

## II. Geschlossene symmetrische Rechteckrahmen mit gleichmäßig verteilter Innen- oder Außenbelastung (Behälter).

### § 1. Aufstellung der Bestimmungsgleichungen.

Der in Abb. 78 dargestellte Rahmen ist  $n$ -fach statisch unbestimmt. Infolge der symmetrischen Lagerung sind alle  $\mu = 0$ .

Für den ersten Behälter lauten die Gleichungen:

$$\mathfrak{M}_{1-1'} = \frac{\omega_1 b^2}{12},$$

$$\mathfrak{M}_{1-2} = \mathfrak{M}_{2-1} = \frac{\omega_1 l_1^2}{12}.$$

Setzt man darin:

$$\frac{\omega_1 b^2}{12} = \mathfrak{M}'_1, \quad \frac{\omega_1 l_1^2}{12} = \mathfrak{M}_1$$

und

$$\mathfrak{M}'_1 - \mathfrak{M}_1 = \tau_1,$$

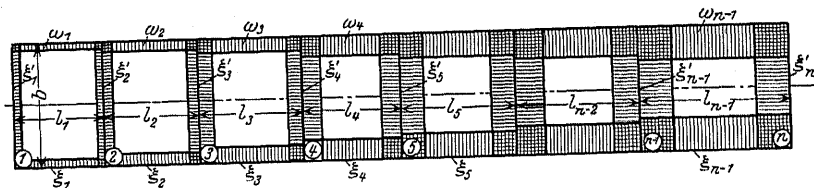


Abb. 78.

so erhält man analog für den zweiten Behälter:

$$\frac{\omega_2 b^2}{12} = \mathfrak{M}'_2, \quad \frac{\omega_2 l_2^2}{12} = \mathfrak{M}_2$$

und

$$\mathfrak{M}'_2 - \mathfrak{M}_2 = \tau_2.$$

Allgemeiner:

$$(A) \quad \mathfrak{M}'_r - \mathfrak{M}_r = \tau_r.$$

Die Momentengleichungen am Knotenpunkt 1 lauten:

$$M - \mathfrak{M}_{1-1'} = \xi'_1 \{ 2\varphi_1 - \varphi_1 \} + \mathfrak{M}'_1,$$

$$M - \mathfrak{M}_{1-2} = \xi_1 \{ 2\varphi_1 + \varphi_2 \} - \mathfrak{M}_1.$$

Die Gleichgewichtsbedingung  $\sum M_1 = 0$  liefert:

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi_1 (\varrho_1) + \varphi_2 \xi_1 = -\tau_1, \\ \text{worin} \\ \varrho_1 = \varrho_1 - \xi'_1, \\ \tau_1 = \mathfrak{M}'_1 - \mathfrak{M}_1. \end{cases}$$

In analoger Weise lauten die Knotengleichungen:

am Knotenpunkt 2:

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi_1 \xi_1 + \varphi_2 (\varrho_2) + \varphi_3 \xi_2 + \tau_1 - \tau_2, \\ \text{worin} \\ \varrho_2 = \varrho_2 - \xi'_2, \\ \tau_1 = \mathfrak{M}'_1 - \mathfrak{M}_1, \quad \tau_2 = \mathfrak{M}'_2 - \mathfrak{M}_2, \end{cases}$$

am Knotenpunkt 3:

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_2 \xi_2 + \varphi_3 (\varrho_3) + \varphi_4 \xi_3 = \tau_2 - \tau_3, \\ \text{worin} \\ \varrho_3 = \varrho_3 - \xi'_3, \\ \tau_2 = \mathfrak{M}'_2 - \mathfrak{M}_2, \quad \tau_3 = \mathfrak{M}'_3 - \mathfrak{M}_3, \end{cases}$$

am Knotenpunkt  $n$ :

$$(n) \quad \begin{cases} \varphi_{n-1} \xi_{n-1} + \varphi_n (\varrho_n) = \tau_{n-1}, \\ \text{worin} \\ \varrho_n = \varrho_n - \xi'_n, \\ \tau_{n-1} = \mathfrak{M}'_{n-1} - \mathfrak{M}_{n-1}, \end{cases}$$

allgemeiner:

am Knotenpunkt  $r$ :

$$(B) \quad \begin{cases} \varphi_{r-1} \xi_{r-1} + \varphi_r (\varrho_r) + \varphi_{r+1} \xi_r = \tau_{r-1} - \tau_r, \\ \text{worin} \\ \varrho_r = \varrho_r - \xi'_r, \\ \tau_{r-1} = \mathfrak{M}'_{r-1} - \mathfrak{M}_{r-1}, \quad \tau_r = \mathfrak{M}'_r - \mathfrak{M}_r. \end{cases}$$

In Tabelle XXXVIII sind die vorliegenden Bestimmungsgleichungen übersichtlich angegeben und man bemerkt darin vollkommene Spiegelsymmetrie in bezug auf die diagonale ( $\varrho$ )-Linie und regelmäßige Anordnung von  $\tau$ .

Tabelle XXXVIII.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung								Rechte Seite der Gleichung
	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\rightarrow$	$\varphi_{n-1}$	$\varphi_n$	
(1)	$(\varrho_1)$	$\xi_1$							$-\tau_1$
(2)	$\xi_1$	$(\varrho_2)$	$\xi_2$						$\tau_1 - \tau_2$
(3)		$\xi_2$	$(\varrho_3)$	$\xi_3$					$\tau_2 - \tau_3$
(4)			$\xi_3$	$(\varrho_4)$	$\xi_4$				$\tau_3 - \tau_4$
$\downarrow$				$\xi_4$	$\downarrow$				$\downarrow$
$(n-1)$						$\xi_{n-2}$	$(\varrho_{n-1})$	$\xi_{n-1}$	$\tau_{n-2} - \tau_{n-1}$
(n)							$\xi_{n-1}$	$(\varrho_n)$	$\tau_{n-1}$

### § 2. Sonderfälle.

Sonderfall I. Gesucht sind die Knotenpunktsmomente an dem in Abb. 79 dargestellten Behälter.

Es sind dabei:

$$\tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \dots = \tau_{n-1} = 0.$$

Damit erhält man aus Tabelle XXXVIII die folgende Tabelle XXXIX.

Tabelle XXXIX.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung								Rechte Seite der Gleichung
	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\rightarrow$	$\varphi_{n-1}$	$\varphi_n$	
(1)	$(\varrho_1)$	$\xi_1$							$-\tau_1$
(2)	$\xi_1$	$(\varrho_2)$	$\xi_2$						$\tau_1$
(3)		$\xi_2$	$(\varrho_3)$	$\xi_3$					0
(4)			$\xi_3$	$(\varrho_4)$	$\xi_4$				0
$\downarrow$				$\downarrow$	$\downarrow$				$\downarrow$
(n-1)					$\xi_{n-2}$	$(\varrho_{n-1})$	$\xi_{n-1}$		0
(n)					$\xi_{n-1}$	$(\varrho_n)$			0

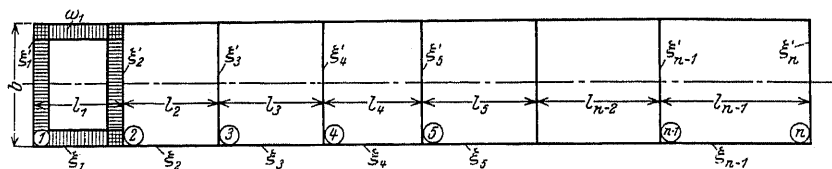


Abb. 79.

Aus Tabelle XXXIX kann man die n Unbekannten  $\varphi_1$  bis  $\varphi_n$  durch das Iterationsverfahren I bestimmen.

**Sonderfall II.** Der in Abb. 80 dargestellte Rahmen ist ebenfalls n-fach statisch unbestimmt; die Unbekannten können aus Tabelle XL durch das Iterationsverfahren I bestimmt werden.

Tabelle XL.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung								Rechte Seite der Gleichung
	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\rightarrow$	$\varphi_{n-1}$	$\varphi_n$	
(1)	$(\varrho_1)$	$\xi_1$							0
(2)	$\xi_1$	$(\varrho_2)$	$\xi_2$						$-\tau_2$
(3)		$\xi_2$	$(\varrho_3)$	$\xi_3$					$\tau_2$
(4)			$\xi_3$	$(\varrho_4)$	$\xi_4$				0
$\downarrow$				$\downarrow$	$\downarrow$				$\downarrow$
(n-1)					$\xi_{n-2}$	$(\varrho_{n-1})$	$\xi_{n-1}$		0
(n)					$\xi_{n-1}$	$(\varrho_n)$			0

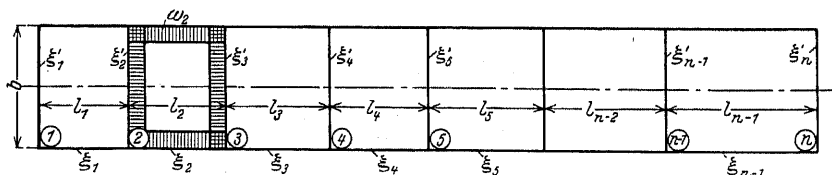


Abb. 80.

**Sonderfall III.** Es sollen die Knotenpunktmomente nach dem in Abb. 81 dargestellten Behälter ermittelt werden.

Die rechte Seite der Gleichungen von Tabelle XXXVIII möge, wie folgt, umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 -\tau_1 &= -(\mathfrak{M}'_1 - \mathfrak{M}_1), \\
 \tau_1 - \tau_2 &= \mathfrak{M}'_1 - \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}'_2 + \mathfrak{M}_2, \\
 \tau_2 - \tau_3 &= \mathfrak{M}'_2 - \mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}'_3 + \mathfrak{M}_3, \\
 &\vdots \\
 \tau_{n-2} - \tau_{n-1} &= \mathfrak{M}'_{n-2} - \mathfrak{M}_{n-2} - \mathfrak{M}'_{n-1} + \mathfrak{M}_{n-1}, \\
 \tau_{n-1} &= \mathfrak{M}'_{n-1} - \mathfrak{M}_{n-1}.
 \end{aligned}$$

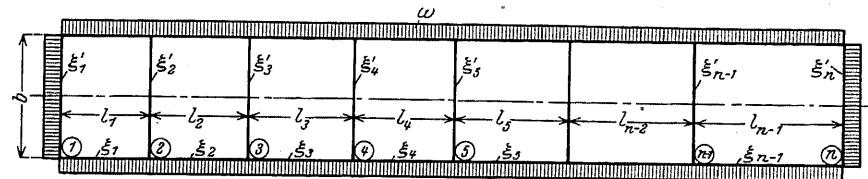


Abb. 81.

Da aber die Belastung hierbei von außen wirkt und gleichmäßig verteilt ist, so kann man den gegebenen Rahmen durch Einsetzung in Tabelle XXXVIII auf folgende Weise berechnen:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{M}'_1 &= \mathfrak{M}'_2 = \mathfrak{M}'_3 = \dots = \mathfrak{M}'_{n-1} = -\mathfrak{M}_{(b)} = -\frac{\omega b^2}{12}, \\
 \mathfrak{M}_1 &= -\mathfrak{M}_{(1)} = -\frac{\omega l_1^2}{12}, & \mathfrak{M}_2 &= -\mathfrak{M}_{(2)} = -\frac{\omega l_2^2}{12}, \\
 \mathfrak{M}_3 &= -\mathfrak{M}_{(3)} = -\frac{\omega l_3^2}{12}, \\
 &\vdots \\
 \mathfrak{M}_{n-1} &= -\mathfrak{M}_{(n-1)} = -\frac{\omega l_{n-1}^2}{12}.
 \end{aligned}$$

Damit erhält man aus Tabelle XXXVIII die folgende Tabelle, die die n Unbekannten  $\varphi_1$  bis  $\varphi_n$  bestimmen läßt (Tabelle XLI).

Tabelle XLI.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung								Rechte Seite der Gleichung
	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\rightarrow$	$\varphi_{n-1}$	$\varphi_n$	
(1)	$(\varrho_1)$	$\xi_1$							$\mathfrak{M}_{(b)} - \mathfrak{M}_{(1)}$
(2)	$\xi_1$	$(\varrho_2)$	$\xi_2$						$\mathfrak{M}_{(1)} - \mathfrak{M}_{(2)}$
(3)		$\xi_2$	$(\varrho_3)$	$\xi_3$					$\mathfrak{M}_{(2)} - \mathfrak{M}_{(3)}$
(4)			$\xi_3$	$(\varrho_4)$	$\xi_4$				$\mathfrak{M}_{(3)} - \mathfrak{M}_{(4)}$
$\downarrow$				$\downarrow$	$\downarrow$				$\downarrow$
(n-1)					$\xi_{n-2}$	$(\varrho_{n-1})$	$\xi_{n-1}$		$\mathfrak{M}_{(n-2)} - \mathfrak{M}_{(n-1)}$
(n)					$\xi_{n-1}$	$(\varrho_n)$			$\mathfrak{M}_{(n-1)} - \mathfrak{M}_{(b)}$

### § 3. Zahlenbeispiel.

Gesucht sind die Knotenpunktmomente an dem in Abb. 82 skizzierten Behälter. Aus den in Abb. 82 eingesetzten Zahlen berechnen sich:

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \dots = \xi_7 = \frac{280}{280} = 1,0 \text{ cm}^3,$$

$$\xi'_1 = \xi'_2 = \xi'_3 = \dots = \xi'_8 = \frac{400}{400} = 1,0 \text{ cm}^3,$$

somit ergeben sich:

$$(\varrho_1) = (\varrho_8) = 2(1,0 + 1,0) - 1,0 = 3,0 \text{ cm}^3,$$

$$(\varrho_2) = (\varrho_3) = (\varrho_4) = \dots = (\varrho_7) = 2(1,0 + 1,0 + 1,0) - 1,0 = 5,0 \text{ cm}^3.$$

Mit diesen Werten erhält man aus Tabelle XXXIX die Tabelle XLII, welche die acht Unbekannten  $\varphi_1$  bis  $\varphi_8$  bestimmen läßt.

Tabelle XLII.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung								Rechte Seite der Gleichung
	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\varphi_6$	$\varphi_7$	$\varphi_8$	$\tau_1$
(1)	3	1							-1
(2)	1	5	1						+1
(3)		1	5	1					0
(4)			1	5	1				0
(5)				1	5	1			0
(6)					1	5	1		0
(7)						1	5	1	0
(8)							1	3	0

Aus Tabelle XLII ergeben sich durch das Iterationsverfahren I:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -0,433, \\ \varphi_2 &= 0,299, \\ \varphi_3 &= -0,062, \\ \varphi_4 &= 0,013, \\ \varphi_5 &= -0,0027, \\ \varphi_6 &= 0,00056, \\ \varphi_7 &= -0,00012, \\ \varphi_8 &= 0,00003. \end{aligned}$$

(Multiplikator:  $\tau_1$ )

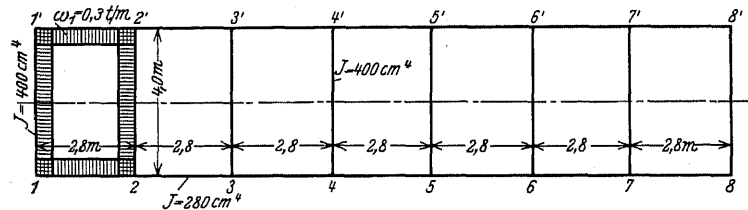


Abb. 82.

Mit den Näherungswerten erhält man:

am Knotenpunkt 1:

$$M_{1-2} = 1,0 \{2(-0,433) + 0,299\} \tau_1 - \mathfrak{M}_1,$$

worin

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{\omega_1 l^2}{12} = \frac{0,3(2,8)^2}{12} = 0,196 \text{ t} \cdot \text{m} = 19,6 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$\tau_1 = \mathfrak{M}'_1 - \mathfrak{M}_1 = \frac{0,3(4,0)^2}{12} - 0,196 = 0,204 \text{ t} \cdot \text{m} = 20,4 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Damit folgt:

$$M_{1-2} = 1,0 \{2(-0,433) + 0,299\} (20,4) - 19,6 = -31,2 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{1-1'} = 1,0 \{2(-0,433) + 0,433\} (20,4) + 40 = 31,2 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Am Knotenpunkt 2 ergibt sich:

$$M_{2-3} = 1,0 \{2(0,299) - 0,062\} (20,4) = 10,9 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{2-1} = 1,0 \{2(0,299) - 0,433\} (20,4) + 19,6 = 23,0 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{2-2'} = 1,0 \{2(0,299) - 0,299\} (20,4) - 40,0 = 33,9 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

am Knotenpunkt 3:

$$M_{3-4} = 1,0 \{2(-0,062) + 0,013\} (20,4) = -2,3 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{3-2} = 1,0 \{2(-0,062) + 0,299\} (20,4) = 3,6 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{3-3'} = 1,0 \{2(-0,062) + 0,062\} (20,4) = -1,3 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

am Knotenpunkt 4:

$$M_{4-5} = 1,0 \{2(0,013) - 0,0027\} (20,4) = 0,47 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{4-3} = 1,0 \{2(0,013) - 0,062\} (20,4) = -0,73 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{4-4'} = 1,0 \{2(0,013) - 0,013\} (20,4) = 0,26 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

am Knotenpunkt 5:

$$M_{5-6} = 1,0 \{2(-0,0027) + 0,00056\} (20,4) = -0,10 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{5-4} = 1,0 \{2(-0,0027) + 0,013\} (20,4) = 0,16 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{5-5'} = 1,0 \{2(-0,0027) + 0,0027\} (20,4) = -0,06 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

am Knotenpunkt 6:

$$M_{6-7} = 1,0 \{2(0,00056) - 0,00012\} (20,4) = 0,02 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{6-5} = 1,0 \{2(0,00056) - 0,0027\} (20,4) = -0,03 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{6-6'} = 1,0 \{2(0,00056) - 0,00056\} (20,4) = 0,01 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

am Knotenpunkt 7:

$$M_{7-8} = 1,0 \{2(-0,00012) + 0,00004\} (20,4) = -0,0041 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{7-6} = 1,0 \{2(-0,00012) + 0,00056\} (20,4) = 0,0065 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{7-7'} = 1,0 \{2(-0,00012) + 0,00012\} (20,4) = -0,0024 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

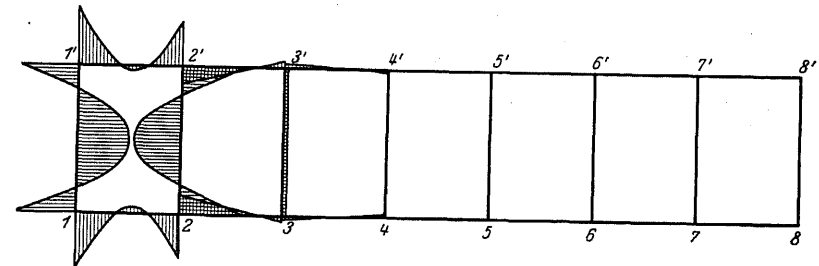


Abb. 83.

am Knotenpunkt 8:

$$M_{8-7} = 1,0 \{2(0,00004) - 0,00012\} (20,4) = -0,0008 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{8-8'} = 1,0 \{2(0,00004) - 0,00004\} (20,4) = 0,0008 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Mit diesen Rechnungsergebnissen sind die Biegemomente in Abb. 83 eingetragen.