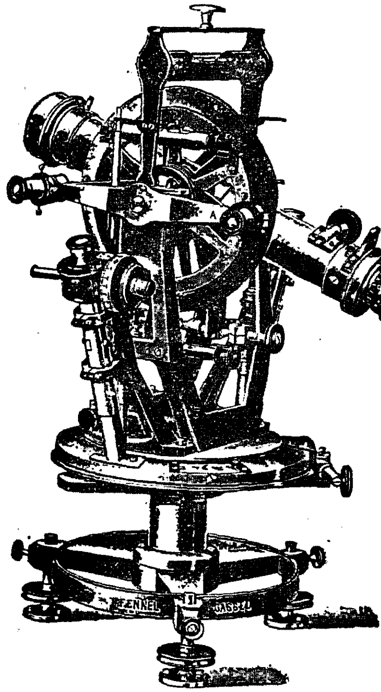
第七編　間接水準測量 (Indirect Leveling) 或は三角高低測量 (Trigonometrical Leveling)

168　概　　說

間接水準測量或は三角高低測量とはレベルに依らず、轉鏡儀を用ひて直立角を測り尙特定の距離を測り、三角術を應用して計算に依り二點の高低差を求むる測量である。此の測量は後に述ぶる三角測量(Triangulation)に附屬して遠く離れた測點相互の高低差を求めるに用ひられる。直接高低測量に比較して費用及び時間を節約し得るが、如何なる精巧な器械を用ひてもレベルに依るものより不精確である。之は主として空氣中の光線の屈折角 (Angle of Refraction) 卽ち空中の屈折に依て生ずる光線の偏れ (Angular Deviation)が一定して居ない爲に起り、氣溫及び氣壓のみならず其の地方に依ても異なる。此の測量は直接水準測量の困難とする山地



第 434 圖　竪角用轉鏡儀

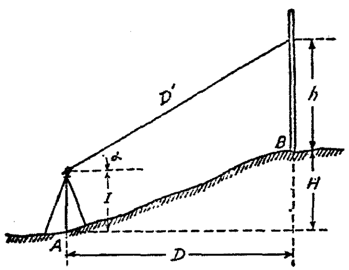
等にて最も用ひられ、通常の平地では最も精度が劣る。

精密に直立角を測る場合は竪角用轉鏡儀 (Vertical Circle Transit) を使用する。之にも矢張り方向型(Direction Type)と反覆型(Repeating Type)とが有る。普通には垂直分度 10″~20″ の轉鏡儀で望遠鏡正と倒との二回の讀みを平均すれば相當の精密度を得られる。勿論直立分度の指差 (Index Error) は正確に調べて置かねばならぬ。觀測に最も宜い時は寧ろ日中で朝夕は却つて空氣の屈折の變化が多い。

169 單角準測 (Simple Angular Leveling)

(1) 仰角又は俯角に依る法 (第435圖) A に器械を据えて水平距離 D, 器高 I, 直立角 α 及び標尺の讀み h を得れば二點の高低差は

$$\left.\begin{aligned} H &= D\tan\alpha+(I-h) \\ &= D'\sin\alpha+(I-h) \end{aligned}\right\}\cdots(152)$$



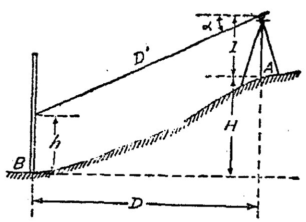
第 435 圖 仰角の場合

α に就て微分すれば

$$\frac{\partial H}{\partial\alpha}=D\sec^2\alpha=\frac{D}{\cos^2\alpha}\cdots(153)$$

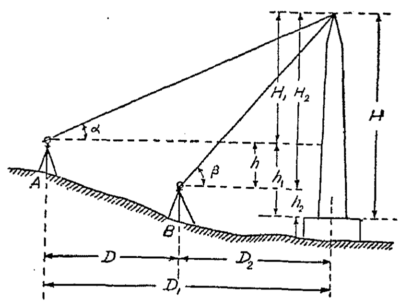
であるから直立角の增加すると共に誤差が多くなる。$D=500\,\mathrm{m}\sim600\,\mathrm{m}$ 位迄は地球の曲率を考へなくとも宜い。又 α は普通 30° 以內位にする。

第 436 圖の如く俯角 (Angle of Depression) の場合でも同樣にして



第 436 圖 俯角の場合

$$H=D\tan(-\alpha)+(I-h)\cdots\cdots(154)$$



第 437 圖

(2) 二點間の水平距離を測定し得ざる場合 (第437圖) 二點 A, B に器械を据えて直立角 α,β, 二點の水平距離 D 及び夫の基點からの高さ h_1, h_2 を測り、次の公式に依て計算する。

$$D_1=H_1\cot\alpha$$

及び $$D_2=H_2\cot\beta$$

$$H=H_1+h_1=H_2+h_2 \quad 故に \quad H_1=H_2-(h_1-h_2)$$

$$D_1-D_2=H_2(\cot\alpha-\cot\beta)-(h_1-h_2)\cot\alpha$$

$$H_2=\frac{D_1-D_2+(h_1-h_2)\cot\alpha}{\cot\alpha-\cot\beta}=\frac{D+h\cot\alpha}{\cot\alpha-\cot\beta}$$

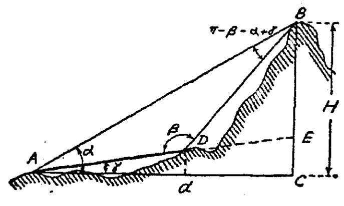
$$\therefore\quad H=H_2+h_2=\frac{D+h\cot\alpha}{\cot\alpha-\cot\beta}+h_2\cdots\cdots(155)$$

170 複角準測 (Compound Angular Leveling)

(1) 二角と水平距離を測る法 (第 438 圖) A, B 二點間の高低差 H を求むる場合に AB を含む垂直面內に D 點を取り、AD の距離及び A 點にて α,γ を測り、D點に於て β を測る。然る時は

$$AD=Ad\sec\gamma$$

$$AB=AD\frac{\sin\beta}{\sin ABD}$$



第 438 圖

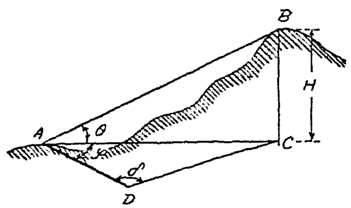
であるから

$$H=AB\sin\alpha=AD\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\pi-\beta-\alpha+\gamma)}$$

$$=AD\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta-\gamma)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(156)$$

特別な場合として A 及び D が同高であれば $\gamma=0$ 從つて

$$H=AD\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{AD}{\cot\alpha+\cot\beta}\cdots\cdots\cdots\cdots(157)$$



第 439 圖

（２） 任意の方向に基線を設くる法（第 439 圖） AB の垂直面中に基線を設け難い時は任意の都合の宜い方向に D 點を取り、基線 AD を設け A 點にて直立角 θ 及び水平角 φ を、同じく D 點で水平角 δ を測つて高底差 H を算出する。然る時は

$$AC=\frac{AD\sin\delta}{\sin(\varphi+\delta)}$$

從つて $H=AC\tan\theta=AD\dfrac{\sin\delta\tan\theta}{\sin(\varphi+\delta)}\cdots\cdots\cdots\cdots(158)$

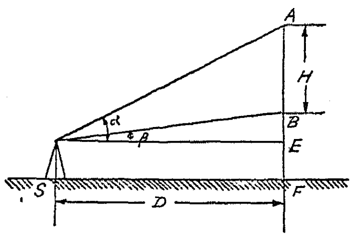
（３） 水平距離卽ち基線 D 及び求むる高さ H を夾む直立角 α,β を測つて高さ H を求む。（第 440 圖）

$$AE=D\tan\alpha$$

$$BE=D\tan\beta$$

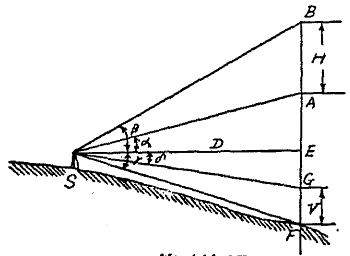
$$H=AB=AE-EB$$

$$=D(\tan\alpha-\tan\beta)$$



第 440 圖

$$=D\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{D\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\quad\cdots\cdots(159)$$



第 441 圖

（４） 水平距離 D を測らず既知の高さ V 及び直立角 α,β,γ 及び δ を測つて高さ H を求むる場合（第 441 圖）

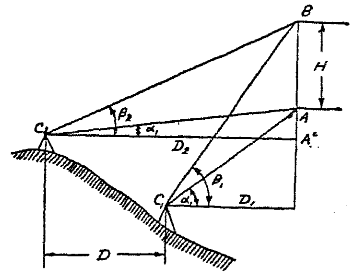
前述の如く

$$H=D\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\beta\cos\alpha}$$

同様に $V=D\dfrac{\sin(\gamma-\delta)}{\cos\gamma\cos\delta}$

故に $H=V\dfrac{\cos\gamma\cos\delta\sin(\beta-\alpha)}{\cos\beta\cos\alpha\sin(\gamma-\delta)}\cdots\cdots\cdots\cdots(160)$

（５） 第169節(2)の一般の場合（第 442 圖） D=基線とし測點 C_1, C_2 にて直立角 α_1,β_1 及び α_2,β_2 を測れば



第 442 圖

$$D_2=\frac{\cos\beta_2\cos\alpha_2}{\sin(\beta_2-\alpha_2)}H$$

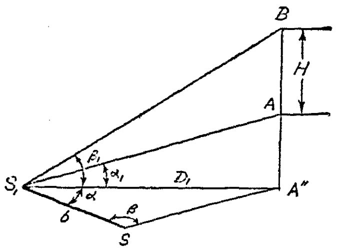
及び $D_1=\dfrac{\cos\beta_1\cos\alpha_1}{\sin(\beta_1-\alpha_1)}H$

從て $D=D_2-D_1=H\left\{\dfrac{\cos\beta_2\cos\alpha_2}{\sin(\beta_2-\alpha_2)}-\dfrac{\cos\beta_1\cos\alpha_1}{\sin(\beta_1-\alpha_1)}\right\}$

故に $H=\dfrac{D}{\dfrac{\cos\alpha_2\cos\beta_2}{\sin(\beta_2-\alpha_2)}-\dfrac{\cos\alpha_1\cos\beta_1}{\sin(\beta_1-\alpha_1)}}\cdots\cdots\cdots\cdots(161)$

（６） 任意の方向に基線を設くる一般の場合（第 443 圖） b=基線とすれば前述の如く

$$H=\frac{\sin(\beta_1-\alpha_1)}{\cos\beta_1\cos\alpha_1}D_1\quad 及び\quad D_1=b\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$



第443圖

故に $H=\dfrac{\sin(\beta_1-\alpha_1)\sin\beta}{\cos\beta_1\cos\alpha_1\sin(\alpha+\beta)}b$ ……………………(162)

特別な場合として $\alpha_1=0$ と置けば第439圖の場合と同じになる。

即ち

$$H=\frac{\sin\beta_1\sin\beta}{\cos\beta_1\sin(\alpha+\beta)}b=\tan\beta_1\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}b \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(163)$$

〔例題〕第444圖に示す如く基線 AB の兩端から塔 C に向つての直立角 α_1 及 α_2 を測り塔の高さを求む。

但し 基線 AB の水平距離 =166.693 m

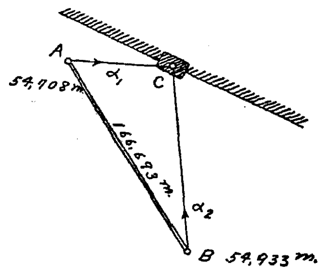
$\angle A=51°\ 18'\ 5''$

$\angle B=39°\ 8'\ 20''$

$\angle C=89°\ 33'\ 35''$

$(\angle A+\angle B+\angle C=180°00'00'')$

三角 ABC にて二角と夾邊が知れて居るから AC 及び BC の距離を求める。



第444圖

即ち $AC=\dfrac{AB}{\sin C}\sin B=105.220$ m

$BC=\dfrac{AB}{\sin C}\sin A=130.099$ m

次に A,B 兩測點各々で得た結果から計算して塔の高さを出すと

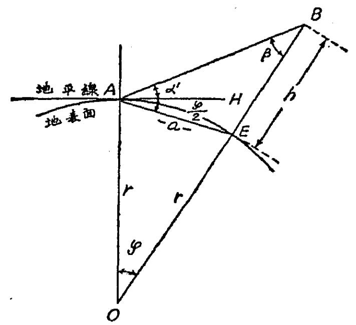
	(1) 測點 A にては	(2) 測點 B にては
測點標高	$H_1=54.708$ m	$H_2=54.933$ m
器械の高さ	$i_1=1.009$ m	$i_2=0.913$ m
直立角	$\alpha_1=+25°1'52''$	$\alpha_2=+20°38'29''$
塔迄の距離	$a_1=105.221$ m	$a_2=130.099$ m
塔頂の高さ	$H_1+a_1\tan\alpha_1+i_1$	$H_2+a_2\tan\alpha_2+i_2$

	$=54.708+49.135+1.009$	$=54.933+49.008+0.913$
	$=104.852$ m	$=104.854$ m
	$H=104.852$ m	$H=104.854$ m

兩方から別々に計算した塔頂の高さを平均して 104.853 m を得。

171 地球曲率に對する補正 (Correction due to Curvature of the Earth)

高低差を求むべき二點が遠く離れるに從ひ、地平線と水平線とが區別されて來るから地球の曲率に對する補正を必要とする（通常距離 500 m 以上位から此の更正をする）。



第445圖 地球曲率に對する補正

第445圖に於て

A, B=高低差を求む可き二點

$h=AB$ 間の眞の高低差

r=地球の平均半徑 (=6370 km)

$\varphi=A, B$ が地球の中心に夾む中心角

α'=觀測したる直立角

$a=\overline{AE}$ の弦長 $=\overset{\frown}{AE}$ の弧長

とすれば $\triangle ABO$ に於て

$$(\alpha'+90°)+\beta+\varphi=180° \qquad \beta=90°-(\alpha'+\varphi)$$

次に $\triangle ABE$ に於て

$$\frac{h}{a}=\frac{\sin\left(\alpha'+\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\beta}=\frac{\sin\left(\alpha'+\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos(\alpha'+\varphi)}$$

φ は極めて小さいから

$$\sin\left(\alpha'+\frac{\varphi}{2}\right)=\sin\alpha'+\frac{\varphi}{2}\cos\alpha'+\cdots\cdots$$

$$\cos(\alpha'+\varphi)=\cos\alpha'+\cdots\cdots$$

従て $$\frac{h}{a}=\frac{\sin\alpha'+\frac{\varphi}{2}\cos\alpha'}{\cos\alpha'}=\tan\alpha'+\frac{\varphi}{2}$$

∴ $$h=a\tan\alpha'+a\frac{\varphi}{2}=a\tan\alpha'+\frac{a^2}{2r}$$

補正量 $\Delta c=+\dfrac{a^2}{2r}$ ……………………………………………(164)

172 光線の屈折に對する補正 (Correction due to Refraction of Light)

光線は AB 間を直進せずに第 446 圖の如く曲線をなして通過する。今此の曲線が圓弧をなすものと假定する。

第 446 圖に於て

$A, B, h, r, \varphi=$第 445 圖の場合と同じ

$r'=$光線のなす圓弧の半徑

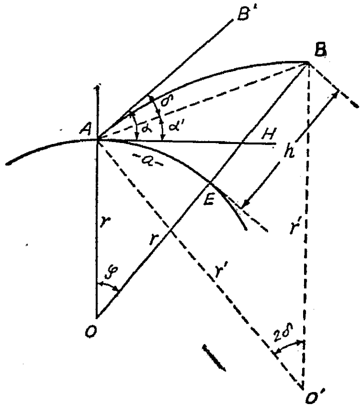
$\alpha=$觀測したる直立角

$a=\overline{AE}$ の弦長 $=\widehat{AE}$ の弧長

とすれば $r=Kr'$ 即ち $\dfrac{1}{r'}=K\dfrac{1}{r}$

但し本邦では $K=0.15$ 位 $\varphi=10'$ ~$20'$ 位であるから $AE=AB=a$ と見做して差支へない。

$$\delta=\frac{1}{2}\frac{a}{r'}=\frac{K}{2}\frac{a}{r}$$



第 446 圖　光線の屈折に對する補正

故に $\alpha'=\alpha-\delta=\alpha-\dfrac{1}{2}\dfrac{aK}{r}$

従て $\tan\alpha'=\tan\left(\alpha-\dfrac{aK}{2r}\right)=\tan\alpha-K\dfrac{a}{2r}$

$$h=a\tan\alpha-K\frac{a^2}{2r}$$

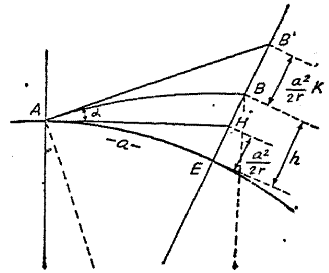
補正量 $\Delta r=-\dfrac{Ka^2}{2r}$ …………(165)

更に曲率補正と屈折補正を同時に考ふれば第 447 圖の如く

$$h=a\tan\alpha-\frac{a^2K}{2r}+\frac{a^2}{2r}$$

$$=a\tan\alpha+\frac{(1-K)a^2}{2r}$$

全補正量 $\Delta_{c+r}=\dfrac{(1-K)a^2}{2r}$ …………………………………(166)



第 447 圖

173 同時觀測に依る法 (Simultaneous Observations)

遠距離にある二點の精密なる觀測を行ふ場合には同時に兩方の測點で測る、即ち同時觀測を行ふ。

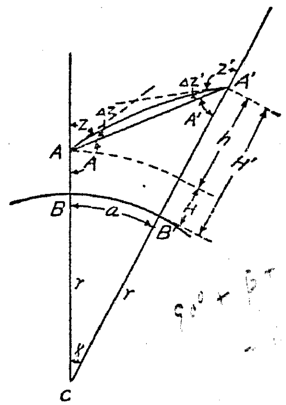
第 448 圖に於て

$C=$地球の中心

$A, A'=$高低差を求む可き二點

$H, H'=A, B$ 點の平均海面上の標高

$Z, Z'=A, A'$ に於ける天頂角(Zenith Angle)



第 448 圖　同時觀測に依る法

r=地球の平均半徑 (=6370 km)

a=二點の平均海面上の距離

$\Delta Z, \Delta Z'$=光線が屈折に依つて偏倚する小角

とすれば $\triangle AA'C$ より

$$\frac{CA'}{\sin A}=\frac{CA}{\sin A'}=\frac{CA'-CA}{\sin A-\sin A'}=\frac{CA'+CA}{\sin A+\sin A'}$$

從て
$$\frac{CA'-CA}{CA+CA'}=\frac{\sin A-\sin A'}{\sin A+\sin A'}=\frac{2\cos\frac{1}{2}(A+A')\sin\frac{1}{2}(A-A')}{2\sin\frac{1}{2}(A+A')\cos\frac{1}{2}(A-A')}$$

$$=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-A')}{\tan\frac{1}{2}(A+A')}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但し $A=180^\circ-(Z+\Delta Z)$

$A'=180^\circ-(Z'+\Delta Z')$

及び $A+A'=180^\circ-\gamma,\quad CA=r+H,\quad CA'=r+H'$

之等を (1) に當嵌むれば

$$\frac{H'-H}{2r+H'+H}=\frac{\tan\frac{1}{2}(Z'+\Delta Z'-Z-\Delta Z)}{\cot\frac{1}{2}\gamma}$$

即ち
$$H'-H=2r\left(1+\frac{H'+H}{2r}\right)\tan\frac{1}{2}\gamma\tan\frac{(Z'+\Delta Z')-(Z+\Delta Z)}{2}$$

$2r\tan\frac{\gamma}{2}=a$ であるから

$$h=H'-H=a\left(1+\frac{H'+H}{2r}\right)\tan\frac{(Z'+\Delta Z')-(Z+\Delta Z)}{2}\quad\cdots(2)$$

$\triangle CAA'$ に於て

$$(Z+\Delta Z)+(Z'+\Delta Z')=\gamma+180^\circ\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

又 $\Delta Z=K\frac{\gamma}{2}$ 及び $\Delta Z'=K'\frac{\gamma}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3) 及び (4) より

$$Z+Z'+\frac{\gamma}{2}(K+K')=\gamma+180^\circ$$

即ち
$$\frac{K+K'}{2}=1-\frac{Z+Z'-180^\circ}{\gamma}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

兩測點で天頂距離 (Zenith Distance) を同時觀測すれば兩測點に於ける屈折係數の平均が得られる。

(2) 及び (3) から $Z'+\Delta Z'$ 及び $Z+\Delta Z$ を消去すれば

$$h=H'-H=a\left(1+\frac{H'+H}{2r}\right)\cot\left(Z+\Delta Z-\frac{\gamma}{2}\right)\cdots\cdots\cdots(6)$$

又は
$$h=H-H'=a\left(1+\frac{H'+H}{2r}\right)\cot\left(Z'+\Delta Z'-\frac{\gamma}{2}\right)\cdots\cdots\cdots(7)$$

$\Delta Z'=\Delta Z$ と置いて差支へ無いから (2) は次の如く簡單な式になる。

$$h=H'-H=a\left(1+\frac{H'+H}{2r}\right)\tan\frac{Z'-Z}{2}\cdots\cdots\cdots(8)$$

再び $\Delta Z=K\frac{\gamma}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$

を (6) に適用すれば

$$h=H'-H=a\left(1+\frac{H+H'}{2r}\right)\cot\left(Z-\frac{1-K}{2}\gamma\right)\cdots\cdots\cdots(10)$$

之を Tailor の定理で展開すれば

$$\cot\left(Z-\frac{1-K}{2}\gamma\right)=\tan\left(\alpha+\frac{1-K}{2r}a\right)$$

$$=\tan\alpha+\frac{1-K}{2r}a(1+\tan^2\alpha)+\left(\frac{1-K}{2r}a\right)^2+\cdots\cdots$$

故に (10) は次の如くなる。

$$h=H'-H=\left(1+\frac{H+H'}{2r}\right)a\tan\alpha+\frac{1-K}{2r}a^2$$

$$+\frac{1-K}{2r}a^2\tan^2\alpha\cdots\cdots(11)$$

平均高度　$H_m=\frac{H+H'}{2}$ を用ふれば

$$h=H'-H=\left(1+\frac{H_m}{r}\right)a\tan\alpha+\frac{1-K}{2r}a^2(1+\tan^2\alpha)$$

$$=\left(1+\frac{H_m}{r}\right)a\tan\alpha+\frac{1-K}{2r}a^2\sec^2\alpha$$

$$=\left(1+\frac{H_m}{r}\right)a\tan\alpha+\frac{1-K}{2r}\frac{a^2}{\cos^2\alpha}\cdots\cdots(167)$$

174　空氣の屈折係數の定め方

（1）　**單觀測に依る法**　前述の公式

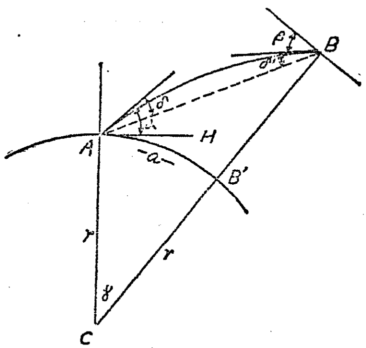
$h=a\tan\alpha+\frac{1-K}{2r}a^2$ を變形すれば

$$K=1-\frac{2r}{a^2}(h-a\tan\alpha)\cdots\cdots(168)$$

依て二點間の距離 a, 高低差 h, 直立角 α 及び平均半徑 r を知れば、計算に依て K の値を出す事が出來る。

（2）　**同時觀測に依る法**　第449圖に於て

$\alpha,\beta=A,B$ 兩點にて觀測せる直立角



第449圖　同時觀測に依る法

$\delta,\delta'=$ 光線が屈折に依て偏倚する小角

とすれば △ABC より

$$\gamma+(90^\circ+\alpha-\delta)+(90^\circ-\beta-\delta')=180^\circ$$

即ち　$\delta+\delta'=\gamma+\alpha-\beta$

$\delta=\delta'$ と置けば

$$\delta+\delta'=2\delta=K\gamma=\frac{Ka}{r}=\gamma+\alpha-\beta$$

$$K=1-\frac{r}{a}\left(\frac{\beta-\alpha}{\rho}\right)\cdots\cdots(169)$$

但し　α,β は度とする。