周期的變幅**と名づけ、又1年中の最高水位 h_{max} と最低水位 h_{min} との差を**非周期的變幅**と稱し、その大小によつて河川の良否を判定することがある。又1年中で水位差 10 cm 毎の變動に應ずる平均日數即ち $365 \text{日} \times 10 / (h_{max} - h_{min}) \text{cm}$ を**持續率** (Frequency) といつて、それが大なるものをよしとして居る。また既往の最高水位 H_{max} と最低水位 H_{min} の差 $H_{max} - H_{min} = S$, や平均年最高低水位の差 $s = h_{max} - h_{min}$ 或は s/S 等を以て河川水位の變動の如何を表はすこともある。第33表は我が國數川に就いての例である。

第33表 我が國諸川の水位變動程度

| 河川 | 地點 | 平均水位 | H_{max} | H_{min} | h_{max} | h_{min} | S | s | s/S |
|-----|-----|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|------|------|-------|
| 利根川 | 栗橋 | 1.26 | 5.74 | 0.14 | 4.56 | 0.39 | 5.60 | 4.17 | 0.74 |
| 淀川 | 枚方 | 0.87 | 5.58 | 0.08 | 3.81 | 0.29 | 5.50 | 3.52 | 0.64 |
| 富士川 | 清水端 | 0.12 | 4.70 | -0.66 | 2.81 | -0.30 | 5.36 | 3.11 | 0.58 |
| 桂川 | 羽東師 | -0.05 | 5.15 | -0.84 | 3.74 | -0.57 | 5.99 | 4.31 | 0.72 |
| 宇治川 | 宇治 | 0.37 | 2.42 | -0.67 | 1.58 | -0.24 | 3.09 | 1.82 | 0.59 |
| 吉野川 | 川島 | -0.33 | 6.97 | -1.68 | 4.62 | -0.10 | 8.65 | 5.72 | 0.66 |
| 揖斐川 | 今尾 | 1.65 | 7.76 | 0.39 | 5.20 | 0.90 | 7.37 | 4.30 | 0.59 |

1.3 水位と日數との對照

1年間の觀測水位中、最高水位から最低水位まで適當の差(例へば 10 cm) 毎に、之に應ずる日數を數へ、其の水位と日數とを縦横軸にとつて圖示すると、第24圖 AA の如く公算曲線に類似の結果を得る。之を水位の**頻度曲線** (Frequency curve) といふ。



第24圖 水位と日數(ニレベ河)

又或水位と、最高水位から其の水位までにある日數累計とを以てグラフにすると第24圖 BB の様な曲線になる。之を水位の**持續曲線** (Duration curve) と名づける。

又或水位と、最高水位から其の水位までにある日數累計とを以てグラフにすると第24圖 BB の様な曲線になる。之を水位の**持續曲線** (Duration curve) と名づける。

水位の著しく高い日も著しく低い日も僅かなもので、大多數の日は水位に大した差のないことが分る。

頻度曲線上では、頂點Sの水位が最多水位を與へ、同曲線と縦軸とで包む面積を二等分する横線の高さ即ちM點の水位が年平均水位に當る。

又持續曲線上で横軸の中點(半ヶ年)に對する水位GGが、所謂平水位なることは明かである。是等三水位には概ね些少の差がある。第24圖の例では平均水位=2.60 m, 平水位=2.50 m, 最多水位=2.35 m になつて居る。

河水を發電其の他の實用に供する場合、水位が一定値より低くなると利用出來ないことがある。一年の内、水位が斯様な水位より高い日數を**可用日數** (Available days) といひ、それより低くなる日數を**不可用日數** といふ。

又1年中の最高水位が h_{max} , 最低水位が h_{min} , 平均水位が h_0 なるとき、ドイツでは $h_1 = \frac{1}{2}(h_{min} + h_0)$ 以下の水位を**低水域** (Niederwasserbereich) 其の日數を低水日數といひ、 h_1 より $h_2 = \frac{1}{2}(h_0 + h_{max})$ までの水位を**中水域** (Mittelwasserbereich) 其の日數を中水日數と呼び、 h_2 以上を**高水域** (Hochwasserbereich) 其の日數を高水日數といひ、各域毎に水位差 10 cm に應ずる日數を其の域の**持續率** といふことがある。是等は勿論同じ川でも年によつて多少の相違がある。例へばグラヴェリュースによるとライン河のマンハイムでは次の如くである。

第34表 ライン河の各水域持續率

| 1910年 | | | | 1901—10年平均 | | | |
|-------|------------------|-----|------|------------|------------------|-----|-------|
| 域 | 日數 | 持續率 | 域 | 日數 | 持續率 | | |
| 低水 | 29 ^{cm} | 7日 | 2.4日 | 低水 | 87 ^{cm} | 92日 | 10.6日 |
| 中水 | 232 | 250 | 10.8 | 中水 | 232 | 241 | 10.4 |
| 高水 | 251 | 108 | 4.3 | 高水 | 145 | 32 | 2.2 |

1.4 呼應水位と水位の豫報

水位の動搖することは前述の如くであるが、然し其の中には又或期間引つゞき同一水位を持續することもないではない。かゝる場合には水位が**固定状態**にありといひ、増水時なら其の昇りつめたとき(洪水波の頂點の如き)、或は平日地下水の涵養が河の流出量と釣合つて居るとき等である。

固定状態にある川の上下各地點の水位を互に**呼應水位**(Corresponding W.L.)と稱する。平素或川の上流と下流とで同時觀測を行ひ、呼應水位の關係を實驗式なり曲線なりにして決定して置けば、以後は單に上流の觀測水位だけから下流の水位を豫知し得るわけである。例へばライン河の二地點アンデルナハ(Andernach)とキョルン(Köln)との呼應水位をA及びKとすると

$$\begin{aligned}
 K(m) &= (1.08A - 0.57) \dots\dots\dots 1.47 < A < 2.82 \quad \text{のとき} \\
 &= (1.02A - 0.41) \dots\dots\dots 2.82 < A < 5.43 \quad \text{"} \\
 &= (1.08A - 0.75) \dots\dots\dots 5.43 < A < 7.16 \quad \text{"}
 \end{aligned}$$

なる關係が見出されて居る。此の方法は、後に述べるやうに最も合理的な洪水豫報の一法として利用することが出来る。

第2節 水面の形状

2.1 縦斷形状—落差と水面勾配 上記の呼應水位を連結した形が正常の水面縦斷形状であるが、河水は河道の傾斜によつて流れるのであるから、其の水面の高低も大體に於ては河道のそれに伴ふけれども、然し完全同一ではない。河底には種々複雑な凹凸起伏があつても、水面は一々それ等の小凹凸に追隨するのではなく、比較的大まかに滑かな面をなす。特に深い川ほどさうである。

或川の上下二地點に於ける水面の高さの差を**落差**(Fall of level)といひ、落差を其の間の川の長さで割つた比を**水面勾配**(Slope)といふ。普通1000分の1單位をとり、「長さ1千につき落差何米の割合」といふやうに言ひ表はす。

水面勾配は川によつて違ひ、一般に大河ほど緩かである。又同一の川では上流山間部が勾配急で、下流程緩かなことはいふまでもない。實例を次表に掲げて其の程度を示す。

第35表 水面勾配の數例

| | | | | | |
|------|------|-------|-------|----------|-------|
| アマゾン | 下流平均 | 0.002 | 信濃川下流 | 76 km 平均 | 0.210 |
| ヴォルガ | 全平均 | 0.032 | 富士川 | 70 " | 3.00 |
| コロラド | 全平均 | 1.42 | 利根川 | 86 " | 0.028 |

2.2 水面勾配と水位 一定地點では水位が同じなら水面勾配も亦一定である。

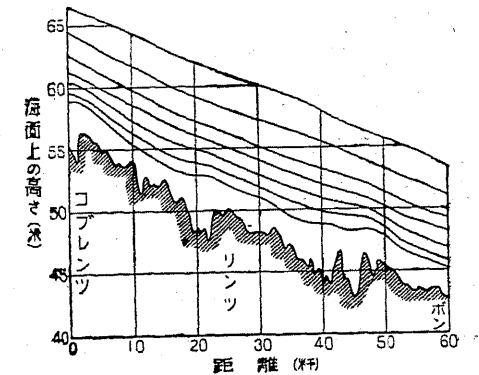
然し水位が變れば水面勾配も明かに變る。水位が非常に下つて水が極く淺くなれば、水面にも河底の凹凸が如實に現れ、區域區域で勾配の相異が著しく、之に反して水量が増して河が頗る深くなると、河底の凹凸は陰蔽されて水面は長い距離の間均一勾配にならうとする傾向がある(第25圖)。

2.3 水面勾配の階段性 水量の多い長大な河では、水面勾配が前記の如く或區域間殆んど均一になるが次の區域は又それとはつきり違つた別の均一勾配になるといふ場合に、水面勾配が判然と階段的に違ふ數區域に分れる傾きを示す。例へばローヌ河でリヨン以下スージャン附近までは略々均一勾配1/3846であり、スージャン以下は又約1/4300の均一勾配である。

之は河底を流下する砂礫の粒の大きさに關係することであるが、其の説明は後章に譲る。(第四章第3節第3項)

2.4 水面の横斷形状 昔から水面の横斷形状に就いては異説紛々で或人はベルヌーイ法則から考へ、兩岸よりも流れの速い中央部が表面膨出して高いに相違ないといふし、又或人は云ふ、いや水は川筋に沿うて縦に流れるばかりでなく、幾分横にも垂直にも流れるものである。即ち表面では兩岸から中央に進み、其處で沈む。河底では反對に中央から兩岸へ流れて行き、其處で上昇する。此のため兩岸では水面が高く、中央が低からうと。

然し實際の觀察によると、ナイヤガラの瀧下の急流は著しく中央が高いので有名であるが、普通の河では、河道の直線な部分なら、平素は殆んど水平に近く、水平との差は問題にする程のものでない。但しどの川でも洪水の増水期には肉眼でも認められるほど中央が高く、減水期には却つて中央が低くなる



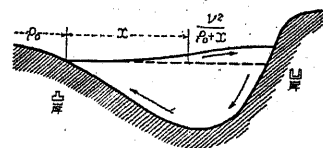
第25圖 水面勾配と水位 (ライン河)



第 26 圖 直線河道の水面横断形状

(第26圖). 之はルブレヒト氏によると洪水波が下流へ傳はつて行く速度は水深の大きなほど速い理であるから、

眞直な川では洪水波は浅い兩岸よりも深い中央部を幾らか早く通る。其の結果増水期には中央部が早く高まり、減水期には早く低まるのだといふ。従つて、水泡や塵埃などの浮游物は、増水期には岸に近づき、減水期には中央に



第 27 圖 彎曲部の水面

集まつて流れる。も一つ例外なく認められる事實は、川筋が曲がつて居る彎曲部の水面は、其の凹岸（川の中から見ると凹なる岸）の方が凸岸よりも高いこと

である。之は勿論水流の彎曲に對する遠心力の作用に基づく。第27圖に於て凸岸に於ける河道の曲率半徑を ρ_0 とし、之より凹岸に向ひ x の距離に於ける水面の上昇を y とし流速を v とすれば、水面は重力と遠心力との合力に直角なる傾斜面となる筈であるから、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v^2/(\rho_0+x)}{g} \quad \text{或は} \quad dy = \int_0^x \frac{v^2}{g(\rho_0+x)} dx \quad (2.1)$$

若し流速 v が河の横断線上到る處一定ならば、(2.1)式は直ちに積分して

$$y = \frac{v^2}{g} \log(1+x/\rho_0) \quad (2.2)$$

となる。之が普通使用される式であるが、此の式が示す曲線は上方に凸なる單純曲線であつて、實際は凸岸に近い部分が上向に凹状をなし横断曲線はS字状なることと完全には一致しない。そこで久永勇吉氏は、上の缺點は流速 v を一定と見做したるため、 v を x に對し拋物線的關係ありとし

$$v = v_0 + bx + ax^2 \quad (2.3)$$

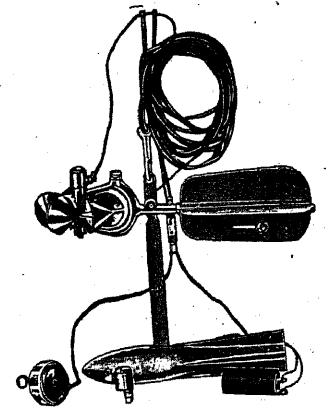
と置いて(2.1)式を積分し

$$y = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + \frac{v_0^2}{g} \log(1+x/\rho_0) \quad (2.4)$$

なる結果を得た。之を阿武隈川其他二つの例について適用し、實際上妥當なることを示して居る。

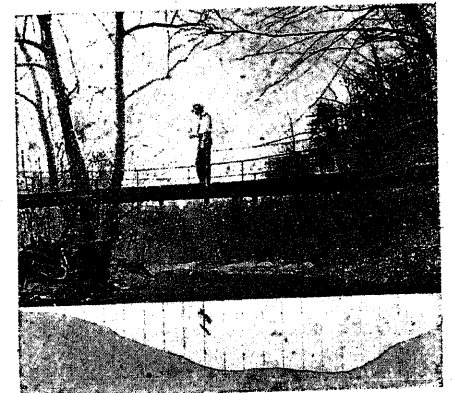
第 3 節 流 速

3.1 流速の分布 川の流速を實測するには、浮子を水中に浮べてそれが一定距離を流下する時間からきめたり、或は風力計類似の流速計 (Current-meter) と稱する器械やピトー管などを用ひて之を行ふ。第28圖は流速計の一例で、第29圖は測定の有様である。



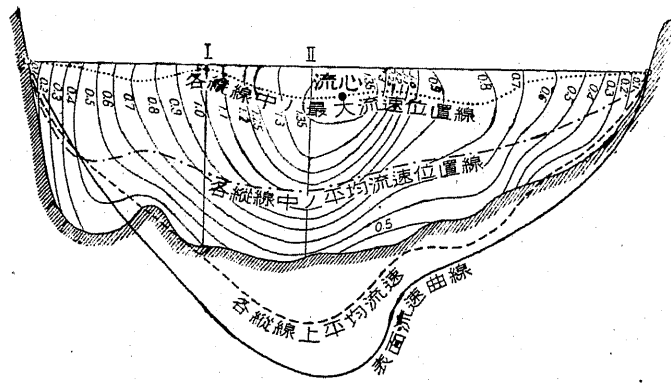
第 28 圖 プライス型流速計

また極めて小さい川では、浮子の代りに色素や食鹽水などを流し、其の最大濃度の中心の移動を電流計や色度計で觀測することもある。又野瀬正人氏は、錘を附けた一條の綱を河中に下ろし流によつて傾いた綱の水面での傾角と張力とを測つて流速を出す方法を述べ、流速の垂直分布を拋物線と假定した場合の理論式を作り、之を實驗に徴した。宮城音五郎氏は、普通の流速計が感ぜぬ様な遅い流れは、底より空氣泡を放出しそれが水面に上昇する間の水平變位により測定し得べきことを模型實驗で確めた。



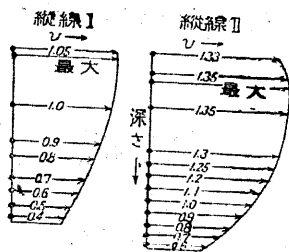
第 29 圖 橋上より流速測定

流速は同じ川でも場所によつて違ひ上流に速く下流に遅く、表層は速く底層は遅い。又兩岸は遅く、最大流速は、河道が眞直な所では其の中央線上に、彎曲した河道では凹岸に近い所にある。之を河の流心といふ。第30圖は或川の一横断面上で實測した流速の分布圖で、等速度の點を連ねた所謂等速度線が引いてある。第31圖は其の中の二垂直線上に於ける流速と深さとの關係を示した曲線で、最大流速は表面よりも



第30圖 横断面流速分布例 (単位は毎秒呎)

若干下にある。多くは水深の $\frac{1}{10}$ 乃至 $\frac{4}{10}$ の處である。第31圖の様な流速の垂直分布曲線は拋物線と見る人(ハンプレイス)もあり、又對數曲線と見る人(ヤスムンドヤベル)



第31圖 流速垂直分布例

もある。それ等の理論は後に譲る。兎も角かやうな流速分布圖を知れば、それから各垂直線上の平均流速でも、横断面全體の平均流速でも容易に算定することができる。而して水面に於ける速度を水面速度、水底に於けるを水底速度と稱へる。前者は後者の約2倍に等しい。

[注意] 垂直分布曲線を拋物線とすると、其の

平均流速は數理上、表面から水深の10分の2・1及び7・9の二箇處の流速の和の半分に相當し、又10分の6の處の流速に略ぼ近い筈である。故に短時間に横断面上の平均流速を知りたい場合には、往々各垂直線上水面から10分の2と8の二箇所だけ測つたり、一層簡單に10分の6の處だけ測つたりする。又、若し都合によつて表面流速のみを測つた場合には、各垂直線の平均速度は其の表面速の0.85~0.91倍に當り、横断全體の總平均速度 (v_m) は最大表面流速 (v_0) の0.8倍に當ると見て大差ない。勿論精しくいへば川によつて多少の相違はある。例へば第36表の通りである。又ワグナーが諸川での觀測によると

$$v_m = 0.705 v_0 + 0.001 v_0^2$$

第36表 平均速度と表面速度との比

| 出 所 | Prony氏 小木種實驗 | セイマ河 實測 | ネバ河 實測 | Boileau氏 溝渠實驗 | ガロンヌ河 實測 | Cunningham 氏實驗 |
|-------------------|-----------------|------------|-----------|------------------|-------------|-------------------|
| $\frac{v_m}{v_0}$ | 0.8164 | 0.62 | 0.78 | 0.82 | 0.80 | 0.823 |

平均流速は、よく流れる川で通例毎秒0.5~1.5 m位、速いので毎秒3 m程度である。但し急な瀬などは之よりもずつと速く、毎秒10 mにも達する。

3.2 水流の種類 通俗には急流と緩流との區別ははつきりしないが、學術的には次の様に明瞭に區別する。

水深 h なる處の波の速度は最大限度 \sqrt{gh} なる筈である。茲に g は重力加速度を表はす。そこで今川の平均流速が \sqrt{gh} よりも大ならば波は決して溯上することなく、下流の水に種々擾亂を與へても其の影響は上流に及ぶことが出来ない。かゝる川を急流(Bach)といふ。之に反し平均流速が \sqrt{gh} より小なる川を緩流(Fluss)と稱し、下流に擾亂を與へるとそれが上流へ影響する。かくの如く定義すれば、急流と緩流との別は河川工學上頗る大切な意味を持つことになる。急流ならば下流に堰を設けなどしても上流の水流には影響せぬし、海の潮浪も溯上することは出来ない。

又水流の各點に於ける流速が大きさも方向も時間によつて變らず常に一定なるときには、之を定流(Steady flow)といひ、之に反して流速が時間と共に變るものを不定流(Unsteady flow)といふ。河川は出水時には著しい不定流である。平時と雖も嚴密に云へば不定流なるも、其の變化は極めて緩慢であるから、實用上には定流として取扱ふ場合が多い。

定流の内でも、水路の各断面の平均流速が同一である場合には之を等流(Uniform flow)といひ、断面により異なるものは不等流(Non-uniform flow)と呼ぶ。

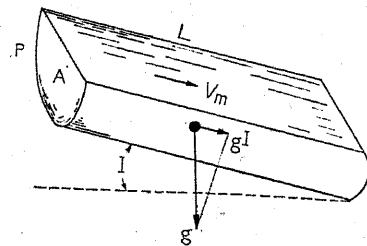
3.3 流速と水面勾配及び水深 水が流れるのは勾配があればこそで、川の流速が水面勾配の大なる程速いのは云ふまでもない。又同一勾配なら水深の大なる程流速も大である。これは河底及び河岸の摩擦抵抗が深い川ほど水量の割合には少いわけであるからである。次に是等の關係を今少しく詳述しよう。

毛細管内の極く緩慢な流れはポアジュイユの法則に従ひ、平均流速は勾配に比例するのであるが、實際の川では所謂亂流(Turbulent flow)をなして無数の小さい渦動を含み、ために流速は絶えず分秒の短週期で小變動をなし、恰も脈

搏の如く所謂脈動的 (Pulsatory) である。上流部ほど特に著しい。前に言つた定流なるものも實は時間的平均に於て流速が一定だといふに外ならぬ。斯様な流れで我々の實測し得るものは畢竟是等の變動をおし均したものに過ぎない。そして3分間にも互つて測れば、實際上それ等の脈動的變化は平均されてしまふ。河川に於ける水流の動因は重力であるから、其の流速は第一に水面勾配に支配されるのは勿論であるが、其の外河の深さや幅並びに河床の状態によつて違ふ。此等の關係を示したものにシェーギー公式

$$v_m = C\sqrt{RI} \quad (3.1)$$

がある。こゝに、 v_m は水路断面の平均流速、 I は水面勾配である。又 R は徑深



第 32 圖

(Hydraulic radius) と稱し、水路の横断面積 A を其の潤周 P (断面上、水路壁の水に接せる部分の長さ) にて除したる商をいひ、河では其の平均深度と見ても差支ない。此の式は定常流に限るもので之を導くには第33圖に於て長さ L だけの河水全體を考へ

る。之に働く重力の分力と河床の摩擦とが釣合つて定常流をなして居ると見れば、單位面積の摩擦係数を f とし

$$A \cdot L \cdot g \cdot I = f \cdot P \cdot L \cdot v_m^2$$

$$\therefore v_m = \sqrt{\frac{gP}{f}} \sqrt{\frac{A}{P} I}$$

で(3.1)式となるのである。シェーギー (CHEZY) 氏自身は C を水路の床面のみに關する常數としたが、其の後の一層精密な實驗研究によると、深さ或は水面勾配にも幾らか關係がある。例へば v_m を m/sec, R を m, I をラヂアンで測ると、バザン (BASIN) は

$$C = 87 \sqrt{1 + \gamma \sqrt{R}}$$

だと云ひ、又クッター (KUTTER) は

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0.00155}{I}}{1 + \left(23 + \frac{0.00155}{I}\right) \frac{n}{\sqrt{R}}} \quad (3.2)$$

だといふ。こゝに γ 或は n は水路の床面の状態に關する常數であつて、之を粗度係數 (Roughness coefficient) と名づける。その程度は次表の通りである。

第 37 表 粗 度 係 數

| 河川状況 | クッター氏の n | | | | バザン氏の γ |
|----------------------|------------|--------|-------|-------|----------------|
| | 完全 | 良好 | 中位 | 不良 | |
| (1) 整正なる直線河道、深淵や淺堆なし | 0.025 | 0.0275 | 0.030 | 0.033 | 1.75 |
| (2) 同上、但し多少の草や石塊がある | 0.030 | 0.033 | 0.035 | 0.040 | 2.00 |
| (3) 彎曲河道、淵や堆がある | 0.033 | 0.035 | 0.040 | 0.045 | 2.20 |
| (4) 溪流 | 0.050 | | | | 3.35 |

其の後多くの人の經驗に徴するに、バザン式は運河や小規模の川に用ひてよく、クッター式は普通の河川に適する。それで今日では歐洲及び我國の學者は殆んど皆シェーギー・クッター式を採用して居る。然しクッターのは單なる實驗式でありながら餘りに複雑で實用上にも又理論計算上に適用することなく、寧ろ GAUCKLER 等に從ひ $v = \alpha R^m I^n$ の如くして、 α, m, n を定むるの合理的なるを論じ、市瀬恭次郎氏は北上川及び下關海峡の實測調査から

$$v = C\sqrt{RI}, \quad C = \alpha + \beta\sqrt{I}$$

なる關係あるを認め、クッター係數の代りに用ふべき式として提唱した。

又米國學者は殆んど皆英人マンニング (MANNING) の公式なるものを使用する。それは v を呎/秒, R を ft で測れば

$$v = \frac{1.486}{n} R^{2/3} I^{1/2} \quad (3.3)$$

といふのである。 n は前同様の粗度係數を意味する。我が國でも米秒單位を使用し、溝江昇氏は模型實驗で、セメント水路だと $v = 175 R^{0.7} I^{0.56}$ となつたが、之に砂を敷くと $v = (150 - 11840 I^{0.793}) R^{0.7} I^{0.56}$ となるし、更に之を頭に置いて自然の河川につき多數の實例を整理すれば、次の式が成立するといふ。

$$v = (90 - 122 I^{0.186}) R^{0.7} I^{0.56}$$

兎も角シェーギー式にせよ、マンニング式にせよ流速は水面勾配のみなら

す水深にも関係があるので、同一河川でも流速は水位と共に時によつて違ひ、洪水時には平素より遙かに速く平素の緩流も急流に化することが多い。一時間 40 km にも達することも珍しくない。

或川の平均流速と水位(従つて水深 R)との関係を曲線に現はしたものを、平均流速曲線(Mean velocity curve)といふ。之は河川調査上極めて重要なものである。尚ほ河流の石礫轉流等の問題には平均流速よりも底流が必要になる。河底流速を v_b とすると、平均流速 v_m や水面流速 v_0 との間には次の様な関係がある。

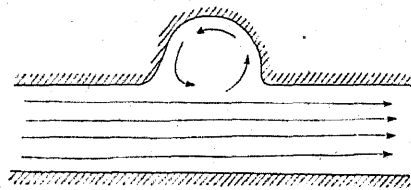
ダルシー(Darcy) $v_b = v_m - 11\sqrt{RI}$

クリスチャンゼン(Christianzen) $v_0 - v_b = v_m/2$

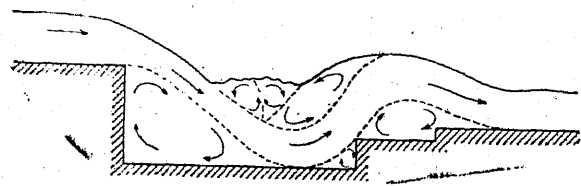
デュピュイ(Dupuit) $v_b = v_m / (1 + 0.0073R)$

3.4 渦巻きと渦動交換 河水は上流から下流へ流れるのが順であるが、時には其の一部が逆流をして、河の中に明瞭な渦巻きを形成することがある。

(1) 渦動の種類 この渦流に二種類ある。第一種は移動性渦流で、或軸の周りに圓形を描いて廻轉する渦動が、其の軸従つて渦動全體として次第に



第 33 圖 河岸渦流



第 34 圖 河底の凹みによる渦流

下流に移動し行くものである。第二種は不動渦流で、河岸や河底に急な引込みがあつたり、河道が急轉回する内側の下流では、其の中の水が同じ場所で何度もぐるぐる廻轉し、その渦流軸は不動で其の位置は變らぬ。水分子軌道は必ずしも圓形でなく、其の河岸や河底の地形如何で色々になる。第 33 圖は河岸の引

込みによる渦流、第 34 圖は河底の凹みによる渦流の有様である。前者は廻轉軸が垂直で水分子は廻りながら下へ吸込まれる傾きがあり、後者の軸は水

平である。

不動渦流内の水はどうしても永く同じ場所に滯溜する傾向があるから、之を死水といふこともある。

(2) 擾亂交換と渦動粘性 上記の如く一見して分る程の大きな渦流を別にしても、河流には一般に無数の小渦流を含むもので、整正な直線河道内の穏かな流れであつてもそれは學問上に所謂整流(Laminar flow)ではなく、亂流(Turbulent flow)に屬することは既に述べた所で、河流の流速が脈動的なることもその現はれの一つである。亂流内では水がそれ等の大小渦流によつて掻き混ぜられるから、河水の持つて居る凡ゆる物質乃至性質は其の濃度の大きな層から小なる層へ移動し、全體均一にならうとする傾向が生ずる。この作用を擾亂交換作用(Austausch)といふ。河水の流速も表層と底層とで違ふから、此の擾亂交換作用によつて運動量が大なる處より小なる處に移されんとし所謂渦動粘性(Eddy viscosity)を生じ、普通の分子粘性(Molecular viscosity)と類似の作用を呈する。即ち深さ z の層の流速が v で、其の下 dz の層の速度が $v+dv$ で、兩層の間に dv だけの速度の差があつて相對的に滑りがあると、渦動粘性は此の滑りを阻止せんとして單位面積毎に剪斷力(Shearing stress) $\tau = -\mu \frac{dv}{dz}$ が働くことになる。この μ を渦動粘性係數といふ。普通の分子粘性係數は大約 0.014 C.G.S. に過ぎないのに、渦動粘性係數は、東中秀雄氏が揚子江で出したのを見ると 408 といふやうに數百乃至數萬倍もあるのである。従つて河川問題を論ずる時には渦動粘性に對し分子粘性は全く無視して差支ない。

亂流は川に限らず、水道管内の水流でも、風でも海流でも、皆然りで、其の性質を闡明することは一般水力學・氣象學乃至海洋學上にも極めて大切なものであるが、次には河川學の立場から必要な程度に擾亂交換の理論を紹介して置く。

1) 整流とは、水流中に微小なる範圍の任意の一群の水分子をとり、それ等の分子が互に前後左右上下の相互位置を亂すことなく一團をなして流るゝものを云ふ。之に反して分子の相互序列が變つて亂雑なるものを亂流と名づける

河川の方向を x , 水面から下方を z , 側方を y 軸とし, 先づ最も簡單なる場合として, 河水が平均して x 方向のみに v なる速度で流れ, 横流も上下流もない場合の渦動粘性から説明しよう. この場合各水粒子は亂流によつて平均速度 v とは多少違つた速度をもつて居る. 其の違ひを各座標軸方向に夫々 v_x', v_y', v_z' とし, 之を變動速度 (Fluctuating velocity) 或は偏速 (Deviation) といふことにする. 變動速度は多數の水粒子中には互に相等しくして方向反對なる對があつて, 相當の時間 T , 面積 A を取れば其の中の全平均では時間 (t) 的にも空間 (A) 的にも 0 となるべきものである. 即ち

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{1}{T} \int_0^T v_x' dt = \frac{1}{T} \int_0^T v_y' dt = \frac{1}{T} \int_0^T v_z' dt \\ 0 &= \frac{1}{A} \int_0^A v_x' dA = \frac{1}{A} \int_0^A v_y' dA = \frac{1}{A} \int_0^A v_z' dA \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

そこで, 水中或深さ z の處に水平面積 A をとり, 此の面を通じ上下水層間に行はれる運動量の交換を考へると渦動粘性が導ける. 即ち x 方向の運動量が此の面 A を上から下に通るものは正の v_x' にて運ばれ, 下より上へは負の v_x' にて運ばれ, 差引き其の代數和

$$\int_0^A \rho(v + v_x')v_x' dA = \rho v \int_0^A v_x' dA + \rho \int_0^A v_x' v_x' dA = \rho \int_0^A v_x' v_x' dA \quad (3.5)$$

が單位時間に z の正方向に通過する. 茲に ρ は水の密度を表はし, 又 (3.4) 式により $\int_0^A v_x' dA = 0$ とした. 然るに單位時間に物體の一部に附與する運動量はそれに働く力に等しいから, (3.5) 式は A 面の上部が下部の水に働く力を表はす. 依つて之を面積 A にて割れば, 單位面積に働く力即ち剪斷力 τ に當るわけで

$$\tau = \rho \overline{(v_x' v_x')}, \quad \text{但し} \quad \overline{(v_x' v_x')} = \frac{1}{A} \int_0^A v_x' v_x' dA \quad (3.6)$$

かくて, 變動速度 v_x' と v_x' との積の平均値 $\overline{(v_x' v_x')}$ に ρ を掛けたものが剪斷力を與へることが分る.

ブランドル (PRANDTL) 氏は或位置で運動量の濃度 ρv を持つて居た水粒子が亂流によつて或距離 l を動く間は, 他の水と混ざらず元の運動量を維持し, 新位置に来て初めて其處の水と混合し新運動量になると考へ, かゝる距離 l

を亂流の混合徑路 (Mischungsweg) と名づけた. ガス分子飛動説に於ける自由徑路 (Free path) に相當するものである. 然るときは平均流速 v のものが變動速度 v_x' を生ずるのは上下の水粒子が混合徑路 l を畫いて互に交換混合するからで, l の z 分値を l_z とすれば, v_x' は上下距離 l_z の間の平均流速 v の差に外ならぬ. 即ち

$$v_x' = \frac{\partial v}{\partial z} l_z \quad (3.7)$$

之を (3.6) 式に代入して

$$\tau = \rho \overline{(l_z v_x')} \frac{\partial v}{\partial z} \quad (3.8)$$

茲に $\overline{(l_z v_x')}$ は z 方向の混合距離と變動速度との積の平均値である.

然るに粘性係數 μ なる液體に $\frac{\partial v}{\partial z}$ なる速度傾斜があるときの剪斷力は $\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial z}$ で表はされるから, (3.8) 式は亂流によつて

$$\mu = \rho \eta_{zz} \quad \text{但し} \quad \eta_{zz} = \overline{(l_z v_x')} \quad (3.9)$$

なる渦動粘性係數をもつこととなる. 尙 $\frac{\mu}{\rho}$ を動粘性係數 (Coefficient of kinematic viscosity) といふから, η_{zz} は動粘性係數に當る.

類似の説明は水中の鹽分・濁り・熱其他任意の量にも適用出来る. 即ち或量の濃度換言すれば單位體積に含まるゝ其の量を θ とし, 之が z 方向に違つて居ると, 亂流によつて或點 z に於ける濃度は θ を平均値として脈動的に變化し θ' なる偏差を生ずる. 従つて亂流交換によつて水平断面 A を z 方向に通過する量は單位時間に

$$\int_0^A (\theta + \theta') v_x' dA = \theta \int_0^A v_x' dA + \int_0^A \theta' v_x' dA = \int_0^A \theta' v_x' dA \quad (3.5)'$$

故に單位面積當りでは

$$\frac{1}{A} \int_0^A \theta' v_x' dA = \overline{(\theta' v_x')} \quad (3.6)'$$

茲に $\overline{(\theta' v_x')}$ は偏動量 θ' と v_x' との積の平均値の意である.

而して θ の變動 θ' の發生は亂流により上下の水が交換混合するによるが, 混合徑路 l の間は水粒子が他の水と混ぜず元位置の濃度を維持し, l の終端で初めて其處の水と混合し新濃度となるものとせば, 當然

$$\theta' = l_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (3.7)'$$

としてよい。茲に l_z は l の z 方向の分値である。之を (3.6)' 式に入れると

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \eta_{zz} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad \text{但し} \quad \eta_{zz} = (v_z' / l_z) \quad (3.9)'$$

は単位時間に単位面積を通じ θ が z 方向に傳はり行く量を與へる。係數 η_{zz} は一般に交換係數 (Austausch coefficient) と稱せられ、水の場合には密度 ρ が 1 に近いから、動粘性係數と殆んど同一値になる。ブランドルは更に v_x' も v_z' と同一原因で發生するから數値も同じと見て

$$\eta_{zz} = l_z^2 \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right|$$

とした。 $\left| \frac{\partial v}{\partial z} \right|$ は $\frac{\partial v}{\partial z}$ の絶対値を示す。

以上は θ が z 方向のみに違つて居る場合を論じたが、 x 及び y 方向にも差がある場合も、同様の交換作用が働くのである。

3.5 河川の運動方程式と流速分布の理論

河川流速分布の實狀は既に第一項で説明したが、本項では之に對する理論を述べよう。

(1) 横断面上の流速分布 河川が全く横流なく、且つ深さに比して幅が甚だ大で流速の水平差は垂直差に比し極めて微小なる場合には、水分子の運動方程式は次の如くして得られる。深さ z に於ける微小體積 $\delta x \delta y \delta z$ の水分子に働く力は重力分力 $g\rho I \delta x \delta y \delta z$ (I は水面勾配) と渦動粘性による抵抗である。渦粘性抵抗は上面から河川方向 x に働く剪断力 $-\mu \frac{\partial v}{\partial z} \delta x \delta y$ 、下面から反對に働く $+\left\{ \mu \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta z \right\} \delta x \delta y$ との代數和 $+\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z$ である。故にニュートンの運動第二則を式にすれば

$$\rho \frac{dv}{dt} \delta x \delta y \delta z = g\rho I \delta x \delta y \delta z + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = gI + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (3.10)$$

(3.10) 式はブランドル流に水分子が混合徑路 l の間元の運動量を維持するとして擾亂粘性抵抗を出したのであるが、テラー流に渦度 (Vorticity) を一定に維持すると假定して見ると渦粘性抵抗は單位體積につき $\mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ となる。

之が河水の運動方程式である。先きのシェーger法則は $\frac{dv}{dt} = 0$ 即ち定常状態の場合に限り而も河水全體を一括した平均流速に就ての略近式に外ならぬ。従つて流速の垂直分布や洪水時の不定常状態などを論ずるには、どうしても (3.10) 式を出發點とせねばならぬ。

例へば μ が一定の場合に定常等流状態の流速垂直分布を求めるには、 $\frac{dv}{dt} = 0$ であるから (3.10) 式より

$$\frac{d}{dz} \left(\mu \frac{dv}{dz} \right) = -g\rho I \quad (3.10')$$

水面勾配 I は深さ z には勿論無關係であるが、 μ も亦一定ならば、(3.10') 式は其のまま z に就き二回積分することが出来る。即ち二つの積分常數を B 、 v_0 とすれば

$$v = -\frac{g\rho I}{2\mu} z^2 + Bz + v_0 \quad (3.11)$$

となり、 v は z に對し拋物線的關係にあるべきことになる。 v_0 は表面流速、 B は $z=0$ に於ける $\mu \frac{\partial v}{\partial z}$ の値に當る。ミシシッピー河に於ける流速分布は事實拋物線關係にあることが、ハンフレイ (HUMPHREY) 氏等によつて實證された。

又クレイ (H. KREY) 氏はヤスムンド等の河川流速調査を参考にし

$$\mu = kz(h-z), \quad h = \text{水深}, \quad k = \text{常數}$$

と假定した。かゝる μ なら、(3.10') 式は一回積分して

$$kz(h-z) \frac{dv}{dz} = -g\rho I z$$

今一回積分して

$$v = v_0 + \frac{g\rho I}{k} \log \left(1 - \frac{z}{h} \right)$$

となり、流速は對數分布をすることとなる。

速水頌一郎博士はゲーベライン (H. GEBELIN) の二平行板内の亂流理論に於ける其の下半分が河川の場合に相當すると考へ、 μ の近似値として

$$\mu = k \frac{(h^2 - z^2)^2}{h^2 + z^2} \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right| \quad (\text{但し氏は } z \text{ を河底より上方にとつた})$$

と假定し、且つ水面の空氣抵抗を無視して $\left. \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=h} = 0$ なる條件の下に (3.10') を解き

$$v = v_0 - \sqrt{\frac{gIh}{k}} \phi(\xi), \text{ 但し } \phi(\xi) = \int_0^\xi \sqrt{\frac{\xi(1+\xi^2)}{1-\xi^2}} d\xi, \quad \xi = z/h$$

を得、且つ $\phi(\xi)$ の數値を ξ の種々の値につき計算表示し、實用に便して居る。

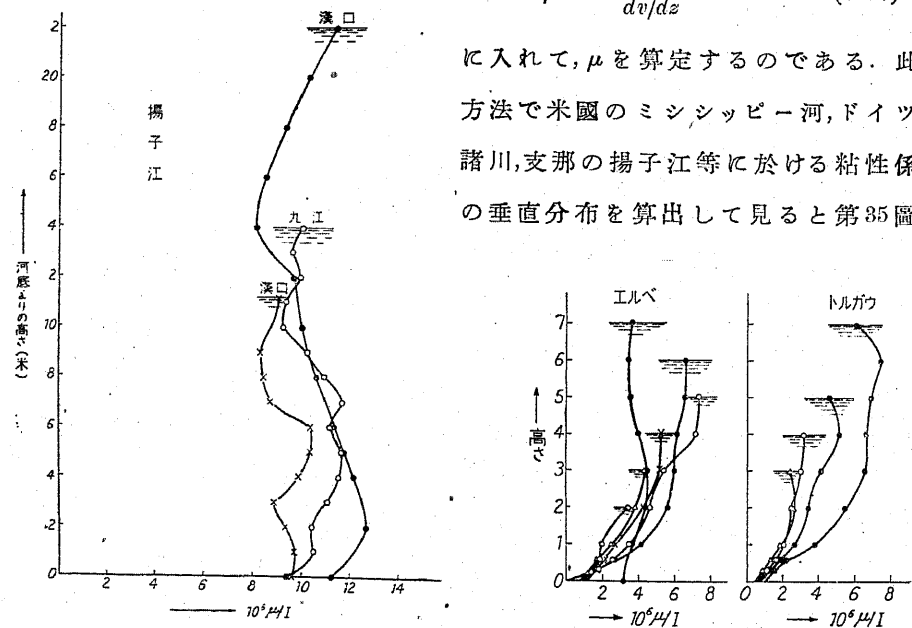
然し一般には μ は一定でもなく、又クレイやゲーベラインの假定の様にもなつて居ない。かゝる場合に私は流速の垂直分布及び水面勾配を實測して逆に渦動粘性係數 μ を出すのに (3.10') 式を利用した。即ち μ が z の函数であつても 1 回だけは直ちに (3.10') 式を積分して

$$\mu \frac{dv}{dz} = g\rho I(z_0 - z), \quad z_0 = \text{積分常數} \quad (3.12)$$

然るに積分常數 z_0 は $\frac{dv}{dz} = 0$ に相當する z の値なるを要するから、實測の流速垂直分布圖について極大流速點の深度を決定すればよい。尤も水面下に事實極大流速點があれば問題はないが、然らざる場合には分布曲線の趨勢から $\frac{dv}{dz} = 0$ の點を推定する。兎も角 z_0 がきまれば、次に各深度 z に於ける $\frac{dv}{dz}$ を實測の流速分布曲線から計算し、既知の水面勾配と共に (3.12) 式の變形

$$\mu = \frac{g\rho I(z_0 - z)}{dv/dz} \quad (3.13)$$

に入れて、 μ を算定するのである。此の方法で米國のミシシッピー河、ドイツの諸川、支那の揚子江等に於ける粘性係數の垂直分布を算出して見ると第35圖の



第 35 圖 諸川の μ 分布

如くで (i) 十數米乃至數十米の深さを有する河では低層 1~2m を除けば粘性係數は一様に近い。(ii) 底層 1~2m の部分、特に全深度が數 m を出でない浅い川の底層 1m 程は粘性係數が餘程小さい。(iii) 凍結した河の表層は粘性係數に関する限り底面と類似の效果がある。(iv) 外の事情が同じなら、河が浅い程粘性係數は小さい。(v) 浅い川では粘性係數の垂直分布曲線は大體として著しく上方へ concave で、(vi) 底層 1m 位を除けば流速の二乗に比例する様である。

尙ほクリスチアンゼン (CHRISTIANSEN) 氏は水面より河底までの平均粘性係數を出す爲には μ 一定なる場合の流速分布式を使ふことにした。且つ水面での空氣摩擦を無視して $\left. \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$ なる條件下に (3.11) 式を

$$v = v_0 - \frac{g\rho I}{2\mu} z^2 \quad (3.11')$$

とし、之を河底 ($z=R$) の流速 v_b に應用し

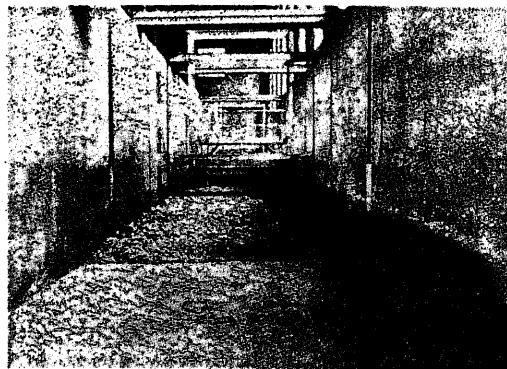
$$v_b = v_0 - \frac{g\rho I}{2\mu} R^2 \quad \therefore \mu = \frac{g\rho I R^2}{2(v_0 - v_b)}$$

茲で水面より河底までの平均流速 V を一方では $2(v_0 - v_b)$ と見做し他方ではシェーger 法則を用ひ $V = C\sqrt{RI} \approx 2(v_0 - v_b)$ として、前式を書きかへ

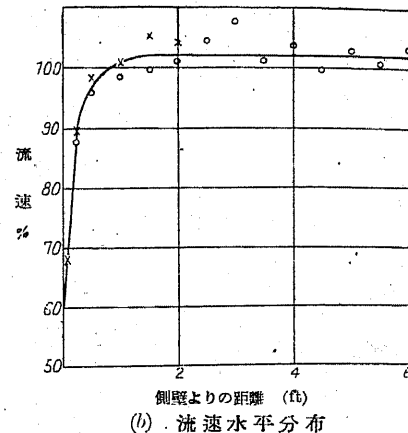
$$\mu = \frac{g\rho I R^2}{V} = \frac{g\rho}{C^2} RV \approx \frac{g\rho}{C^2} q \quad (3.13')$$

とした。茲に $q \approx RV$ は河幅 1 を流るゝ流量で、上下平均の渦粘性係數は流量に比例する傾向があると云ふ。

以上は河幅が水深に比して著しく大なる場合の中央部附近に適合すべき理論であるが、河岸のすぐ傍や、水深に比し河幅が左程大ならざる場合は、兩岸の摩擦によつて垂直方向のみならず水平方向にも流速の著しい變化がある。かゝる場合の流速分布は一方では河川模型で盛んに實驗的に研究されて居る。第36圖 (a) は米國標準局のコンクリート製長方形河川模型實驗裝置で、第36圖 (b) は之によりピアース (C. H. PIERCE) 氏が岸壁の流速分布に及ぼす影響を實驗し、同一深度に於ける流速が岸壁からの距離により變化する模様を測つた結果である。側壁より約 1ft の處までは著しく減速して居る。



(a) 河川模型



第 36 圖

又一方では、完全な理論は出来ないが、圓筒内を充滿流動する場合の理論を適當に變形して略近的に河川の流速分布に適用せんとする試みがある。圓筒内の流水に就きては次式が成立つとされて居る。

$$\frac{(V-v)}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = \frac{1}{K} \left\{ \ln \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y}{r}} \right) + \sqrt{1 - \frac{y}{r}} \right\} \quad (3.14)$$

或は
$$\frac{(V-v)}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = \frac{1}{K} \ln \frac{r}{y} \quad (3.14')$$

茲に V =最大流速, v =管壁より距離 y に於ける流速

τ_0 =管壁に於ける剪断應力, K =常數で 0.4 とされる。

ρ =水の密度, r =管の半径

オブリエン (M. P. O'BRIEN) 氏は (3.14) 式を, テーラー (E. H. TAYLOR) 氏は (3.14') 式を河床壁から y_1, y_2 なる二點につき使用して流速 v_1, v_2 の差をとり

$$\frac{v_2 - v_1}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = \frac{1}{K} \left\{ F\left(\frac{y_1}{R}\right) - F\left(\frac{y_2}{R}\right) \right\}, \text{但し } F\left(\frac{y}{R}\right) = \ln \left\{ \left(1 - \sqrt{1 - y/R} \right) + \sqrt{1 - y/R} \right\} \quad (3.15)$$

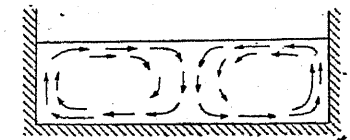
$$(v_2 - v_1) / \sqrt{\tau_0/\rho} = \frac{1}{K} \ln y_2/y_1 = 5.75 \log y_2/y_1 \quad (3.15')$$

が河岸或は河底より餘り遠くない範圍では成立つと假定し、實測値との照合をして居る。

次に最大流速點が水面下にある理由を考へよう。古くは此の理由として空氣の抵抗により水面の流れを引止めようとするからだと解せられたが、然

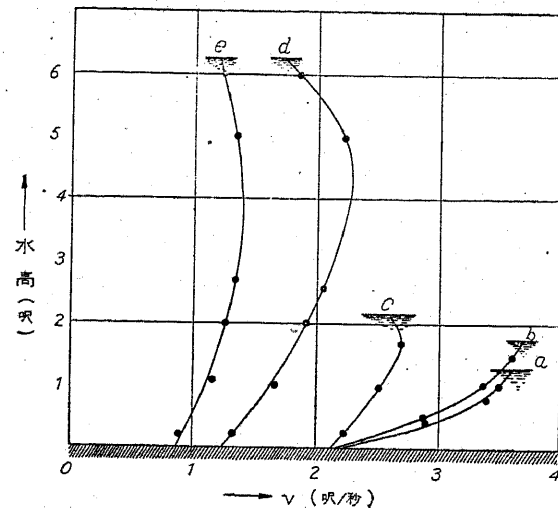
し量的に考へて見ると空氣抵抗は微弱なもので到底現實に見るほど水面流を減速せしめる力はない。況んや河下に向ふ風が或程度吹いて居ても最大流速點は水面下にあるので、空氣抵抗では説明がつかない。然らば他に如何なる理由があるか。

此の難問に解決を興へたのはステアース (F. P. STEARNS) とギブソン (A. H. GIBSON) 氏で、河には縦流の外に横流があつて所謂螺旋流 (Helical flow) をなす爲であつた。ギブソン氏によると、渦動が河底に發生すると同様、河岸でも垂直軸を持つたものが發生し、順次河の中央に向つて移動する。渦動は其の遠心力のため内部の壓力が普通よりも低減するから、底の方では水が流れ込み上面では遠心力で水を外部に流出する傾向あることは、木氣中の低氣壓に於ける氣流の出入にも見られる通りである。かくて河の直線部でも、表面では兩岸から中央へ、底層では中央部より兩岸へ流るゝ横流があつて、第 37 圖の様な環流を作らうとする。之が縦流に加はつて結局二組の螺旋流をやることになる。

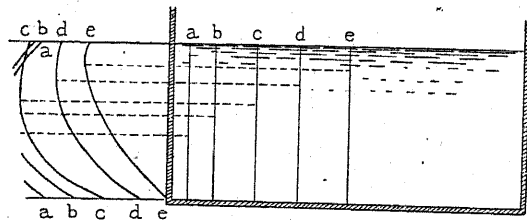


第 37 圖 河の横流

然るに縦流速度は一般に河岸に遅く中央部に速い。従つて横流により河岸から流速の小なる水を河の中央部に運べば、中央部では表面が比較的緩速度となり、最大流速は水面より若干下にあるのは當然だといふのである。而して氏は模型實驗は勿論實際の河についても、色素や浮子や木葉、或は側壁に一端を止めた細紐などにより二重螺旋運動の存することを實證した。更に最大流速點が第 38 圖の米國地質調査所やダルシイ (DARCY) 氏實驗に見る如く兩岸に近いほど、又河幅の割に水深の大なる川ほど比較的深部に存し、又河幅に比して浅い川の中央部ほど水面に近く最大流速點がある事實なども、畢竟此の説を支持する材料となるのである。なぜなら最大流速點を沈降せしむる原因は横流であるが、其の横流は河岸に發生する渦動に由來するから、結局河岸の影響を受くる程度の比較的著しい處ほど最大流速點が割合下になる筈だからである。



(a) 米國地質調査所實驗



(b) ダルシ-實驗

第 38 圖 最大流速深度實驗

じたのであるが、河流の縦方向に於ける速度變化を論ずるには有益な基礎として二通りの方法がある。

ベルヌーイ (BERNOULLI) 法則. 之は定常流にエネルギー不滅則を適用したものに過ぎない。第 39 圖に於て河水中に流線にて囲まれた小管を考へ、其の上下流二點に於ける斷面積を A_1, A_2 , 或基準水平面 OO' からの高さを h_1, h_2 , 流速を v_1, v_2 , 壓力を p_1, p_2 とすれば、單位時間に A_1 及び A_2 を流過する水量は勿論

* $\frac{\partial v}{\partial x}$ がある場合には亂流交換が x 方向のみならず x 方向にも行はれるから嚴密には (3.10a) の右邊には $\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ なる項をも入れねばならぬが 然し普通の川では $\frac{\partial v}{\partial x}$ は $\frac{\partial v}{\partial z}$ に比し甚だ小である爲、實用上は $\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ は $\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right)$ に對し省略してもよいのである。

次に流速が上下流一様でない場合の垂直分布を論ずるには、(3.10) 式の $\frac{dv}{dt}$ をオイラーの考へにより二部分に分ち

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= gI - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.10a)^*$$

特に定常状態では

$$v \frac{\partial v}{\partial x} = gI - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (3.10'a)$$

として使はねばならぬ。速水博士はかゝる場合の研究に着手して居る。

(2) 河川縦方向の速度變化 以上は河川の一断面に於ける速度分布を論

等しいから

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = Q \text{ (一定)} \quad (3.16)$$

而して單位時間に A_1 より入り A_2 より出るエネルギーの差は水の密度を ρ とすると

$$\rho Q \left\{ gh_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \right\} - \rho Q \left\{ gh_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right\} \quad (3.17)$$

而して之は p_1, p_2 なる壓力によつて單位時間に成される仕事の差

$$A_1 p_1 v_1 - A_2 p_2 v_2 = Q(p_1 - p_2) \quad (3.18)$$

に等しくなければならぬ。故に

$$h_2 + \frac{v_2^2}{2g} - \left\{ h_1 + \frac{v_1^2}{2g} \right\} = \frac{p_1 - p_2}{g\rho}$$

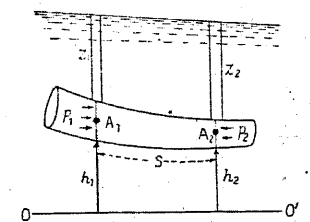
$$\therefore h_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{g\rho} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{g\rho} = E \text{ (一定)} \quad (3.19)$$

之がベルヌーイ法則 (Bernoulli theorem) と云はれるものである。茲に $p_1/g\rho, p_2/g\rho$ は壓力を水柱の重さにて表はすときの高さに相當する。然るに定常状態に於ける水中の壓力は其の水面からの深さ z_1, z_2 での水柱の重さと見てよいから、(3.19) 式は又

$$\frac{v_1^2}{2g} + (h_1 + z_1) = \frac{v_2^2}{2g} + (h_2 + z_2) = E \text{ (一定)} \quad (3.19')$$

とかいてもよい。 h_1, h_2 は之を位置水頭 (Position head), $\frac{p_1}{g\rho} = z_1, \frac{p_2}{g\rho} = z_2$ は之を壓力水頭 (Pressure head) といふ。其の和 $Z_1 = z_1 + h_1, Z_2 = z_2 + h_2$ は基準面 OO' から測つた壓力計水面の高さに外ならぬ。又 $v_1^2/2g, v_2^2/2g$ を流速水頭 (Velocity head), 三水頭の和 E を全水頭或は勢力水頭 (Total or energy head) といひ、水の單位質量當り各種エネルギーを重力單位で測つたものに相當する。故にベルヌーイ法則は「勢力水頭は一定なり」といふに歸する。 A_1, A_2 に於ける $Z = z + h$ と A_1 點の流速を知れば、 A_2 點の流速は (3.19') 式で計算出来るわけである。

尙ほ (3.19') 式を極めて近い二點に適用し、其の距離を ds とすれば其の間の $Z = z + h$ も v^2 も微小なる差があるだけになるから



第 39 圖

$$d\left(\frac{v^2}{2g}\right) = -d(z+h) = -dZ$$

兩邊を ds で割って

$$-\frac{dZ}{ds} = I = \frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2g}\right) \quad (3.20)$$

この I を **動水勾配** (Hydraulic gradient) といひ、壓力計水面の勾配を表はす。従つてベルヌーイ法則は又「**動水勾配は流速水頭の増加率に等しい**」と言ふことも出来る。而して河川に於ては其の水面勾配を以て直ちに動水勾配と見て大差ない。

以上は水を完全流體と見ての論であるが、實際の河水は著しい粘性を有するから、流下中に力學的エネルギーの一部は熱に變じ、従つて水頭の損耗となり全水頭は一定でなく、 A_2 點では A_1 點よりも或量 h_r だけ減少する。即ち

$$z_1 + h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + h_r \quad (3.21)$$

この h_r を **損失水頭** (Head loss) と云ふ。損失水頭を推算するには v_1, v_2 を河川横断面の平均流速とし、河全體について A_1 より A_2 に流下する河床の摩擦による仕事を計算すればよい。即ち (3.17) 式のエネルギー差は壓力による仕事 (3.18) の外に河床面の摩擦による單位時間の仕事となつて居るわけである。 A_1 より A_2 に至る距離 s の間の平均潤周を P 、徑深を R 、斷面積を A 、流速を v 、流量を Q とすれば、シェーギー法則を出した場合と同様摩擦は $fPsv^2$ で、單位時間には v だけの距離を動くから其の間の仕事は

$$fPsv^2 \times v = f \frac{s}{R} v^2 A v = f \frac{s}{R} v^2 Q \quad (3.22)$$

故に (3.18) 式と (3.22) 式の和を (3.17) に等しと置き兩邊を gpQ で割れば

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{gp} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{gp} + \frac{sv^2}{C^2R} \quad (3.23)$$

を得る。之即ち (3.21) 式に相當するもので粘性のある實際の河川に擴張されたベルヌーイ法則である。茲に C はシェーギー公式の C と同一の係數で、損失水頭は

$$h_r = sv^2/C^2R \quad (3.24)$$

である。

(3.23) 式を極めて近い二點に使用し (3.20) 式に應ずる式を作れば

$$I = \frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2g}\right) + \frac{dh_r}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2g}\right) + \frac{v^2}{C^2R} \quad (3.25)$$

となり、シェーギー公式の擴張となる。即ちジェーギー式は上下流とも速度が均一な場合に成立つもので、流速が縦方向に變化する場合には (3.25) 式を使はねば精確といへぬ。

以上は普通の水理學書に記載する處であるが、近年クック (H. L. Cook) 氏は従來運動エネルギー中に亂流の渦動エネルギーを度外視せるの不備を指摘し、全エネルギー E (重力單位) は前記の各種エネルギーの外に更に擾亂エネルギー T (重力單位) を加へて

$$E = (h+z) + \frac{v^2}{2g} + T$$

とすべく、更に之を微小距離 $-ds$ で微分し**全エネルギー勾配** (Energy slope) I_e は

$$I_e = -\frac{dE}{ds} = I - \frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2g}\right) - \frac{dT}{ds} \quad (3.26)$$

となるといふ。 I は前同様水面勾配 $-\frac{d(h+z)}{ds}$ である。

故にエネルギー勾配は一般には水面勾配と同一でない。然し特に河底が一定勾配で且つ等流なる場合には、 v も T も上下流不變であるから $I_e = I$ となつて、エネルギー勾配も水面勾配も河底勾配も皆一致することとなる。

エネルギー勾配の物理的意義は川の單位距離 ($ds=1$) 下る毎に費される全エネルギー損耗 ($-dE$) を重力單位で測つたもので、其の實前項の dh_r/ds に外ならぬ。故に河の斷面平均流速 v に就いての (3.25) 式は其の實

$$I = \frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2g}\right) + \frac{dT}{ds} + \frac{v^2}{C^2R} \quad (3.25')$$

とするが一層精確なわけである。

河川不定流の運動方程式 前記 (3.10) 又は (3.10a) 式はまた縦方向の運動方程式としても極めて一般的な公式ではあるが、然し水粒子毎に考へてあるから、河川出水などの不定流に使用するには餘りに複雑となり困却する。依つて河川の場合には各斷面の水は一括して其の平均流速 v につき運動式を

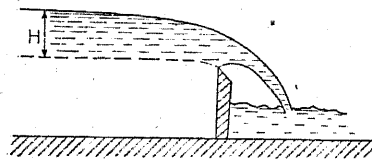
作ることが多い。即ち定常等流の場合にシェーゲー式を得たと同じ様に河川方向 (x) に dx だけの長さの水體を考へ、之に働く重力の分力と河床摩擦とが其の加速度を作るとして、オイラー流の運動方程式を書き下せば

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = g \left(I - \frac{v^2}{C^2 R} \right) \quad (3.27)$$

茲に C 及び R はシェーゲー法則の場合と同じ意味の量である。此の式の實地適用例は後章所々に出て居るから茲には略する。

第4節 流量

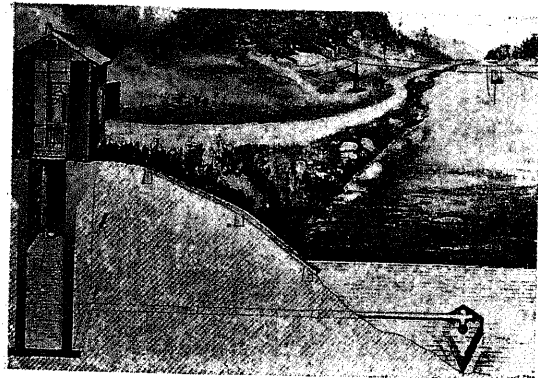
4.1. 流量と其の測定 水を利用する上に先づ最も重要な要素は水量と水質である。河の某地點に於ける流量 (Discharge) とは、其の地點の横斷面を單位時間毎に流過すべき水の體積をいひ、普通毎秒立方米又は毎秒立方尺



第40圖

を單位とし、特に毎秒立方尺のことを我が國では「個」と呼ぶことが多い。例へば流量120個とは、毎秒120立方尺の割にて流るゝ水量をいふ。

流量を實地に決定する法には次の如く種々ある。



第41圖 流速測定斷面と量水所

てよい。

(2) 流速法 之は其の斷面上數多の流速測定を行ひ、平均流速を求めてそ

(1) 堰測法 極めて小さい川なら、堰を設けて直接其の全流量を實測することもある。之は川幅りに互り第40圖の如く堰を作り其の上より溢流させると、堰頭から其の影響の及ばない水面までの高さ H を測れば $Q = 1.85 b H^{3/2}$ (米秒單位) とし

れに斷面積を乗するのである(第41圖)。

(3) 水位法 少くとも附近二ヶ所の水位觀測によつて、水面勾配 I と徑深 R とを求め、シェーゲー公式によつて平均流速を算定し、之に斷面積を乗つてもよい。

(4) 指薬法 極めて小さい川では又、濃度の知れた食鹽水其の他の適當な藥品溶液を一定量づゝ絶えず河流に注加し、若干下流で最早や充分藥品が河流全體に萬遍なく混和したと見られる邊から河水を汲み上げ、其の中の藥品の濃度を定量すれば、それから河の流量が割出せる譯である。藥品の定量は化學分析の外、電氣傳導度測定などによることもある。

4.2 各種の流量及び河況係數 流量は水位と同様降雨により又季節によつて變化する。日變化や年變化もあれば、永年變化もあるのである。従つて各種の水位に準じ、流量にも渴

第38表

水量、低水量、平均水量、高水量、洪水量さては、平水量、最多水量などといふ言葉を使ふ。尤も是等の各種水

| 川名 | 淀川 | 利根川 | 九頭龍川 | 庄川 |
|----------------|----|------|------|----|
| 洪水量 (五立方尺秒) | 20 | 13.5 | 15 | 13 |

量は、同名の各種水位に應ずる日の水量と其の値が極めて近いには近いが、必ずしも全く同一値にはならない。我が國の諸川下流の洪水量を表示すると第38表の如くである。

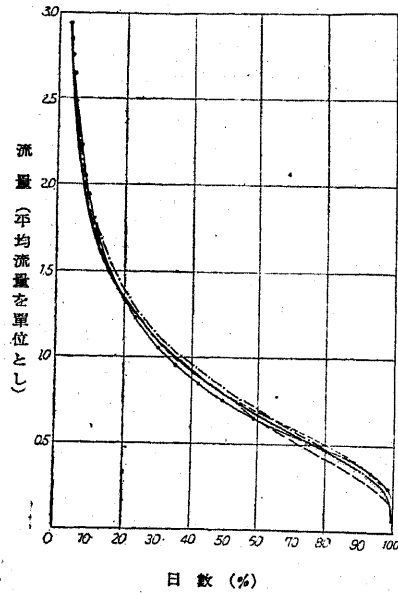
流量と1年中の之に應ずる日數とを圖にすれば、第24圖に類似の曲線を得ることは申すまでもない。それが流量の頻度曲線及び持續曲線である。只茲に一言注意して置きたい事がある。それは縦軸に流量そのものをつた持續曲線は個々の川で著しい相違を示すのであるが、流量を平均流量に對する比で表はせば、各河川の持續曲線は驚くべき程近似し來り、同じ地方では川による相違が極めて僅かとなることである。其の僅かな差は地形、地質、支流の配列、植生、氣候等による。此の事實は米國のハーゼン (A. HAZEN) が始めて唱導し、次でパロース (H. K. BARROWS) 氏が之を支持して各河川とも一定の式

$$\log Q = (2.40 - 0.11T)$$

に歸着すといふ。こゝに Q は流量の平均流量に對する百分比、 T は繼續日

数の全期間に對する百分比である。次でサヴィル (T. SAVILLE) 氏も北カロライナ州諸川に同様の事實を確認したが、其の曲線式はバロー氏のものに多少の修正をなし

$$Q = 187.8e^{-0.017T} + 237.8e^{0.22T} - 0.00000027e^{0.18T}$$



第 42 圖 イリノイ州諸川の(Q,T)曲線

とするがよいといふ。モルガウ (J. H. MORGAN) 氏もイリノイ州の諸川につき同様の事實を認めた。第 42 圖は其の例である。

次に 1 年中の最大流量と最小流量との比を其の川の河況係數 (Coeff. of river regime) と稱する。之が 1 に近い程河況が良好な川で、之が大なるほど狂暴な萬事に都合の悪い川である。第 39 表に其の數例を掲げる。

沙漠地方の川は河況係數最も大で、平素は全く流水なく、豪雨のとき一時的に大河となるのが多い。又半沙漠地や石灰岩地

第 39 表 河況係數

| 川名 (地點) | 北上川 (登米) | 雄物川 (秋田) | 最上川 (新橋) | 荒川 (川口) | 富士川 (鮎澤) | 天龍川 (天龍橋) | 木曾川 (犬山) | 淀川 (牧方) | 紀ノ川 (岩田) |
|---------|----------|----------|----------|---------|----------|-----------|----------|---------|----------|
| 河況係數 | 223 | 169 | 303 | 149 | 400 | 114 | 108 | 67 | 400 |

| 川名 (地點) | 新宮川 (高田) | 由良川 (福知山) | 圓山川 (豊岡) | 吉野川 (河口) | 緑川 (釋迦堂) | 大淀川 (宮崎) | 大野川 (川添) | 信濃川 (熊ノ森) | 石狩川 (對雁) |
|---------|----------|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|----------|
| 河況係數 | 1100 | 436 | 348 | 207 | 176 | 110 | 500 | 19.3 | 32 |

| 川名 (地點) | ライン (バーゼル) | ドナウ (ウィーン) | セーヌ (パリ) | エルベ (ドレスデン) | オーデル (プレスラウ) | オハイオ (ピッツブルグ) | ミシシッピ (ミネソタ) | テームス (ロンドン) |
|---------|------------|------------|----------|-------------|--------------|---------------|--------------|-------------|
| 河況係數 | 14 | 3.6 | 34 | 32 | 111 | 364 | 119 | 8 |

方では河水が途中で全く地下に洩し伏流となり、遙か隔てた地に再び地表へ出現する川もある。北支には斯様な川が稀でない。古代の濟河は「三伏三見」と稱し其の點で最も有名であつた。

又年流量も年々によつて違ふが、其の變動の程度を數量的に表はすには、永年の觀測により其の全平均年流量 \bar{Q} と各年の流量との差 δQ を求め、それら偏差の自乗平均の \bar{Q} に對する比

$$\frac{1}{\bar{Q}} \sqrt{\frac{\sum \delta Q^2}{n-1}}, \quad n = \text{觀測年數}$$

を以てし、之を年流量の變動率 (Coefficient of variation) といふ。ヘンショー (F. F. HENSHAW) 氏によれば、南部アラスカ 8 川の年流量變動率は 0.10~0.15 に過ぎない。之は同地方の水源地が數千呎の高山で年中積雪があるためと解される。米國ワシントン州及びオレゴン州の 40 川に就ては變動率が 0.13~0.60 もあつて相當大きい。但し兩州でも年雨量の變化が少く且つ流域の大なるカスケード山脈西側諸川は 0.19 の變動率である。其の他米國太平洋岸諸州の平均變動率は第 40 表の通りだといふ。

第 40 表 年流量の平均變動率

| 地 方 | Alaska | British Columbia | Washington | Oregon | California |
|--------|--------|------------------|------------|--------|------------|
| 觀測年數 | 12.8 | 17.2 | 21.1 | 27.6 | 29.0 |
| 年流量變動率 | 0.120 | 0.220 | 0.241 | 0.327 | 0.562 |

一つの川の流量は上下流必ずしも同一ではなく、一般には上流に少く下流に多い。而して所謂固定状態に於ける各地の流量を互に呼應流量 (Concordant discharge) といふこと、水位の場合と同じ。平素上下流の呼應流量を測つて其の關係を定めて置けば、出水時に上流の流量を知れば下流の流量を豫知して洪水豫報の一法とすることが出来るのも、水位の場合と同段である。

4.3 水 年 流量其他、河水に關する問題を調査研究するには、普通の曆年よりも寧ろ地上地下共に水の貯藏が 1 年中で最少な時期を 1 年の初めとした水年 (Water year) なるものを使ふが便利である。我が國では曆の 12 月 1 日を水年の初めとし、11 月末日を其の終りとする。ドイツでは 11 月 1 日に

始まる水年を、又北アメリカでは所により8月、9月又は10月に始まる水年を採用する。

4.4 流量と流域—比流量 流量は一般に流域の大なる川に大きく、従つて又同じ川では、水源から河口に下るに従ひ増加する。そして支流の打出す毎に流域も流量も飛躍的に増大するのは勿論である。但し洪水の様な急激な出水は上流ほど急突であるため、其の最大流量は往々下流の方が却つて小で、其の代り長い時間続く場合がある。之は上流で出た大水が途中に滞溜して徐々に流下し、出水を引延ばすからである。

或川の流量を其の流域面積で割つたものを比流量 (Specific discharge) といふ。我が國諸川の流量其の他河川調査は、内務省が明治7年淀川及び利根川の改良工事に着手して以來今日まで多數の河川改修を行ふ準備として實行して來て居るし、又一方、水力電氣の發達に伴ひ、逓信省では「第1次臨時發電水力調査」を明治43年より大正2年(1910-1913)まで、「第2次電氣工業用發電水力調査」を大正7年より同11年(1918-1922)まで行つた。河川數280に達し我國の主要な河川は殆んど網羅して居る。是等も亦河川學の流量問題に資する處多く、之に基いた研究發表もなされてゐる。

朝鮮總督府でも朝鮮内の「發電水力調査書」を大正7年に、「一般水力調査書」を昭和5年に、「河川調査書」を昭和10年に刊行し、尙ほ昭和8年以來「朝鮮河川調査年報」を出して毎年の雨量、水位、流量、洪水等を報告して居る。是等の資料による各川の流量を一々掲載することは勿論出來ないから、其の概要を知る爲に全國を12區に分けた各地方別の比流量(3ヶ年平均)を1方里宛立方尺/秒にて表はし第41表に示す。

第41表 我國地方別流域1方里當り比流量(個)

| 地 方 | 北海 | 東北 | 奥羽 | 關東 | 北陸 | 東山 | 東海 | 山陰 | 内海 | 南海 | 北九州 | 南九州 | 全國 |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 濁水量 | 6.7 | 8.3 | 9.9 | 10.4 | 14.3 | 11.1 | 10.7 | 6.5 | 6.9 | 8.5 | 9.0 | 9.9 | 9.6 |
| 低水量 | 9.9 | 12.4 | 15.4 | 14.8 | 24.3 | 17.1 | 17.4 | 11.4 | 11.5 | 15.5 | 13.7 | 15.5 | 15.2 |
| 平水量 | 15.1 | 17.3 | 23.6 | 22.7 | 37.0 | 25.8 | 27.2 | 18.2 | 17.6 | 24.2 | 19.7 | 24.7 | 23.0 |
| 低水量/濁水量 | 1.53 | 1.59 | 1.65 | 1.50 | 1.77 | 1.53 | 1.68 | 1.90 | 1.71 | 1.84 | 1.58 | 1.66 | 1.64 |
| 平水量/濁水量 | 2.41 | 2.27 | 2.59 | 2.42 | 2.79 | 2.41 | 2.69 | 3.09 | 2.68 | 3.00 | 2.34 | 2.85 | 2.56 |

以上の結果に大正8年乃至昭和4年に至る10箇年間の結果をも加味して菊池英彦氏は全國の平水量分布圖、濁水量分布圖、地方別分布詳細圖等を作製して居る。特に九州河川の流量に就ては阿部謙夫氏も第二次水力調査に關與した關係で詳論して居るが其の内注意すべき點を掲ぐれば、火山灰地方を流るゝ川と然らざるものとの差異である。即ち平水量の分布は主として年雨量の分布に伴つて増減して居るが、濁水量の分布は年雨量との關係薄く寧ろ主として地形地質によつて違ひ、火山灰地方の川に濁水量多く然らざる地方に少い。

又比流量の月別變化に就ては前記逓信省の水力調査によると全國の平均比流量は1方里當立方尺秒にて測れば

第42表 全日本平均比流量の月別變化

| 月 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 全年 |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| 平均比流量 | 19.4 | 18.2 | 29.4 | 60.6 | 57.3 | 50.6 | 53.7 | 52.7 | 47.6 | 32.3 | 24.5 | 21.5 | 38.98 |

比流量は或川で實測不可能か或は實測前大體の流量を知りたい場合等に利用し得るもので、附近類似の川の比流量に問題の川の流域面積を乗じただけでよい。又比流量は地質の滲透性其の他の水理學的性質を示す指標としても役立つもので、河川の重要な一要素たるを失はない。

4.5 流量と水位 各河川の流量は一般に水位の昇降に伴つて増減し、兩者の間には一定の關係がある。蓋し流速はシェーゲーの公式に従ふのであるが、同一地點では川の徑深Rも水面勾配Iも水位の變化につれて一定の變化をするから、自然、流量そのものと水位との間にも一定の關係がある筈である。故に平素豫め此の關係を定めて置けば、爾後は單に水位觀測だけから、其の流量を隨時算定し得ることになる。流量Qと水位hとの關係を表はす曲線を流量水位曲線 (Discharge stage curve) といふ。普通拋物線形狀であるから實用上

$$(i) Q = a + bh + ch^2 \text{ か } (ii) Q = a'(b' + h)^n$$

かの形に纏めて居る。指數nは多く2を採つて居るが、それでは納まらず多

少違つた数値のものもある。Qを尺³/秒、hを尺単位で測つたときの我國諸川の各常数は第43表の通りである。

第43表 流量水位関係常数表

| 川名 | a | b | c | 備考 | 川名 | a' | b' | n | 備考 |
|------|---------|---------|--------|---------|-----|---------|--------|--------|-------------|
| 阿寒川 | 48.89 | 177.55 | 144.01 | 横断面 长方形 | 馬淵 | 37.8 | 0.348 | 2 | 横断面 梯形 |
| 千曲川 | 2233.6 | 2236.1 | 114.1 | 〃 〃 | 安比 | 44.48 | 1.520 | 2 | 〃 三角形 |
| 宮川 | -210.76 | 333.88 | 172.17 | 〃 〃 | 磬井 | 31.70 | 0.400 | 2 | 〃 矩形 |
| 九頭龍川 | 346.12 | 7260 | 152.77 | 〃 长方形 | 桂川 | 68.456 | 0.26 | 2.194 | 〃 梯形 |
| 高見川 | 95.71 | -144.74 | 66.75 | 〃 三角形 | 三刀屋 | 181.252 | -1.12 | 2.02 | 〃 矩形 |
| 芦田川 | 30 | -106.6 | 83.3 | 〃 矩形 | 根尾川 | 59.533 | -0.75 | 1.9212 | 著者 武田 (単位米) |
| 杖立川 | 77 | 98 | 50 | 著者 上野 | 信濃川 | 422.549 | 1.139 | 2 | 〃 山口昇 |
| | | | | | 雄物川 | 487.4 | -3.623 | 2 | 〃 金森 |
| | | | | | 瀬田川 | 174 | 3.096 | 2 | 〃 〃 |

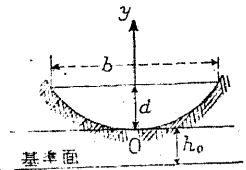
本表中著者名のないのは總て逓信省の調査結果によつたものである。

尙ほ流量水位関係式は同一河川の同一地點でも年月と共に變化し、特に大洪水や改修工事のため河底の狀況變化により自然と變化することや、洪水の場合の増水時と減水時で異なることなどを實證したものもある。例へば武田繁後氏は根尾川で昭和7年までは上表にある通りのものが昭和8年8月大出水後は米単位で $Q=47.317(h-0.70)^{2.1037}$ となり、昭和9年3月出水後は $Q=45.403(h-0.70)^{2.0929}$ と變り、同年6月出水後は $Q=48.945(h-0.70)^{2.0929}$ となりたることを示し、金森鉄太郎氏は瀬田川にて洗堰工事中其の進捗程度に應じ毎月毎月流量水位関係式が著しく變化することを示し、菊池英彦氏の益田川に関する論文にも其の實例が掲つて居る。

同一河川でも上流と下流とでは流量水位関係式を異にするは當然であるが、然し兩者の間には或關係があつても然るべきである。金森氏は雄物川に就き上流點椿川にては尺単位で $Q=196.757(h+5.196)^2$ 又川尻では $Q=487.4(h-4.514)^2$ であるが、兩者の連絡をなすものは所謂呼應水位で、 $h'=0.667h+82.451$ を使用すれば一方の流量水位式から他方のそれを計算して得らるゝことを示した。

流量水位曲線が大體(i)又は(ii)式の形となるべきは理論上から推定出来る。蓋し流量は断面積と平均流速の積に等しいが、平均流速はシェーゲー法則に従ふとすれば、断面形状の如何によつてそれに應じた流量水位關係が定められるのである。次に若干の例を述べよう。

(1) 拋物線断面 河床が河底中心を原點として $y=px^2$ の如き拋物線なる場合には、水面幅 b と最大水深 d 及び断面積 A との間には次の關係がある。



第40圖 拋物線断面

$$b = \frac{2}{\sqrt{p}} d^{\frac{1}{2}}, \quad A = \frac{2}{3} bd = \frac{4}{3\sqrt{p}} d^{\frac{3}{2}}$$

而して普通の河川では d は b に比して甚だ小さいから潤周 P は殆んど b に等しく従つて徑深 R は

$$R = \frac{A}{b} = \frac{2}{3} d$$

故に平均流速 v はシェーゲー法則によると

$$v = CV\sqrt{RI} = CV\sqrt{I} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} d^{\frac{1}{2}}$$

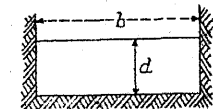
$$\therefore \text{流量 } Q = vA = CV\sqrt{I} \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{4}{3\sqrt{p}} d^2 = ad^2 \quad (4.1)$$

$$\text{但し } a = CV\sqrt{I} \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{4}{3\sqrt{p}}$$

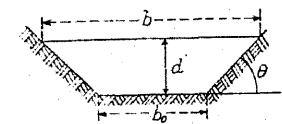
然るに量水標の水位 h の基準面は一般に河底中心と一致せず、上又は下に h_0 の差があるとすれば $d = (h \pm h_0)$ と置いて(4.1)式に代入し

$$Q = a(h \pm h_0)^2 \quad (4.1')$$

獨逸では實際の河川につきても主として此の形を採用する。



(2) 矩形断面 底幅を b 、水深を d とし、 $b \gg d$ とすれば潤周は b と大差なく



第41圖 矩形及び梯形断面

$$A = bd, \quad R = A/(b+2d) \approx d \quad v = CV\sqrt{RI} = CV\sqrt{I} d^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore Q = vA = CV\sqrt{I} \cdot bd^{\frac{3}{2}} = ad^{1.5}, \quad \text{但し } a = Cb\sqrt{I} \quad (4.2)$$

水位基準面が河底に一致しない場合は

$$Q = a(h \pm h_0)^{1.5} \quad (4.2')$$

佛國では實際の河川でも大抵此の形を採用する。

(3) 梯形断面 底幅を b_0 , 兩岸の水平面となす角を θ , 水面幅 $b \gg$ 水深 d とすれば

$$b = b_0 + 2d \cot \theta, \quad A = (b_0 + d \cot \theta) d$$

$$R = A / (b_0 + 2d \operatorname{cosec} \theta) \approx d$$

$$v = C\sqrt{RI} \approx C\sqrt{Id}^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore Q = vA = C\sqrt{I} (b_0 + d \cot \theta) d^{\frac{3}{2}} = a(1 + a_1 d) d^{\frac{5}{2}} \quad (4.3)$$

但し $a = Cb_0\sqrt{I}, \quad a_1 = \frac{\cot \theta}{b_0}$

従つて $Q = a[1 + a_1(h \pm h_0)] (h \pm h_0)^{\frac{5}{2}} \quad (4.3')$

(4) 三角状断面 兩岸の傾斜角を θ とすれば, 水面幅 b , 最大水深 d , 断面積 A との関係は

$$b = 2d \cot \theta, \quad A = \frac{1}{2} b d = d^2 \cot \theta$$

$$\therefore R = \frac{d^2 \cot \theta}{2d \operatorname{cosec} \theta} = \frac{1}{2} d \cot \theta \sin \theta$$

$$\therefore Q = vA = C\sqrt{RI} \cdot A = ad^{\frac{5}{2}} \quad \text{但し} \quad a = C\sqrt{\frac{I \cot^3 \theta \sin \theta}{2}} \quad (4.4)$$

或は $Q = a(h \pm h_0)^{\frac{5}{2}} \quad (4.4')$

以上は皆水面勾配 I は水位に関係なく一定としたが, 實際の河川でも河底に凹凸がなく平坦なものならば大體然るべきであるけれども, 淵や淺瀬があり複雑な河床では, 水位と共に水面勾配も多少變るであらう。それで是等の理論は完全に成立するとは限らない。さればこそ實際の流量水位曲線は既述の様に指數を種々にとらぬと合はぬのである。

第5節 河口と感潮河川

河口附近の水流は外海特にその潮汐作用に影響を受けるから特別に考究せねばならぬ。

5.1 感潮河川と其の特性一般 河口は勿論であるが, 川によると相當上流までも外海の潮汐に影響され, 水の鹽分や水位特に流速に顯著な週期的變化を見ることがある。かやうに潮汐の影響を感じる河川, 或は其の部分で感潮河川 (Tidal river) といふ。感潮の度合は勾配の緩かな大河に強く, 勾配の急な急流ほど小さい。揚子江では漢口までも影響があり, Humber 河では70哩上流まで, テームス河でも20數哩まで感潮するといふ。鹽分の變化は勿論比較的下流部のみに限られ, 水位や流速變化の方が遙かに上流まで及ぶ。

潮汐のエネルギーは一部を摩擦や粘性のために消費せられる外, 漸次水を高處に運び行くための仕事にもなつて, 上流になるほど感潮度は弱くなる。ハンバー河での調査によると, 鹽分が上流22哩の地點では河口の半分となり, 35哩では $\frac{1}{10}$ に減ずる。然し他方河幅が狭くなる處ではエネルギーが集約されて感潮度を増し, 下流よりも却つて潮汐作用が大きい處もある。例へばテームス河ではロンドン橋附近が下流の Nore よりは潮差が4ftも大きい。特に途中で一部分だけくびれた狹路をなして居る處があると, そこで約6時間毎に上流及び下流に方向を反轉する瀧を生じ, 所謂交互反轉瀧 (Reversible water-fall) なる珍現象を呈することがある。米國ニュー・ブルンスウィックのセント・ジョーン河は其の例で, 上げ潮のときは狹路の下流が却つて水位高く瀧を成して上流に向つて流込む。下げ潮のときも亦其の上流の退水が下流の水の様に自由に流れぬため狹路兩端の水位差6~12ftにも及ぶといふ。

河口が喇叭狀で其の前が廣い遠淺の而も潮の強い海である場合には, 大規



第46圖 錢塘江の潮津浪

模の磯浪のやうに、潮は其の高さが次第に増し形も次第に變つて前面が急になり第46圖のやうに水壁をなして川を溯上する。之を潮津浪 (Tidal bore) といひ、支那の杭州灣に注ぐ錢塘江では、水壁の高さ3mにもなり、世界に最も名高く、佛國のセヌ河、英國のセヴァーン河などが之に亞ぐ。

其他感潮河川の一般的通性としては

(1) 上げ潮の時間は短く、下げ潮の時間が長い。 これは(イ)河川には勾配があるから上げ潮には水を高處に運ぶため運動エネルギーを減少し、下げ潮には反對に増加すること、(ロ)河固有の流れによつて上げ潮は妨害され、下げ潮は促進されるからである。従つて又同一理由により

(2) この上げ潮と下げ潮の時間の差は河の水量によつて増減し、増水時に大で濁水時に小である。

(3) 河川内の潮浪は進行性であるが、流速又は流量の極大極小は水位の最高最低即ち満潮時と通例數時間の差がある。 例へば保原元二氏が北海道常呂川口に於て126回の横斷流速觀測を行つたものでは、最小流量は満潮前2時間に起り、最大流量は満潮後3~4時間(洪水には4時間、平水時には3時間)に起る。最大流量から暫くは流量急減し、満潮後8時間頃から減率俄に緩くなり最小流量に近づく。この減率が俄に緩くなる處を轉移點(Transition point)と名づける。流量 Q の水位に対する關係は複雑であるが、河口水位 h のみならず潮汐影響の及ばぬ上流點と河口との間の落差 H にも關係があり、

$Q = a(h+b)^m H^n$ と假定して常數 a, b, m, n を定めた處第44表を得た。中間時刻の流量は以上3點の流量から推定することが出来る。

第44表 常呂川の諸常數

| 單位 尺/秒 | a | | b | | m | | n | |
|-----------|--------|--------|------|-------|-------|-------|-------|--------|
| | 洪水時 | 平時 | 洪水時 | 平時 | 洪水時 | 平時 | 洪水時 | 平時 |
| 最大流量時 | 0.073 | 1.748 | 1.81 | 2.2 | 2 | 2.177 | 3.465 | 1.5 |
| 最小流量時 | 0.0466 | 0.0103 | 1.18 | 24.90 | 1.026 | 2.632 | 4.456 | 1.087 |
| 轉移點 | 15.22 | 0.1514 | 1.05 | 29.11 | 2.002 | 1.955 | 1.147 | 0.8515 |

(4) 潮汐が川を傳はる速さは川の固有流速を u_0 、水深を h とすれば

$\sqrt{gh} - u_0$ に近い。

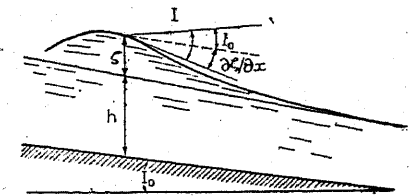
(5) 上げ潮では海水が河水よりも重いため楔狀になつて河水の下を溯上し、表面は鹽分少く底層は鹽分が多い。但し海水の溯上は全感潮距離中の比較的下流部のみに限られ、且つ亂流によつて混合が行はれるから溯上するに従つて海水の楔狀状態は消失する。

(6) 大きな河では兩岸の水位に多少の差があり、右岸が左岸よりも満潮時とも幾分高い。 之は地球自轉の影響で、ハドソン河では紐育附近で其の差1in.位あるといふ。

5.2 河川潮汐の理論 河口を原點とし上流に x 軸をとれば河川不定流の運動方程式は既述の如く

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -W - gI \tag{5.1}$$

である。ここに W は流水の受ける摩擦抵抗で普通は速度 v の二乗に比例すると考へられる。



第47圖

今第47圖に於て潮汐なき場合には川は固有速度 u_0 、水面勾配 I_0 、水深 h を以て等流をなすものとし、潮汐による水面上昇を ξ 、溯上潮流を u にて表はせば、

$$v = u - u_0, \quad I = I_0 + \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad u_0 = C\sqrt{RI_0}$$

又、連續方程式は、微少間隔 dx の二斷面間に流入する水量の差が其の間の水位を上昇せしむるといふこと、換言すれば質量不變の法則を式にして

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [(h+\xi)v] \tag{5.2}$$

第一近似解 ハリス (HARRIS) は $v \frac{\partial v}{\partial x}$ を他の項に比し微小として省略し、且つ潮汐 ξ は水深 h に比しては甚小で、抵抗 W は固有流速 u_0 に應ずる gI_0 と殆んど相等しいと見たる

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{5.1a}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -h \frac{\partial u}{\partial x} \tag{5.2a}$$

に相當する式(即ち式(5.2a)を t で微分し、(5.1a)を代入して得らるゝ)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (5.3)$$

を河川潮汐論の出立點とした。

此の式は一の波動方程式で $ct-x$ の任意函数 $\phi(ct-x)$ にて満足される。即ち

$$\xi = \phi(ct-x) \quad (5.4)$$

ϕ は河口($x=0$)での潮汐 $\xi = \phi(ct)$ で定まり、傳播速度 $c = \sqrt{gh}$ にて溯上する。然し河水全體が固有流速 u_0 で流下するから、地上から見た傳播速度は

$$\text{地上傳播速度} = c - u_0 = \sqrt{gh} - u_0 \quad (5.5)$$

次に潮流 u は(5.1a)或は(5.2a)に(5.4)を代入したる上で積分し

$$u = g \int \phi'(ct-x) dt = -\frac{c}{h} \int \phi'(ct-x) dx = \sqrt{\frac{g}{h}} \phi(ct-x) = \sqrt{\frac{g}{h}} \xi \quad (5.6)$$

となる。潮流では時間 t 又は場所 x に無關係な流れはあり得ぬから、積分常數は當然0とした。(5.6)式は潮汐 ξ と潮流 u の關係を示すもので、何れか一方を觀測すれば他方は推算出来るわけである。

以上は潮流に對する抵抗を無視したことになるので、潮汐と潮流の關係や傳播速度は大體に於て實際に近いが、潮汐の振幅が上流まで少しも衰減しないといふ不合理がある。

第二近似解 楠宗道博士は此の不合理を除く爲に、潮流に對する抵抗を計算に入れた。抵抗 W は既述の如く實は流速の二乗に比例して

$$W = \frac{v^2 g}{C^2 R} \quad (5.7)$$

とすべきものであるけれども、それでは數式が複雑になるから便宜のため流速に比例するとして

$$W = fv \quad (5.7b)$$

と置くが、そのための誤差を小ならしめるには、 f の數値を適當に選んで、潮流の半週期間に於けるエネルギー損耗が(5.7)式を使つても(5.7b)式を使つても同一値となる様なものにするのである。従つて運動方程式は $v \frac{\partial v}{\partial x}$ を $\frac{\partial v}{\partial t}$ に對し省略して

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fv + g \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + I_0 \right) = 0$$

更に v を固有流速 u_0 と潮流 u に分ち $v = u - u_0$ とし、且つ潮流なければ $fu_0 + gI_0 = 0$ なるに注意し

$$\text{運動方程式} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + fu + g \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad (5.1b)$$

又潮高 ξ は川の徑深 R に比して甚小と假定し

$$\text{連続式} \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + R \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5.2b)$$

とした。(5.1b)式を $\frac{\partial}{\partial t}$ し(5.2b)式を $g \frac{\partial}{\partial x}$ して相減じ ξ を追出せば

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - gR \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (5.3b)$$

を得る。茲で河口($x=0$)の潮流

$$u|_{x=0} = U \cos \sigma t \quad (5.8)$$

に應ずる(5.3b)式の解は

$$u = U e^{i\sigma t - (\alpha + i\beta)x} \quad (5.9)$$

と假定して α と β とを適當に定むればよい。(5.9)を(5.3b)に代入し

$$(i\sigma)^2 - gR(\alpha + i\beta)^2 + i\sigma f = 0$$

之を實數部と虚數部に分てば

$$\left. \begin{aligned} \beta^2 - \alpha^2 &= \sigma^2 / gR \\ 2\alpha\beta &= \sigma f / gR \end{aligned} \right\}$$

此の二式より α^2 と β^2 とを定むるには、先づ $\alpha^2 + \beta^2$ を求むる爲

$$(\beta^2 + \alpha^2)^2 = (\beta^2 - \alpha^2)^2 + (2\alpha\beta)^2 = \left(\frac{\sigma^2}{gR} \right)^2 + \left(\frac{\sigma f}{gR} \right)^2 = \left(\frac{\sigma^2}{gR} \right)^2 \left(1 + \frac{f^2}{\sigma^2} \right) \quad (5.10)$$

便宜の爲

$$f/\sigma = \tan \theta$$

と置けば

$$\beta^2 + \alpha^2 = \frac{\sigma^2}{gR \cos \theta}$$

従つて

$$2\beta^2 = \frac{\sigma^2}{gR} \left(1 + \frac{1}{\cos \theta} \right) = \frac{2\sigma^2}{gR \cos \theta} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$2\alpha^2 = \frac{\sigma^2}{gR} \left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right) = \frac{2\sigma^2}{gR \cos \theta} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore \beta &= \frac{\sigma}{\sqrt{gR \cos \theta}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \\ \alpha &= \frac{\sigma}{\sqrt{gR \cos \theta}} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

但し $\theta = \tan^{-1} \frac{f}{\sigma}$

$$\therefore u = U e^{-\alpha x} \cos(\sigma t - \beta x) = v + u_0 \quad (5.12)$$

即ち潮流は溯上するに従つて $e^{-\alpha x}$ に比例して減衰し、傳播速度は

$$c' = \frac{\sigma}{\beta} = \sqrt{gR} \cdot \frac{\sqrt{\cos \theta}}{\cos \theta/2}$$

又地上より見たる傳播速度は

$$c' - u_0 = \frac{\sqrt{gR \cos \theta}}{\cos \theta/2} - u_0 \quad (5.5b)$$

で、ハリスの場合の h は R と同意味であるから、 $\sqrt{\cos \theta} / \cos \frac{\theta}{2}$ なる修正係数を要することが分る。

次に ζ は (5.9) を (5.2b) 式に代入して

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -R \frac{\partial u}{\partial x} = R(i\beta + \alpha) U e^{i\sigma t - (i\beta + \alpha)x}$$

之を積分して

$$\zeta = R \frac{i\beta + \alpha}{i\sigma} U e^{i\sigma t - (i\beta + \alpha)x} + C(x)$$

然るに ζ は平均水面よりの高低であるから、時間に無関係な積分常數 $C(x)$ は 0 でなくてはならぬ。

$$\zeta = RU \frac{\beta - i\alpha}{\sigma} \left\{ \cos(\sigma t - \beta x) + i \sin(\sigma t - \beta x) \right\} e^{-\alpha x}$$

その實數部のみを採用し、且つ (5.11) 式を参考して

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{RU}{\sigma} \left\{ \beta \cos(\sigma t - \beta x) + \alpha \sin(\sigma t - \beta x) \right\} e^{-\alpha x} \\ &= \sqrt{\frac{R}{g \cos \theta}} U e^{-\alpha x} \cos \left(\sigma t - \beta x - \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.6b)$$

之は河口潮汐 $|\zeta|_{x=0} = a \cos \left(\sigma t - \frac{\theta}{2} \right)$ の場合に相當し、又潮汐と潮流との關係を示すもので、ハリスの (5.6) 式には多少の修正を要することが分る。即ち振幅に於て兩者の比には $\sqrt{\cos \theta}$ なる修正係数を要し、位相に於ても

$\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{f}{\sigma}$ の差があり、潮流の方が潮汐よりも數時間だけ進むのである。

楠宗道博士は以上の理論を茨城縣涸沼川に適用した。尤も此の川は涸沼なる大水面から發して海に入るのであるから、其の沼での反射潮浪をも類似の理論によつて計算し、豊富な實測材料によつて檢證し良好な結果を得て居る。

岡本氏の解 以上は潮汐の昇降 ζ を水深 h に比し甚小としての解であるが、然し實際の感潮河川では水深數米に對し ζ が一米内外もあるといふのが少くない。かゝる場合の研究が物部長穂博士と岡本元治郎學士によつて行はれて居るが、前者は多少工學的な略式取扱となつて居るから、茲では後者の方法を紹介する。

岡本學士は抵抗 W を楠博士に倣ひ適當な f を選んで fv とする外は (5.1) 及び (5.2) 式を省略なしに使用するのである。即ち運動方程式は

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -fv - g \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + I_0 \right)$$

に於て、 v を固有流 $-u_0$ と潮流 u に分ち $v = u - u_0$ と置き、且つ潮流なきときは $fu_0 = gI_0$ なることに注意すれば

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u - u_0) \frac{\partial u}{\partial x} = -fu - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (5.1c)$$

又連續方程式は

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [(h + \zeta)(u - u_0)] \quad (5.2c)$$

之を河口 ($x=0$) で

$$|\zeta|_{x=0} = a \cos \sigma t \quad (5.13)$$

なる潮汐があり、遙か上流では全く衰滅して

$$|\zeta|_{x=\infty} = 0 \quad (5.14)$$

となる様に解くのである。

さすれば $u(x, t)$, $\zeta(x, t)$ は共に $e^{i\sigma t}$, $e^{2i\sigma t}$, $e^{3i\sigma t}$, 等の因子を有する項より成ると考へることが出来る。故に $T \equiv e^{i\sigma t}$ とすれば $u(x, t)$, 及び $\zeta(x, t)$ は夫々次の如く表はすことが出来る。

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \dots \\ &= \Re [\varphi_1(x) T + \varphi_2(x) T^2 + \varphi_3(x) T^3 + \dots], \end{aligned}$$

$$\zeta(x,t) = \zeta_1(x,t) + \zeta_2(x,t) + \zeta_3(x,t) + \dots$$

$$= \Re[\psi_1(x)T + \psi_2(x)T^2 + \psi_3(x)T^3 + \dots]$$

是等を微分方程式 (5.1c) 式及び (5.2c) 式に代入して、兩邊の T に就いての同次項の係数を比較すれば、 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots; \psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots$ 等を決定すべき微分方程式が次の通りに得られる。

$$(f+i\sigma)\varphi_1(x) - u_0 \frac{d\varphi_1}{dx} = -g \frac{d\psi_1}{dx} \quad (a_1)$$

$$i\sigma\psi_1(x) - u_0 \frac{d\psi_1}{dx} = -h \frac{d\varphi_1}{dx} \quad (b_1)$$

$$(f+i2\sigma)\varphi_2(x) - u_0 \frac{d\varphi_2}{dx} = -g \frac{d\psi_2}{dx} - \varphi_1(x) \frac{d\varphi_1}{dx} \quad (a_2)$$

$$i2\sigma\psi_2(x) - u_0 \frac{d\psi_2}{dx} = -h \frac{d\varphi_2}{dx} - \frac{d}{dx} [\varphi_1(x)\psi_1(x)] \quad (b_2)$$

$$(f+i3\sigma)\varphi_3(x) - u_0 \frac{d\varphi_3}{dx} = -g \frac{d\psi_3}{dx} - \frac{d}{dx} [\varphi_1(x)\varphi_2(x)] \quad (a_3)$$

$$i3\sigma\psi_3(x) - u_0 \frac{d\psi_3}{dx} = -h \frac{d\varphi_3}{dx} - \frac{d}{dx} [\varphi_1(x)\psi_2(x) + \varphi_2(x)\psi_1(x)] \quad (b_3)$$

次に $\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots$ 等が満足すべき境界条件は夫々に

$$\left. \begin{aligned} |\psi_1(x)|_{x=0} &= a, & |\psi_1(x)|_{x=\infty} &= 0 \\ |\psi_2(x)|_{x=0} &= 0, & |\psi_2(x)|_{x=\infty} &= 0 \\ |\psi_3(x)|_{x=0} &= 0, & |\psi_3(x)|_{x=\infty} &= 0 \end{aligned} \right\} (5.15)$$

である。是等が境界条件 (5.13) 式及び (5.14) 式を満足すること明である。

(i) 第一分素 $\zeta_1(x,t), u_1(x,t)$ の決定。

$$(f+i\sigma)\varphi_1(x) - u_0 \frac{d\varphi_1}{dx} = -g \frac{d\psi_1}{dx} \quad (a_1)$$

$$i\sigma\psi_1(x) - u_0 \frac{d\psi_1}{dx} = -h \frac{d\varphi_1}{dx} \quad (b_1)$$

なる聯立微分方程式を解く。

(a₁) 式を x に就いて微分して、それに (b₁) 式を代入し $\varphi_1(x)$ を消去すれば、 $\psi_1(x)$ の満足すべき微分方程式が得られる。即ち

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{u_0(f+i2\sigma)}{gh-u_0^2} \frac{d\psi_1}{dx} + \frac{\sigma^2-if\sigma}{gh-u_0^2} \psi_1(x) = 0. \quad (5.16)$$

之に $\psi_1(x) = B_1 e^{\lambda_1 x}$ として代入すれば

$$\lambda_1^2 + \frac{u_0(f+i2\sigma)}{gh-u_0^2} \lambda_1 + \frac{\sigma^2-if\sigma}{gh-u_0^2} = 0$$

$$\therefore \lambda_1 = -\frac{u_0}{2(c^2-u_0^2)} \left\{ (f+i2\sigma) \pm \sqrt{f^2 - \frac{4c^2}{u_0^2} \sigma^2 + i \frac{4c^2}{u_0^2} f\sigma} \right\}, \text{ 茲に } c^2 = gh$$

更に p_1, q_1 を共に正数として

$$f^2 - \frac{4c^2}{u_0^2} \sigma^2 + i \frac{4c^2}{u_0^2} f\sigma \equiv (p_1 + iq_1)^2 \quad (5.17)$$

と置けば

$$p_1^2 - q_1^2 = f^2 - \frac{4c^2}{u_0^2} \sigma^2, \quad 2p_1q_1 = \frac{4c^2}{u_0^2} f\sigma$$

である。依つて

$$\left. \begin{aligned} p_1^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(f^2 - \frac{4c^2}{u_0^2} \sigma^2 \right)^2 + \left(\frac{4c^2}{u_0^2} f\sigma \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(f^2 - \frac{4c^2}{u_0^2} \sigma^2 \right) \\ q_1^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(f^2 - \frac{4c^2}{u_0^2} \sigma^2 \right)^2 + \left(\frac{4c^2}{u_0^2} f\sigma \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(f^2 - \frac{4c^2}{u_0^2} \sigma^2 \right) \end{aligned} \right\} (5.18)$$

感潮河川に於いては一般に $u_0 < \sqrt{gh}$ なる関係が満足されて居ると考へることが出来る。故に (5.18) 式より $p_1 > f$ なる関係が成立することが知られる。

依つて

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1' &= -\left\{ \frac{u_0}{2(c^2-u_0^2)} (p_1+f) + i \frac{u_0}{2(c^2-u_0^2)} (q_1+2\sigma) \right\} \equiv -(\alpha_1 + i\beta_1), \\ \lambda_1'' &= \frac{u_0}{2(c^2-u_0^2)} (p_1-f) + i \frac{u_0}{2(c^2-u_0^2)} (q_1-2\sigma) \equiv \alpha_1' + i\beta_1' \end{aligned} \right\} (5.19)$$

と置けば、 $\alpha_1 > 0, \alpha_1' > 0$ である。

微分方程式 (5.16) の一般解は次の如く與へられる。

$$\psi_1(x) = B_1' e^{\lambda_1' x} + B_1'' e^{\lambda_1'' x}$$

然るに境界条件 $|\psi_1(x)|_{x=\infty} = 0$ にして $\alpha_1' > 0$ であるから $B_1'' = 0$ 、又境界条件 $|\psi_1(x)|_{x=0} = a$ より $B_1' = a$ である。故に所要の解

$$\psi_1(x) = a e^{-(\alpha_1 + i\beta_1)x} \quad (5.20)$$

が得られる。従つて潮汐振動の第一分素は

$$\zeta_1(x, t) = \Re [ae^{-(\alpha_1 + i\beta_1)x} e^{i\sigma t}] = ae^{-\alpha_1 x} \cos(\sigma t - \beta_1 x) \quad (5.21)$$

となる。茲に α_1 及び β_1 は (5.19) 式にて與へられる。

(5.20) 式を (b₁) 式に代入して

$$\frac{d\varphi_1}{dx} = -[i\sigma + u_0(\alpha_1 + i\beta_1)] \frac{a}{h} e^{-(\alpha_1 + i\beta_1)x}$$

依つて之を積分して

$$\varphi_1(x) = \frac{i\sigma + u_0(\alpha_1 + i\beta_1)}{\alpha_1 + i\beta_1} \frac{a}{h} e^{-(\alpha_1 + i\beta_1)x} + C_1$$

が得られる。 $\psi_1(x)$ 及び $\varphi_1(x)$ は (a₁) 式を満足すべきであるから $C_1 = 0$ である。それ故に

$$\varphi_1(x) = \frac{i\sigma + u_0(\alpha_1 + i\beta_1)}{\alpha_1 + i\beta_1} \frac{a}{h} e^{-(\alpha_1 + i\beta_1)x} \quad (5.22)$$

である。従つて潮流の第一分素は

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \Re \left[\frac{i\sigma + u_0(\alpha_1 + i\beta_1)}{\alpha_1 + i\beta_1} \frac{a}{h} e^{-(\alpha_1 + i\beta_1)x + i\sigma t} \right] \\ &= \frac{r_1}{h} ae^{-\alpha_1 x} \cos(\sigma t - \beta_1 x + \theta_1) \end{aligned} \quad (5.23)$$

となる。茲に $\frac{i\sigma + u_0(\alpha_1 + i\beta_1)}{\alpha_1 + i\beta_1} \equiv r_1 e^{i\theta_1}$ (5.24)

(ii) 第二分素 $\zeta_2(x, t)$, $u_2(x, t)$.

$$(f + i2\sigma)\varphi_2(x) - u_0 \frac{d\varphi_2}{dx} + g \frac{d\psi_2}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} [\varphi_1(x)]^2 \quad (a_2)$$

$$i2\sigma\psi_2(x) - u_0 \frac{d\psi_2}{dx} + h \frac{d\varphi_2}{dx} = -\frac{d}{dx} [\varphi_1(x)\psi_1(x)] \quad (b_2)$$

なる聯立微分方程式を解く。(b₂) 式より

$$\frac{d\varphi_2}{dx} = -\frac{i2\sigma}{h} \psi_2(x) + \frac{u_0}{h} \frac{d\psi_2}{dx} - \frac{1}{h} \frac{d}{dx} [\varphi_1(x)\psi_1(x)]. \quad (b_2')$$

之を (a₂) 式に代入して

$$\begin{aligned} (f + i2\sigma)\varphi_2(x) + \frac{i2\sigma}{h} u_0 \psi_2(x) + \frac{gh - u_0^2}{h} \frac{d\psi_2}{dx} \\ = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} [\varphi_1(x)]^2 - \frac{u_0}{h} \frac{d}{dx} [\varphi_1(x)\psi_1(x)] \end{aligned}$$

が得られる。之を x に就いて微分して (b₂') 式を代入すれば $\psi_2(x)$ が満足す

べき微分方程式が得られる。即ち

$$\begin{aligned} (gh - u_0^2) \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + u_0(f + i2\sigma) \frac{d\psi_2}{dx} + (4\sigma^2 - i2f\sigma)\psi_2(x) \\ = (f + i2\sigma) \frac{d}{dx} [\varphi_1(x)\psi_1(x)] - u_0 \frac{d^2}{dx^2} [\varphi_1(x)\psi_1(x)] - \frac{h}{2} \frac{d^2}{dx^2} [\varphi_1(x)]^2 \end{aligned} \quad (5.25)$$

先づ此の微分方程式の餘函數を求める。微分方程式

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{u_0(f + i2\sigma)}{gh - u_0^2} \frac{d\psi_2}{dx} + \frac{4\sigma^2 - i2f\sigma}{gh - u_0^2} \psi_2(x) = 0$$

に $\psi_2(x) = B_2 e^{\lambda_2 x}$ として代入すれば、 λ_2 を決定する二次方程式が得られる。それを解いて

$$\lambda_2 = -\frac{u_0}{2(c^2 - u_0^2)} \left\{ (f + i2\sigma) \pm \sqrt{f^2 - 16 \frac{c^2}{u_0^2} \sigma^2 + i8 \frac{c^2}{u_0^2} f\sigma} \right\}$$

今簡単のため

$$f^2 - 16 \frac{c^2}{u_0^2} \sigma^2 + i8 \frac{c^2}{u_0^2} f\sigma \equiv (p^2 + iq^2)^2$$

と置けば

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(f^2 - 16 \frac{c^2}{u_0^2} \sigma^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{8c^2}{u_0^2} f\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \right\} + \frac{1}{2} \left(f^2 - 16 \frac{c^2}{u_0^2} \sigma^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ q_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(f^2 - 16 \frac{c^2}{u_0^2} \sigma^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{8c^2}{u_0^2} f\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \right\} - \frac{1}{2} \left(f^2 - 16 \frac{c^2}{u_0^2} \sigma^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

となる。上述の通り $u_0 < \sqrt{gh}$ なる関係が成立すると考へられるから、 $p_2 > f$ であることが知られる。従つて λ_2 の二つの値は

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2' &= -\left\{ \frac{u_0}{2(c^2 - u_0^2)} (p_2 + f) + i \frac{u_0}{2(c^2 - u_0^2)} (q_2 + 4\sigma) \right\} \equiv -(\alpha_2 + i\beta_2), \\ \lambda_2'' &= \frac{u_0}{2(c^2 - u_0^2)} (p_2 - f) + i \frac{u_0}{2(c^2 - u_0^2)} (q_2 - 4\sigma) \equiv \alpha_2' + i\beta_2' \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

となり、且つ $\alpha_2 > 0$, $\alpha_2' > 0$ である。

故に境界条件 $|\psi_2(x)|_{x=\infty} = 0$ を満足する餘函數は次の如くである。

$$\psi_2(x) = B_2' e^{-(\alpha_2 + i\beta_2)x}$$

(5.20) 及び (5.22) 式より

$$\varphi_1(x)\psi_1(x) = \frac{i\sigma + u_0(\alpha_1 + i\beta_1)}{\alpha_1 + i\beta_1} \left(\frac{a}{h} \right) ae^{-2(\alpha_1 + i\beta_1)x}$$

$$\frac{h}{2} [\varphi_1(x)]^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{i\sigma + u_0(\alpha_1 + i\beta_1)}{\alpha_1 + i\beta_1} \right)^2 \left(\frac{a}{h} \right) a e^{-2(\alpha_1 + i\beta_1)x}$$

であるから

$$(f + i2\sigma) \frac{d}{dx} [\varphi_1(x)\psi_1(x)] - u_0 \frac{d^2}{dx^2} [\varphi_1(x)\psi_1(x)] - \frac{h}{2} \frac{d^2}{dx^2} [\psi_1(x)]^2 = -[i\sigma + u_0(\alpha_1 + i\beta_1)] [(f + i3\sigma) + 3u_0(\alpha_1 + i\beta_1)] \frac{a}{h} e^{-2(\alpha_1 + i\beta_1)x}$$

となる。故に微分方程式(5.25)の特解は $B_2' e^{-2(\alpha_1 + i\beta_1)x}$ であることが知られる。

之を式(5.25)に代入して

$$B_2' = -\frac{f + i3\sigma + 3u_0(\alpha_1 + i\beta_1)}{f} \left(\frac{a}{h} \right) a$$

而して微分方程式の一般解は

$$\psi_2(x) = B_2' e^{-2(\alpha_1 + i\beta_1)x} + B_2'' e^{-2(\alpha_1 + i\beta_1)x}$$

である。然るに境界条件 $[\psi_2(x)]_{x=0} = 0$ を満足するから

$$B_2' = -B_2'' = \frac{f + i3\sigma + 3u_0(\alpha_1 + i\beta_1)}{f}$$

従つて微分方程式(5.25)の一般解は

$$\psi_2(x) = \frac{f + i3\sigma + 3u_0(\alpha_1 + i\beta_1)}{f} \frac{a}{h} [a e^{-(\alpha_1 + i\beta_1)x} - a e^{-2(\alpha_1 + i\beta_1)x}] \quad (5.28)$$

となる。依つて潮汐振動の第二分素は

$$\zeta_2(x, t) = \Re \left\{ \frac{f + i3\sigma + 3u_0(\alpha_1 + i\beta_1)}{f} \left(\frac{a}{h} \right) \left[a e^{-(\alpha_1 + i\beta_1)x + i2\sigma t} - a e^{-2(\alpha_1 + i\beta_1)x + i2\sigma t} \right] \right\} = r_2 \left(\frac{a}{h} \right) \left[a e^{-\alpha_1 x} \cos(2\sigma t - \beta_2 x + \theta_2) - a e^{-2\alpha_1 x} \cos(2\sigma t - 2\beta_1 x + \theta_2) \right] \quad (5.29)$$

である。茲に

$$\frac{f + i3\sigma + 3u_0(\alpha_1 + i\beta_1)}{f} \equiv r_2 e^{i\theta_2} \quad (5.30)$$

次に式(5.28)を式(5.2)に代入すれば

$$\frac{d\varphi_2}{dx} = -\frac{[i2\sigma + u_0(\alpha_2 + i\beta_2)] [f + i3\sigma + 3u_0(\alpha_1 + i\beta_1)]}{f} \left(\frac{a}{h} \right)^2 e^{-(\alpha_2 + i\beta_2)x} + \frac{2[i\sigma + u_0(\alpha_1 + i\beta_1)] [(2f + i3\sigma) + 3u_0(\alpha_1 + i\beta_1)]}{f} \left(\frac{a}{h} \right)^2 e^{-2(\alpha_1 + i\beta_1)x}$$

之を x に就いて積分して次の結果が得られる。

$$\varphi_2(x) = \frac{[i2\sigma + u_0(\alpha_2 + i\beta_2)] [f + i3\sigma + 3u_0(\alpha_1 + i\beta_1)]}{f(\alpha_2 + i\beta_2)} \left(\frac{a}{h} \right)^2 e^{-(\alpha_2 + i\beta_2)x} - \frac{[i\sigma + u_0(\alpha_1 + i\beta_1)] [(2f + i3\sigma) + 3u_0(\alpha_1 + i\beta_1)]}{f(\alpha_1 + i\beta_1)} \left(\frac{a}{h} \right)^2 e^{-2(\alpha_1 + i\beta_1)x} + C_2 \quad (5.31)$$

$\varphi_2(x), \psi_2(x)$ は(5.2)式を満足すべきであるから積分常數 C_2 は零である。従つて潮流の第二分素は次の如く與へられる。

$$u_2(x, t) = \Re \left\{ \frac{[i2\sigma + u_0(\alpha_2 + i\beta_2)] [f + i3\sigma + 3u_0(\alpha_1 + i\beta_1)]}{(\alpha_2 + i\beta_2)f} \left(\frac{a}{h} \right)^2 e^{-(\alpha_2 + i\beta_2)x + i2\sigma t} \right\} - \Re \left\{ \frac{[i\sigma + u_0(\alpha_1 + i\beta_1)] [(2f + i3\sigma) + 3u_0(\alpha_1 + i\beta_1)]}{(\alpha_1 + i\beta_1)f} \left(\frac{a}{h} \right)^2 e^{-(\alpha_1 + i\beta_1)x + i2\sigma t} \right\} = r_3 \left(\frac{a}{h} \right)^2 e^{-\alpha_2 x} \cos(2\sigma t - \beta_2 x + \theta_3) - r_4 \left(\frac{a}{h} \right)^2 e^{-2\alpha_1 x} \cos(2\sigma t - 2\beta_1 x + \theta_4) \quad (5.32)$$

茲に

$$\left. \begin{aligned} \frac{[i2\sigma + u_0(\alpha_2 + i\beta_2)] [f + i3\sigma + 3u_0(\alpha_1 + i\beta_1)]}{(\alpha_2 + i\beta_2)f} &\equiv r_3 e^{i\theta_3}, \\ \frac{[i\sigma + u_0(\alpha_1 + i\beta_1)] [(2f + i3\sigma) + 3u_0(\alpha_1 + i\beta_1)]}{(\alpha_1 + i\beta_1)f} &\equiv r_4 e^{i\theta_4} \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

第三次以上の分素も上と同様の手續にて求めることが出来る。しかし夫れ等は非常に小であるから實用上は不要である。故に茲には夫等を求めることを省略する。

上に於て求めた解を纏めて書けば次の如くである。

$$u(x, t) = -u_0 + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots = -u_0 + \frac{r_1}{h} a e^{-\alpha_1 x} \cos(\sigma t - \beta_1 x + \theta_1) + \frac{r_3}{h} \frac{a}{h} a e^{-\alpha_2 x} \cos(2\sigma t - \beta_2 x + \theta_3) - \frac{r_4}{h} \frac{a}{h} a e^{-2\alpha_1 x} \cos(2\sigma t - 2\beta_1 x + \theta_4) + \dots \quad (5.34)$$

$$\zeta(x, t) = I_0 x + \zeta(x, t) = I_0 + \zeta_1(x, t) + \zeta_2(x, t) + \dots = I_0 x + a e^{-\alpha_1 x} \cos(\sigma t - \beta_1 x) + r_2 \frac{a}{h} [a e^{-\alpha_1 x} \cos(2\sigma t - \beta_2 x + \theta_2) - a e^{-2\alpha_1 x} \cos(2\sigma t - 2\beta_1 x + \theta_2)] + \dots \quad (5.35)$$

この内、第一次分素 ζ_1, u_1 は楠博士の解に相當し、而も潮汐と潮流との位相

差も振幅比も楠博士の解に若干の修正を要することが分る。第二次以上の分素 $\zeta_2, u_2, \zeta_3, u_3, \dots$ は所謂倍潮 (Over-tides) で、基本潮に比すれば極めて小さい。

尙ほ抵抗係数 f の数値を選定するには、潮汐一週期間の平均では、抵抗がシェーger法則に従ふとしても速度の一乗に比例するとしても同じ平均流速と平均勾配を與ふる様にする。處で平均流速は結局河川の固有流速 $-u_0$ であり、平均勾配は I_0 に外ならぬ故

$$u_0 = C\sqrt{hI_0} = \frac{gI_0}{f} \quad \therefore f = \frac{g}{C}\sqrt{\frac{I_0}{h}} \quad (5.36)$$

として、シェーgerの粗度係数 C に従つて f を決定すればよい。

5.3 感潮河口の形状 既に述べた如く掃流力も、又平均の渦動粘性も水深 h と流速 u の積に比例すると考へられるから、潮流の強い感潮河口は各断面が洗掘堆積の平均する様に等深等速にならうとする傾向があつて、それに應ずる川幅を有するのが最も安全だと考へられる。ハリス (HARRIS) は其の様な場合に感潮河口の形状を決定した。極めて粗つぽい計算ではあるが興味ある問題故紹介しよう。

先づ河幅 b 水深 h の處で、潮汐 $\zeta = a \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{c} \right)$ が有するエネルギーは、一波長 $\lambda = c \cdot T = \sqrt{gh} \cdot T$ につき

$$\begin{aligned} \text{位置エネルギー} &= \frac{1}{4} \rho \lambda a^2 b, & \text{運動エネルギー} &= \frac{1}{4} \rho \lambda a^2 b \\ \therefore \text{全エネルギー} &= E = \frac{1}{2} \rho \lambda a^2 b \end{aligned} \quad (5.37)$$

である。故に若しエネルギーが衰滅せずには傳はるならば潮差 $2a$ は $b^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{4}}$ に反比例して變化すべきである。

然し實際は距離 dx の間に抵抗が潮流速度 u の二乗に比例して働き

$$\text{抵抗} = K \frac{\rho}{2} u^2 b dx \quad (5.38)$$

によつて、 dt 時間にはエネルギー損耗が

$$\text{抵抗} \times u dt = K \frac{\rho}{2} u^3 b dx dt \quad (5.39)$$

生ずる。然るに潮流と潮汐との間には近似的に

$$u = \zeta \sqrt{g/h} \quad (5.40)$$

なる関係があるから、

$$dt \text{ 時間の勢力損耗} = K \frac{\rho}{2} \left(\frac{g}{h} \right)^{\frac{3}{2}} \zeta^3 b dx dt \quad (5.41)$$

之を一週期 T の間積分すれば

$$K \frac{\rho}{2} \left(\frac{g}{h} \right)^{\frac{3}{2}} b dx \cdot 4 \int_0^T \zeta^3 dt = \frac{\rho}{2} K \left(\frac{g}{h} \right)^{\frac{3}{2}} b dx \times \frac{4}{3} \frac{T a^3}{\pi} \quad (5.42)$$

更に之を河口 ($x=0$) より上流 x 點まで積分すれば

$$\text{エネルギー消耗} = \frac{4T}{3\pi} K \frac{\rho}{2} \int_0^x a^3 b \left(\frac{g}{h} \right)^{\frac{3}{2}} dx \quad (5.43)$$

然るに之は河口と x との二断面に於けるエネルギー差に當るから、河口の川幅を b_0 、潮汐振幅を a_0 にて表はせば

$$a^2 b + \frac{4K}{3\pi h^2} \int_0^x a^3 b dx = a_0^2 b_0 \quad (5.44)$$

今茲に潮流の洗掘作用により、水深 h も潮流 u も各断面一定となる様に川幅が調節されて居るとすれば、當然潮汐振幅 a も一定なるが故、前式を x にて微分し

$$\frac{1}{b} \frac{db}{dx} = -\frac{4}{3} \frac{K}{\pi h^2} a \quad (5.45)$$

を得る。之をときて

$$b = b_0 e^{-kx}, \quad \text{但し} \quad k = \frac{4}{3} \frac{K}{\pi h^2} a \quad (5.46)$$

ハリスは此の公式を Humber 河の川幅變化に適用し第45表の如く割合良好な一致を見た。

第45表 ハンバー河口の形状

| 河口より距離 x (ml) | | 0 | 5 | 15 | 20 | 25 | 40 | 45 |
|-----------------|----|-------|-------|------|------|------|------|-----|
| 河幅 b (ft) | 實測 | 18000 | 10800 | 7392 | 4950 | 3300 | 1320 | 924 |
| | 想定 | 18000 | 12942 | 6690 | 4810 | 3458 | 1285 | 924 |