

Erster Abschnitt.

I. Rechteckrahmen mit beliebiger vertikaler Belastung auf den Balken und waagerechter Einzellast in jedem Knotenpunkt auf der vertikalen linken Seite.

§ 1. Grundgleichungen.

Wie schon von mehreren Fachgelehrten, so werden auch hier die Knotendrehwinkel ϑ und die Stabdrehwinkel ψ als statisch unbestimmte Größen gewählt. Unter Knotendrehwinkel verstehen wir den Winkel, um welchen sich irgend ein Knoten des Rahmenwerkes nach der Belastung in der Rahmenwerksebene gedreht hat. Unter Stabdrehwinkel verstehen wir den Winkel, um welchen sich die

Verbindungsline der Endpunkte eines Stabes gegen die ursprüngliche Stellung nach der Belastung in der Tragwerkebene gedreht hat.

Der Grad der statischen Unbestimmtheit ist durch die Anzahl der beiden Drehwinkel gegeben. Das Vorzeichen der Knotendrehwinkel, der Stabdrehwinkel und auch der Knoteneinspannungsmomente ist im Uhrzeigersinne stets positiv, im umgekehrten Sinne negativ anzunehmen (Abb. 1).

Um die bekannten Grundgleichungen zu entwickeln, beginnen wir mit der Untersuchung eines einzelnen, zu einem mehrstieligen und mehrstöckigen Rechteckrahmen gehörigen Stabes, der durch ein Paar sehr nahe gelegene Schnitte an den Knotenpunkten k und s begrenzt sei.

In Abb. 2 stellt $k-s$ die ursprüngliche Lage des Rahmenstabes dar; die Punkte k und s werden nach k'

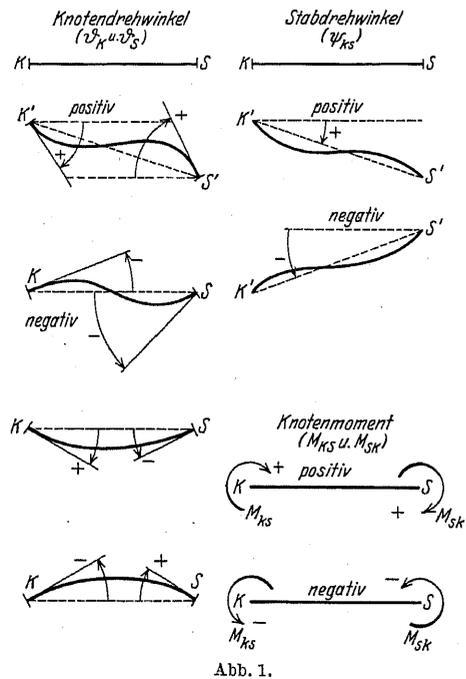


Abb. 1.

und s' durch die Belastung verschoben.

Wenn der Stab $k-s$ mit konstantem Trägheitsmoment J_{ks} und konstantem Elastizitätsmodul E durch irgend eine Belastung rechtwinklig zur Stabachse, außerdem aber auch durch die beiden Einspannungsmomente M_{ks} und M_{sk} belastet wird, dann gelten unter Verwendung des Mohrschen Satzes die folgenden

bekanntenen Ausdrücke:

$$(I) \quad \begin{cases} M_{ks} = \xi_{ks} \{ 2\varphi_k + \varphi_s + \mu_{ks} \} - \mathfrak{M}_{ks}, \\ M_{sk} = \xi_{ks} \{ 2\varphi_s + \varphi_k + \mu_{ks} \} + \mathfrak{M}_{sk}^*, \end{cases}$$

worin

$$(II) \quad \begin{cases} \xi_{ks} = \frac{J_{ks}}{l_{ks}}, & \mu_{ks} = -6E\psi_{ks}, \\ \varphi_k = 2E\vartheta_k, & \varphi_s = 2E\vartheta_s, \\ \mathfrak{M}_{ks} = \frac{2F}{l_{ks}} \{ 3\lambda - l_{ks} \}, & \mathfrak{M}_{sk} = \frac{2F}{l_{ks}} \{ 2l_{ks} - 3\lambda \}. \end{cases}$$

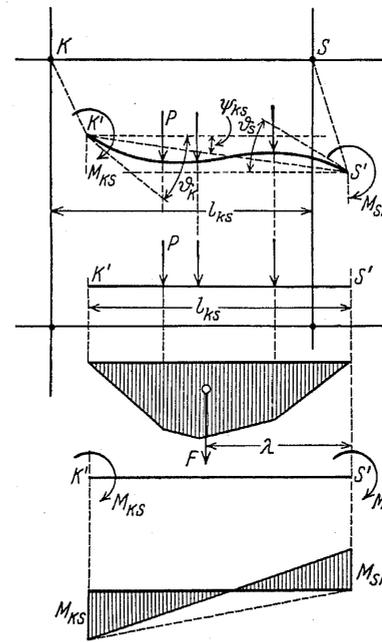


Abb. 2.

\mathfrak{M} stellt dabei den Einfluß der äußeren Belastung des Stabes dar, und F bedeutet den Inhalt der Momentenfläche des freiaufliegenden Trägers (Abb. 2).

Setzt man in Gl. (I)

$$\varphi_k = \varphi_s = \mu_{ks} = 0,$$

so hat man

$$M_{ks} = -\mathfrak{M}_{ks},$$

$$M_{sk} = \mathfrak{M}_{sk}.$$

Also stellt mit anderen Worten \mathfrak{M} die negativen Einspannungsmomente des beiderseits eingespannten Trägers dar.

Für eine Einzellast an beliebiger Stelle (Abb. 3) gilt

$$\mathfrak{M}_{ks} = \frac{Pa^2b}{l^2},$$

$$\mathfrak{M}_{sk} = \frac{Pa^2b}{l^2}.$$

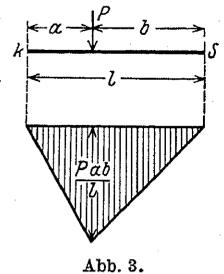


Abb. 3.

Die folgenden Tabellen Ia und Ib können uns dabei für verschiedene Belastungsfälle gute Dienste leisten.

Fällt in der Gl. (I) der Stabdrehwinkel weg, so lautet die Gl. (I) einfach

$$(Ia) \quad \begin{cases} M_{ks} = \xi \{ 2\varphi_k + \varphi_s \} - \mathfrak{M}_{ks}, \\ M_{sk} = \xi \{ 2\varphi_s + \varphi_k \} + \mathfrak{M}_{sk}^{**}. \end{cases}$$

Fällt die vertikale Belastung weg, so lautet die Gl. (I)

$$(Ib) \quad \begin{cases} M_{ks} = \xi \{ 2\varphi_k + \varphi_s + \mu \}, \\ M_{sk} = \xi \{ 2\varphi_s + \varphi_k + \mu \}. \end{cases}$$

* Ostenfeld, A.: Die Deformationsmethode, S. 11. Gl. (7). Berlin: Julius Springer 1926.

** Gehler, W.: Otto Mohr zum achtzigsten Geburtstag, S. 96, Gl. (III). Berlin: W. Ernst & Sohn 1916.

Tabelle Ia. Beliebige Belastung.

Belastungsfall

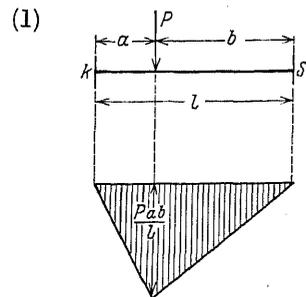


Abb. 4.

$$M_{ks} = \frac{Pab^2}{l^2} = Pl\lambda\nu^2,$$

$$M_{sk} = \frac{Pa^2b}{l^2} = Pl\lambda^2\nu,$$

$$\lambda = \frac{a}{l}, \quad \nu = \frac{b}{l}.$$

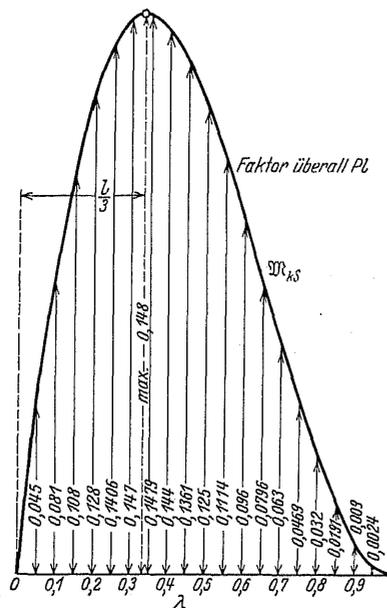


Abb. 5.

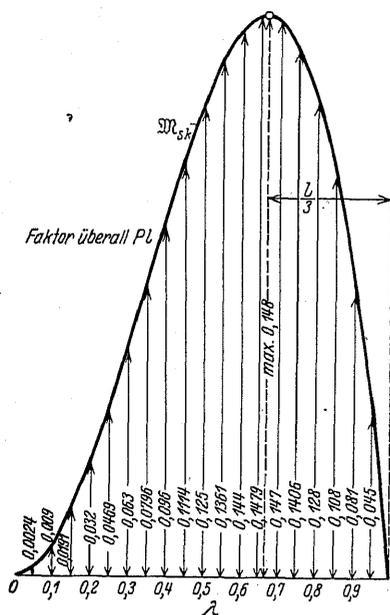


Abb. 6.

Bemerkung:

Für alle vorkommenden speziellen Belastungssysteme, die in den folgenden Tabellen Ia und Ib nicht angegeben sind, kann man die Werte M_{ks} und M_{sk} aus den Gleichungen

$$M_{ks} = \sum \frac{Pab^2}{l^2}$$

$$M_{sk} = \sum \frac{Pa^2b}{l^2}$$

und Tabelle Ia (4a) leicht berechnen.

Tabelle Ia (Fortsetzung).

Belastungsfall	M_{ks}	M_{sk}
<p>(2a) Abb. 7.</p>	$M_{ks} = \frac{qc}{12l^2} \{ 12ab(b+c) + 6b^2c + 4c^2(a+b) + c^3 \}$	$M_{sk} = \frac{qc}{12l^2} \{ 12ab(a+c) + 6a^2c + 4c^2(a+b) + c^3 \}$
<p>(2b) Abb. 8.</p>	$M_{ks} = \frac{qc^2}{12l^2} (6b^2 + 4bc + c^2)$	$M_{sk} = \frac{qc^2}{12l^2} (4b + c)$
<p>(2c) Abb. 9.</p>	$M_{ks} = \frac{qc^3}{12l^2} (4a + c)$	$M_{sk} = \frac{qc^3}{12l^2} (6a^2 + 4ac + c^2)$
<p>(2d) Abb. 10.</p>	$M_{ks} = \frac{ql^2}{12}$	$M_{sk} = \frac{ql^2}{12}$
<p>(3a) Abb. 11.</p>	$M_{ks} = \frac{pc}{60l^2} \{ 20bc(a+b) + 5c^2(a+2b) + 30ab^2 + 2c^3 \}$	$M_{sk} = \frac{pc}{60l^2} \{ 10ac(a+c) + 15b(2a^2 + c^2) + 40abc + 3c^3 \}$

Tabelle Ia (Fortsetzung).

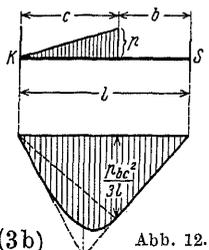
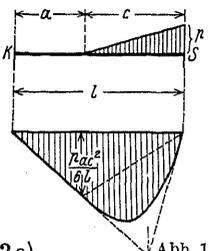
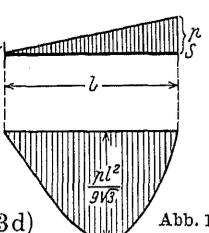
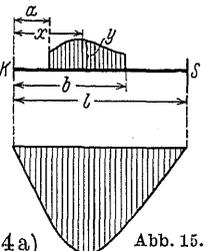
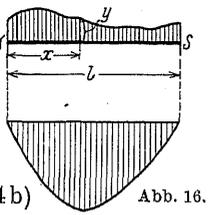
Belastungsfall	$\mathfrak{M}_{k,s}$	$\mathfrak{M}_{s,k}$
 <p>(3b) Abb. 12.</p>	$\mathfrak{M}_{k,s} = \frac{p c^2}{30 l^2} \{10 b^2 + 5 b c + c^2\}$	$\mathfrak{M}_{s,k} = \frac{p c^3}{20 l^2} \{5 b + c\}$
 <p>(3c) Abb. 13.</p>	$\mathfrak{M}_{k,s} = \frac{p c^3}{60 l^2} \{5 a + 2 c\}$	$\mathfrak{M}_{s,k} = \frac{p c^2}{60 l^2} \{10 a (a + c) + 3 c^2\}$
 <p>(3d) Abb. 14.</p>	$\mathfrak{M}_{k,s} = \frac{p l^2}{30}$	$\mathfrak{M}_{s,k} = \frac{p l^2}{20}$
 <p>(4a) Abb. 15.</p>	$\mathfrak{M}_{k,s} = \frac{1}{l^2} \int_a^b y x (l-x)^2 dx$	$\mathfrak{M}_{s,k} = \frac{1}{l^2} \int_a^b y x^2 (l-x) dx$
 <p>(4b) Abb. 16.</p>	$\mathfrak{M}_{k,s} = \frac{1}{l^2} \int_0^l y x (l-x)^2 dx$	$\mathfrak{M}_{s,k} = \frac{1}{l^2} \int_0^l y x^2 (l-x) dx$

Tabelle Ib. Symmetrische Belastung.

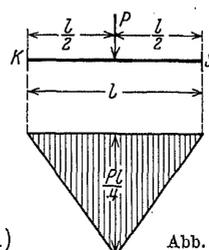
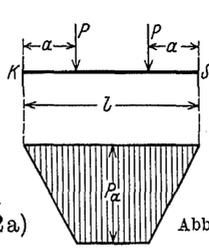
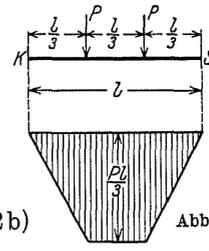
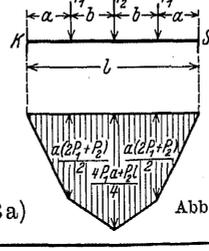
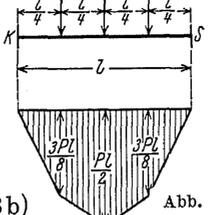
Belastungsfall	$\mathfrak{M}_{k,s} = \mathfrak{M}_{s,k} = \mathfrak{M}$
 <p>(1) Abb. 17.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{P l}{8}$
 <p>(2a) Abb. 18.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{P a (l-a)}{l}$
 <p>(2b) Abb. 19.</p>	$\mathfrak{M} = 2 P \frac{l}{9}$
 <p>(3a) Abb. 20.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{(a+b)}{l^2} \{2 P_1 a (a+2b) + P_2 (a+b)^2\}$
 <p>(3b) Abb. 21.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{5 P l}{16}$

Tabelle Ib (Fortsetzung).

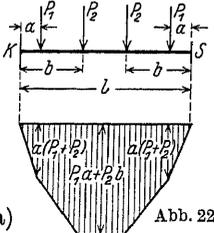
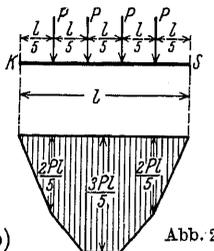
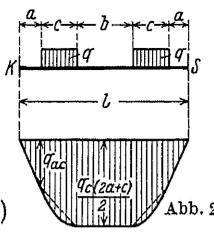
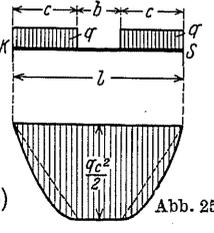
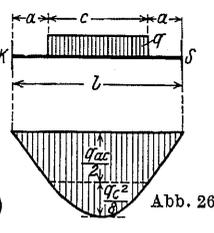
Belastungsfall	$M_{k,s} = M_{s,k} = M$
 <p>(4a) Abb. 22.</p>	$M = \frac{1}{l} \{P_1 a(l-a) + P_2 b(l-b)\}$
 <p>(4b) Abb. 23.</p>	$M = \frac{2Pl}{5}$
 <p>(5a) Abb. 24.</p>	$M = \frac{qc}{6l} \{6a(l-a) + 3bc + 4c^2\}$
 <p>(5b) Abb. 25.</p>	$M = \frac{qc^2}{6l} (3b + 4c)$
 <p>(5c) Abb. 26.</p>	$M = \frac{qc}{3l} \{3a(l-a) + 2c^2\}$

Tabelle Ib (Fortsetzung).

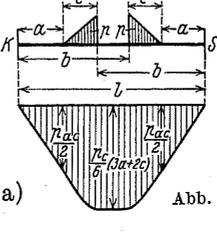
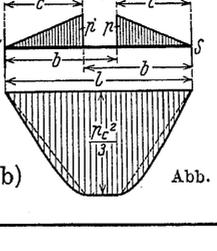
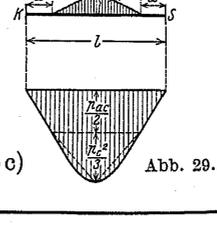
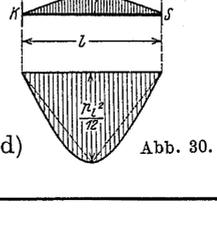
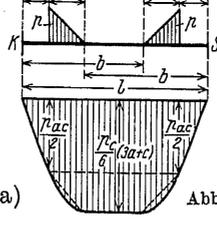
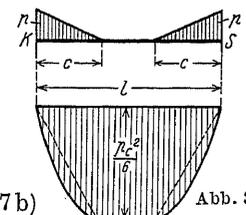
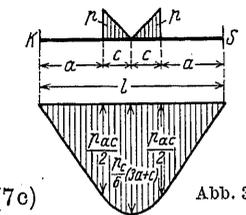
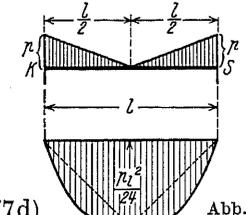
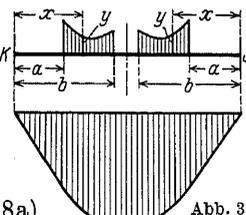
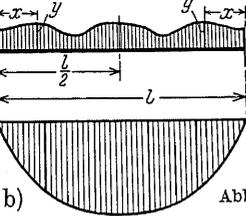
Belastungsfall	$M_{k,s} = M_{s,k} = M$
 <p>(6a) Abb. 27.</p>	$M = \frac{pc}{12l} \{6ab + 4bc + 2ac + c^2\}$
 <p>(6b) Abb. 28.</p>	$M = \frac{pc^2}{12l} (4b + c)$
 <p>(6c) Abb. 29.</p>	$M = \frac{pc}{12l} \{6a^2 + 12ac + 5c^2\}$
 <p>(6d) Abb. 30.</p>	$M = \frac{5pl^2}{96}$
 <p>(7a) Abb. 31.</p>	$M = \frac{pc}{12l} \{6ab + 4ac + 2bc + c^2\}$

Tabelle Ib (Fortsetzung).

Belastungsfall	$\mathfrak{M}_{ks} = \mathfrak{M}_{sk} = \mathfrak{M}$
 <p>(7b) Abb. 32.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{pc^2}{12l} (2b + c)$
 <p>(7c) Abb. 33.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{pc}{4l} \{2a^2 + 4ac + c^2\}$
 <p>(7d) Abb. 34.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{pl^2}{32}$
 <p>(8a) Abb. 35.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{1}{l} \int_a^b yx(l-x) dx$
 <p>(8b) Abb. 36.</p>	$\mathfrak{M} = \frac{1}{l} \int_0^l yx(l-x) dx$

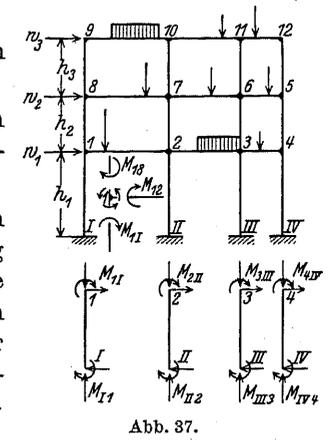
§ 2. Knoten- und Stabbezeichnungsregel.

In diesem Abschnitt werden beliebige vertikale Belastungsgruppen auf den Balken und waagerechte Einzellasten in allen Knotenpunkten der vertikalen linken Seite des Fachwerkes behandelt (Abb. 37).

Die Knoten- und Stabbezeichnungsregeln sollen dabei folgendermaßen angenommen werden:

1. Die Bezeichnung der Rahmenknoten soll nach der in Abb. 38 (A) gezeichneten Richtung, also zickzackförmig, angenommen werden.

2. Die Größe ξ , welche aus Gl. (II) für Balken und Ständer berechnet wird, soll ihre Bezeichnung nach Abb. 38 (A) und Abb. 38 (B) haben: für die Indizes von ξ verfährt man in ganz derselben Weise wie bei der Knotenbezeichnungsregel; für die Indizes von ξ' nimmt man diejenige Bezeichnung, die der darunter liegende Knotenpunkt besitzt.



Ferner führen wir als Q_r die doppelte Größe der Summe aller ξ ein, die an dem Knoten r sich sammeln.

Z. B. in Abb. 38

$$Q_1 = 2 \{ \xi_1 + \xi'_1 + \xi_{II} \},$$

$$Q_2 = 2 \{ \xi_1 + \xi_2 + \xi'_2 + \xi_{II} \},$$

$$Q_3 = 2 \{ \xi_2 + \xi_3 + \xi'_3 + \xi_{III} \} \text{ usw.,}$$

allgemeiner:

(III) $Q_r = 2 \{ \text{Die Summe aller } \xi, \text{ die sich am Knoten } r \text{ sammeln} \}.$

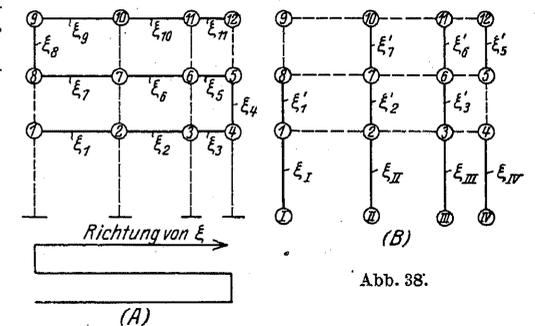
Als weitere Bezeichnung wählen wir X_r gleich zwei Drittel der Summe aller ξ und ξ' im r -ten Stockwerk:

Z. B. in Abb. 38

$$X_1 = \frac{2}{3} \{ \xi_I + \xi_{II} + \xi_{III} + \xi_{IV} \},$$

$$X_2 = \frac{2}{3} \{ \xi'_1 + \xi'_2 + \xi'_3 + \xi_4 \},$$

$$X_3 = \frac{2}{3} \{ \xi'_5 + \xi'_6 + \xi'_7 + \xi_8 \},$$



allgemein:

(IV) $X_r = \frac{2}{3} \{ \text{Die Summe aller } \xi \text{ und } \xi' \text{ am } r\text{-ten Stockwerk} \}.$

Mit Bezug auf Abb. 37 wird die gesamte Querkraft im ersten Stockwerk mit Q_1 bezeichnet, und zwar:

$$Q_1 = W_1 + W_2 + W_3.$$

In analoger Weise im zweiten Stockwerk:

$$Q_2 = W_2 + W_3$$

und im dritten:

$$Q_3 = W_3.$$

Wir setzen weiter

$$S_1 = -\frac{Q_1 h_1}{3},$$

$$S_2 = -\frac{Q_2 h_2}{3},$$

$$S_3 = -\frac{Q_3 h_3}{3},$$

allgemeiner:

$$(V) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{worin} \\ S_r = -\frac{Q_r h_r}{3} \\ Q_r = \text{die gesamte Querkraft im } r\text{-ten Stockwerk,} \\ h_r = \text{die Höhe des Ständers im } r\text{-ten Stockwerk} \end{array} \right.$$

ist.

§ 3. Knotengleichungen und Stockwerksgleichungen.

Um die Bestimmungsgleichungen der statisch unbestimmten Größen zu entwickeln, schneiden wir aus dem Rahmenwerk einen Knoten heraus.

Aus dem Gleichgewicht der Schnittmomente am herausgeschnittenen Knoten I (Abb. 37) ergibt sich:

$$M_{12} + M_{13} + M_{1I} = 0$$

oder

$$\sum M_1 = 0.$$

Am Knoten 2 (Abb. 37) ergibt sich:

$$M_{21} + M_{23} + M_{27} + M_{2II} = 0$$

oder

$$\sum M_2 = 0.$$

Allgemein stellt sich das Verhältnis am Knoten k wie folgt dar:

$$(VI) \quad \sum M_k = 0,$$

Diese Gleichgewichtsbedingungen sind die erste Gruppe unserer Bestimmungsgleichungen, deren Anzahl ebenso groß ist wie die Anzahl der Knoten oder der zu bestimmenden Knotendrehwinkel. Wir nennen diese Gruppe der Bestimmungsgleichungen „Knotengleichungen“.

Um die zweite Gruppe der Bestimmungsgleichungen zu entwickeln, führen wir zwei horizontale Schnitte, den einen sehr nahe unterhalb des Knotens I, den anderen ebenso oberhalb der Fundamente aus (Abb. 37).

Aus dem Gleichgewicht der Schnittquerkräfte und Momente an den herausgeschnittenen Ständern des ersten Stockwerks folgt:

$$\sum_{R=I}^{R=IV} \{M_{rR} + M_{Rr}\} + Q_1 h_1 = 0.$$

oder einfach

$$\sum \{M_{\text{oben}} + M_{\text{unten}}\} + Q_1 h_1 = 0. \quad (\text{erstes Stockwerk})$$

Für das zweite Stockwerk gilt:

$$\sum \{M_{\text{oben}} + M_{\text{unten}}\} + Q_2 h_2 = 0. \quad (\text{zweites Stockwerk})$$

Im allgemeinen ergibt sich am r -ten Stockwerk:

$$(VII) \quad \sum \{M_{\text{oben}} + M_{\text{unten}}\} + Q_r h_r = 0. \quad (r\text{-tes Stockwerk})$$

Die Anzahl dieser Gleichungen der zweiten Gruppe ist ebenso groß wie die Anzahl der Stockwerke oder der zu bestimmenden Stabdrehwinkel. Wir nennen diese Gruppe der Bestimmungsgleichungen „Stockwerksgleichungen“.

Fällt die waagerechte Knotenbelastung weg, so lautet die Gleichung einfach:

$$(VIII) \quad \sum \{M_{\text{oben}} + M_{\text{unten}}\} = 0.$$

Die Gl. (VI) und (VII) liefern die Bestimmungsgleichungen als Funktion der Unbekannten φ und μ laut Gl. (I).

Z. B. aus dem Gleichgewicht der Schnittmomente am herausgeschnittenen Knoten k (Abb. 39) ergibt sich:

$$\sum M_k = 0$$

oder auch

$$M_{ka} + M_{kb} + M_{kc} + M_{kd} = 0,$$

wobei

$$M_{ka} = \xi_a \{2\varphi_k + \varphi_a + \mu_a\} + \mathfrak{M}_{ka},$$

$$M_{kb} = \xi_b \{2\varphi_k + \varphi_b + \mu_b\} - \mathfrak{M}_{kb},$$

$$M_{kc} = \xi_c \{2\varphi_k + \varphi_c + \mu_c\} + \mathfrak{M}_{kc},$$

$$M_{kd} = \xi_d \{2\varphi_k + \varphi_d + \mu_d\} - \mathfrak{M}_{kd}$$

ist.

Damit wird:

$$(VIa) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\varphi_k \{\xi_a + \xi_b + \xi_c + \xi_d\} + \varphi_a \xi_a + \varphi_b \xi_b + \varphi_c \xi_c + \varphi_d \xi_d \\ + \mu_a \xi_a + \mu_b \xi_b + \mu_c \xi_c + \mu_d \xi_d + (\mathfrak{M}_{ka} - \mathfrak{M}_{kb}) + (\mathfrak{M}_{kc} - \mathfrak{M}_{kd}) = 0. \end{array} \right.$$

Die Gl. (VIa) ist die allgemeine Knotengleichung in brauchbarer Form zur Berechnung der Unbekannten φ und μ . Diese Gleichungsform kann leicht auswendig gelernt und durch regelmäßige Anordnung der Unbekannten mit den entsprechenden Beiwerten auch leicht angegeben werden.

Fällt die waagerechte Belastung weg, so lautet die Gleichung

$$(VIb) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_k Q_k + \varphi_a \xi_a + \varphi_b \xi_b + \varphi_c \xi_c + \varphi_d \xi_d \\ + \mu_a \xi_a + \mu_b \xi_b + \mu_c \xi_c + \mu_d \xi_d + \mathfrak{M}_{ka} - \mathfrak{M}_{kb} = 0, \\ \text{wobei} \\ Q_k = 2\{\xi_a + \xi_b + \xi_c + \xi_d\} \\ = 2\{\text{Die Summe aller } \xi, \text{ die sich am Knoten } k \text{ sammeln}\}. \end{array} \right.$$

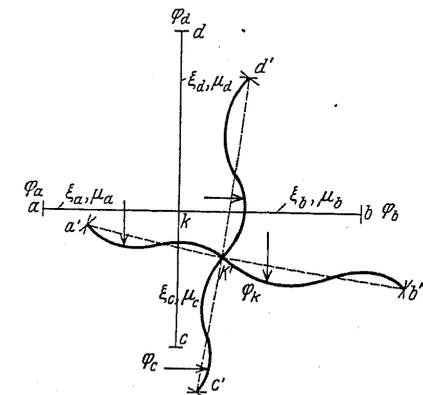


Abb. 39.

Ist außerdem $\mu_c = \mu_d = 0$, so lautet die Gleichung

$$(VIc) \quad \begin{cases} \varphi_k \varrho_k + \varphi_a \xi_a + \varphi_b \xi_b + \varphi_c \xi_c + \varphi_d \xi_d \\ + \mu_a \xi_a + \mu_b \xi_b = \mathfrak{M}_{k\text{-rechts}} - \mathfrak{M}_{k\text{-links}}. \end{cases}$$

Außerdem haben wir die Knotengleichungen:

in bezug auf Abb. 40:

$$(VI d) \quad \varphi_k \varrho_k + \varphi_a \xi_a + \varphi_b \xi_b + \varphi_c \xi_c + \varphi_d \xi_d = \mathfrak{M}_{k\text{-rechts}} - \mathfrak{M}_{k\text{-links}},$$

in bezug auf Abb. 41:

$$(VI e) \quad \begin{cases} \varphi_k \varrho_k + \varphi_b \xi_b + \varphi_c \xi_c + \varphi_d \xi_d = \mathfrak{M}_{k\text{-rechts}}, \\ \text{wobei} \\ \varrho_k = 2 \{ \xi_b + \xi_c + \xi_d \} = 2 \{ \text{Die Summe aller } \xi, \\ \text{die sich am Knoten } k \text{ sammeln} \}, \end{cases}$$

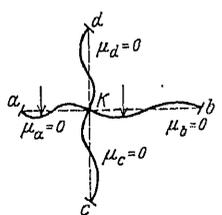


Abb. 40.

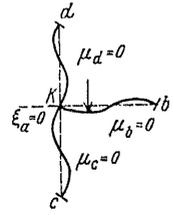


Abb. 41.

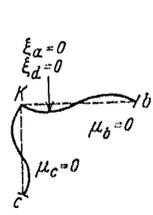


Abb. 42.

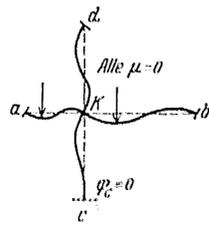


Abb. 43.

in bezug auf Abb. 42:

$$(VI f) \quad \begin{cases} \varphi_k \varrho_k + \varphi_b \xi_b + \varphi_c \xi_c = \mathfrak{M}_{k\text{-rechts}}, \\ \text{wobei} \\ \varrho_k = 2 \{ \xi_b + \xi_c \} = 2 \{ \text{Die Summe aller } \xi, \\ \text{die sich am Knoten } k \text{ sammeln} \}, \end{cases}$$

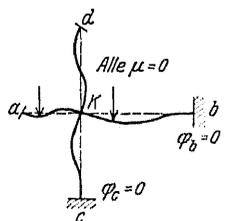


Abb. 44.

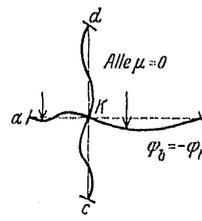


Abb. 45.

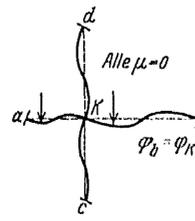


Abb. 46.

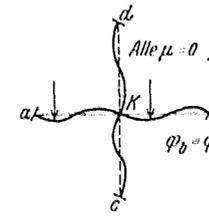


Abb. 47.

in bezug auf Abb. 43:

$$(VI g) \quad \begin{cases} \varphi_k \varrho_k + \varphi_a \xi_a + \varphi_b \xi_b + \varphi_d \xi_d = \mathfrak{M}_{k\text{-rechts}} - \mathfrak{M}_{k\text{-links}}, \\ \text{wobei} \\ \varrho_k = 2 \{ \xi_a + \xi_b + \xi_c + \xi_d \}, \end{cases}$$

in bezug auf Abb. 44:

$$(VI h) \quad \begin{cases} \varphi_k \varrho_k + \varphi_a \xi_a + \varphi_d \xi_d = \mathfrak{M}_{k\text{-rechts}} - \mathfrak{M}_{k\text{-links}}, \\ \text{wobei} \\ \varrho_k = 2 \{ \xi_a + \xi_b + \xi_c + \xi_d \}, \end{cases}$$

in bezug auf Abb. 45:

$$(VI i) \quad \begin{cases} \varphi_k (\varrho_k) + \varphi_a \xi_a + \varphi_c \xi_c + \varphi_d \xi_d = \mathfrak{M}_{k\text{-rechts}} - \mathfrak{M}_{k\text{-links}}, \\ \text{wobei} \\ (\varrho_k) = 2 \{ \xi_a + \xi_b + \xi_c + \xi_d \} - \xi_b = \varrho_k - \xi_b, \end{cases}$$

in bezug auf Abb. 46:

$$(VI j) \quad \begin{cases} \varphi_k [\varrho_k] + \varphi_a \xi_a + \varphi_c \xi_c + \varphi_d \xi_d = \mathfrak{M}_{k\text{-rechts}} - \mathfrak{M}_{k\text{-links}}, \\ \text{wobei} \\ [\varrho_k] = 2 \{ \xi_a + \xi_b + \xi_c + \xi_d \} + \xi_b = \varrho_k + \xi_b, \end{cases}$$

in bezug auf Abb. 47:

$$(VI k) \quad \begin{cases} \varphi_k \varrho_k + \varphi_a (\xi_a + \xi_b) + \varphi_c \xi_c + \varphi_d \xi_d = \mathfrak{M}_{k\text{-rechts}} - \mathfrak{M}_{k\text{-links}}, \\ \text{wobei} \\ \varrho_k = 2 \{ \xi_a + \xi_b + \xi_c + \xi_d \}. \end{cases}$$

Wenn in der Gl. (VIk) $\xi_a = \xi_b$ ist, so lautet die Gleichung:

$$(VII) \quad \begin{cases} \varphi_k \varrho_k + \varphi_a (2 \xi_a) + \varphi_c \xi_c + \varphi_d \xi_d = \mathfrak{M}_{k\text{-rechts}} - \mathfrak{M}_{k\text{-links}}, \\ \text{wobei} \\ \varrho_k = 2 \{ 2 \xi_a + \xi_c + \xi_d \} = 2 \{ \text{Die Summe aller } \xi, \\ \text{die sich am Knoten } k \text{ sammeln} \}. \end{cases}$$

Die Gl. (VIc) ist die allgemeine Knotengleichung in brauchbarer Form in diesem Abschnitt, weil wir dabei nur die Rahmen mit beliebiger vertikaler Belastung und mit waagerechter Einzellast in jedem Knotenpunkt auf einer vertikalen Seite des Rahmengebildes behandeln. Die Gln. (VI d) bis (VI l) können aus Gl. (VI c) leicht abgeleitet werden.

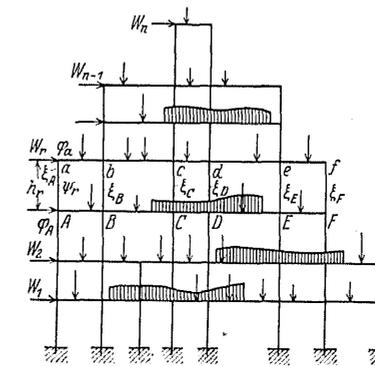


Abb. 48a.

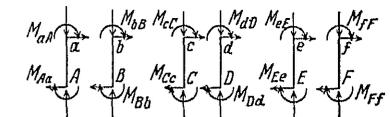


Abb. 48b.

Um die zweite Gruppe der Bestimmungsgleichungen in brauchbarer Form zu entwickeln, führen wir zwei horizontale Schnitte sehr nahe unten am Knoten a und ebenso oberhalb des Knoten A in Abb. 48a aus.

Aus dem Gleichgewicht der Schnittquerkräfte und Momente an den herausgeschnittenen Ständern des r -ten Stockwerks ergibt sich (Abb. 48a, b):

$$\sum_{\substack{R=f \\ R=A}}^{r=a} \{M_{rR} + M_{Rr}\} + Q_r h_r = 0,$$

wobei

$$\begin{aligned} M_{aA} + M_{Aa} &= \xi_A \{3\varphi_a + 3\varphi_A + 2\mu_r\}, \\ M_{bB} + M_{Bb} &= \xi_B \{3\varphi_b + 3\varphi_B + 2\mu_r\}, \\ M_{cC} + M_{Cc} &= \xi_C \{3\varphi_c + 3\varphi_C + 2\mu_r\}, \\ M_{dD} + M_{Dd} &= \xi_D \{3\varphi_d + 3\varphi_D + 2\mu_r\}, \\ M_{eE} + M_{Ee} &= \xi_E \{3\varphi_e + 3\varphi_E + 2\mu_r\}, \\ M_{fF} + M_{Ff} &= \xi_F \{3\varphi_f + 3\varphi_F + 2\mu_r\}. \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$(VIIa) \left\{ \begin{aligned} &\xi_A(\varphi_a + \varphi_A) + \xi_B(\varphi_b + \varphi_B) + \xi_C(\varphi_c + \varphi_C) + \xi_D(\varphi_d + \varphi_D) \\ &\quad + \xi_E(\varphi_e + \varphi_E) + \xi_F(\varphi_f + \varphi_F) + \mu_r X_r = S_r, \\ \text{wobei} & \\ &X_r = \frac{2}{3} \{ \xi_A + \xi_B + \xi_C + \xi_D + \xi_E + \xi_F \}, \\ &S_r = -\frac{Q_r h_r}{3} = -\frac{h_r}{3} \{ W_r + W_{r+1} + \dots + W_n \}. \end{aligned} \right.$$

Die Gln. (VIc) und (VIIa) sind die Grundgleichungen zur Aufstellung der Gleichungstabellen.

Der Übersichtlichkeit halber mögen die Koeffizienten der Unbekannten der Gln. (VIc) und (VIIa) folgendermaßen tabellarisch angegeben werden (Tabelle IIa und Tabelle IIb).

Tabelle IIa.

Unbekannte	Linke Seite der Gleichung (VIc)							Rechte Seite der Gleichung
	φ_k	φ_a	φ_b	φ_c	φ_d	μ_a	μ_b	
Koeffizient	ϱ_k	ξ_a	ξ_b	ξ_c	ξ_d	ξ_a	ξ_b	$\mathfrak{M}_k\text{-rechts} - \mathfrak{M}_k\text{-links}$

Tabelle IIb.

Unbekannte	Linke Seite der Gleichung (VIIa)													Rechte Seite der Gleichung
	φ_a	φ_b	φ_c	φ_d	φ_e	φ_f	φ_F	φ_E	φ_D	φ_C	φ_B	φ_A	μ_r	
Koeffizient	ξ_A	ξ_B	ξ_C	ξ_D	ξ_E	ξ_F	ξ_F	ξ_E	ξ_D	ξ_C	ξ_B	ξ_A	X_r	S_r

§ 4. Grundtabellen der Bestimmungsgleichungen.

a) Allgemeine Grundtabellen.

Grundtabelle I. Der in Abb. 37 bzw. in Abb. 49 dargestellte Rahmen ist fünfzehnfach statisch unbestimmt. Wegen vollkommener Einspannung in die Fundamente sind als Unbestimmte die zwölf Drehwinkel der Knoten 1 bis 12 und die

drei Stabdrehwinkel der Stockwerke anzusehen; also hat der Rahmen im ganzen fünfzehn Unbekannte.

Die zwölf Knotengleichungen lauten:

Für den Knoten 1:

$$M_{12} + M_{18} + M_{11} = 0$$

oder mit der Formel (I):

$$\varphi_1(2\xi_1 + 2\xi'_1 + 2\xi_{II}) + \varphi_2\xi_1 + \varphi_3\xi'_1 + \mu_1\xi_{II} + \mu_2\xi'_1 = \mathfrak{M}_{12}$$

oder auch laut Gl. (III):

$$\varphi_1\varrho_1 + \varphi_2\xi_1 + \varphi_3\xi'_1 + \mu_1\xi_{II} + \mu_2\xi'_1 = \mathfrak{M}_{12}.$$

Für den Knoten 2:

$$M_{21} + M_{23} + M_{27} + M_{211} = 0$$

oder mit den Gln. (I) und (III):

$$\varphi_1\xi_1 + \varphi_2\varrho_2 + \varphi_3\xi_2 + \varphi_7\xi'_2 + \mu_1\xi_{II} + \mu_2\xi'_2 = \mathfrak{M}_{23} - \mathfrak{M}_{21}.$$

Für den Knoten 3:

$$\varphi_2\xi_2 + \varphi_3\varrho_3 + \varphi_4\xi_3 + \varphi_6\xi'_3 + \mu_1\xi_{III} + \mu_2\xi'_3 = \mathfrak{M}_{34} - \mathfrak{M}_{32}.$$

Für den Knoten 4:

$$\varphi_3\xi_3 + \varphi_4\varrho_4 + \varphi_5\xi_4 + \mu_1\xi_{IV} + \mu_2\xi_4 = -\mathfrak{M}_{43}.$$

Für den Knoten 5:

$$\varphi_4\xi_4 + \varphi_5\varrho_5 + \varphi_6\xi_5 + \varphi_{12}\xi'_5 + \mu_2\xi_4 + \mu_3\xi'_5 = -\mathfrak{M}_{56}.$$

Für den Knoten 6:

$$\varphi_3\xi'_3 + \varphi_5\xi_5 + \varphi_6\varrho_6 + \varphi_7\xi_6 + \varphi_{11}\xi'_6 + \mu_2\xi'_3 + \mu_3\xi'_6 = \mathfrak{M}_{65} - \mathfrak{M}_{67}.$$

Für den Knoten 7:

$$\varphi_2\xi'_2 + \varphi_6\xi_6 + \varphi_7\varrho_7 + \varphi_8\xi_7 + \varphi_{10}\xi'_7 + \mu_2\xi'_2 + \mu_3\xi'_7 = \mathfrak{M}_{76} - \mathfrak{M}_{78}.$$

Für den Knoten 8:

$$\varphi_1\xi'_1 + \varphi_7\xi_7 + \varphi_8\varrho_8 + \varphi_9\xi_8 + \mu_2\xi'_1 + \mu_3\xi_8 = \mathfrak{M}_{87}.$$

Für den Knoten 9:

$$\varphi_8\xi_8 + \varphi_9\varrho_9 + \varphi_{10}\xi_9 + \mu_3\xi_8 = \mathfrak{M}_{9,10}.$$

Für den Knoten 10:

$$\varphi_7\xi'_7 + \varphi_9\xi_9 + \varphi_{10}\varrho_{10} + \varphi_{11}\xi_{10} + \mu_3\xi'_7 = \mathfrak{M}_{10,11} - \mathfrak{M}_{10,9}.$$

Für den Knoten 11:

$$\varphi_6\xi'_6 + \varphi_{10}\xi_{10} + \varphi_{11}\varrho_{11} + \varphi_{12}\xi_{11} + \mu_3\xi'_6 = \mathfrak{M}_{11,12} - \mathfrak{M}_{11,10}.$$

Für den Knoten 12:

$$\varphi_5\xi'_5 + \varphi_{11}\xi_{11} + \varphi_{12}\varrho_{12} + \mu_3\xi'_5 = -\mathfrak{M}_{12,11}.$$

Allgemeiner für den Knotenpunkt r :

$$(IX) \quad \text{Rechte Seite der Gleichung} = \mathfrak{M}_{r,\text{rechts}} - \mathfrak{M}_{r,\text{links}}.$$

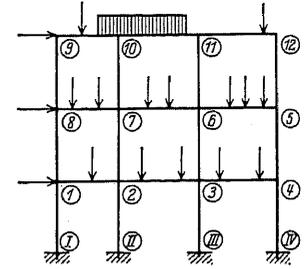


Abb. 49.

Die drei Stockwerksgleichungen lauten:

Für das erste Stockwerk:

$$\sum_{R=I}^{r=4} \{M_{rR} + M_{Rr}\} + Q_1 h_1 = 0$$

oder mit der Gl. (I):

$$\varphi_1 \xi_I + \varphi_2 \xi_{II} + \varphi_3 \xi_{III} + \varphi_4 \xi_{IV} + \mu_1 \frac{2}{3} \{\xi_I' + \xi_{II}' + \xi_{III}' + \xi_{IV}'\} = -\frac{Q_1 h_1}{3}$$

oder auch mit den Gln. (IV) und (V):

$$\varphi_1 \xi_I + \varphi_2 \xi_{II} + \varphi_3 \xi_{III} + \varphi_4 \xi_{IV} + \mu_1 X_1 = S_1.$$

Für das zweite Stockwerk:

$$\varphi_1 \xi_1' + \varphi_2 \xi_2' + \varphi_3 \xi_3' + \varphi_4 \xi_4' + \varphi_5 \xi_5' + \varphi_6 \xi_6' + \varphi_7 \xi_7' + \varphi_8 \xi_8' + \mu_2 X_2 = S_2.$$

Für das dritte Stockwerk:

$$\varphi_5 \xi_5' + \varphi_6 \xi_6' + \varphi_7 \xi_7' + \varphi_8 \xi_8' + \varphi_9 \xi_9' + \varphi_{10} \xi_{10}' + \varphi_{11} \xi_{11}' + \varphi_{12} \xi_{12}' + \mu_3 X_3 = S_3.$$

Der Übersichtlichkeit halber mögen die Koeffizienten der Unbekannten der gewonnenen Bestimmungsgleichungen folgendermaßen tabellenförmig angegeben werden (Tabelle IIIa):

Tabelle IIIa.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung (Koeffizienten der Unbekannten)													Rechte Seite der Gleichung			
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	μ_1	μ_2	μ_3	Vertikale Belastung	Wagerechte Belastung
(1)	Q_1	ξ_1											ξ_I	ξ_I'		M_{12}	
(2)	ξ_1	Q_2	ξ_2										ξ_{II}	ξ_{II}'		$M_{23} - M_{21}$	
(3)		ξ_2	Q_3	ξ_3									ξ_{III}	ξ_{III}'		$M_{34} - M_{32}$	
(4)			ξ_3	Q_4	ξ_4								ξ_{IV}	ξ_{IV}'		$-M_{43}$	
(5)				ξ_4	Q_5	ξ_5							ξ_5'	ξ_5'		$-M_{56}$	
(6)				ξ_5	Q_6	ξ_6							ξ_6'	ξ_6'		$M_{65} - M_{67}$	
(7)					ξ_6	Q_7	ξ_7						ξ_7'	ξ_7'		$M_{76} - M_{78}$	
(8)						ξ_7	Q_8	ξ_8					ξ_8'	ξ_8'		M_{87}	
(9)							ξ_8	Q_9	ξ_9					ξ_9'		$M_{9,10}$	
(10)								ξ_9	Q_{10}	ξ_{10}				ξ_{10}'		$M_{10,11} - M_{10,9}$	
(11)									ξ_{10}	Q_{11}	ξ_{11}			ξ_{11}'		$M_{11,12} - M_{11,10}$	
(12)										ξ_{11}	Q_{12}	ξ_{12}		ξ_{12}'		$-M_{12,11}$	
(13)	ξ_I	ξ_{II}	ξ_{III}	ξ_{IV}									X_1			S_1	
(14)	ξ_1'	ξ_2'	ξ_3'	ξ_4'										X_2		S_2	
(15)				ξ_5'	ξ_6'	ξ_7'	ξ_8'	ξ_9'	ξ_{10}'	ξ_{11}'	ξ_{12}'			X_3		S_3	

Die Tabelle IIIa wird mit Vorteil ohne Zwischenrechnungen nach den Tabellen IIa und IIb direkt angegeben.

Sie zeigt vollkommene Spiegelsymmetrie in bezug auf die diagonale ϱ -, X -Linie; ober- und unterhalb dieser Diagonalen findet man die mit derselben rechtwinklig verlaufende ξ' -Linie.

Grundtabelle II. Der in Abb. 50 dargestellte Rechteckrahmen ist vierzehn-fach statisch unbestimmt. Infolge vollkommener Einspannung in die Fundamente

sind als Unbestimmte die elf Drehwinkel der Knoten I bis II und die drei Stabdrehwinkel der Stockwerke anzusehen; der Rahmen hat demzufolge im ganzen vierzehn Unbekannte.

Die zwölf Knotengleichungen lauten:

Für den Knoten I laut Tabelle IIa:

$$\varphi_1 \varrho_1 + \varphi_2 \xi_1 + \mu_1 \xi_I = M_{12}.$$

Für den Knoten 2 laut Tabelle IIa:

$$\varphi_1 \xi_1 + \varphi_2 \varrho_2 + \varphi_3 \xi_2 + \varphi_9 \xi_2' + \mu_1 \xi_{II} + \mu_2 \xi_2' = M_{23} - M_{21} \text{ usw.}$$

Die drei Stockwerksgleichungen lauten:

Für das erste Stockwerk laut Tabelle IIb:

$$\varphi_1 \xi_I + \varphi_2 \xi_{II} + \varphi_3 \xi_{III} + \varphi_4 \xi_{IV} + \varphi_5 \xi_V + \varphi_6 \xi_{VI} + \mu_1 X_1 = S_1.$$

Für das zweite Stockwerk laut Tabelle IIb:

$$\varphi_2 \xi_2' + \varphi_3 \xi_3' + \varphi_5 \xi_5' + \varphi_7 \xi_5' + \varphi_8 \xi_3' + \varphi_9 \xi_2' + \mu_2 X_2 = S_2 \text{ usw.}$$

Der Übersichtlichkeit halber mögen die Koeffizienten der Unbekannten der gewonnenen Bestimmungsgleichungen folgendermaßen tabellenförmig angegeben werden (Tabelle IIIb):

Tabelle IIIb.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung													Rechte Seite der Gleichung		
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	μ_1	μ_2	μ_3		
(1)	Q_1	ξ_1										ξ_I	ξ_I'		M_{12}	
(2)	ξ_1	Q_2	ξ_2						ξ_2'			ξ_{II}	ξ_{II}'		$M_{23} - M_{21}$	
(3)		ξ_2	Q_3	ξ_3				ξ_3'	ξ_2'			ξ_{III}	ξ_{III}'		$M_{34} - M_{32}$	
(4)			ξ_3	Q_4	ξ_4							ξ_{IV}	ξ_{IV}'		$M_{45} - M_{43}$	
(5)				ξ_4	Q_5	ξ_5						ξ_V	ξ_V'		$M_{56} - M_{54}$	
(6)					ξ_5	Q_6						ξ_{VI}	ξ_{VI}'		$-M_{65}$	
(7)								Q_7	ξ_7	ξ_8			ξ_5'		$-M_{78}$	
(8)								Q_8	ξ_8	Q_9			ξ_3'	ξ_8'	$M_{87} - M_{89}$	
(9)									Q_9	ξ_9			ξ_2'	ξ_9'	M_{98}	
(10)										Q_{10}	ξ_{10}			ξ_9'	$M_{10,11}$	
(11)										ξ_{10}	Q_{11}			ξ_5'	$-M_{11,10}$	
(12)	ξ_I	ξ_{II}	ξ_{III}	ξ_{IV}	ξ_V	ξ_{VI}						X_1			S_1	
(13)	ξ_1'	ξ_2'	ξ_3'	ξ_4'									X_2		S_2	
(14)				ξ_5'	ξ_6'	ξ_7'	ξ_8'	ξ_9'	ξ_{10}'	ξ_{11}'	ξ_{12}'			X_3	S_3	

Die Tabelle IIIb zeigt wiederum vollkommene Spiegelsymmetrie in bezug auf die diagonale ϱ - und X -Linie; rechtwinklig dazu verläuft die ξ' -Linie.

b) Symmetrische Ausbildung und Belastung.

Ein symmetrisch gebautes Rahmentragwerk mit einer symmetrischen Belastung bedingt für sämtliche Stäbe $\psi = 0$ oder auch $\mu = 0$.

Sich entsprechende, symmetrisch gelegene Knotenpunkte weisen dabei gleich große, entgegengesetzte Knotendrehwinkel auf, wodurch der Grad der statischen

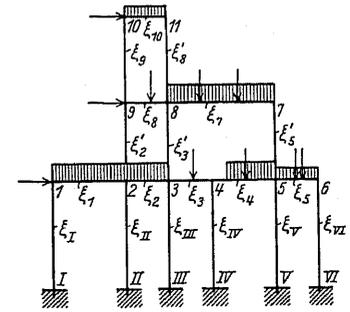


Abb. 50.

Unbestimmtheit des zu behandelnden Rahmentragwerkes um ein beträchtliches sinkt. Um die statisch unbestimmten Größen zu bestimmen, brauchen wir nur die erste Gruppe der Bestimmungsgleichungen. Für die auf einer symmetrischen Bauachse liegenden Knotenpunkte beträgt wegen der Symmetrie der Anordnung und Belastung der Rahmen mit $2n$ Öffnungen $\varphi_m = 0$ (Abb. 51a u. 51b).

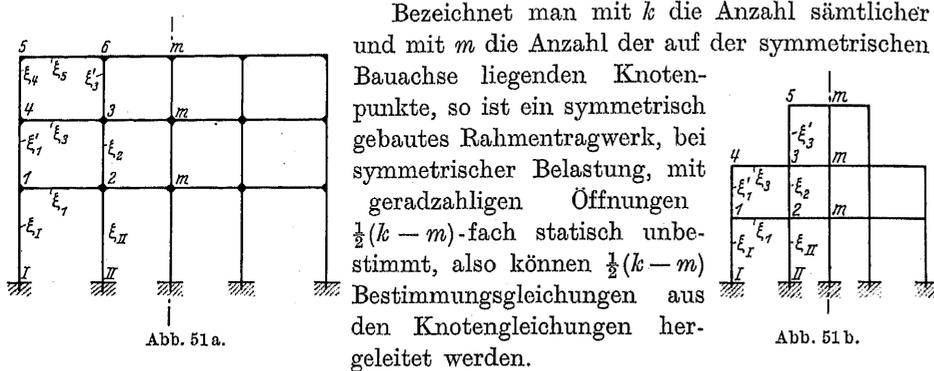


Abb. 51 a.

Bezeichnet man mit k die Anzahl sämtlicher und mit m die Anzahl der auf der symmetrischen Bauachse liegenden Knotenpunkte, so ist ein symmetrisch gebautes Rahmentragwerk, bei symmetrischer Belastung, mit geradzahigen Öffnungen $\frac{1}{2}(k - m)$ -fach statisch unbestimmt, also können $\frac{1}{2}(k - m)$ Bestimmungsgleichungen aus den Knotengleichungen hergeleitet werden.

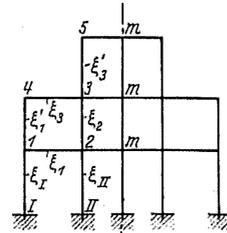


Abb. 51 b.

Bei symmetrischer Ausbildung und Belastung ist auch ein Rahmentragwerk mit ungeradzahigen Öffnungen und k Knotenpunkten $\frac{1}{2}k$ -fach statisch unbestimmt. Diese zwei symmetrischen Fälle sind in Abb. 51 und 52 beispielsweise dargestellt.

Der in Abb. 51a dargestellte mehrstielige Stockwerksrahmen mit vier Öffnungen und drei Stockwerken ist sechsfach statisch unbestimmt, also sind nur sechs Bestimmungsgleichungen erforderlich, welche aus Knotengleichungen folgendermaßen leicht erhalten werden (Tabelle IVa).

Tabelle IVa.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung						Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	
(1)	ϱ_1	ξ_1		ξ'_1			\mathcal{M}_{12}
(2)	ξ_1	ϱ_2	ξ_2				$\mathcal{M}_{22} - \mathcal{M}_{21}$
(3)		ξ_2	ϱ_3	ξ_3		ξ'_3	$\mathcal{M}_{33} - \mathcal{M}_{34}$
(4)	ξ'_1		ξ_3	ϱ_4	ξ_4		\mathcal{M}_{43}
(5)			ξ'_3	ξ_4	ϱ_5	ξ_5	\mathcal{M}_{55}
(6)			ξ'_5	ξ_5	ϱ_6		$\mathcal{M}_{65} - \mathcal{M}_{66}$

Der in Abb. 51b dargestellte mehrstielige Stockwerksrahmen mit vier Öffnungen und drei Stockwerken ist fünffach statisch unbestimmt, also sind nur fünf Bestimmungsgleichungen erforderlich, welche aus Knotengleichungen folgendermaßen leicht erhalten werden (Tabelle IVb).

Tabelle IVb.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung					Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	
(1)	ϱ_1	ξ_1		ξ'_1		\mathcal{M}_{12}
(2)	ξ_1	ϱ_2	ξ_2			$\mathcal{M}_{22} - \mathcal{M}_{21}$
(3)		ξ_2	ϱ_3	ξ_3	ξ'_3	$\mathcal{M}_{33} - \mathcal{M}_{34}$
(4)	ξ'_1		ξ_3	ϱ_4	ξ_4	\mathcal{M}_{43}
(5)			ξ'_3	ϱ_5		\mathcal{M}_{55}

In Abb. 52a haben wir ebenfalls einen sechsfach statisch unbestimmten, mehrstieligen Stockwerksrahmen. Nach unserem Verfahren erhalten wir ähnlich wie zuvor folgende Tabelle Va.

In bezug auf Abb. 52b erhält man Tabelle Vb.

Tabelle Va.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung						Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	
(1)	ϱ_1	ξ_1		ξ'_1			\mathcal{M}_{12}
(2)	ξ_1	ϱ_2	ξ_2				$\mathcal{M}_{22} - \mathcal{M}_{21}$
(3)		ξ_2	ϱ_3	ξ_3		ξ'_3	$\mathcal{M}_{33} - \mathcal{M}_{34}$
(4)	ξ'_1		ξ_3	ϱ_4	ξ_4		\mathcal{M}_{43}
(5)			ξ'_3	ξ_4	ϱ_5	ξ_5	\mathcal{M}_{55}
(6)			ξ'_5	ξ_5	ϱ_6		$\mathcal{M}_{65} - \mathcal{M}_{66}$

Tabelle Vb.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung					Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	
(1)	ϱ_1	ξ_1		ξ'_1		\mathcal{M}_{12}
(2)	ξ_1	ϱ_2	ξ_2			$\mathcal{M}_{22} - \mathcal{M}_{21}$
(3)		ξ_2	ϱ_3	ξ_3	ξ'_3	$\mathcal{M}_{33} - \mathcal{M}_{34}$
(4)	ξ'_1		ξ_3	ϱ_4	ξ_4	\mathcal{M}_{43}
(5)			ξ'_3	ϱ_5		\mathcal{M}_{55}

In Tabelle Va und Vb ist:

$$(\varrho_2) = 2 \{ \xi_1 + \xi_2 + \xi_{II} \} + \xi_{2-2'} = \varrho_2 - \xi_{2-2'}$$

$$(\varrho_3) = \varrho_3 - \xi_{3-3'} \text{ usw.}$$

Allgemeiner gilt bei symmetrischer Belastung und Rahmenausbildung mit ungeradzahigen Öffnungen:

$$(X) \quad (\varrho_k) = \varrho_k - \xi_{k-k'}$$

Diese Ausdrücke sind aus der Knotengleichung (VI) erhalten.

c) Gelenkrahmen.

Für Gelenkrahmen ist im allgemeinen die Unbekannte μ_1 in μ'_1

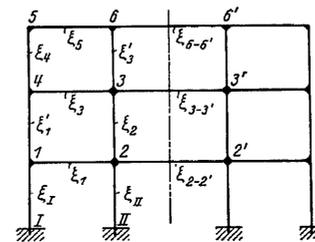


Abb. 52 a.

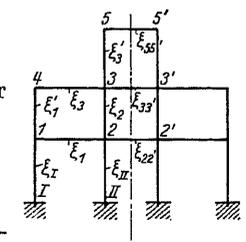


Abb. 52 b.

zu verändern, indem man $\mu'_1 = \frac{\mu_1}{2}$ setzt. Die Größe ϱ , die sich an den Knotenpunkten der untersten Querriegel befindet, ändert sich nach den Knoten-

Tabelle VIa.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung (Koeffizienten der Gleichung)												Rechte Seite der Gleichung				
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	μ'_1	μ_2	μ_3	Vertikale Belastung	Wagerechte Belastung
(1)	ϱ_1	ξ_1											ξ_I	ξ'_1		\mathcal{M}_{12}	
(2)	ξ_1	ϱ_2	ξ_2										ξ_{II}	ξ'_2		$\mathcal{M}_{23} - \mathcal{M}_{21}$	
(3)		ξ_2	ϱ_3	ξ_3									ξ_{III}	ξ'_3		$\mathcal{M}_{34} - \mathcal{M}_{32}$	
(4)	ξ'_1		ξ_3	ϱ_4	ξ_4								ξ_{IV}	ξ'_4		\mathcal{M}_{43}	
(5)			ξ'_3	ξ_4	ϱ_5	ξ_5							ξ_5	ξ'_5		$-\mathcal{M}_{56}$	
(6)			ξ_5	ϱ_6	ξ_6	ξ_6							ξ_6	ξ'_6		$\mathcal{M}_{65} - \mathcal{M}_{67}$	
(7)		ξ'_2	ξ_6	ϱ_7	ξ_7	ξ_7							ξ_7	ξ'_7		$\mathcal{M}_{76} - \mathcal{M}_{78}$	
(8)	ξ'_1		ξ_7	ϱ_8	ξ_8	ξ_8							ξ_8	ξ'_8		\mathcal{M}_{87}	
(9)							ξ_8	ϱ_9	ξ_9					ξ_9		$\mathcal{M}_{9,10}$	
(10)							ξ_9	ϱ_{10}	ξ_{10}	ξ_{10}				ξ_{10}		$\mathcal{M}_{10,11} - \mathcal{M}_{10,9}$	
(11)							ξ_{10}	ϱ_{11}	ξ_{11}	ξ_{11}				ξ_{11}		$\mathcal{M}_{11,12} - \mathcal{M}_{11,10}$	
(12)						ξ'_5	ξ_6	ϱ_{12}	ξ_{12}	ξ_{12}				ξ_{12}		$-\mathcal{M}_{12,11}$	
(13)	ξ_I	ξ_{II}	ξ_{III}	ξ_{IV}									X_1			$2 S_1$	
(14)	ξ'_1	ξ'_2	ξ'_3	ξ'_4									X_2			S_2	
(15)													X_3			S_3	

gleichungen in q' , wenn man hierbei

$$\begin{aligned} q'_1 &= q_1 - 0,5 \xi_I, \\ q'_2 &= q_2 - 0,5 \xi_{II}, \\ q'_3 &= q_3 - 0,5 \xi_{III} \text{ usw.}, \end{aligned}$$

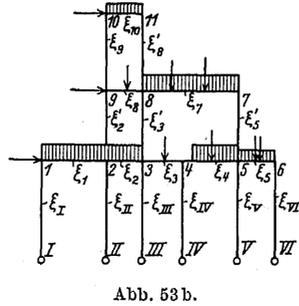
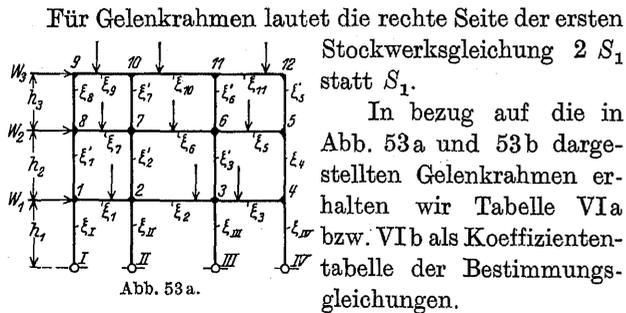
allgemeiner:

$$(XI) \quad q'_r = q_r - 0,5 \xi_r$$

setzt (Abb. 53a und 53b).

Tabelle VIb.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung											Rechte Seite der Gleichung					
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	μ'_1	μ'_2	μ'_3			
(1)	q'_1	ξ_1										ξ_I			M_{12}		
(2)	ξ_1	q'_2	ξ_2									ξ_{II}	ξ'_2		$M_{23} - M_{21}$		
(3)		ξ_2	q'_3	ξ_3								ξ_{III}	ξ'_3		$M_{34} - M_{32}$		
(4)			ξ_3	q'_4	ξ_4							ξ_{IV}	ξ'_4		$M_{45} - M_{43}$		
(5)				ξ_4	q'_5	ξ_5						ξ_V	ξ'_5		$M_{56} - M_{54}$		
(6)				ξ_5	q'_6	ξ_6	ξ_6					ξ_{VI}	ξ'_6		$-M_{65}$		
(7)					ξ_6		q_7	ξ_7				ξ'_7	ξ'_8		$-M_{78}$		
(8)							q_8	ξ_8				ξ'_8	ξ'_9		$M_{87} - M_{89}$		
(9)							q_9	ξ_9	ξ_9			ξ'_9	ξ'_{10}		M_{98}		
(10)								q_{10}	ξ_{10}	ξ_{10}			ξ'_{10}		M_{10-11}		
(11)								q_{11}	ξ_{11}	ξ_{11}			ξ'_{11}		$-M_{11-10}$		
(12)	ξ_I	ξ_{II}	ξ_{III}	ξ_{IV}	ξ_V	ξ_{VI}						X_1			$2 S_1$		
(13)		ξ'_2					ξ'_6	ξ'_7					X_2		S_2		
(14)							ξ'_8	ξ'_9	ξ_9					X_3	S_3		



Diese Tabellen wurden ebenso aufgestellt wie die Tabellen IIa und IIb.

d) Symmetrische Ausbildung mit waagerechten Einzellasten.

Bei einem symmetrisch gebauten Rahmentragwerk mit waagerechten Einzellasten in allen Knotenpunkten einer vertikalen Seite des Tragwerkes sind die Knotendrehwinkel und die Stabdrehwinkel der Stockwerke unbekannt. Sich entsprechende, symmetrisch gelegene Knotenpunkte weisen aber gleich große Knotendrehwinkel auf, wodurch der Grad der statischen Unbestimmtheit des zu behandelnden Rahmentragwerkes bedeutend geringer wird.

Tabelle VIIa.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung											Rechte Seite der Gleichung				
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	μ_1	μ_2	μ_3				
(1)	Q_1	ξ_1								ξ_I	ξ'_1				0	
(2)	ξ_1	Q_2	ξ_2							ξ_{II}	ξ'_2				0	
(3)		$2\xi_2$	Q_3	ξ_3						ξ_{III}	ξ'_3				0	
(4)			ξ_3	Q_4	$2\xi_4$						ξ'_3	ξ'_4			0	
(5)				ξ_4	Q_5	ξ_5					ξ'_4	ξ'_5			0	
(6)				ξ_5	Q_6	ξ_6	ξ_6				ξ'_5	ξ'_6			0	
(7)							Q_7	ξ_7							0	
(8)							$2\xi_7$	Q_8	ξ_8						0	
(9)							Q_9	ξ_9	ξ_9						0	
(10)	ξ_I	ξ_{II}	ξ_{III}									$X_1/2$			$S_1/2$	
(11)	ξ_1	ξ_2	$\xi_3/2$	$\xi_3/2$	ξ_4	ξ_5	ξ_5	ξ_6	ξ_6				$X_2/2$		$S_2/2$	
(12)														$X_3/2$	$S_3/2$	

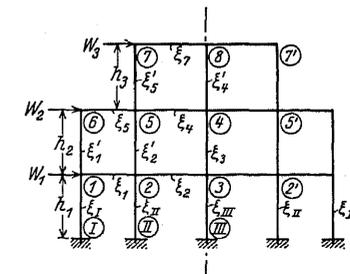
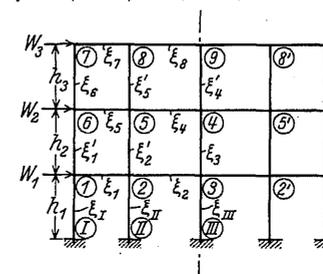


Tabelle VIIb.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung											Rechte Seite der Gleichung				
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	μ_1	μ_2	μ_3					
(1)	Q_1	ξ_1							ξ_I	ξ'_1				0		
(2)	ξ_1	Q_2	ξ_2						ξ_{II}	ξ'_2				0		
(3)		$2\xi_2$	Q_3	ξ_3					ξ_{III}	ξ'_3				0		
(4)			ξ_3	Q_4	$2\xi_4$					ξ'_3	ξ'_4			0		
(5)				ξ_4	Q_5	ξ_5				ξ'_4	ξ'_5			0		
(6)				ξ_5	Q_6	ξ_6	ξ_6			ξ'_5	ξ'_6			0		
(7)							Q_7	ξ_7						0		
(8)							$2\xi_7$	Q_8	ξ_8					0		
(9)							Q_9	ξ_9	ξ_9					0		
(10)	ξ_I	ξ_{II}	$\frac{1}{2}\xi_{III}$	$\frac{1}{2}\xi_{III}$	ξ_4	ξ_5	ξ_5	ξ_6	ξ_6			$X_1/2$			$S_1/2$	
(11)	ξ_1	ξ_2	$\frac{1}{2}\xi_3$	$\frac{1}{2}\xi_3$	ξ_4	ξ_5	ξ_5	ξ_6	ξ_6				$X_2/2$		$S_2/2$	
(12)														$X_3/2$	$S_3/2$	

Bezeichnet man mit k die Anzahl sämtlicher, mit m die Anzahl der auf der symmetrischen Bauachse liegenden Knotenpunkte und mit n die Anzahl der Stockwerke, so sind, bei einem symmetrisch gebauten Rahmentragwerk mit geradzahigen Öffnungen, unbekannt: $\frac{1}{2}(k + m)$ Knotendrehwinkel und n Stabdrehwinkel der Stockwerke; diese Tragwerke sind also im ganzen $\frac{1}{2}(k + m + 2n)$ -fach statisch unbestimmt (Abb. 54a und 54b).

Bei einem Rahmentragwerk mit ungeradzahligen Öffnungen, k Knotenpunkten und n Stockwerken sind unbekannt $k/2$ Knotendrehwinkel und n Stabdrehwinkel der Stockwerke, also ist es im ganzen $\frac{1}{2}(k + 2n)$ -fach statisch unbestimmt (Abb. 56).

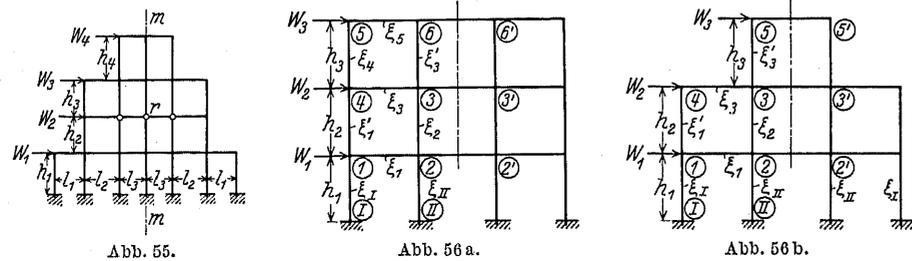
Diese zwei symmetrischen Fälle sind in Abb. 54a, 54b und 56 beispielsweise dargestellt.

Der in Abb. 54a dargestellte Rahmen mit vier Öffnungen und drei Stockwerken trägt eine waagerechte, in allen Knotenpunkten seiner linken Seite belastete Einzellast. Unbekannt sind die Knotendrehwinkel φ_1 bis φ_9 und die Winkel μ_1 bis μ_3 der drei Stockwerke.

Die neun Knotengleichungen und drei Stockwerksgleichungen liefern die umstehend aufgestellte Tabelle der Bestimmungsgleichungen, die man nach Tabelle IIa und IIb unter Berücksichtigung der Gl. (VII) entwickeln kann (Tabelle VIIa).

Der in Abb. 54b dargestellte Rahmen trägt waagerechte Einzellasten, die in allen Knotenpunkten seiner linken Seite angreifen.

Unbekannt sind die Knotendrehwinkel φ_1 bis φ_8 und die Winkel μ_1 bis μ_3 .



Die acht Knotengleichungen und drei Stockwerksgleichungen liefert die nachstehend aufgestellte Tabelle der Bestimmungsgleichungen (Tabelle VIIb).

Wir müssen hierbei darauf aufmerksam machen, daß für die Gleichgewichtsgleichung am Knoten r in der Achse $m - m$ (Abb. 55) der Koeffizient desjenigen Knotendrehwinkels, welcher sich am nächsten links vom Knotenpunkt r befindet, verdoppelt wird, weil aus Symmetriegründen sich entsprechende, symmetrisch gelegene Knotenpunkte, am nächsten links und am nächsten rechts vom Knotenpunkt r , Knotendrehwinkel von gleicher Größe und demselben Vorzeichen aufweisen.

Für die Stockwerksgleichungen vermindern sich die Koeffizienten von φ_3 , φ_4 , φ_9 , μ_1 , μ_2 , μ_3 und die rechte Seite der Gleichung auf die Hälfte (s. Abb. 54a und Tabelle VIIa).

Ebenso vermindern sich in bezug auf Abb. 54b die Koeffizienten von φ_3 , φ_4 , φ_8 , μ_1 , μ_2 , μ_3 und die rechte Seite der Gleichung auf die Hälfte (Tabelle VIIb).

So z. B. sind in Tabelle VIIb für die Gleichgewichtsgleichungen (3), (4) und (8) in bezug auf die Knotenpunkte 3, 4 und 8 (Abb. 54b) die Koeffizienten von φ_3 , φ_4 und φ_8 : $2\xi_2$, $2\xi_4$ bzw. $2\xi_7$; für die Stockwerksgleichungen (9) bis (11) sind die Koeffizienten von φ_3 , φ_4 und φ_8 : $(0,5\xi_{III}, 0,5\xi_3)$, $(0,5\xi_3, 0,5\xi'_4)$ bzw. $0,5\xi'_4$; die Koeffizienten von μ_1 , μ_2 und μ_3 : $X_1/2$, $X_2/2$ und $X_3/2$; die rechte Seite der Gleichungen lautet $S_1/2$, $S_2/2$ und $S_3/2$ (s. Tabelle VIIb).

Der in Abb. 56a dargestellte Rahmen mit drei Öffnungen und drei Stock-

werken ist neunfach statisch unbestimmt, weil die Knotendrehwinkel φ_1 bis φ_6 und die Winkel μ_1 bis μ_3 der drei Stockwerke unbekannt sind.

Die sechs Knotengleichungen und drei Stockwerksgleichungen ergeben die folgende Tabelle der Bestimmungsgleichungen (Tabelle VIIIa). Für die Gleichgewichtsgleichungen an denjenigen Knotenpunkten, welche sich am nächsten links der Achse befinden, schreiben wir $[\varrho]$ statt ϱ ; für die Stockwerksgleichungen vermindern sich die Koeffizienten von μ und die rechte Seite der Gleichung auf die Hälfte.

Tabelle VIIIa.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung									Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	μ_1	μ_2	μ_3	
(1)	ϱ_1	ξ_1		ξ'_1			ξ_I	ξ'_1		0
(2)	ξ_1	$[\varrho_2]$	ξ_2				ξ_{II}	ξ_2		0
(3)		ξ_2	$[\varrho_3]$	ξ_3	ξ_4	ξ_5		ξ_2	ξ'_3	0
(4)	ξ'_1		ξ_3	ϱ_4	ξ_4			ξ_1	ξ'_4	0
(5)				ξ_4	ϱ_5	ξ_5			ξ_4	0
(6)			ξ'_3		ξ_5	$[\varrho_6]$			ξ'_3	0
(7)	ξ_I	ξ_{II}					$X_1/2$			$S_1/2$
(8)	ξ'_1	ξ_2		ξ'_1				$X_2/2$		$S_2/2$
(9)			ξ'_3	ξ_4	ξ_5				$X_3/2$	$S_3/2$

Z. B. setzen wir für die Gleichgewichtsgleichungen (2), (3) und (6) in Tabelle VIIIa in bezug auf die Knotenpunkte 2, 3 und 6 (Abb. 56a): $[\varrho_2]$, $[\varrho_3]$ und $[\varrho_6]$ statt ϱ_2 , ϱ_3 und ϱ_6 ; für die Stockwerksgleichungen (7) bis (9) sind die Koeffizienten von μ_1 , μ_2 und μ_3 : $X_1/2$, $X_2/2$ und $X_3/2$; und die rechte Seite der Gleichungen lautet $S_1/2$, $S_2/2$ und $S_3/2$ (Tabelle VIIIa).

Tabelle VIIIb.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung									Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	μ_1	μ_2	μ_3		
(1)	ϱ_1	ξ_1		ξ'_1			ξ_I	ξ'_1		0
(2)	ξ_1	$[\varrho_2]$	ξ_2				ξ_{II}	ξ_2		0
(3)		ξ_2	$[\varrho_3]$	ξ_3	ξ_4	ξ_5		ξ_2	ξ'_3	0
(4)	ξ'_1		ξ_3	ϱ_4				ξ_1	ξ'_4	0
(5)				ξ_4	ϱ_5				ξ_4	0
(6)	ξ_I	ξ_{II}					$X_1/2$			$S_1/2$
(7)	ξ'_1	ξ_2		ξ'_1				$X_2/2$		$S_2/2$
(8)			ξ'_3	ξ_4	ξ_5				$X_3/2$	$S_3/2$

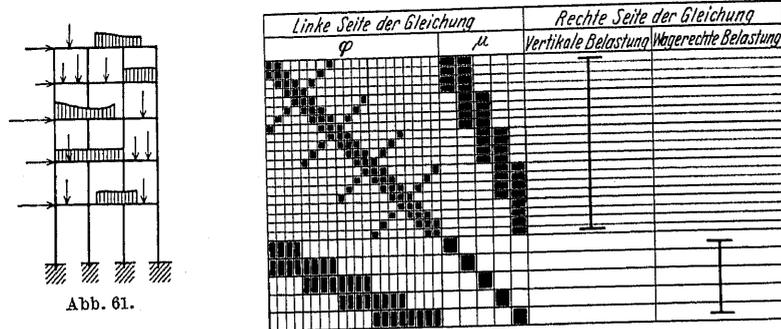
$$[\varrho_2] = \varrho_2 + \xi_{2-2}, \quad [\varrho_3] = \varrho_3 + \xi_{3-3}, \quad \text{usw.}$$

Der in Abb. 56b dargestellte Rahmen ist achtfach statisch unbestimmt, weil die Knotendrehwinkel φ_1 bis φ_5 und die Winkel μ_1 bis μ_3 unbekannt sind.

Die fünf Knotengleichungen und drei Stockwerksgleichungen bestimmen die Tabelle der Bestimmungsgleichungen (Tabelle VIIIb).

Die allgemeine Grundform der Tabellen unseres Verfahrens ist in Abb. 57 bis 61 angegeben. Abb. 57 zeigt die allgemeine Grundform der Tabellen für den einstöckigen Rechteckrahmen mit beliebiger senkrechter Belastung auf den Balken und mit einer waagerechten Einzellast an den Knotenpunkten auf einer senkrechten Seite des Rahmengebildes. Abb. 58, 59, 60 und 61 zeigen die unter denselben Bedingungen allgemeinen Grundformen der Tabellen für den zwei-, drei-, vier- und fünfstöckigen Rechteckrahmen.

Tabelle XIV.



Fünfstöckiger Rechteckrahmen mit beliebiger senkrechter Belastung auf den Balken und mit einer waagerechten Einzellast an den Knotenpunkten auf der senkrechten linken Seite des Rahmengebildes.

§ 6. Auflösung der Elastizitätsgleichungen.

Bei der statischen Untersuchung eines mehrstöckigen und mehrfeldigen Rahmens treten gewöhnlich ebensoviel Elastizitätsgleichungen als statisch Unbestimmte auf: sie sind linear nach den Unbekannten.

Im allgemeinen enthalten n Elastizitätsgleichungen mit n Unbekannten insgesamt n^2 Koeffizienten der Unbekannten und n Festwerte, von denen bei manchen Aufgaben mehrere gleich Null sein können, wodurch die Auflösung in hohem Grade vereinfacht wird.

Für die Auflösung einer linearen Gleichungsgruppe steht das Eliminationsverfahren und das Iterationsverfahren zur Verfügung.

Das erstere ist nur mit der Rechenmaschine und das letztere nur mit dem Rechenschieber mit unbedingter Genauigkeit und Sicherheit durchführbar.

a) Das Eliminationsverfahren.

Im folgenden werden die Unbekannten mit $X_1, X_2, X_3 \dots$ und die Koeffizienten mit $A, B, C \dots$ bezeichnet.

Es seien z. B. vier Gleichungen mit vier Unbekannten:

$$\begin{aligned} (1) \quad & A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4 = m_1, \\ (2) \quad & B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_3 X_3 + B_4 X_4 = m_2, \\ (3) \quad & C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 + C_4 X_4 = m_3, \\ (4) \quad & D_1 X_1 + D_2 X_2 + D_3 X_3 + D_4 X_4 = m_4. \end{aligned}$$

Dieselben Gleichungen können folgendermaßen tabellarisiert werden (Tabelle XV).

Tabelle XV.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung				Rechte Seite der Gleichung
	X_1	X_2	X_3	X_4	
(1)	A_1	A_2	A_3	A_4	m_1
(2)	B_1	B_2	B_3	B_4	m_2
(3)	C_1	C_2	C_3	C_4	m_3
(4)	D_1	D_2	D_3	D_4	m_4

Aus Gl. (1) ergibt sich:

$$(5) \quad \begin{cases} X_1 + a_1 X_2 + a_2 X_3 + a_3 X_4 = n_1, \\ \text{wobei} \\ a_1 = \frac{A_2}{A_1}, \quad a_2 = \frac{A_3}{A_1}, \\ a_3 = \frac{A_4}{A_1}, \quad n_1 = \frac{m_1}{A_1}. \end{cases}$$

In analoger Weise aus Gl. (2)

$$(6) \quad \begin{cases} X_1 + b_1 X_2 + b_2 X_3 + b_3 X_4 = n_2, \\ \text{wobei} \\ b_1 = \frac{B_2}{B_1}, \quad b_2 = \frac{B_3}{B_1}, \\ b_3 = \frac{B_4}{B_1}, \quad n_2 = \frac{m_2}{B_1}. \end{cases}$$

Aus Gl. (3) folgt:

$$(7) \quad \begin{cases} X_1 + c_1 X_2 + c_2 X_3 + c_3 X_4 = n_3, \\ \text{wobei} \\ c_1 = \frac{C_2}{C_1}, \quad c_2 = \frac{C_3}{C_1}, \\ c_3 = \frac{C_4}{C_1}, \quad n_3 = \frac{m_3}{C_1}. \end{cases}$$

Entsprechend aus Gl. (4)

$$(8) \quad \begin{cases} X_1 + d_1 X_2 + d_2 X_3 + d_3 X_4 = n_4, \\ \text{wobei} \\ d_1 = \frac{D_2}{D_1}, \quad d_2 = \frac{D_3}{D_1}, \\ d_3 = \frac{D_4}{D_1}, \quad n_4 = \frac{m_4}{D_1}. \end{cases}$$

Eliminiert man X_1 in Gl. (5) und Gl. (6), so wird

$$(a_1 - b_1) X_2 + (a_2 - b_2) X_3 + (a_3 - b_3) X_4 = n_1 - n_2$$

oder

$$X_2 + \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1} X_3 + \frac{a_3 - b_3}{a_1 - b_1} X_4 = \frac{n_1 - n_2}{a_1 - b_1}$$

oder auch:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_2 + a'_1 X_3 + a'_2 X_4 = n'_1, \\ \text{wobei} \\ a'_1 = \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1}, \\ a'_2 = \frac{a_3 - b_3}{a_1 - b_1}, \\ n'_1 = \frac{n_1 - n_2}{a_1 - b_1}. \end{array} \right.$$

In analoger Weise liefert die Elimination von X_1 in Gl. (6) und Gl. (7):

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_2 + b'_1 X_3 + b'_2 X_4 = n'_2, \\ \text{wobei} \\ b'_1 = \frac{b_2 - c_2}{b_1 - c_1}, \\ b'_2 = \frac{b_3 - c_3}{b_1 - c_1}, \\ n'_2 = \frac{n_2 - n_3}{b_1 - c_1}; \end{array} \right.$$

in Gl. (7) und Gl. (8)

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_2 + c'_1 X_3 + c'_2 X_4 = n'_3, \\ \text{wobei} \\ c'_1 = \frac{c_2 - d_2}{c_1 - d_1}, \\ c'_2 = \frac{c_3 - d_3}{c_1 - d_1}, \\ n'_3 = \frac{n_3 - n_4}{c_1 - d_1}. \end{array} \right.$$

Ganz gleichartig können wir danach X_2 und dann X_3 eliminieren und am Ende X_4 erhalten.

Diese Zwischenrechnung und der weitere Fortgang der Rechnung nach dem Eliminationsverfahren ist aus Tabelle XVI sofort ersichtlich.

In Tabelle XVI ist

$$a''_1 = \frac{a'_2 - b'_2}{a'_1 - b'_1}, \quad b''_1 = \frac{b'_3 - c'_3}{b'_1 - c'_1}, \\ n''_1 = \frac{n'_1 - n'_3}{a'_1 - b'_1}, \quad n''_2 = \frac{n'_2 - n'_3}{b'_1 - c'_1}.$$

Die Endrechnung liefert:

$$X_4 = \frac{n''_1 - n''_2}{a''_1 - b''_1} = \Delta_4, \\ X_3 = n''_1 - a''_1 X_4 = n''_1 - a''_1 \Delta_4 = \Delta_3, \\ X_2 = n''_1 - a'_1 \Delta_3 - a'_2 \Delta_4 = \Delta_2, \\ X_1 = n_1 - a_1 \Delta_2 - a_2 \Delta_3 - a_3 \Delta_4 = \Delta_1.$$

Tabelle XVI. Zwischenrechnung nach dem Eliminationsverfahren.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung				Rechte Seite der Gleichung	Bemerkung
	X_1	X_2	X_3	X_4		
(1)	A_1	A_2	A_3	A_4	m_1	
(2)	B_1	B_2	B_3	B_4	m_2	
(3)	C_1	C_2	C_3	C_4	m_3	
(4)	D_1	D_2	D_3	D_4	m_4	
(5)	+1	a_1	a_2	a_3	n_1	(1): A_1
(6)	+1	b_1	b_2	b_3	n_2	(2): B_1
(7)	+1	c_1	c_2	c_3	n_3	(3): C_1
(8)	+1	d_1	d_2	d_3	n_4	(4): D_1
		$a_1 - b_1$	$a_2 - b_2$	$a_3 - b_3$	$n_1 - n_2$	(5) - (6)
		$b_1 - c_1$	$b_2 - c_2$	$b_3 - c_3$	$n_2 - n_3$	(6) - (7)
		$c_1 - d_1$	$c_2 - d_2$	$c_3 - d_3$	$n_3 - n_4$	(7) - (8)
(9)		+1	a'_1	a'_2	n'_1	[(5) - (6)]: ($a_1 - b_1$)
(10)		+1	b'_1	b'_2	n'_2	[(6) - (7)]: ($b_1 - c_1$)
(11)		+1	c'_1	c'_2	n'_3	[(7) - (8)]: ($c_1 - d_1$)
			$a'_1 - b'_1$	$a'_2 - b'_2$	$n'_1 - n'_2$	(9) - (10)
			$b'_1 - c'_1$	$b'_2 - c'_2$	$n'_2 - n'_3$	(10) - (11)
(12)			+1	a''_1	n''_1	[(9) - (10)]: ($a'_1 - b'_1$)
(13)			+1	b''_1	n''_2	[(10) - (11)]: ($b'_1 - c'_1$)
				$a''_1 - b''_1$	$n''_1 - n''_2$	(12) - (13)
(14)				+1	$n''_1 - n''_2$	[(12) - (13)]: ($a''_1 - b''_1$)

b) Das Iterationsverfahren.

Das Iterationsverfahren ist ein angenähertes Rechnungsverfahren zur Auflösung der Elastizitätsgleichungen. Wie schon von Gehler gezeigt worden ist, ist es gleichwohl zu unterscheiden von dem „Annäherungsverfahren“.

Es ist anwendbar auf Gleichungssysteme, deren Diagonalkoeffizienten wesentlich größer sind als die anderen Koeffizienten, wie das in den vorstehenden Gleichungstabellen ersichtlich war, und bei solchen Elastizitätsgleichungen kommen die Lösungen von den ersten rohen Näherungswerten den genauen Werten mit unbedingter Sicherheit immer näher, und zwar um so rascher, je kleiner alle anderen Koeffizienten gegenüber den Diagonalkoeffizienten sind und erreichen schließlich einen bleibenden Endwert, der sich von den Werten der genauen Rechnung nicht mehr unterscheidet¹.

A. Iterationsverfahren I. Symmetrische Anordnung und Belastung. Ein symmetrisch gebautes Rahmentragwerk mit einer symmetrischen Belastung bedingt für sämtliche Stäbe $\mu = 0$. Als Unbekannte treten also nur die Knotendrehwinkel auf; wir bezeichnen mit X die Unbekannten.

In den einzelnen Elastizitätsgleichungen tritt, wie schon dargelegt, jedesmal eine Unbekannte besonders stark auf, d. h. beispielsweise sind in dem System der fünf folgenden Elastizitätsgleichungen:

$$(A) \quad A_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5 = m_1, \\ (B) \quad b_1 X_1 + B_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4 + b_5 X_5 = m_2, \\ (C) \quad c_1 X_1 + c_2 X_2 + C_3 X_3 + c_4 X_4 + c_5 X_5 = m_3, \\ (D) \quad d_1 X_1 + d_2 X_2 + d_3 X_3 + D_4 X_4 + d_5 X_5 = m_4, \\ (E) \quad e_1 X_1 + e_2 X_2 + e_3 X_3 + e_4 X_4 + E_5 X_5 = m_5$$

¹ Gehler, W.: Nebenspannungen eiserner Fachwerksbrücken, S. 27. Berlin 1910.

die großgedruckten Koeffizienten absolut viel größer als die andern kleingedruckten Koeffizienten auf der linken Seite, und die ersten, noch größeren Näherungswerte für die Unbekannten gewinnt man nach den stark auftretenden Unbekannten aus den Ansätzen

$$\begin{aligned} A_1 X'_1 + a_2 X'_1 + a_3 X'_1 + a_4 X'_1 + a_5 X'_1 &= m_1, \\ b_1 X'_2 + B_2 X'_2 + b_3 X'_2 + b_4 X'_2 + b_5 X'_2 &= m_2 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

zu

$$\begin{aligned} X'_1 &= m_1 : (A_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5), \\ X'_2 &= m_2 : (b_1 + B_2 + b_3 + b_4 + b_5) \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Diese ersten Näherungswerte werden in die Gleichungen eingesetzt. Die erste Gleichung (A) lautet dann:

$$A_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5 = m_1,$$

welche, nach X_1 aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert X''_1 liefert.

Als zweite Gleichung (B), mit diesem zweiten Näherungswert X''_1 und den andern ersten Näherungswerten, ergibt sich:

$$b_1 X''_1 + B_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4 + b_5 X_5 = m_2,$$

welche, nach X_2 aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert X''_2 liefert.

Im gewöhnlichen Iterationsverfahren pflegt man dabei den zweiten Näherungswert X''_1 nicht zu benutzen, sondern bloß den ersten Näherungswert X'_1 , aber nach dem Rechnungsverfahren des Verfassers schreitet die Rechnung damit schneller bis zum genaueren Wert vorwärts.

Die dritte Gleichung (C) mit X''_1 , X''_2 und andern X' lautet:

$$c_1 X''_1 + c_2 X''_2 + C_3 X_3 + c_4 X_4 + c_5 X_5 = m_3$$

mit der Lösung X''_3 .

Die weiteren Rechnungen stellen sich dann wie folgt dar:

$$d_1 X''_1 + d_2 X''_2 + d_3 X''_3 + D_4 X_4 + d_5 X_5 = m_4,$$

$$e_1 X''_1 + e_2 X''_2 + e_3 X''_3 + e_4 X_4 + E_5 X_5 = m_5$$

mit den Lösungen X''_4 und X''_5 .

Diese zweiten Annäherungen liefern wieder neue Gleichungen von der Form

$$A_1 X_1 + a_2 X''_2 + a_3 X''_3 + a_4 X''_4 + a_5 X''_5 = m_1,$$

$$b_1 X''_1 + B_2 X_2 + b_3 X''_3 + b_4 X''_4 + b_5 X''_5 = m_2,$$

$$c_1 X''_1 + c_2 X''_2 + C_3 X_3 + c_4 X''_4 + c_5 X''_5 = m_3,$$

$$d_1 X''_1 + d_2 X''_2 + d_3 X''_3 + D_4 X_4 + d_5 X''_5 = m_4,$$

$$e_1 X''_1 + e_2 X''_2 + e_3 X''_3 + e_4 X''_4 + E_5 X_5 = m_5$$

mit den Lösungen X'''_1 , X'''_2 , X'''_3 , X'''_4 und X'''_5 .

B. Iterationsverfahren II. Unsymmetrische Anordnung und Belastung.

In einem Rahmen unter unsymmetrischen Bedingungen treten als Unbekannte die Knotendrehwinkel und Stabdrehwinkel auf; wir bezeichnen diese statisch Unbestimmten mit X bzw. Y .

Wie im vorstehenden Beispiel tritt eine Unbekannte in den einzelnen Elastizitätsgleichungen besonders stark auf, beispielsweise seien in dem System dieser vier Elastizitätsgleichungen:

$$(a) \quad A_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 Y_1 + a_4 Y_2 = m_1,$$

$$(b) \quad b_1 X_1 + B_2 X_2 + b_3 Y_1 + b_4 Y_2 = m_2,$$

$$(c) \quad c_1 X_1 + c_2 X_2 + C_3 Y_1 + c_4 Y_2 = m_3,$$

$$(d) \quad d_1 X_1 + d_2 X_2 + d_3 Y_1 + D_4 Y_2 = m_4$$

die großgedruckten Koeffizienten absolut viel größer als die andern kleingedruckten Koeffizienten auf der linken Seite, und die ersten, noch größeren Näherungswerte für die Unbekannten X gewinne man als Funktionen von Y nach den stark auftretenden Unbekannten aus den Ansätzen

$$A_1 X'_1 + a_2 X'_1 = m_1 - a_3 Y_1 - a_4 Y_2,$$

$$b_1 X'_2 + B_2 X'_2 = m_2 - b_3 Y_1 - b_4 Y_2$$

zu

$$(e) \quad X'_1 = (m_1 - a_3 Y_1 - a_4 Y_2) : (A_1 + a_2),$$

$$(f) \quad X'_2 = (m_2 - b_3 Y_1 - b_4 Y_2) : (b_1 + B_2).$$

Diese ersten Näherungswerte werden in die Gln. (c) und (d) eingesetzt.

Die Gln. (c) und (d) lauten dann:

$$(g) \quad Y_1 (C_3 - c_1 a'_3 - c_2 b'_3) + Y_2 (c_4 - c_1 a'_4 - c_2 b'_4) = m_3 - c_1 m'_1 - c_2 m'_2,$$

$$(h) \quad Y_1 (d_3 - d_1 a'_3 - d_2 b'_3) + Y_2 (D_4 - d_1 a'_4 - d_2 b'_4) = m_4 - d_1 m'_1 - d_2 m'_2,$$

worin

$$a'_3 = \frac{a_3}{A_1 + a_2}, \quad b'_3 = \frac{b_3}{b_1 + B_2},$$

$$a'_4 = \frac{a_4}{A_1 + a_2}, \quad b'_4 = \frac{b_4}{b_1 + B_2},$$

$$m'_1 = \frac{m_1}{A_1 + a_2}, \quad m'_2 = \frac{m_2}{b_1 + B_2}$$

ist.

Die ersten, anfänglich noch größeren Näherungswerte für die Unbekannten Y lassen sich aus den Ansätzen

$$Y'_1 (C_3 - c_1 a'_3 - c_2 b'_3) + Y'_2 (c_4 - c_1 a'_4 - c_2 b'_4) = m_3 - c_1 m'_1 - c_2 m'_2,$$

$$Y'_2 (d_3 - d_1 a'_3 - d_2 b'_3) + Y'_2 (D_4 - d_1 a'_4 - d_2 b'_4) = m_4 - d_1 m'_1 - d_2 m'_2$$

gewinnen, so daß man

$$Y'_1 = (m_3 - c_1 m'_1 - c_2 m'_2) : \{C_3 + c_4 - c_1 (a'_3 + a'_4) - c_2 (b'_3 + b'_4)\},$$

$$Y'_2 = (m_4 - d_1 m'_1 - d_2 m'_2) : \{d_3 + D_4 - d_1 (a'_3 + a'_4) - d_2 (b'_3 + b'_4)\}$$

erhält.

Mit den ersten Näherungswerten Y'_1 und Y'_2 liefern die Gl. (e) und (f) die ersten Näherungswerte X'_1 und X'_2 .

Diese ersten Näherungswerte werden in die Gleichungen eingesetzt.

Die erste Gleichung (a) lautet dann:

$$A X_1 + a_2 X_2 + a_3 Y'_1 + a_4 Y'_2 = m_1,$$

welche, nach X_1 aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert X''_1 liefert.

Hieraus ergibt sich:

$$\varphi'_1 = 0,143 \mathfrak{M} : \xi.$$

In analoger Weise hat man aus den Gln. (2), (3) und (4) in Tabelle XVIII:

$$\varphi'_2 = \varphi'_3 = 0, \quad \varphi'_4 = 0,2 \mathfrak{M} : \xi.$$

Tabelle XIX.

		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
Näherungswert	φ'	0,143	0	0	0,200
	φ''	0,163	-0,0222	→	→
	φ'''	→	→	→	→

Multiplikator: $\mathfrak{M} : \xi$

Diese ersten Näherungswerte sind übersichtlich in Tabelle XIX angegeben. Sie werden alsdann in die Gleichungen eingesetzt.

Die erste Gleichung (1) in Tabelle XVIII lautet demgemäß:

$$16 \varphi_1 + 3(0) + 2(0,200) = 3,$$

(Multiplikator: $\mathfrak{M} : \xi$)

welche, nach φ_1 aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert $\varphi''_1 = 0,163 \mathfrak{M} : \xi$ liefert. Der Wert wird in Tabelle XIX eingeschrieben.

Die Gleichung (2) in Tabelle XVIII ergibt mit diesem zweiten Näherungswert φ''_1 und anderen ersten Näherungswerten:

$$3(0,163) + 22 \varphi_2 + 2(0) = 0, \quad (\text{Multiplikator: } \mathfrak{M} : \xi)$$

welche, nach φ_2 aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert $\varphi''_2 = -0,0222 \mathfrak{M} : \xi$ liefert. Der Wert φ''_2 wird in Tabelle XIX eingeschrieben.

Tabelle XX.

		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
Näherungswert	$\varphi^{(1)}$	0,143	0	0	0,200
	$\varphi^{(2)}$	0,163	-0,0222	-0,0348	0,278
	$\varphi^{(3)}$	0,157	-0,0182	-0,0498	0,284
	$\varphi^{(4)}$	0,155	-0,0166	-0,0512	0,284
	$\varphi^{(5)}$	0,1551	-0,0165	-0,0512	0,2844

Multiplikator: $\mathfrak{M} : \xi$

Tabelle XIX zeigt den Rechnungsvverlauf bis zur Bestimmung von φ''_3 , und die weitere Rechnung ist in Tabelle XX übersichtlich angegeben.

Die Richtigkeit dieser Rechnungsergebnisse kann durch die Gleichgewichtsbedingungen kontrolliert und ihre Genauigkeit durch die Zahl der Versuche beliebig erhöht werden. Nun sollen im nachstehenden die Knotenpunktsmomente ermittelt und die

Richtigkeit dieses Verfahrens durch die Gleichgewichtsgleichungen kontrolliert werden.

Entsprechend der Grundgleichung (I) erhält man mit den fünften Näherungswerten:

Am Knotenpunkt I:

$$M_{1-2} = \xi \{2 \varphi_1 + \varphi_2\} - \mathfrak{M} = \{2(0,1551) + (-0,0165) - 1\} \mathfrak{M} = -0,706 \mathfrak{M},$$

$$M_{1-4} = \frac{2\xi}{3} \{2 \varphi_1 + \varphi_4\} = \frac{2}{3} \{2(0,1551) + (0,2844)\} \mathfrak{M} = 0,396 \mathfrak{M},$$

$$M_{1-I} = \xi \{2 \varphi_1\} = 2(0,1551) \mathfrak{M} = 0,310 \mathfrak{M}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung: $\Sigma M_1 = 0$ ist am Knotenpunkt I vollkommen erfüllt.

Für den Knotenpunkt 2 resultieren:

$$M_{2-1} = \xi \{2 \varphi_2 + \varphi_1\} + \mathfrak{M} = \{2(-0,0165) + 0,1551 + 1\} \mathfrak{M} = 1,122 \mathfrak{M},$$

$$M_{2-m} = \xi \{2 \varphi_2\} - \mathfrak{M} = \{2(-0,0165) - 1\} \mathfrak{M} = -1,033 \mathfrak{M},$$

$$M_{2-3} = \frac{2}{3} \xi \{2 \varphi_2 + \varphi_3\} = \frac{2}{3} \{2(-0,0165) + (-0,0512)\} \mathfrak{M} = -0,056 \mathfrak{M},$$

$$M_{2-II} = \xi \{2 \varphi_2\} = 2(-0,0165) \mathfrak{M} = -0,033 \mathfrak{M}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung: $\Sigma M_2 = 0$ ist am Knotenpunkt 2 vollkommen erfüllt.

Ganz in analoger Weise:

Am Knotenpunkt 3:

$$M_{3-4} = \xi \{2 \varphi_3 + \varphi_4\} + \mathfrak{M} = \{2(-0,0512) + 0,2844 + 1\} \mathfrak{M} = 1,182 \mathfrak{M},$$

$$M_{3-m} = \xi \{2 \varphi_3\} - \mathfrak{M} = \{2(-0,0512) - 1\} \mathfrak{M} = -1,102 \mathfrak{M},$$

$$M_{3-2} = \frac{2}{3} \xi \{2 \varphi_3 + \varphi_2\} = \frac{2}{3} \{2(-0,0512) + (-0,0165)\} \mathfrak{M} = -0,079 \mathfrak{M}.$$

Am Knotenpunkt 4:

$$M_{4-3} = \xi \{2 \varphi_4 + \varphi_3\} - \mathfrak{M} = \{2(0,2844) + (-0,0512) - 1\} \mathfrak{M} = -0,482 \mathfrak{M},$$

$$M_{4-I} = \frac{2}{3} \xi \{2 \varphi_4 + \varphi_1\} = \frac{2}{3} \{2(0,2844) + 0,1551\} \mathfrak{M} = 0,482 \mathfrak{M}.$$

Am Knotenpunkt m:

$$M_{m-2} = \xi \{\varphi_2\} + \mathfrak{M} = 0,983 \mathfrak{M}.$$

$$M_{m-3} = \xi \{\varphi_3\} + \mathfrak{M} = 0,949 \mathfrak{M}.$$

An der eingespannten Stelle:

$$M_{I-1} = \xi \{\varphi_1\} = 0,155 \mathfrak{M},$$

$$M_{II-2} = \xi \{\varphi_2\} = -0,017 \mathfrak{M}.$$

In Abb. 63 sind die Knotenpunktsmomente sinngemäß eingetragen. Die Momente der Abbildung sind mit \mathfrak{M} zu multiplizieren.

Am Knotenpunkt I ergeben sich M_{1-4} und M_{1-I} positiv, d. h. am herausgeschnittenen Stab drehen die Knotenpunktsmomente im Rechtssinne. M_{1-2} ist negativ, dreht also am Stab im entgegengesetzten Uhrzeigersinne.

Für den Multiplikator \mathfrak{M} erhält man aus Tabelle Ib in bezug auf die in Abb. 64 dargestellte Belastung:

$$\mathfrak{M} = \frac{g l^2}{12}.$$

[s. Tabelle Ib (5).]

Z. B. am Knotenpunkt I:

$$M_{1-2} = -0,706 \left(\frac{g l^2}{12}\right) = -0,0588 g l^2,$$

$$M_{1-4} = 0,396 \left(\frac{g l^2}{12}\right) = 0,0330 g l^2,$$

$$M_{1-I} = 0,310 \left(\frac{g l^2}{12}\right) = 0,0258 g l^2.$$

Am Knotenpunkt 2:

$$M_{2-1} = 1,122 \left(\frac{g l^2}{12}\right) = 0,0935 g l^2,$$

$$M_{2-m} = -1,033 \left(\frac{g l^2}{12}\right) = -0,0861 g l^2,$$

$$M_{2-3} = -0,056 \left(\frac{g l^2}{12}\right) = -0,0047 g l^2,$$

$$M_{2-II} = -0,033 \left(\frac{g l^2}{12}\right) = -0,0027 g l^2.$$

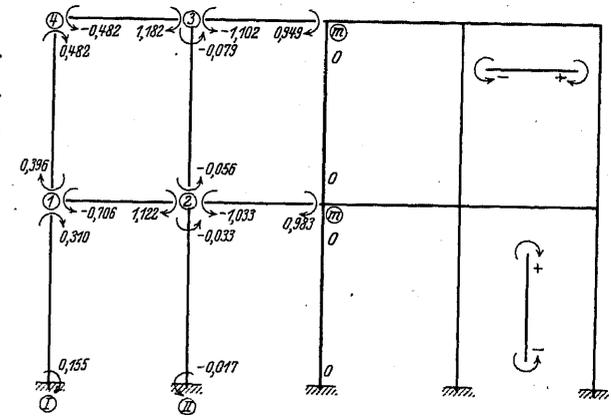


Abb. 63.

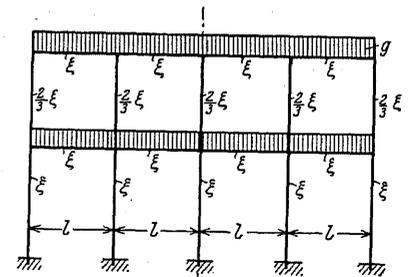


Abb. 64.

Am Knotenpunkt 3:

$$M_{3-4} = 1,182 \left(\frac{g l^2}{12} \right) = 0,0985 g l^2,$$

$$M_{3-m} = -1,102 \left(\frac{g l^2}{12} \right) = -0,0918 g l^2,$$

$$M_{3-2} = -0,079 \left(\frac{g l^2}{12} \right) = -0,0066 g l^2.$$

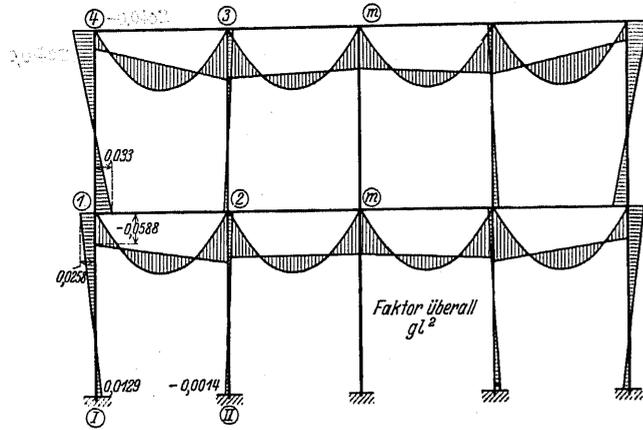


Abb. 65.

Am Knotenpunkt 4:

$$M_{4-3} = -0,482 \left(\frac{g l^2}{12} \right) = -0,0402 g l^2,$$

$$M_{4-1} = 0,482 \left(\frac{g l^2}{12} \right) = 0,0402 g l^2.$$

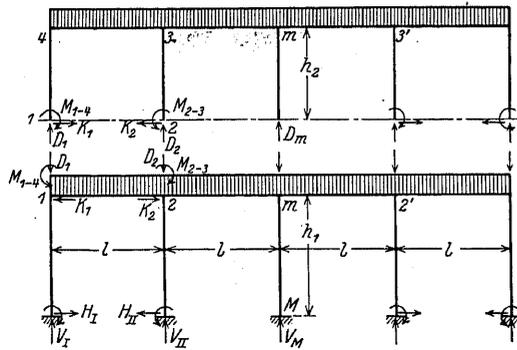


Abb. 66.

Stützenreaktionen werden durch die Knotenpunktspannkraftgrößen folgendermaßen dargestellt. Unmittelbar vor den Anschlußstellen der Ober- und Unterrahmen durch (Abb. 66) und ersetzen die auftretenden Spannkraftgrößen durch drei an jedem Knotenpunkt angreifende Kraftgrößen M, K, D .

Durch diese Zerlegung erhalten wir zwei durchlaufende Rahmenträger.

Sowohl die virtuellen Stützenwiderstände M, K, D des Oberrahmens als die wirklichen Stützenreaktionen M, H, V des Unterrahmens müssen mit den zugehörigen Belastungen in Gleichgewicht sein.

Am Knotenpunkte m :

$$M_{m-2} = 0,983 \left(\frac{g l^2}{12} \right) = 0,0819 g l^2,$$

$$M_{m-3} = 0,949 \left(\frac{g l^2}{12} \right) = 0,0791 g l^2.$$

An der eingespannten Stelle:

$$M_{I-1} = 0,155 \left(\frac{g l^2}{12} \right) = 0,0129 g l^2,$$

$$M_{II-2} = -0,017 \left(\frac{g l^2}{12} \right) = -0,0014 g l^2.$$

Mit diesen Werten sind in Abb. 65 die Biegemomente eingetragen.

Die vertikalen und waagerechten

Am Knotenpunkt 4:

$$M_{1-4} - K_1 h_2 + M_{4-1} = 0$$

oder

$$0,0330 g l^2 - K_1 h_2 + 0,0402 g l^2 = 0.$$

Es folgt daraus:

$$K_1 = 0,0732 \frac{g l^2}{h_2}.$$

Am Knotenpunkt 3:

$$D_1 l + M_{1-4} - K_1 h_2 + M_{3-4} - \frac{g l^2}{2} = 0$$

oder

$$D_1 l + 0,0330 g l^2 - 0,0732 g l^2 + 0,0985 g l^2 - 0,5 g l^2 = 0.$$

Daraus folgt:

$$D_1 = 0,4417 g l.$$

Am Knotenpunkt 3:

$$K_2 h_2 - M_{2-3} + M_{3-2} = 0$$

oder

$$K_2 h_2 - 0,0047 g l^2 - 0,0066 g l^2 = 0.$$

Man erhält daraus:

$$K_2 = 0,0113 \frac{g l^2}{h_2}.$$

Am Knotenpunkt m :

$$D_1 (2l) + D_2 l - (K_1 - K_2) h_2 + M_{1-4} - M_{2-3} - 2 g l^2 + M_{m-3} = 0$$

oder

$$0,4417 g l (2l) + D_2 l - (0,0732 - 0,0113) g l^2 + 0,0330 g l^2 - 0,0047 g l^2 - 2 g l^2 + 0,0791 g l^2 = 0.$$

Daraus wird:

$$D_2 = 1,0711 g l.$$

Am Knotenpunkt 3':

$$D_1 (3l) + D_2 (2l) + D_m l - (K_1 - K_2) h_2 + M_{1-4} - M_{2-3} - 3 g l (1,5l) + M_{3'm} = 0$$

oder

$$(0,4417 g l) (3l) + 1,0711 g l (2l) + D_m l - (0,0732 - 0,0113) g l^2 + 0,0330 g l^2 - 0,0047 g l^2 - 4,5 g l^2 + 0,0918 g l^2 = 0.$$

Man gewinnt folglich:

$$D_m = 0,9745 g l.$$

Am Knotenpunkt 1:

$$M_{I-1} - H_I h_1 + M_{1-I} = 0$$

oder

$$0,0129 g l^2 - H_I h_1 + 0,0258 g l^2 = 0.$$

Daraus hat man:

$$H_I = 0,0387 \frac{g l^2}{h_1}.$$

Am Knotenpunkt 2:

$$H_{II} h_1 - M_{II-2} + M_{2-II} = 0$$

oder

$$H_{II} h_1 - 0,0014 g l^2 - 0,0027 g l^2 = 0.$$

Es folgt:

$$H_{II} = 0,0041 \frac{g l^2}{h_1}.$$

Zufolge der Symmetrie wird für den Ständer $M - m$

$$H_M = 0.$$

Am Knotenpunkt 2 (Abb. 66)

$$(V_I - D_1)l - H_I h_1 - \frac{gl^2}{2} + M_{I-1} - M_{1-4} + M_{2-1} = 0$$

oder

$$(V_I - 0,4417 gl)l - 0,0387 gl^2 - 0,5 gl^2 + 0,0129 gl^2 - 0,0330 gl^2 + 0,0935 gl^2 = 0.$$

Daraus wird:

$$V_I = 0,9070 gl.$$

Am Knotenpunkt m:

$$(V_I - D_1)(2l) + (V_{II} - D_2)l - 2gl^2 + M_{I-1} - M_{II-2} - (H_I - H_{II})h_1 - M_{1-4} + M_{2-3} + M_{m-2} = 0$$

oder

$$(0,9070 - 0,4417)(2gl^2) + (V_{II} - 1,0711 gl)l - 2gl^2 + 0,0129 gl^2 - 0,0014 gl^2 - (0,0387 - 0,0041)gl^2 - 0,0330 gl^2 + 0,0047 gl^2 + 0,0819 gl^2 = 0.$$

Man erhält daraus:

$$V_{II} = 2,1100 gl.$$

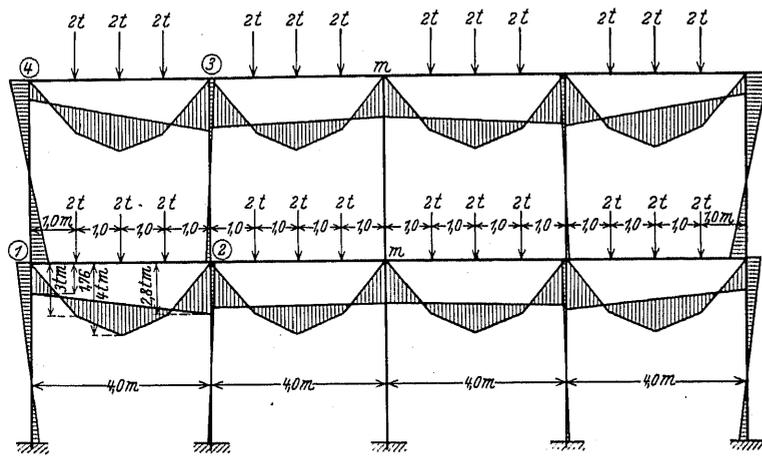


Abb. 67.

Am Knotenpunkt 2':

$$(V_I - D_1)(3l) + (V_{II} - D_2)(2l) + (V_M - D_m)l - 3gl(1,5l) - (H_I - H_{II})h_1 + M_{I-1} - M_{II-2} - M_{1-4} + M_{2-3} + M_{2'-m} = 0$$

oder

$$(0,9070 - 0,4417)(3gl^2) + (2,1100 - 1,0711)(2gl^2) + (V_M - 0,9745 gl)l - 4,5 gl^2 - (0,0387 - 0,0041)gl^2 + 0,0129 gl^2 - 0,0014 gl^2 - 0,0330 gl^2 + 0,0047 gl^2 + 0,0861 gl^2 = 0.$$

Daraus wird:

$$V_M = 1,9661 gl.$$

In bezug auf die in Abb. 67 dargestellte Belastung ergibt sich:

$$\mathfrak{M} = \frac{5}{16} Pl = \frac{5}{16} (2)(4) = 2,5 t \cdot m.$$

Als Knotenmomente ergeben sich:

Am Knotenpunkt I:

$$M_{1-2} = -0,706 (2,5) = -1,76 t \cdot m,$$

$$M_{1-4} = 0,396 (2,5) = 0,99 t \cdot m,$$

$$M_{1-I} = 0,310 (2,5) = 0,77 t \cdot m.$$

Am Knotenpunkt 2:

$$M_{2-1} = 1,122 (2,5) = 2,80 t \cdot m,$$

$$M_{2-m} = -1,033 (2,5) = -2,58 t \cdot m,$$

$$M_{2-3} = -0,056 (2,5) = -0,14 t \cdot m,$$

$$M_{II-2} = -0,033 (2,5) = -0,08 t \cdot m.$$

Am Knotenpunkt 3:

$$M_{3-4} = 1,182 (2,5) = 2,95 t \cdot m,$$

$$M_{3-m} = -1,102 (2,5) = -2,75 t \cdot m,$$

$$M_{3-2} = -0,079 (2,5) = -0,20 t \cdot m.$$

Am Knotenpunkt 4:

$$M_{4-3} = -0,482 (2,5) = -1,21 t \cdot m,$$

$$M_{4-1} = 0,482 (2,5) = 1,21 t \cdot m.$$

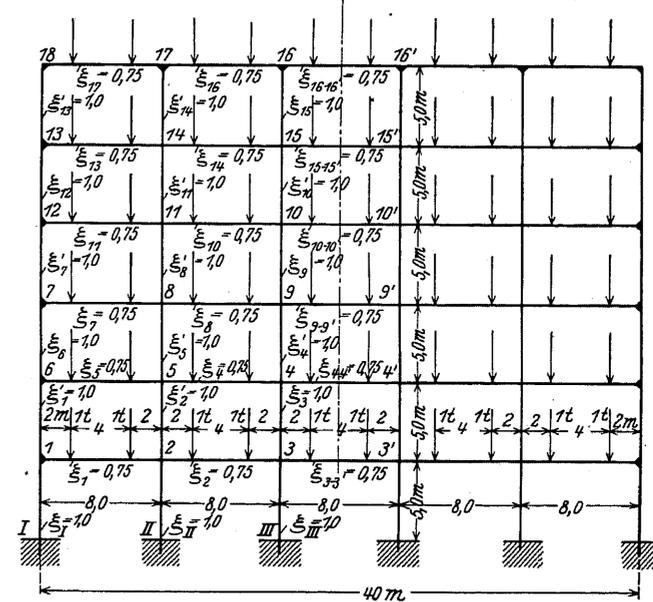


Abb. 68.

Am Knotenpunkt m:

$$M_{m-2} = 0,983 (2,5) = 2,46 t \cdot m,$$

$$M_{m-3} = 0,949 (2,5) = 2,37 t \cdot m.$$

An den Ständerfüßen

$$M_{I-1} = 0,155 (2,5) = 0,39 t \cdot m,$$

$$M_{II-2} = -0,017 (2,5) = -0,04 t \cdot m.$$

In Abb. 67 sind die Biegemomente eingetragen.

Beispiel II. Fünffeldiger, sechsgeschossiger, symmetrischer Rechteckrahmen mit sechs eingespannten Ständern. Der in Abb. 68 dargestellte Rahmen hat fünf gleiche Felder mit gleich beschaffenen Ständern und Riegeln. Gesucht sind die durch die in der Abbildung dargestellte Belastung erzeugten Biegemomente.

Entsprechend der Gl. (VIc) und zufolge dem Grundfall von Tabelle V liefert das Verfahren der Gleichungstabulierung die folgende Tabelle, die die Koeffizienten- und Festwertanordnung der Bestimmungsgleichungen zeigt.

Tabelle XXI.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung																	Rechte Seite der Gleichung	
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}		φ_{18}
(1)	ξ_1	ξ_1				ξ_1'													$M_{1,2}$
(2)	ξ_1	ξ_2				ξ_2'													$M_{2,3} - M_{2,1}$
(3)	ξ_1	ξ_2	(ϱ_3)			ξ_3													$M_{3,3'} - M_{3,2}$
(4)		ξ_2	(ϱ_4)			ξ_4													$M_{4,4'} - M_{4,5}$
(5)		ξ_2	(ϱ_4)			ξ_4													$M_{5,4} - M_{5,6}$
(6)	ξ_1	ξ_2	(ϱ_4)			ξ_4	ξ_5												$M_{6,5}$
(7)						ξ_6	ξ_7												$M_{7,8}$
(8)						ξ_6	ξ_7												$M_{8,9} - M_{8,7}$
(9)						ξ_6	ξ_7	(ϱ_9)											$M_{9,9'} - M_{9,8}$
(10)								ξ_9	(ϱ_{10})										$M_{10,10'} - M_{10,11}$
(11)								ξ_9	(ϱ_{10})	ξ_{10}									$M_{11,70} - M_{11,12}$
(12)								ξ_9	(ϱ_{10})	ξ_{10}	ξ_{11}								$M_{12,11}$
(13)										ξ_{12}	ξ_{13}								$M_{13,14}$
(14)										ξ_{12}	ξ_{13}	ξ_{14}							$M_{14,15} - M_{14,18}$
(15)										ξ_{12}	ξ_{13}	ξ_{14}	(ϱ_{15})						$M_{15,15'} - M_{15,14}$
(16)												(ϱ_{16})	ξ_{16}						$M_{16,16'} - M_{16,17}$
(17)												ξ_{16}	ξ_{17}						$M_{17,16} - M_{17,18}$
(18)												ξ_{16}	ξ_{17}	ξ_{18}					$M_{18,17}$

Wie früher dargelegt, rechnen wir zuerst die Stabwerte h, l, J für alle Stäbe und dann die Festwerte ξ, ϱ, M für alle Stäbe und Knotenpunkte sowie für die gegebenen Belastungen aus. Die in Abb. 68 an die Stäbe gesetzten Zahlen geben die Festwerte ξ .

Hieraus folgen die Festwerte ϱ :

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \varrho_6 = \varrho_7 = \varrho_{12} = \varrho_{13} = 2\{1,0 + 0,75 + 1,0\} = 5,5 \text{ cm}^3, \\ \varrho_2 &= \varrho_5 = \varrho_8 = \varrho_{11} = \varrho_{14} = 2\{1,0 + 0,75 + 1,0 + 0,75\} = 7,0 \text{ cm}^3, \\ (\varrho_3) &= (\varrho_4) = (\varrho_9) = (\varrho_{10}) = (\varrho_{15}) = 2\{1,0 + 0,75 + 1,0 + 0,75\} - 0,75 = 6,25 \text{ cm}^3, \\ (\varrho_{16}) &= 2\{1,0 + 0,75 + 0,75\} - 0,75 = 4,25 \text{ cm}^3, \\ \varrho_{17} &= 2\{0,75 + 1,0 + 0,75\} = 5,0 \text{ cm}^3, \\ \varrho_{18} &= 2\{0,75 + 1,0\} = 3,5 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Für die Festwerte M erhält man aus Tabelle Ib (2) in bezug auf die gegebenen Belastungen:

$$M = \frac{Pa(l-a)}{l} = \frac{1,0(2)(8-2)}{8} = 150 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Setzt man die vorliegenden Festwerte in Tabelle XXI ein, so erhält man Tabelle XXII. Aus Tabelle XXII kann man die achtzehn Unbekannten φ_1 bis φ_{18} durch das Iterationsverfahren bestimmen:

Aus Gl. (1) in Tabelle XXII erhält man:

$$5,5 \varphi_1 + 0,75 \varphi_2 + \varphi_6 = 150$$

oder

$$5,5 \varphi_1' + 0,75 \varphi_1' + \varphi_1' = 150.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\varphi_1' = 20,7 \text{ t/cm}^2.$$

In analoger Weise hat man aus Gln. (2), (3), (4) und (5) in Tabelle XXII

$$\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_5 = 0$$

Tabelle XXII.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung																	Rechte Seite der Gleichung	
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}		φ_{18}
(1)	5,5	0,75				1,0													150
(2)	0,75	7,0				0,75													0
(3)	0,75	6,25	1,0			6,25													0
(4)							1,0												0
(5)							0,75												0
(6)							0,75	1,0											150
(7)							5,5					1,0							150
(8)							0,75				1,0								0
(9)							7,0				0,75								0
(10)							0,75				0,75								0
(11)							6,25				6,25								150
(12)							0,75				0,75								0
(13)							1,0				1,0								0
(14)																			0
(15)																			150
(16)																			0
(17)																			0
(18)																			150

Takabeya, Rahmentafeln.

Tabelle XXIII.

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}	φ_{18}
Erster Näherungswert	20,7	0	0	0	0	18,2	18,2	0	0	0	0	18,2	18,2	0	0	0	0	28,6
Zweiter Näherungswert	24,0	-2,57	0,309	-0,05	-1,58	19,8	20,4	-1,96	0,24	-0,038	-1,67	20,5	18,3	-1,72	0,20	-0,047	-3,94	38,6
Dritter Näherungswert	24,0	-2,38	0,293	0,105	-1,51	19,4	20,3	-1,74	0,198	0,137	-1,72	20,5	16,74	-1,00	0,105	0,67	-5,69	39,4
Vierter Näherungswert	24,1	-2,40	0,271	0,106	-1,50	19,4	20,25	-1,73	0,168	0,163	-1,83	20,8	16,5	-0,705	0,05	1,02	-5,92	39,4
Fünfter Näherungswert	24,1	-2,40	0,271	0,110	-1,50	19,4	20,2	-1,72	0,161	0,202	-1,91	20,9	16,4	-0,634	-0,12	1,07	-5,95	39,5
Sechster Näherungswert	24,1	-2,40	0,271	0,111	-1,50	19,4	20,2	-1,69	0,150	0,224	-1,94	20,9	16,4	-0,616	-0,133	1,08	-6,0	39,5

und aus Gl. (6):

$$\varphi_1 + 0,75 \varphi_5 + 5,5 \varphi_6 + \varphi_7 = 150$$

oder auch

$$\varphi'_6 + 0,75 \varphi'_6 + 5,5 \varphi'_6 + \varphi'_6 = 150.$$

Daraus folgt:

$$\varphi'_6 = 18,2 \text{ t/cm}^2.$$

Ganz gleichartig erhält man aus den übrigen Gleichungen in Tabelle XXII:

$$\begin{aligned} \varphi'_7 &= 18,2 \text{ t/cm}^2, & \varphi'_8 &= \varphi'_6 = \varphi'_{10} = \varphi'_{11} = 0, \\ \varphi'_{12} &= \varphi'_{13} = 18,2 \text{ t/cm}^2, & \varphi'_{14} &= \varphi'_{15} = \varphi'_{16} = \varphi'_{17} = 0, \\ \varphi'_{18} &= 28,6 \text{ t/cm}^2. \end{aligned}$$

Diese ersten Näherungswerte sind übersichtlich in Tabelle XXIII angegeben.

Sie werden in die Gleichungen eingesetzt. Die erste Gleichung (1) in Tabelle XXII lautet dann:

$$5,5 \varphi_1 + 0,75 (0) + 18,2 = 150,$$

welche, nach φ_1 aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert $\varphi'_1 = 24,0$ liefert.

Die zweite Gleichung (2) in Tabelle XXII, mit diesem zweiten Näherungswert φ'_1 und anderen ersten Näherungswerte, ergibt:

$$0,75 (24,0) + 7,0 \varphi_2 + 0,75 (0) = 0$$

welche, nach φ_2 aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert $\varphi'_2 = -2,57$ liefert.

Die dritte Gleichung (3), mit φ'_2 und anderen φ' , lautet:

$$0,75 (-2,57) + 6,25 \varphi_3 = 0$$

mit der Lösung

$$\varphi'_3 = 0,309.$$

Gleichartig liefern die weiteren Rechnungen mit dem Rechenschieber die zweiten Näherungswerte:

$$\begin{aligned} \varphi'_4 &= -0,05, & \varphi'_5 &= -1,58, & \varphi'_6 &= 19,8, & \varphi'_7 &= 20,4, \\ \varphi'_8 &= -1,96, & \varphi'_9 &= 0,24, & \varphi'_{10} &= -0,038, & \varphi'_{11} &= -1,67, \\ \varphi'_{12} &= 20,5, & \varphi'_{13} &= 18,3, & \varphi'_{14} &= -1,72, & \varphi'_{15} &= 0,20, \\ \varphi'_{16} &= -0,047, & \varphi'_{17} &= -3,94, & \varphi'_{18} &= 38,6. \end{aligned}$$

Dieses Iterationsverfahren läßt die Rechnung von den ersten gröberen Werten durch derartige Fortführung rascher zu genaueren Werten vorwärts schreiten. Nach meinen Erfahrungen sind die Unbekannten für die vorliegende Aufgabe mit dem gewöhnlichen Eliminationsverfahren erst nach langwieriger, ermüdender, etwa drei Wochen dauernder Anstrengung zu berechnen, während unser Iterationsverfahren schon in der verhältnismäßig kurzen Zeit von sieben Stunden die mathematisch genauen Werte lieferte.

In Tabelle XXIII sind die ersten bis fünften Näherungswerte übersichtlich angegeben.

Die Richtigkeit dieser Rechnungsergebnisse kann durch die Gleichgewichtsbedingungen kontrolliert und ihre Genauigkeit durch Versuche beliebig erhöht werden.

Entsprechend der Grundgleichung (I) und mit den sechsten Näherungswerten erhält man:

Am Knotenpunkt I:

$$M_{1-2} = \xi_1 \{2 \varphi_1 + \varphi_2\} - \mathfrak{M}_{1-2} = 0,75 \{2 (24,1) - 2,40\} - 150 = -115,7 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{1-6} = \xi'_1 \{2 \varphi_1 + \varphi_6\} = 1,0 \{2 (24,1) + 19,4\} = 67,6 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{1-I} = \xi_I \{2 \varphi_1\} = 1,0 \cdot 2 \cdot 24,1 = 48,2 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Am Knotenpunkt 2:

$$M_{2-1} = \xi_1 \{2 \varphi_2 + \varphi_1\} + \mathfrak{M}_{2-1} = 0,75 \{2 (-2,40) + 24,1\} + 150 = 164,5 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{2-3} = \xi_2 \{2 \varphi_2 + \varphi_3\} - \mathfrak{M}_{2-3} = 0,75 \{2 (-2,40) + 0,271\} - 150 = -153,4 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

$$M_{2-5} = \xi_2 \{2 \varphi_2 + \varphi_5\} = 1,0 \{2 (-2,40) - 1,50\} = -6,3 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{2-II} = \xi_{II} \{2 \varphi_2\} = 1,0 \cdot 2 (-2,40) = -4,8 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Ganz in analoger Weise:

Am Knotenpunkt 3:

$$M_{3-3'} = -149,8 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{3-2} = 148,6 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{3-4} = 0,7 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{3-III} = 0,5 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Am Knotenpunkt 4:

$$M_{4-4'} = -149,9 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{4-5} = 149,0 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{4-9} = 0,4 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{4-3} = 0,5 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Am Knotenpunkt 5:

$$M_{5-4} = -152,2 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{5-6} = 162,3 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{5-8} = -4,7 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{5-2} = -5,4 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Am Knotenpunkt 6:

$$M_{6-5} = -122,0 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{6-7} = 59,0 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{6-1} = 62,9 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Am Knotenpunkt 7:

$$M_{7-8} = -121,0 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{7-12} = 61,3 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{7-6} = 59,8 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Am Knotenpunkt 8:

$$M_{8-9} = -152,4 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{8-7} = 162,6 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{8-11} = -5,3 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{8-5} = -4,9 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Am Knotenpunkt 9:

$$M_{9-9'} = -149,9 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{9-8} = 149,0 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{9-10} = 0,5 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{9-4} = 0,4 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Am Knotenpunkt 10:

$$M_{10-10'} = -149,8 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{10-11} = 148,9 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{10-15} = 0,3 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{10-9} = 0,6 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Am Knotenpunkt 11:

$$M_{11-10} = -152,7 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{11-12} = 162,8 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{11-14} = -4,5 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{11-8} = -5,6 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Am Knotenpunkt 12:

$$M_{12-11} = -120,1 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{12-13} = 58,2 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{12-7} = 62,0 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Am Knotenpunkt 13:

$$M_{13-14} = -125,9 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{13-18} = 72,3 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{13-12} = 53,7 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Am Knotenpunkt 14:

$$M_{14-15} = -151,0 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{14-18} = 161,4 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{14-17} = -7,2 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{14-11} = -3,2 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Am Knotenpunkt 15:

$$M_{15-15'} = -150,10 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{15-14} = 149,34 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{15-16} = 0,81 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{15-10} = -0,04 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Am Knotenpunkt 16:

$$M_{16-16'} = -149,2 \text{ t} \cdot \text{cm}, \quad M_{16-17} = 147,1 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{16-15} = 2,0 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Tabelle XXV.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung										Rechte Seite der Gleichung							
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}	φ_1
(1)	5,0	0,75																150
(2)	0,75	6,5	0,75															0
(3)	0,75	0,75	5,75	1,0														0
(4)		1,0																0
(5)		1,0	1,0	0,75	7,0	0,75												150
(6)				0,75	0,75	5,5												0
(7)				1,0														150
(8)																		0
(9)																		0
(10)																		150
(11)																		0
(12)																		0
(13)																		150
(14)																		0
(15)																		0
(16)																		150
(17)																		0
(18)																		150

Näherungswert:

$$\varphi_1'' = 26,54.$$

Die zweite Gleichung(2), mit diesem zweiten Näherungswert φ_1'' und den anderen ersten Näherungswerten, lautet:

$$0,75 (26,54) + 6,5 \varphi_2 + 0,75 (0,45) - 1,50 = 0,$$

welche, nach φ_2 aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert $\varphi_2'' = -2,88$ liefert.

Die weiteren Rechnungen ergeben dann:

$$\varphi_3'' = 0,36,$$

$$\varphi_4'' = 0,098,$$

$$\varphi_5'' = -1,43,$$

$$\varphi_6'' = 19,0,$$

$$\varphi_7'' = 20,25,$$

$$\varphi_8'' = -1,71,$$

$$\varphi_9'' = 0,153,$$

$$\varphi_{10}'' = 0,229,$$

$$\varphi_{11}'' = -1,93,$$

$$\varphi_{12}'' = 20,9$$

$$\varphi_{13}'' = 16,4,$$

$$\varphi_{14}'' = -0,611,$$

$$\varphi_{15}'' = -0,139,$$

$$\varphi_{16}'' = 1,03,$$

$$\varphi_{17}'' = -5,95,$$

$$\varphi_{18}'' = 39,5.$$

In Tabelle XXVI sind die ersten, zweiten und dritten Näherungswerte übersichtlich angegeben.

Der Richtigkeitsgrad dieser Rechnungsergebnisse kann durch die Gleichgewichtsbedingungen kontrolliert werden.

Entsprechend der Gl. (I) und mit den dritten Näherungswerten erhält man:

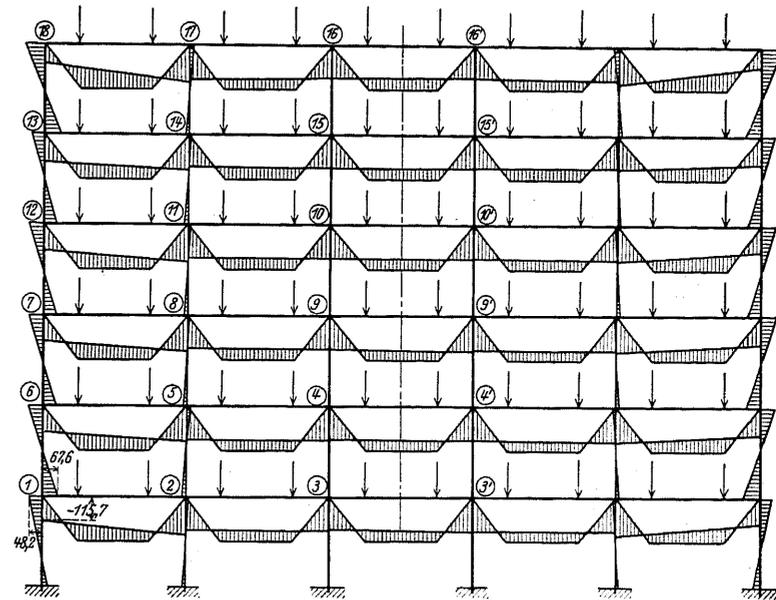


Abb. 70.

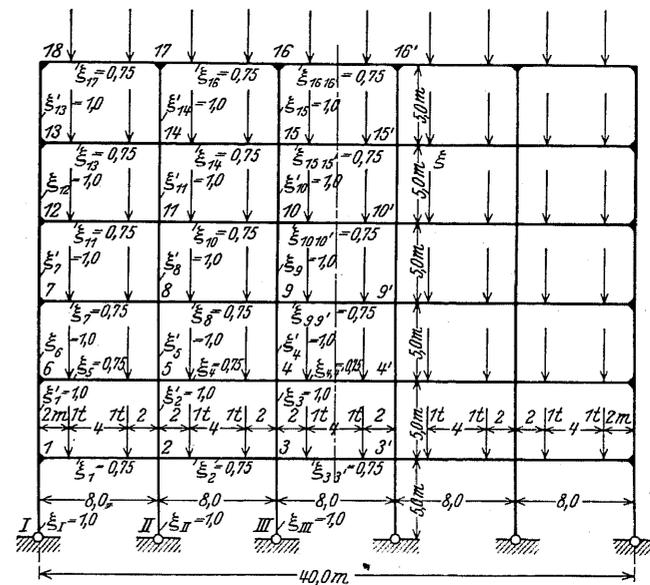


Abb. 71.

Am Knotenpunkt I:

$$M_{1-2} = \xi_1 \{ 2 \varphi_1 + \varphi_2 \} - \mathfrak{M} = 0,75 \{ 2 (26,63) - 2,89 \} - 150 = -112,2 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{1-6} = \xi_1 \{ 2 \varphi_1 + \varphi_6 \} = 1,0 \{ 2 (26,63) + 18,9 \} = 72,2 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{1-I} = \xi_I (1,5 \varphi_1) = 1,0 (1,5) (26,63) = 40 \text{ t} \cdot \text{cm}.$$

Tabelle XXVI.

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9
Erste Näherungswerte	26,5	-2,8	0,45	0,111	-1,50	19,4	20,2	-1,69	0,15
Zweite Näherungswerte	26,54	-2,88	0,36	0,098	-1,43	19,0	20,25	-1,71	0,153
Dritte Näherungswerte	26,63	-2,89	0,36	0,09	-1,38	18,9	20,3	-1,71	0,155

	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}	φ_{18}
Erste Näherungswerte	0,224	-1,94	20,9	16,4	-0,616	-0,133	1,08	-6,0	39,5
Zweite Näherungswerte	0,229	-1,93	20,9	16,4	-0,611	-0,136	1,03	-5,95	39,5
Dritte Näherungswerte	0,229	-1,93	20,8	16,4	-0,616	-0,128	1,08	-5,99	39,5

Am Knotenpunkt 2:

$$M_{2-1} = \xi_1 \{2\varphi_2 + \varphi_1\} + \mathfrak{M} = 0,75 \{2(-2,89) + 26,63\} + 150 = 165,6 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{2-3} = \xi_2 \{2\varphi_2 + \varphi_3\} - \mathfrak{M} = 0,75 \{2(-2,89) + 0,36\} - 150 = -154,1 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{2-5} = \xi_3 \{2\varphi_2 + \varphi_5\} = 1,0 \{2(-2,89) - 1,38\} = -7,2 \text{ t} \cdot \text{cm},$$

$$M_{2-II} = \xi_{II} \{1,5\varphi_2\} = 1,0 (1,5) (-2,89) = -4,3 \text{ t} \cdot \text{cm} \quad \text{usw.}$$

In Tabelle XXVII sind die Knotenpunktmomente übersichtlich zusammengestellt.

Tabelle XXVII.

Knotenmomente in t·cm					
M_{1-2}	-112,2	M_{6-1}	64,4	M_{12-13}	58
M_{1-6}	72,2	M_{7-8}	-120,8	M_{12-7}	62
M_{1-1}	40,0	M_{7-12}	61,4	M_{13-14}	-125,9
M_{2-1}	165,6	M_{7-6}	59,5	M_{13-18}	72,3
M_{2-3}	-154,1	M_{8-9}	-152,5	M_{13-12}	53,6
M_{2-5}	-7,2	M_{8-7}	162,7	M_{14-15}	-151,0
M_{2-II}	-4,3	M_{8-11}	-5,4	M_{14-13}	161,4
M_{3-2}	148,4	M_{8-5}	-4,8	M_{14-17}	-7,2
$M_{3-3'}$	-149,7	$M_{9-9'}$	-149,9	M_{14-11}	-3,2
M_{3-4}	0,8	M_{9-8}	149,0	M_{15-11}	-150,10
M_{3-III}	0,5	M_{9-10}	0,5	M_{15-14}	149,35
$M_{4-4'}$	-149,9	M_{9-4}	0,4	M_{15-16}	0,80
M_{4-5}	149,1	$M_{10-10'}$	149,8	M_{15-10}	-0,03
M_{4-9}	0,3	M_{10-11}	148,9	$M_{16-16'}$	-149,2
M_{4-3}	0,5	M_{10-15}	0,3	M_{16-17}	147,1
M_{5-4}	-152,0	M_{10-9}	0,6	M_{16-15}	-158,2
M_{5-6}	162,1	M_{11-10}	-152,7	M_{17-18}	170,6
M_{5-8}	-4,5	M_{11-12}	162,7	M_{17-14}	-12,6
M_{5-2}	-5,7	M_{11-14}	-4,5	M_{17-17}	-95,3
M_{6-5}	-122,7	M_{11-8}	-5,6	M_{18-17}	95,4
M_{6-7}	58,1	M_{12-11}	-120	M_{18-13}	95,4

Die Gleichgewichtsgleichungen $\sum M_n = 0$ sind in den einzelnen Knoten bis auf geringfügige Abweichungen erfüllt.

Die Biegemomentenverteilung ist in Abb. 72 eingetragen.

Die vorstehenden drei Beispiele sind mit Hilfe des Iterationsverfahrens I sehr leicht durchführbar. Die nachstehenden Beispiele IV und V sind nach dem Iterationsverfahren II aufgelöst.

Beispiel IV. Dreifeldiger, dreigeschossiger, symmetrischer Rechteckrahmen mit vier eingespannten Ständern. Waagerechte Einzellast in jedem Knotenpunkt auf der vertikalen linken Seite. Gesucht sind die durch die waagerechte Belastung erzeugten Biegemomente bei dem in Abb. 73 dargestellten eingespannten Rahmen. Gemäß dem Grundfall von Tabelle VIIIa liefert das Verfahren der Gleichungstabulierung die nachstehende Tabelle, welche die neun Unbekannten finden läßt. (Tabelle XXVIII).

Tabelle XXVIII.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung									Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	μ_1	μ_2	μ_3	
(1)	ϱ_1	ξ_1		ξ_1'			ξ_I	ξ_1'		0
(2)	ξ_1	$[Q_2]$					ξ_{II}	ξ_2'		0
(3)		ξ_2	$[Q_3]$					ξ_3'		0
(4)	ξ_1'		ξ_3	Q_4				ξ_4'		0
(5)			ξ_3'	Q_5				ξ_5'		0
(6)				ξ_4				$[Q_6]$		0
(7)	ξ_I	ξ_{II}	ξ_8				$\frac{1}{2} X_1$			$\frac{1}{2} S_1$
(8)	ξ_1'	ξ_2	ξ_2'	ξ_4'				$\frac{1}{2} X_2$		$\frac{1}{2} S_2$
(9)			ξ_3'	ξ_4					$\frac{1}{2} X_3$	$\frac{1}{2} S_3$

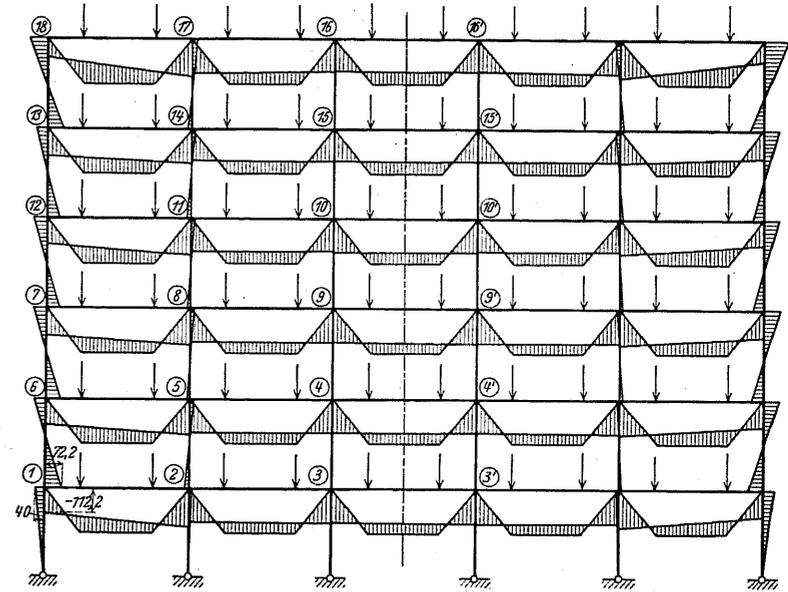


Abb. 72.

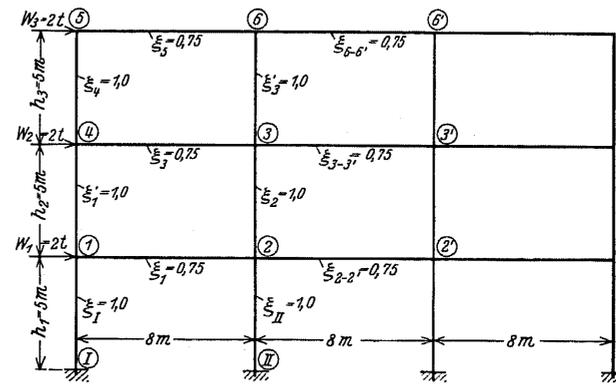


Abb. 73.

Die in Abb. 73 an die Stäbe gesetzten Zahlen zeigen die Festwerte ξ an. Daraus ergeben sich die Festwerte ϱ und X :

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \varrho_4 = 2\{1,0 + 0,75 + 1,0\} = 5,5 \text{ cm}^3, \\ [\varrho_2] &= [\varrho_3] = 2\{1,0 + 0,75 + 1,0 + 0,75\} + 0,75 = 7,75 \text{ cm}^3, \\ \varrho_5 &= 2\{1,0 + 0,75\} = 3,5 \text{ cm}^3, \\ [\varrho_6] &= 2\{0,75 + 1,0 + 0,75\} + 0,75 = 5,75 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{2}{3} \{\xi_{I1} + \xi_{II} + \xi_{III} + \xi_{IV}\} = \frac{2}{3} \{1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0\} = \frac{8}{3} \text{ cm}^3, \\ X_2 &= \frac{2}{3} \{\xi'_{I1} + \xi_2 + \xi_3 + \xi'_{IV}\} = \frac{2}{3} \{1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0\} = \frac{8}{3} \text{ cm}^3, \\ X_3 &= \frac{2}{3} \{\xi'_{II} + \xi_4 + \xi_5 + \xi'_{IV}\} = \frac{2}{3} \{1,0 + 1,0 + 1,0 + 1,0\} = \frac{8}{3} \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Für die Festwerte S erhält man aus Gl. (V) in bezug auf die gegebenen Belastungen:

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{Q_1 h_1}{3} = -\frac{(W_1 + W_2 + W_3) h_1}{3} = -\frac{(2 + 2 + 2) \cdot 500}{3} = -1000 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ S_2 &= -\frac{Q_2 h_2}{3} = -\frac{(W_2 + W_3) h_2}{3} = -\frac{(2 + 2) \cdot 500}{3} = -666,6 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ S_3 &= -\frac{Q_3 h_3}{3} = -\frac{W_3 h_3}{3} = -\frac{2 \cdot 500}{3} = -333,3 \text{ t} \cdot \text{cm}. \end{aligned}$$

Setzt man die vorliegenden Festwerte in Tabelle XXVIII ein, so erhält man Tabelle XXIX.

Tabelle XXIX.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung									Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	μ_1	μ_2	μ_3	
(1)	5,5	0,75		1,0			1,0	1,0		0
(2)	0,75	7,75	1,0				1,0	1,0		0
(3)		1,0	7,75	0,75		1,0		1,0	1,0	0
(4)	1,0		0,75	5,5	1,0			1,0	1,0	0
(5)				1,0	3,5	0,75			1,0	0
(6)			1,0		0,75	5,75			1,0	0
(7)	1,0	1,0					4/3			-500
(8)	1,0	1,0	1,0	1,0				4/3		-333,3
(9)			1,0	1,0	1,0	1,0			4/3	-166,6

Aus Tabelle XXIX kann man die neun Unbekannten φ_1 bis φ_6 und μ_1 bis μ_3 durch das Iterationsverfahren II bestimmen.

Aus Gl. (1) in Tabelle XXIX bekommt man:

$$5,5 \varphi_1 + 0,75 \varphi_2 + \varphi_4 + \mu_1 + \mu_2 = 0$$

oder

$$5,5 \varphi'_1 + 0,75 \varphi'_1 + \varphi'_1 = -\mu_1 - \mu_2.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\varphi'_1 = -0,138 \mu_1 - 0,138 \mu_2.$$

Aus Gl. (2) in Tabelle XXIX erhält man:

$$0,75 \varphi_1 + 7,75 \varphi_2 + \varphi_3 + \mu_1 + \mu_2 = 0$$

oder

$$0,75 \varphi'_2 + 7,75 \varphi'_2 + \varphi'_2 = -\mu_1 - \mu_2.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\varphi'_2 = -0,105 \mu_1 - 0,105 \mu_2.$$

In analoger Weise hat man aus Gl. (3) bis (6):

$$\begin{aligned} \varphi'_3 &= -0,095 \mu_2 - 0,095 \mu_3, \\ \varphi'_4 &= -0,121 \mu_2 - 0,121 \mu_3, \\ \varphi'_5 &= -0,19 \mu_3, \\ \varphi'_6 &= -0,133 \mu_3. \end{aligned}$$

Setzt man diese Gleichungen in Gl. (7) ein, so erhält man:

$$(-0,138 \mu_1 - 0,138 \mu_2) + (-0,105 \mu_1 - 0,105 \mu_2) + \frac{4}{3} \mu_1 = -500$$

oder

$$1,09 \mu_1 - 0,243 \mu_2 = -500$$

oder auch:

$$1,09 \mu'_1 - 0,243 \mu'_1 = -500.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\mu'_1 = -590.$$

Aus Gl. (8) erhält man:

$$\begin{aligned} (-0,138 \mu_1 - 0,138 \mu_2) + (-0,105 \mu_1 - 0,105 \mu_2) + (-0,095 \mu_2 - 0,095 \mu_3) \\ + (-0,121 \mu_2 - 0,121 \mu_3) + \frac{4}{3} \mu_2 = -333,3 \end{aligned}$$

oder

$$-0,243 \mu_1 + 0,874 \mu_2 - 0,216 \mu_3 = -333,3$$

oder auch

$$-0,243 \mu'_2 + 0,874 \mu'_2 - 0,216 \mu'_2 = -333,3.$$

Hieraus folgt für

$$\mu'_2 = -803.$$

Ganz analog hat man aus Gl. (9):

$$\mu'_3 = -288.$$

Damit wird:

$$\begin{aligned} \varphi'_1 &= -0,138 \mu_1 - 0,138 \mu_2 \\ &= -0,138 (\mu_1 + \mu_2) \\ &= -0,138 \{-590 - 803\} = 192. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi'_2 &= -0,105 (\mu_1 + \mu_2) \\ &= -0,105 \{-590 - 803\} = 146. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi'_3 &= -0,095 (\mu_2 + \mu_3) \\ &= -0,095 \{-803 - 288\} = 104. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi'_4 &= -0,121 (\mu_2 + \mu_3), \\ &= -0,121 \{-803 - 288\} = 132. \end{aligned}$$

$$\varphi'_5 = -0,19 \mu_3 = -0,19 \cdot (-288) = 55,$$

$$\varphi'_6 = -0,133 \mu_3 = -0,133 \cdot (-288) = 38.$$

In Tabelle XXX sind die ersten Näherungswerte der Unbekannten eingeschrieben.

Tabelle XXX.

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	μ_1	μ_2	μ_3
Erster Näherungswert	192	146	104	132	55	38	-590	-803	-288
Zweiter Näherungswert	209	146	104,5	136	35,3	27,4	-644	-697	-352
Dritter Näherungswert	199,5	140,4	100,5	134	56,4	36,4	-630	-680	-371
Vierter Näherungswert	195	137	100	132	60,5	39,2	-624	-672	-374
Fünfter Näherungswert	193	135,6	99,5	130,5	61,2	39,8	-620	-669	-375
Sechster Näherungswert	192	135	99,5	130,5	61,4	40	-620	-669	-374
Siebenter Näherungswert	192,5	135	99,5	130	61,2	39,8	-620	-667	-373

Diese ersten Näherungswerte werden in die Gleichungen eingesetzt.
Die erste Gleichung (1) in Tabelle XXIX lautet dann:

$$5,5 \varphi_1 + 0,75 (146) + 132 - 590 - 803 = 0,$$

welche, nach φ_1 aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert

$$\varphi_1' = 209$$

liefert.

Mit diesem zweiten Näherungswert φ_1' und anderen ersten Näherungswerten in Tabelle XXX lautet die Gleichung (2) in Tabelle XXIX:

$$0,75 (209) + 7,75 \varphi_2 + 104 - 590 - 803 = 0,$$

aus der, nachdem sie nach φ_2 aufgelöst ist, der zweite genauere Näherungswert

$$\varphi_2' = 146$$

hervorgeht.

Gleichartig liefern weitere Rechnungen mit dem Rechenschieber die zweiten bis siebenten Näherungswerte, welche in Tabelle XXX übersichtlich angegeben sind.

Die Richtigkeit dieser Rechnungsergebnisse kann durch die Gleichgewichtsbedingungen kontrolliert und ihre Genauigkeit durch Versuche beliebig erhöht werden.

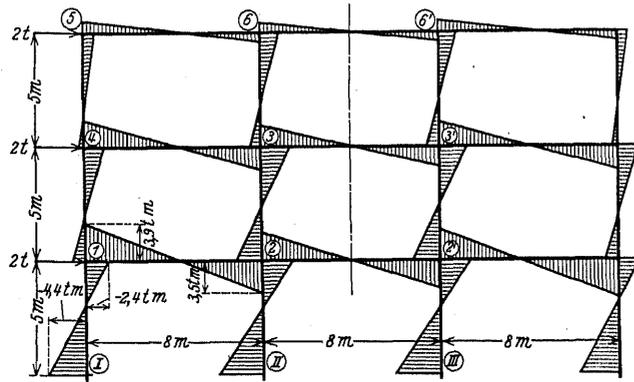


Abb. 74.

Entsprechend der Grundgleichung (I) erhält man mit den siebenten Näherungswerten:

Am Knotenpunkt I:

$$M_{1-2} = \xi_1 \{2 \varphi_1 + \varphi_2\} = 0,75 \{2 (192,5) + 135\} = 3,9 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{1-4} = \xi_1' \{2 \varphi_1 + \varphi_4 + \mu_2\} = 1,0 \cdot \{2 (192,5) + 130 - 667\} = -1,5 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{1-I} = \xi_I \{2 \varphi_1 + \mu_1\} = 1,0 \cdot \{2 (192,5) - 620\} = -2,4 \text{ t} \cdot \text{m}.$$

Am Knotenpunkt 2:

$$M_{2-2'} = 3,0 \text{ t} \cdot \text{m}, \quad M_{2-3} = 3,5 \text{ t} \cdot \text{m},$$

$$M_{2-3} = -3,0 \text{ t} \cdot \text{m}, \quad M_{2-II} = -3,5 \text{ t} \cdot \text{m}.$$

In Tabelle XXXI sind die Knotenpunktmomente zusammengestellt, und in Abb. 74 ist die Biegemomentenverteilung eingetragen.

Beispiel V. Zweifeldiger, zweigeschossiger Rechteckrahmen mit drei eingespannten Ständern. Beliebige vertikale Belastungssysteme auf den Balken. Der in Abb. 75 dargestellte Rahmen hat zwei Felder mit ungleich beschaffenen Ständern

und Riegeln. Gesucht sind die durch die in der Abbildung dargestellten Belastung erzeugten Biegemomente.

Entsprechend den Gln. (VIc) und (VIIa) und nach dem Grundfall von Tabelle IIIa liefert das Verfahren der Gleichungstabulierung die folgende Tabelle, welche die Koeffizienten und Festwerteanordnung von Bestimmungsgleichungen zeigt und die acht Unbekannten finden läßt (Tabelle XXXII).

Tabelle XXXII.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung								Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	μ_1	μ_2	
(1)	ϱ_1	ξ_1				ξ_1'	ξ_I	ξ_I'	$M_{1,2}$
(2)	ξ_1	ϱ_2	ξ_2		ξ_2'		ξ_{II}	ξ_{II}'	$M_{2,3} - M_{2,1}$
(3)		ξ_2	ϱ_3	ξ_3	ξ_3'		ξ_{III}	ξ_{III}'	$-M_{3,2}$
(4)			ξ_3	ϱ_4	ξ_4	ξ_4'		ξ_3	$-M_{4,5}$
(5)		ξ_2'		ξ_4	ϱ_5	ξ_5		ξ_3'	$M_{5,4} - M_{5,6}$
(6)	ξ_1'			ξ_5	ϱ_6			ξ_5'	$M_{6,5}$
(7)	ξ_I	ξ_{II}	ξ_{III}				X_1		0
(8)	ξ_I'	ξ_2'	ξ_3'	ξ_3	ξ_2'	ξ_1'	X_2		0

Die in Abb. 75 an die Stäbe gesetzten Zahlen geben die Festwerte ξ in cm^3 .

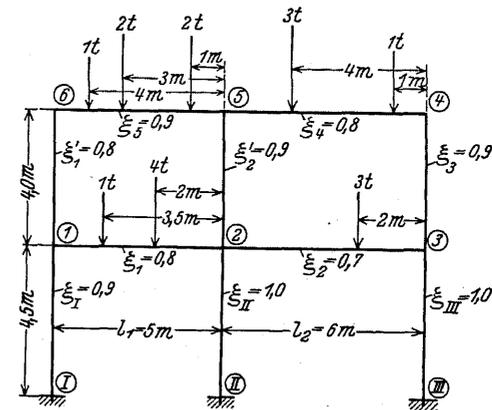


Abb. 75.

Daraus ergeben sich die Festwerte ϱ und X :

$$\varrho_1 = 2 \{ \xi_I + \xi_1 + \xi_1' \} = 2 \{ 0,9 + 0,8 + 0,8 \} = 5,0 \text{ cm}^3,$$

$$\varrho_2 = 2 \{ \xi_{II} + \xi_1 + \xi_2 + \xi_2' \} = 2 \{ 1,0 + 0,8 + 0,7 + 0,9 \} = 6,8 \text{ cm}^3,$$

$$\varrho_3 = 2 \{ \xi_{III} + \xi_2 + \xi_3 \} = 2 \{ 1,0 + 0,7 + 0,9 \} = 5,2 \text{ cm}^3,$$

$$\varrho_4 = 2 \{ \xi_3 + \xi_4 \} = 2 \{ 0,9 + 0,8 \} = 3,4 \text{ cm}^3,$$

$$\varrho_5 = 2 \{ \xi_4 + \xi_5 + \xi_5' \} = 2 \{ 0,8 + 0,9 + 0,9 \} = 5,2 \text{ cm}^3,$$

$$\varrho_6 = 2 \{ \xi_1' + \xi_5 \} = 2 \{ 0,8 + 0,9 \} = 3,4 \text{ cm}^3.$$

und

$$X_1 = \frac{2}{3} \{ \xi_I + \xi_{II} + \xi_{III} \} = \frac{2}{3} \{ 0,9 + 1,0 + 1,0 \} = 1,93 \text{ cm}^3,$$

$$X_2 = \frac{2}{3} \{ \xi_1' + \xi_2' + \xi_3 \} = \frac{2}{3} \{ 0,8 + 0,9 + 0,9 \} = 1,73 \text{ cm}^3.$$

Für die Festwerte \mathfrak{M} erhält man aus Tabelle Ia (1) in bezug auf die gegebenen Belastungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{12} &= \frac{1}{l^2} \sum P a b^2 = \frac{1}{5^2} (1 \cdot (1,5) (3,5)^2 + 4 (3) 2^2) = 2,655 \text{ t} \cdot \text{m} = 265,5 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ \mathfrak{M}_{21} &= \frac{1}{l^2} \sum P a^2 b = \frac{1}{5^2} (1 \cdot (1,5)^2 (3,5) + 4 (3^2) 2) = 319,5 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ \mathfrak{M}_{23} &= \frac{P a b^2}{l^2} = \frac{1}{6^2} (3 (4) 2^2) = 133,3 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ \mathfrak{M}_{32} &= \frac{P a^2 b}{l^2} = \frac{1}{6^2} (3 (4^2) 2) = 266,7 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ \mathfrak{M}_{45} &= \frac{1}{l^2} \sum P a^2 b = \frac{1}{6^2} (3 (2^2) 4 + 1 (5^2) 1) = 202,8 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ \mathfrak{M}_{54} &= \frac{1}{l^2} \sum P a b^2 = \frac{1}{6^2} (3 (2) 4^2 + 1 (5) 1^2) = 280,6 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ \mathfrak{M}_{56} &= \frac{1}{l^2} \sum P a^2 b = \frac{1}{5^2} (1 (1^2) 4 + 2 (2^2) 3 + 2 (4^2) 1) = 240 \text{ t} \cdot \text{cm}, \\ \mathfrak{M}_{65} &= \frac{1}{l^2} \sum P a b^2 = \frac{1}{5^2} (1 (1) 4^2 + 2 (2) 3^2 + 2 (4) 1^2) = 240 \text{ t} \cdot \text{cm}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Beiwerte und Festwerte in Tabelle XXXII ein, so erhält man Tabelle XXXIII, welche die acht Unbekannten φ_1 bis φ_6 und μ_1, μ_2 bestimmen läßt.

Tabelle XXXIII

Gleichung	Linke Seite der Gleichung								Rechte Seite der Gleichung
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	μ_1	μ_2	
(1)	5,0	0,8				0,8	0,9	0,8	265,5
(2)	0,8	6,8			0,9		1,0	0,9	- 186,2
(3)		0,7	5,2	0,9			1,0	0,9	- 266,7
(4)			0,9	3,4	0,8			0,9	- 202,8
(5)		0,9		0,8	5,2	0,9		0,9	40,6
(6)	0,8				0,9	3,4		0,8	240
(7)	0,9	1,0	1,0				1,93		0
(8)	0,8	0,9	0,9	0,9	0,9	0,8		1,73	0

Durch das Iterationsverfahren II erhält man aus Tabelle XXXIII die Unbekannten:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 43,05, & \varphi_5 &= 9,63, \\ \varphi_2 &= - 35,02, & \varphi_6 &= 52,97, \\ \varphi_3 &= - 44,65, & \mu_1 &= 21,2, \\ \varphi_4 &= - 55,64, & \mu_2 &= 21. \end{aligned}$$

Entsprechend der Grundgleichung (I) erhält man mit den vorliegenden Werten von φ und μ :

Am Knotenpunkt I:

$$\begin{aligned} M_{1-2} &= \xi_1 \{2 \varphi_1 + \varphi_2\} - \mathfrak{M}_{12} = 0,8 \{2 (43,05) - 35,02\} - 265,5 = - 225 \text{ t} \cdot \text{cm} = - 2,25 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{1-6} &= \xi_1' \{2 \varphi_1 + \varphi_6 + \mu_2\} = 0,8 \{2 (43,05) + 52,97 + 21\} = 128 \text{ t} \cdot \text{cm} = 1,28 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{1-I} &= \xi_I \{2 \varphi_1 + \mu_1\} = 0,9 \{2 (43,05) + 21,2\} = 97 \text{ t} \cdot \text{cm} = 0,97 \text{ t} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M_1 = 0$ ist am Knotenpunkt I vollkommen erfüllt.

Am Knotenpunkt 2:

$$\begin{aligned} M_{2-1} &= \xi_1 \{2 \varphi_2 + \varphi_1\} + \mathfrak{M}_{21} = 0,8 \{2 (- 35,02) + 43,05\} + 319,5 = 2,98 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{2-3} &= \xi_2 \{2 \varphi_2 + \varphi_3\} - \mathfrak{M}_{23} = 0,7 \{2 (- 35,02) - 44,65\} - 133,3 = - 2,14 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{2-5} &= \xi_2' \{2 \varphi_2 + \varphi_5 + \mu_2\} = 0,9 \{2 (- 35,02) + 9,63 + 21\} = - 0,35 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{2-II} &= \xi_{II} \{2 \varphi_2 + \mu_1\} = 1,0 \{2 (- 35,02) + 21,2\} = - 0,49 \text{ t} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M_2 = 0$ ist am Knotenpunkt 2 vollkommen erfüllt.

Am Knotenpunkt 3:

$$\begin{aligned} M_{3-2} &= 1,8 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{3-4} &= - 1,12 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{3-III} &= - 0,68 \text{ t} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

Am Knotenpunkt 4:

$$\begin{aligned} M_{4-5} &= 1,21 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{4-3} &= - 1,21 \text{ t} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

Am Knotenpunkt 5:

$$\begin{aligned} M_{5-4} &= - 3,1 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{5-6} &= 3,05 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{5-2} &= 0,05 \text{ t} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

Am Knotenpunkt 6:

$$\begin{aligned} M_{6-5} &= - 1,36 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{6-1} &= 1,36 \text{ t} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

An jedem Knotenpunkt ist die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$ vollkommen erfüllt.

An den eingespannten Füßen:

$$\begin{aligned} M_{I-1} &= 0,58 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{II-2} &= - 0,14 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{III-3} &= - 0,23 \text{ t} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtsbedingung für das erste Stockwerk lautet:

$$\begin{aligned} M_{1-I} + M_{I-1} + M_{2-II} + M_{II-2} + M_{3-III} + M_{III-3} &= 0, \\ \text{worin} \quad M_{1-I} &= 0,97 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{II-2} &= - 0,14 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{I-1} &= 0,58 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{3-III} &= - 0,68 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{2-II} &= - 0,49 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{III-3} &= - 0,23 \text{ t} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

Für das zweite Stockwerk:

$$\begin{aligned} M_{1-6} + M_{6-1} + M_{2-5} + M_{5-2} + M_{3-4} + M_{4-3} &= 0, \\ \text{worin} \quad M_{1-6} &= 1,28 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{5-2} &= 0,05 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{6-1} &= 1,36 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{3-4} &= - 1,12 \text{ t} \cdot \text{m}, \\ M_{2-5} &= - 0,35 \text{ t} \cdot \text{m}, & M_{4-3} &= - 1,21 \text{ t} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

Diese zwei Stockwerksgleichungen sind bis auf geringfügige Abweichungen erfüllt. In Abb. 76 ist die Biegemomenteverteilung eingetragen.

Beispiel VI. Symmetrischer, turmförmiger, zehngeschossiger Rahmen mit sieben eingespannten Ständern. Es sollen die Knotenpunktsmomente nach dem in Abb. 77 dargestellten turmförmigen, zehngeschossigen Rahmen ermittelt werden.

Er trägt auf den Balken vertikale, symmetrische Belastungen. Infolge der Symmetrie ist $\varphi_m = 0$, und eine Verschiebung der Knoten im waagerechten Sinne unmöglich, es sind also alle $\mu = 0$.

Der Rahmen ist daher zwanzigfach statisch unbestimmt.

Nach Tabelle IIa liefert das Verfahren der Gleichungstabulierung die umstehende Tabelle, aus der sich die Unbekannten φ_1 bis φ_{20} ermitteln lassen (Tabelle XXXIV).

Tabelle XXXIV.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung										Rechte Seite der Gleichung									
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}	φ_{18}	φ_{19}	φ_{20}
(1)	ξ_1																			\mathfrak{M}
(2)	ξ_2	ξ_1																		0
(3)	ξ_3	ξ_2	ξ_1																	0
(4)	ξ_4	ξ_3	ξ_2	ξ_1																0
(5)	ξ_5	ξ_4	ξ_3	ξ_2	ξ_1															\mathfrak{M}
(6)	ξ_6	ξ_5	ξ_4	ξ_3	ξ_2	ξ_1														0
(7)	ξ_7	ξ_6	ξ_5	ξ_4	ξ_3	ξ_2	ξ_1													\mathfrak{M}
(8)	ξ_8	ξ_7	ξ_6	ξ_5	ξ_4	ξ_3	ξ_2	ξ_1												0
(9)	ξ_9	ξ_8	ξ_7	ξ_6	ξ_5	ξ_4	ξ_3	ξ_2	ξ_1											0
(10)	ξ_{10}	ξ_9	ξ_8	ξ_7	ξ_6	ξ_5	ξ_4	ξ_3	ξ_2	ξ_1										0
(11)	ξ_{11}	ξ_{10}	ξ_9	ξ_8	ξ_7	ξ_6	ξ_5	ξ_4	ξ_3	ξ_2	ξ_1									$\frac{2}{3}\mathfrak{M}$
(12)	ξ_{12}	ξ_{11}	ξ_{10}	ξ_9	ξ_8	ξ_7	ξ_6	ξ_5	ξ_4	ξ_3	ξ_2	ξ_1								$\frac{2}{3}\mathfrak{M}$
(13)	ξ_{13}	ξ_{12}	ξ_{11}	ξ_{10}	ξ_9	ξ_8	ξ_7	ξ_6	ξ_5	ξ_4	ξ_3	ξ_2	ξ_1							0
(14)	ξ_{14}	ξ_{13}	ξ_{12}	ξ_{11}	ξ_{10}	ξ_9	ξ_8	ξ_7	ξ_6	ξ_5	ξ_4	ξ_3	ξ_2	ξ_1						0
(15)	ξ_{15}	ξ_{14}	ξ_{13}	ξ_{12}	ξ_{11}	ξ_{10}	ξ_9	ξ_8	ξ_7	ξ_6	ξ_5	ξ_4	ξ_3	ξ_2	ξ_1					$\frac{2}{3}\mathfrak{M}$
(16)	ξ_{16}	ξ_{15}	ξ_{14}	ξ_{13}	ξ_{12}	ξ_{11}	ξ_{10}	ξ_9	ξ_8	ξ_7	ξ_6	ξ_5	ξ_4	ξ_3	ξ_2	ξ_1				$\frac{2}{3}\mathfrak{M}$
(17)	ξ_{17}	ξ_{16}	ξ_{15}	ξ_{14}	ξ_{13}	ξ_{12}	ξ_{11}	ξ_{10}	ξ_9	ξ_8	ξ_7	ξ_6	ξ_5	ξ_4	ξ_3	ξ_2	ξ_1			$\frac{2}{3}\mathfrak{M}$
(18)	ξ_{18}	ξ_{17}	ξ_{16}	ξ_{15}	ξ_{14}	ξ_{13}	ξ_{12}	ξ_{11}	ξ_{10}	ξ_9	ξ_8	ξ_7	ξ_6	ξ_5	ξ_4	ξ_3	ξ_2	ξ_1		$\frac{1}{2}\mathfrak{M}$
(19)	ξ_{19}	ξ_{18}	ξ_{17}	ξ_{16}	ξ_{15}	ξ_{14}	ξ_{13}	ξ_{12}	ξ_{11}	ξ_{10}	ξ_9	ξ_8	ξ_7	ξ_6	ξ_5	ξ_4	ξ_3	ξ_2	ξ_1	$\frac{1}{2}\mathfrak{M}$
(20)	ξ_{20}	ξ_{19}	ξ_{18}	ξ_{17}	ξ_{16}	ξ_{15}	ξ_{14}	ξ_{13}	ξ_{12}	ξ_{11}	ξ_{10}	ξ_9	ξ_8	ξ_7	ξ_6	ξ_5	ξ_4	ξ_3	ξ_2	ξ_1

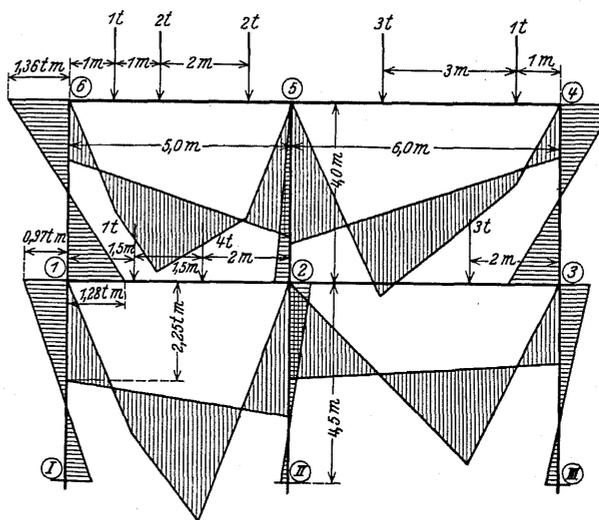


Abb. 76.

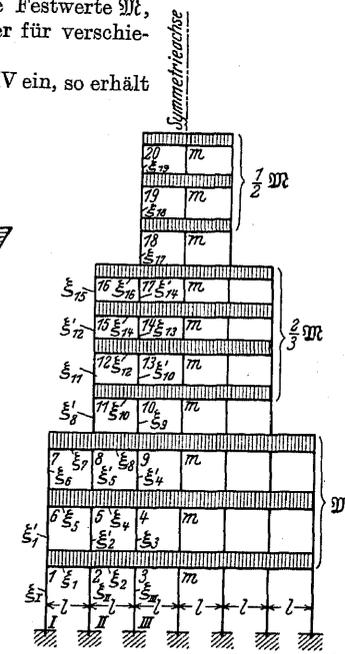


Abb. 77.

Wie vorher dargelegt, so errechnen wir zuerst die Stabwerte h, l, J für alle Stäbe und dann die Festwerte ξ, ρ, \mathfrak{M} für alle Stäbe und Knotenpunkte sowie für die gegebenen Belastungen.

Der Einfachheit halber bezeichnen wir mit konstantem ξ die Steifigkeitsgrade aller Stäbe; hieraus ergeben sich die Festwerte ρ :

$$\rho_1 = \rho_6 = \rho_{11} = \rho_{12} = \rho_{15} = \rho_{18} = \rho_{19} = 2(\xi + \xi + \xi) = 6\xi,$$

$$\rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_5 = \rho_8 = \rho_9 = \rho_{10} = \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{17} = 2(\xi + \xi + \xi + \xi) = 8\xi,$$

$$\rho_7 = \rho_{16} = \rho_{20} = 2(\xi + \xi) = 4\xi.$$

Die Festwerte \mathfrak{M} bezüglich der gegebenen Belastungen kann man aus Tabelle I erhalten; um die Aufgabe allgemeiner zu lösen, behalten wir die Festwerte \mathfrak{M} , wie in Abb. 77, bei; die Rechnungsergebnisse sind daher für verschiedene symmetrische Belastungssysteme verwendbar.

Setzt man die vorliegenden Festwerte in Tabelle XXXIV ein, so erhält man Tabelle XXXV. (Siehe S. 60.)

Aus Tabelle XXXV lassen sich die zwanzig Unbekannten φ_1 bis φ_{20} durch das Iterationsverfahren leicht bestimmen; die folgende Zwischenrechnung der Unbekannten φ kann ohne Anstrengung in drei Stunden bewerkstelligt werden.

Der Rechnungsvorlauf ist folgender:

Aus Gl. (1) in Tabelle XXXV erhält man:

$$6\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_6 = 1, \quad (\text{Multiplikator: } \mathfrak{M} : \xi)$$

oder

$$6\varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_6 = 1.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\varphi'_1 = 0,125 \mathfrak{M} : \xi.$$

In analoger Weise hat man aus Gln. (2) bis (20) in Tabelle XXXV:

$$\varphi'_2 = \varphi'_3 = \varphi'_4 = \varphi'_5 = \varphi'_8 = \varphi'_9 = \varphi'_{10} = \varphi'_{13} = \varphi'_{14} = \varphi'_{17} = 0,$$

$$\varphi'_6 = \varphi'_{16} = 0,111 \mathfrak{M} : \xi,$$

$$\varphi'_7 = 0,167 \mathfrak{M} : \xi,$$

$$\varphi'_{11} = \varphi'_{12} = \varphi'_{15} = 0,074 \mathfrak{M} : \xi,$$

$$\varphi'_{18} = \varphi'_{19} = 0,063 \mathfrak{M} : \xi,$$

$$\varphi'_{20} = 0,1 \mathfrak{M} : \xi.$$

Takabeya, Rahmentafeln.

Tabelle XXXV.

Gleichung	Linke Seite der Gleichung																				Rechte Seite der Gleichung (M:ξ)	
	φ ₁	φ ₂	φ ₃	φ ₄	φ ₅	φ ₆	φ ₇	φ ₈	φ ₉	φ ₁₀	φ ₁₁	φ ₁₂	φ ₁₃	φ ₁₄	φ ₁₅	φ ₁₆	φ ₁₇	φ ₁₈	φ ₁₉	φ ₂₀		
(1)	6	1				1																1
(2)	1	8	1		1																	0
(3)		1	8	1																		0
(4)				1	8	1				1												0
(5)		1		1	8	1			1													0
(6)	1				1	6	1															1
(7)						1	4	1														1
(8)					1		8	1		1												0
(9)				1			1	8	1													0
(10)									1	8	1		1									0
(11)									1	1	6	1										0,666 666
(12)										1	1	6	1	1								0,666 666
(13)										1	1	8	1									0
(14)											1	8	1	1								0
(15)												1	6	1	1							0,666 666
(16)													1	4	1							0,666 666
(17)														1	8	1						0
(18)															1	6	1					0,5
(19)																1	6	1				0,5
(20)																		1	4			0,5

Diese ersten Näherungswerte von φ sind in Tabelle XXXVI angegeben:

Tabelle XXXVI

		φ ₁	φ ₂	φ ₃	φ ₄	φ ₅	φ ₆	φ ₇	φ ₈	φ ₉	φ ₁₀
Näherungswert	φ ^(I)	0,125	0	0	0	0	0,111	0,167	0	0	0
	φ ^(II)	0,148	-0,019	0,0024	-0,0003	-0,0115	0,116	0,221	-0,035	0,0044	-0,0098
	φ ^(III)	0,150	-0,0174	0,0022	0,0006	-0,008	0,106	0,232	-0,040	0,0062	-0,013
	φ ^(IV)	0,152	-0,0183	0,0022	-0,00005	-0,0059	0,1036	0,2341	-0,0427	0,0070	-0,0134
	φ ^(V)	0,1525	-0,0186	0,0023	-0,00042	-0,0052	0,1031	0,2349	-0,0430	0,0071	-0,0133
	φ ^(VI)	0,1526	-0,0187	0,0024	-0,00054	-0,0050	0,1029	0,2350	-0,0430	0,0071	-0,0132
	φ ^(VII)	0,1526	-0,01875	0,0024	-0,00056	-0,00507	0,1029	0,2350	-0,0430	0,0071	-0,0132
	φ ^(VIII)	0,1526	-0,01874	0,0024	-0,00055	-0,00507	0,1029	0,2350	-0,0430	0,0071	-0,0132
		φ ₁₁	φ ₁₂	φ ₁₃	φ ₁₄	φ ₁₅	φ ₁₆	φ ₁₇	φ ₁₈	φ ₁₉	φ ₂₀
Näherungswert	φ ^(I)	0,074	0,074	0	0	0,074	0,111	0	0,063	0,063	0,1
	φ ^(II)	0,106	0,081	-0,009	-0,008	0,080	0,147	-0,025	0,077	0,054	0,112
	φ ^(III)	0,107	0,081	-0,007	-0,006	0,074	0,154	-0,028	0,079	0,051	0,112
	φ ^(IV)	0,107	0,082	-0,0078	-0,0048	0,0726	0,1555	-0,0287	0,0796	0,0514	0,1121
	φ ^(V)	0,1068	0,0825	-0,0081	-0,0045	0,0722	0,1558	-0,0289	0,0796	0,0514	0,11215
	φ ^(VI)	0,1067	0,0826	-0,0081	-0,0044	0,0721	0,1559	-0,0289	0,0796	0,0514	0,11215
	φ ^(VII)	0,1067	0,0827	-0,00813	-0,00438	0,07207	0,1559	-0,0289	0,0796	0,0514	0,11215
	φ ^(VIII)	0,1067	0,0827	-0,00813	-0,00438	0,07207	0,1559	-0,0289	0,0796	0,0514	0,11215

Sie werden in die Gleichungen eingesetzt; die erste Gleichung (1) in Tabelle XXXV lautet dann:

$$6\varphi_1 + (0) + 0,111 = 1, \quad (\text{Multiplikator } \mathfrak{M}:\xi)$$

welche, nach φ₁ aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert liefert

$$\varphi_1' = 0,148 \mathfrak{M}:\xi.$$

Die zweite Gleichung (2) in Tabelle XXXV liefert mit diesem zweiten Näherungswert φ₁' und anderen ersten Näherungswerten, nach φ₂ aufgelöst, den zweiten genaueren Näherungswert

$$\varphi_2' = -0,019 \mathfrak{M}:\xi.$$

Ebenso geben die weiteren Rechnungen die zweiten Näherungswerte an; die Rechnung ist bis zur Bestimmung der achten Näherungswerte durchgeführt, welche in Tabelle XXXVI vereinigt sind.

Tabelle XXXVII

Knotenmomente (Multiplikator: M)							
M ₁₋₂	-0,713	M ₆₋₇	0,441	M ₁₂₋₁₅	0,237	M ₁₈₋₁₉	0,211
M ₁₋₆	0,408	M ₆₋₁	0,358	M ₁₂₋₁₁	0,272	M ₁₈₋₁₇	0,130
M ₁₋₁	0,305	M ₇₋₈	-0,573	M ₁₃₋₁₂	0,733	M _{19-m}	-0,397
M ₂₋₁	1,115	M ₇₋₆	0,573	M _{13-m}	-0,683	M ₁₉₋₂₀	0,215
M ₂₋₃	-1,035	M ₈₋₇	1,149	M ₁₃₋₁₄	-0,021	M ₁₉₋₁₈	0,182
M ₂₋₅	-0,043	M ₈₋₉	-1,079	M ₁₃₋₁₀	-0,029	M _{20-m}	-0,276
M _{2-II}	-0,037	M ₈₋₁₁	0,021	M ₁₄₋₁₅	0,730	M ₂₀₋₁₉	0,276
M ₃₋₂	0,986	M ₈₋₅	-0,091	M _{14-m}	-0,675	M _{m-3}	1,002
M _{3-m}	-0,995	M ₉₋₈	0,971	M ₁₄₋₁₇	-0,038	M _{m-4}	1,00
M ₃₋₄	0,004	M _{9-m}	-0,986	M ₁₄₋₁₃	-0,017	M _{m-9}	1,007
M _{3-III}	0,005	M ₉₋₁₀	0,001	M ₁₅₋₁₄	-0,527	M _{m-10}	0,654
M ₄₋₅	0,994	M ₉₋₄	0,014	M ₁₅₋₁₆	0,300	M _{m-13}	0,659
M _{4-m}	-1,001	M ₁₀₋₁₁	0,747	M ₁₅₋₁₂	0,227	M _{m-14}	0,662
M ₄₋₉	0,006	M _{10-m}	-0,693	M ₁₆₋₁₇	-0,384	M _{m-17}	0,638
M ₄₋₃	0,001	M ₁₀₋₁₃	-0,035	M ₁₆₋₁₅	0,384	M _{m-18}	0,580
M ₅₋₆	1,093	M ₁₀₋₉	-0,019	M ₁₇₋₁₆	0,765	M _{m-19}	0,551
M ₅₋₄	-1,011	M ₁₁₋₁₀	-0,466	M _{17-m}	-0,725	M _{m-20}	0,612
M ₅₋₈	-0,053	M ₁₁₋₁₂	0,296	M ₁₇₋₁₈	0,022	M _{I-1}	0,153
M ₅₋₂	-0,029	M ₁₁₋₈	0,170	M ₁₇₋₁₄	-0,062	M _{II-2}	-0,019
M ₆₋₅	-0,799	M ₁₂₋₁₃	-0,509	M _{18-m}	-0,341	M _{III-3}	0,002

Die Richtigkeit dieser Rechnungsergebnisse kann durch die Gleichgewichtsbedingungen kontrolliert und ihre Genauigkeit durch Versuche beliebig erhöht werden. Nun sollen im nachstehenden die Knotenpunktmomente ermittelt und die Richtigkeit dieses Verfahrens durch die Gleichgewichtsgleichungen kontrolliert werden.

Entsprechend der Grundgleichung (I) erhält man mit den achten Näherungswerten:

Am Knotenpunkt 1:

$$M_{1-2} = \xi \{2\varphi_1 + \varphi_2\} - \mathfrak{M} = \mathfrak{M} \{2(0,1526) - 0,0187 - 1\} = -0,713 \mathfrak{M},$$

$$M_{1-6} = \xi \{2\varphi_1 + \varphi_6\} = \mathfrak{M} \{2(0,1526) + 0,1029\} = 0,408 \mathfrak{M},$$

$$M_{1-1} = \xi \{2\varphi_1\} = \mathfrak{M} \{2(0,1526)\} = 0,305 \mathfrak{M}.$$

Am Knotenpunkt 2:

$$M_{2-3} = \xi \{2\varphi_2 + \varphi_3\} - \mathfrak{M} = \mathfrak{M} \{2(-0,0187) + 0,0024 - 1\} = -1,035 \mathfrak{M},$$

$$M_{2-1} = \xi \{2\varphi_2 + \varphi_1\} + \mathfrak{M} = \mathfrak{M} \{2(-0,0187) + 0,1526 + 1\} = 1,115 \mathfrak{M},$$

$$M_{2-5} = \xi \{2\varphi_2 + \varphi_5\} = \mathfrak{M} \{2(-0,0187) - 0,0051\} = -0,043 \mathfrak{M},$$

$$M_{2-II} = \xi \{2\varphi_2\} = \mathfrak{M} \{2(-0,0187)\} = -0,037 \mathfrak{M} \text{ usw.}$$

In Tabelle XXXVII sind die Knotenpunktmomente namhaft gemacht; die Gleichgewichtsbedingungen ΣM_r = 0 sind in den einzelnen Knoten erfüllt.