

## XXVI. 接觸論.

## 172. 境界平面上ノ一點ニ作用スル力.

平面ヲ以テ境トスル半無限ノ弾性體ヲ考へ境界面上ノ一點ヲ原點トシテ  $z$  軸ヲ弾性體ノ内方ニ引キ原點ニ於テ  $z$  軸ノ方向ニ荷重  $P$  ヲ作用セシメル。此問題ニ於ケル應力及變形ノ計算ヲ行フ爲先ゾ一般ノ方程式ニ就テ考ヘヤウ。

94節ノ(12)ニ於テ容積ノ力ヲ省略シテ  $X=Y=Z=0$  ト見做セバ

$$\Delta u + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} = 0,$$

$$\Delta v + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial y} = 0,$$

$$\Delta w + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} = 0.$$

而シテ又

$$\Delta e = 0. \quad (1)$$

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  トスレバ(1)ハ  $e = \frac{1}{r}$  ヨリテ満足サレル故  $\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) =$  ヨリテモ満足サレル。何トナレバ微分ノ順ヲ變ヘレバ  $\Delta e$  ハ  $\frac{\partial}{\partial z} \Delta \left( \frac{1}{r} \right)$  ト書ケル故デアル。後ノ計算ノ便宜上之ニ常數ヲ附ケテ次ノ様ニオク。

$$e = \frac{2A}{G} \frac{m-2}{m} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right). \quad (2)$$

之ヲ一般方程式ニ入レル時ハ

$$\begin{aligned} \Delta u &= -\frac{2A}{G} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{1}{r} \right), \\ \Delta v &= -\frac{2A}{G} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{1}{r} \right), \\ \Delta w &= -\frac{2A}{G} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

之等ヲ満足スル  $u, v, w$  チ次ノ様ニ表ス

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{A}{G} z \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) + f, \\ v &= -\frac{A}{G} z \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) + g, \\ w &= -\frac{A}{G} z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) + h. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

若シ函数  $f, g, h$  ガ方程式  $\Delta f = 0, \Delta g = 0, \Delta h = 0$  チ満足スレバ(4)ガ上ノ微分方程式(3)ヲ満足スル事ハ明カデアル。

サテ  $f, g, h$  ハ互ニ或ル關係ヲ以テ結バレル。即(4)ノ各式ヲ微分シテ加ヘレバ  $\Delta \left( \frac{1}{r} \right) = 0$  ナル故

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{A}{G} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right).$$

然ルニ左邊ハ  $e = \frac{2A}{G} \frac{m-2}{m} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right)$  = 等シイ故

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{A}{G} \frac{3m-4}{m} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right).$$

此式ニ於テ下ノ様ニオク。

$$h = h' + \frac{A}{G} \frac{3m-4}{m} \frac{1}{r}. \quad (5)$$

然ル時ハ

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h'}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

$f, g, h'$  ガ一ツノ函数  $\varphi$  ヨリ導カレルモノトシテ次ノ様ニ書ク。

$$f = \frac{A}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad g = \frac{A}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad h' = \frac{A}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (7)$$

從テ(5)ヨリ

$$h = \frac{A}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{A}{G} \frac{3m-4}{m} \frac{1}{r}. \quad (8)$$

又(6)ヨリ

$$\Delta \varphi = 0. \quad (9)$$

(7)ノ  $f, g$  及(8)ノ  $h$  チ(4)ニ入レテ

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{A}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{A}{G} z \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right), \\ v &= \frac{A}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{A}{G} z \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right), \\ w &= \frac{A}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{A}{G} z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{A}{G} \frac{3m-4}{m} \frac{1}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(10) 用キテ應力ノ式ヲ書ケバ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{2}{m} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) \right], \\ \sigma_y &= 2A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{2}{m} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) \right], \\ \sigma_z &= 2A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - z \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{2(m-1)}{m} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) \right], \\ \tau_x &= 2A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - z \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{m-2}{m} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) \right], \\ \tau_y &= 2A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - z \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{m-2}{m} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) \right], \\ \tau_z &= 2A \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{1}{r} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

モシ境界平面ノ條件即原點ヲ除イテ  $z=0$ ,  $\sigma_z = \tau_x = \tau_y = 0$  ノ満足スル様ニ  $\varphi$  ノ定メル事ガ出來レバ此計算ノ結果ガ求メル解ヲ與ヘル。  $\sigma_z$  ノ式ニ於テ  $\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{z}{r^3}$  ナル故其最後ノ項ハ次ノ様ニ書ケル。

$$\frac{2(m-1)}{m} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{m-2}{m} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{z}{r^3}$$

夫レ故問題ノ三應力ノ式ハ次ノ様ニ  $\varphi$  ノ選ベバ  $z=0$  = 於テ消エル。即

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{m-2}{m} \frac{1}{r} = -\frac{m-2}{m} \frac{\partial}{\partial z} \log(r+z). \quad (12)$$

而シテ又  $\varphi$  ノ  $x, y$  = 對スル偏微分係數ハ下ノ様ニ取ル。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{m-2}{m} \frac{\partial}{\partial x} \log(r+z), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{m-2}{m} \frac{\partial}{\partial y} \log(r+z). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

之等ノ式ヲ用キテ應力ノ式(11)ヲ書キ直ス筈デアルガ差當リ必要ナノハ  $\sigma_z, \tau_x, \tau_y$  ノ計算デアツテ之等ハ次ノ様ニナル。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= 2A \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) - z \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{r} \right) \right] = -6A \frac{z^3}{r^5}, \\ \tau_x &= -2Az \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{1}{r} \right) = -6A \frac{yz^2}{r^5}, \\ \tau_y &= -2Az \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{1}{r} \right) = -6A \frac{xz^2}{r^5}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

原點ニ就テ之等應力ハ無限ニ大トナル。夫レ故此點ヲ除イテ考ヘル爲ニ任意ノ小半球面ニテ原點ヲ包ミ其内部ヲ他ノ部分ヨリ區別スル代りニ此半球面ノ内部ヨリ外部即半無限體ニ作用スル應力ノ合成功ヲ考ヘルニ應力ガ凡テ  $z$  軸ニ對シテ對稱ヲナス點ヨリ見テ此力ハ當然  $z$  軸ニ平行デアル。依テ半球面上ノ任意ノ一點ニ於ケル應力ノ  $z$  軸ノ方向ノ成分ヲ  $p \cos \nu$  トスレバ

$$p \cos \nu = -\frac{1}{r} (\tau_y z + \tau_x y + \sigma_z z) = 6A \frac{z^2}{r^4}.$$

球ノ半徑ト  $z$  軸トノ間ノ角ヲ  $\theta$  トスレバ  $\frac{z}{r} = \cos \theta$  ナル故

$$p \cos \nu = 6A \frac{\cos^2 \theta}{r^2}.$$

$z$  軸ノ方向ノカチ  $P$  トスレバ

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} p \cos \nu 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = 4\pi A. \quad (15)$$

之ニヨリテ  $A$  ガ定マル。終リニ  $z$  軸ノ方向ノ變位  $w$  ハ(10)ヨリ

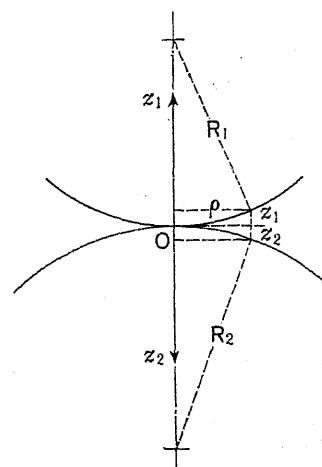
$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{A}{G} \left[ \frac{2(m-1)}{m} \frac{1}{r} - z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) \right], \\ &= \frac{P}{4\pi G} \left[ \frac{2(m-1)}{m} \frac{1}{r} + \frac{z^2}{r^3} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

### 173. ニツノ球面ノ接觸。

ニツノ物體ガ球面ヲ以テ接觸スルモノトシテ夫レ夫レノ球ノ半徑ヲ

$R_1, R_2$  トスル。而シテ變形前ニ於ケル兩球面ノ切點ノ位置ヲ原點トシテ中心線ニ沿ヒテ別々ニ  $z$  軸ヲ球心ニ向テ引キ座標ヲ  $z_1, z_2$  トシテ區別シヤウ。163 圖。又任意ノ點ノ  $z$  軸ヨリノ距離ヲ  $\rho$  ニテ表ス時ハ球面上ニ於テ原點ヨリ近イ距離ノ點ニ對シテハ近似的ニ次ノ様ナ式ガ書ケル。

$$z_1 = \frac{\rho^2}{2R_1}, \quad z_2 = \frac{\rho^2}{2R_2}, \quad (17)$$



163 圖

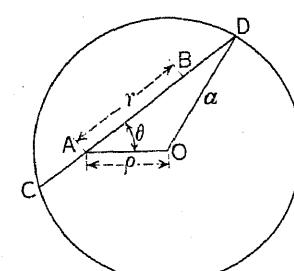
圖ニハ兩球面ノ中心ガ原點ニ對シテ互ニ反對側ニアル様ニ假定シタ。若シ一方ノ球面ノ中心ガ他ノ中心ト同ジ側ニアリテ兩ツノ球面ガ重ル時ハ一方ノ  $z$  チ負トスル爲ニ其  $R$  の符號ヲ變ヘレバ宜シ。上ノ二式ヨリ相等シイ  $\rho$  チ有ツ二點間ノ距離ヲ求メレバ

$$z_1 + z_2 = \frac{\rho^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (18)$$

荷重  $P$  チ加ヘテ兩球面ヲ壓ス時ハ接觸面ヨリ遠イ部分ガ互ニ未知ノ距離  $c$  丈ケ近寄ル。若シ  $z$  軸ガ各遠イ處デ物體ニ固定サレルトスレバ切點  $O$  ニアル兩球面上ノ點ハ夫レ夫レノ中心ニ向テ  $w_1, w_2$  丈ケ進入シ其距離ノ和ガ  $c$  ニ等シイ。而シテ接觸面内ニ於ケル他ノ任意ノ點距離  $\rho$  チ於テハ夫レ夫レノ彈性變位  $w_1, w_2$  ト  $z_1 + z_2$  トノ和ガ  $c$  ニ等シイ故

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= c - (z_1 + z_2) \\ &= c - \frac{\rho^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

倘球ノ大サニ比ベテ甚ダ小ナル接觸面ノ狀態ヲ考ヘル爲ニハ前節ニ述ベタ平面上ノ計算ノ結果ヲ應用シテ差支ヘガナイ。依テ(16)ヲ用キテ  $w_1, w_2$  チ導ク爲接觸面ノ半徑  $a$  ノ圓トシ



164 圖

テ(164 圖)其中心  $O$  チ去ル距離  $AO = \rho$  ノ任意ノ點  $A$  チ取リテ此點ノ變位  $w$  チ考ヘルニ之ハ他ノ任意ノ點  $B$  ニ於ケル小面積ノ荷重ヨリ生ズル變位ヲ求メ之ヲ全面積ニ積分シテ得ラレル。面積内ノ荷重ノ密度ヲ  $p$  トスレバ  $B$  點ノ小面積  $rd\theta dr$  ニ  $p$  チ乘ジテ荷重トシ之ヲ(16)ノ  $P$  ノ處ニ入レ  $z = 0$  トオイテ圓ノ全面積ニ積分スレバ

$$w = \frac{m-1}{2\pi mG} \iint p d\theta dr. \quad (20)$$

今密度  $p$  チ示ス長サヲ面積内ノ各點ニ立テテ  $p$  曲面ヲ作レバ此式ニ於ケル  $\int p dr$  ハ  $A, B$  二點ヲ含ム垂直平面ガ  $p$  曲面ニヨリテ切ラレテ出來ル面積ニ相當スル。サテ  $p$  曲面ノ形ガ半徑  $a$  ノ半球面ニ等シト假定シ其中心ノ高サ  $a$  ノ示ス壓力ヲ  $p_0$  トスレバ  $A, B$  チ通ル弦  $CD$  ノ長サハ  $2\sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \theta}$  ニ等シイ。故ニ

$$\int p dr = \frac{p_0}{a} \frac{\pi}{2} (a^2 - \rho^2 \sin^2 \theta). \quad (21)$$

從テ

$$\begin{aligned} w &= \frac{m-1}{2mG} \frac{p_0}{a} \frac{1}{2} \int_0^\pi (a^2 - \rho^2 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{m-1}{4mG} \frac{p_0 \pi}{a} \left( a^2 - \frac{\rho^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

兩方ノ彈性體ノ常數ヲ區別シテ下ノ様ニオク。

$$g_1 = \frac{m_1 - 1}{4m_1 G_1}, \quad g_2 = \frac{m_2 - 1}{4m_2 G_2}. \quad (23)$$

然ル時ハ

$$w_1 + w_2 = (g_1 + g_2) \frac{p_0 \pi}{a} \left( a^2 - \frac{\rho^2}{2} \right). \quad (24)$$

此式ヲ(19)ニ比ベレバ  $p$  チ關スル上ノ假定ガ成立ツタメニ次ノ式ガ成立ツヲ要スル。

$$\left. \begin{aligned} c &= (g_1 + g_2) p_0 \pi a, \\ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} &= (g_1 + g_2) \frac{p_0 \pi}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

接觸面ニ作用スル全荷重ヲ  $P$  トスレバ之ハ半徑  $a$  ノ半球ノ容積ノ  $\frac{p_0}{a}$  倍ニ等シイ故

$$P = \frac{2}{3} \pi a^2 p_0,$$

又ハ

$$p_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi a^2}. \quad (26)$$

即最大壓力ハ圓ノ面積  $\pi a^2$  ニ一様ニ荷重ガ配布サレタ場合ノ1.5倍ニ當ル。而シテ接觸面ノ半徑ハ(25)ノ第二式及(26)ヨリ  $p_0$  ヲ消去シテ

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{2} (g_1 + g_2) P \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}. \quad (27)$$

又兩球ノ接近距離ハ(25), (27)ヨリ

$$c = \sqrt[3]{\frac{9}{4} (g_1 + g_2)^2 P^2 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}. \quad (28)$$

特別ノ場合トシテ兩方ノ球ガ等シイ 弾性常數ヲ有ツ時ハ

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \frac{m-1}{mG} P \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{m^2-1}{m^2 E} P \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}, \quad (29)$$

$$c = \sqrt[3]{\frac{9}{16} \frac{(m-1)^2}{m^2 G^2} P^2 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \frac{(m^2-1)^2}{m^4 E^2} P^2 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}. \quad (30)$$

一ツノ球ガ平面上ニ接觸スル時ハ一方ノ球ノ半徑ヲ非常ニ大ト考ヘテ宜シイカラ  $R_1 = R, R_2 = \infty$  トオイテ

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{m^2-1}{m^2 E} P R}, \quad (31)$$

$$c = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \frac{(m^2-1)^2}{m^4 E^2} \frac{P^2}{R}}. \quad (32)$$

タトヘバ  $m = \frac{10}{3}$  ト取レバ(29), (30)ヨリ

$$a = 1.109 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}},$$

$$c = 1.231 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}.$$

又  $p_0$  ハ(26), (29)ニヨリテ次ノ様ニ表サレル。

$$p_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{m^4 E^2 P}{(m^2-1)^2} \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^2} = 0.388 \sqrt[3]{P E^2 \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^2}. \quad (33)$$

一方ガ平面ノ場合ニハ

$$p_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{m^4 E^2}{(m^2-1)^2} \frac{P}{E^2}} = 0.388 \sqrt[3]{\frac{P E^2}{R^2}}.$$

上ノ計算ハ H. Hertz<sup>1)</sup> ノ一般接觸論中ノ特別ノ場合ヲ簡單ナ形ニ表シタモノデアル。尙 Hertz ノ研究ニ關シテハ更ニ應力ノ計算ヲ試ミタ M. T. Huber<sup>2)</sup> ノ論文ヲ併セテ参考スルヲ便トスル。

## 174. 球ノ内部ニ於ケル應力。

前節ニ於テ球ノ接觸面ノ中心ニ於ケル應力ヲ見出シタ、併シ球壓試験又ハ類似ノ實驗ニ依レバ内部ニ於ケル材料ノ破損ハ接觸面ノ中心ニ比ベテ却テ大デアル。之ハ彈性ノ域ヲ超エテ已ニ塑性變形ノ問題ニ屬スル事柄デハアルガ破損ノ初期ニ於テモ同様ノ事ガ存在スルヤ否ヤ。斯ル疑問ニ答ヘル爲  $z$  軸ニ沿ヒテ少シ球ノ内部ニ入りテ其應力狀態ヲ調べ少クモ材料破損ノ一要素ト見做サレル剪斷應力ノ値ヲ定メル事ガ望マシイ。此目的ニ對シテ次ノ計算ヲ行フ。先づ

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 2G \frac{m+1}{m-2} e.$$

(2) ヨリ  $e$  ヲ又(14)ヨリ  $\sigma_z$  ヲ導ケバ

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4A \frac{m+1}{m} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) + 6A \frac{z^3}{r^5} \\ &= 2A \left[ \frac{3z^3}{r^5} - \frac{2(m+1)}{m} \frac{z}{r^3} \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

同様ナル結果ハ(11)ノ第一及第二式ヨリモ導カレル。此式ニ於ケル常數  $A$  ハ(15)ニヨリテ下ノ意義ヲモツ。

$$A = \frac{P}{4\pi}.$$

今接觸面(半徑  $a$ )ノ内部ニ於テ微小ナル同心ノ輪狀面積  $2\pi\rho d\rho$  ヲ取り之ニ作用スル壓力  $p$  ニヨリテ生ズル應力ノ和ヲ(34)ニヨリテ計算シテ之:

1) Gesammelte Werke I, 155 頁, 174 頁.

2) Annalen der Physik, 4. Folge, 14, 1904, 153 頁.

ヲ半径  $\rho=0$  ト  $\rho=a$  トノ間ニ積分スレバ全接觸面ノ壓力ニヨリテ生ズル  $z$  軸上ノ點ニ於ケル應力ノ和ヲ求メル事が出來ル。而シテ  $z$  軸上ニ於テハ明カニ  $\sigma_x=\sigma_y$  ナル故

$$2\sigma_x = 2\sigma_y = \int_0^a p \left[ \frac{3z^3}{r^5} - \frac{2(m+1)}{m} \frac{z}{r^3} \right] \rho d\rho.$$

而シテ  $p = \frac{p_0}{a} \sqrt{a^2 - \rho^2}$ ,  $r^2 = \rho^2 + z^2$  ト書キウル故

$$\sigma_x = \frac{3p_0 z^3}{2a} \int_0^a \frac{(a^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \rho d\rho - \frac{m+1}{m} \frac{p_0 z}{a} \int_0^a \frac{(a^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \rho d\rho. \quad (35)$$

又(35)ノ右邊第一項ハ  $- \frac{\sigma_z}{2}$  等シイ。即

$$\sigma_z = - \frac{3p_0 z^3}{a} \int_0^a \frac{(a^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \rho d\rho. \quad (36)$$

(35)ノ第二項ノ積分ヲ行フ爲次ノ様ニオク。

$$\sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{a^2 + z^2} \cos \alpha, \quad \rho \leq a.$$

然ル時ハ

$$\frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = -\sqrt{a^2 + z^2} \sin \alpha d\alpha,$$

$$\sqrt{a^2 - \rho^2} = \sqrt{a^2 + z^2} \sin \alpha.$$

從テ常數ヲ省イテ不定積分ヲ書ケバ

$$\int \frac{(a^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \rho d\rho = - \int \tan^2 \alpha d\alpha = \alpha - \tan \alpha.$$

又ハ

$$\int \frac{(a^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \rho d\rho = \tan^{-1} \sqrt{\frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 + z^2}} - \sqrt{\frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 + z^2}}.$$

之ニ積分ノ限界ヲ入レバ

$$\int_0^a \frac{(a^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \rho d\rho = \frac{a}{z} - \tan^{-1} \frac{a}{z}.$$

次ニ此兩邊ヲ  $z$  ニ對シテ微分スレバ多少ノ計算ノ後

$$\int_0^a \frac{(a^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \rho d\rho = \frac{a^3}{3z^3(a^2 + z^2)}.$$

斯様ニシテ中心線上ノ應力ハ(35),(36)ヨリ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p_0 \left[ \frac{m+1}{m} \left( 1 - \frac{z}{a} \tan^{-1} \frac{a}{z} \right) - \frac{a^2}{2(a^2 + z^2)} \right], \\ \sigma_z &= -p_0 \frac{a^2}{a^2 + z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

中心線上ノ任意ノ點ニ於テハ對稱ノ爲座標面上ノ剪斷應力成分ガ零ナル故之等ノ垂直應力ガ主應力デアル。從テ求メル剪斷應力ハ次ノ様ニナル。

$$\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} = p_0 \left[ \frac{3}{4} \frac{a^2}{a^2 + z^2} - \frac{m+1}{2m} \left( 1 - \frac{z}{a} \tan^{-1} \frac{a}{z} \right) \right]. \quad (38)$$

$m = \frac{10}{3}$  トシテ計算スレバ  $z=0$  ニ於テ此剪斷應力ハ  $0.1 p_0$  ニ等シク又  $z=0.47a$  ニ於テ極大値ガ生ジ其大サハ  $0.31 p_0$  ニ等シイ。<sup>2)</sup> 尚此極大剪斷應力ノ發生ガ實驗ニヨリテモ示サレテ居ル。<sup>3)</sup>

## 175. ニツノ圓柱面ノ接觸。

H. Hertz の一般接觸論ニ於テハ接觸面ヲ橢圓形ト假定スル故特別ノ場合トシテ二球面ノ接觸ヲ論ズル事ガ出來ル計リデナク又非常ニ長イ橢圓形ヲトレバニ圓柱ノ接觸ヲ論ズル事モ出來ル。從テ標題ノ問題ニ於ケル接觸ノ幅及最大壓力ノ計算ハ當然斯ル一般理論ヨリ導カレル。序ニ倚 Hertz の研究ニ關シテハ M. T. Huber 及 S. Fuchs<sup>2)</sup> 共著ノ論文ヲ紹介シタイ。併シ茲ニハ已ニ導イタ比較的簡單ナ計算ノ結果ヲ用キテ次ノ様ナ計算ヲ試ミヤウ。

149 節ニ於ケル半無限平面ノ解ニ依リテ其直線境界線上ノ一點ニ作用スル外力ノタメニ生ズル變位及應力ガ判ル。後ニ來ル荷重  $P$  トノ混同ヲ避ケル爲  $P$  の代リニ  $P'$  ト書キ又座標軸  $x, y$  の代リニ  $z, x$  軸ヲ取リテ物體内ニ向フ軸ヲ  $z$  ニテ表シ之ニ對スル變位ヲ  $w$  トスレバ同節ノ(84)

1) L. Föppl, Forschung, 7, 1936, 209 頁。

2) G. Oppel, 同上, 240 頁。

3) Physikalische Zeitschrift, 15, 1914, 298 頁。

(88) ヨリ

$$w = -\frac{P'}{\pi G} \left( \frac{m-1}{m} \log r + \frac{x^2}{2r^2} \right), \quad r^2 = x^2 + z^2. \quad (39)$$

此式ハ無限ノ距離ニアル點ノ變位ガ消エザル點ニ於テ實用ニ適セザルモ變位自身ノ代リニ其微分係數  $\frac{\partial w}{\partial x}$  ラ求メ  $z=0$  トオケバ境界線ノ傾斜ガ判ル。即

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{P'}{\pi G} \left( \frac{m-1}{m} \frac{x}{r^2} + \frac{xz^2}{r^4} \right).$$

$z=0$  トオケバ

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{P'}{\pi G} \frac{m-1}{m} \frac{1}{x}. \quad (40)$$

此式ハ原點ニ於ケル荷重  $P'$  ニ對スル境界線ノ傾斜ヲ與ヘル。二個ノ圓柱體ガ其軸ヲ平行ニシテ接觸スル時ノ變形狀態ヲ考ヘル爲前ノ球面ニ對スル 163 圖ヲ借リテ之ヲ恰モ圓柱體ノ接觸面附近ノ橫斷圖ト見做シ斯ル接觸面上ノ一點ヲ取リテ其原點ヨリノ距離ヲ  $\xi$  ニテ表シ又此點ニ於ケル壓力ノ密度ヲ  $p$ , 荷重ヲ  $p d\xi$  トスレバ他ノ點(原點ヨリノ距離  $x$ )ニ於ケル傾斜ハ次ノ式ニテ與ヘラレル。

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{p}{\pi G} \frac{m-1}{m} \frac{d\xi}{x-\xi}.$$

今  $p$  ガ  $\xi = -a$  ヨリ  $\xi = a$  ニ到ル間連續的ニ變化スル有様ガ假リニ次ノ式ニテ與ヘラレルトシヤウ。

$$p = p_0 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2}}.$$

之ハ荷重ノ密度ガ半徑  $a$  ノ圓ニテ表サレル事ヲ意味シテ居ルガ無論圓柱軸ノ方向ニハ一様デアル。斯ル荷重ヲ受ケテ生ズル傾斜ハ

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{p_0}{\pi G} \frac{m-1}{m} \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2}}}{x-\xi} d\xi. \quad (41)$$

此積分式ヲ計算スル爲次ノ様ニオク。

$$\xi = a \cos \theta, \quad d\xi = -a \sin \theta d\theta.$$

$\xi = x$  ニ於テ積分式中ノ分母ハ零トナル故積分ヲ  $\xi = x$  ノ前後デ切ルタメ  $x = a \cos \theta_1$  トスレバ  $\theta = \pi$  ヨリ始メテ  $\theta = \theta_1 + \varepsilon$  迄ト  $\theta = \theta_1 - \varepsilon$  ヨリ  $\theta = 0$  ニ至ル迄トノニツノ範圍内ニ計算シテ後デ  $\varepsilon \rightarrow 0$  トスレバヨイ。サテ此注意ヲ以テ

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2}}}{x-\xi} d\xi &= a \int_{\pi}^0 \frac{\sin^2 \theta d\theta}{a \cos \theta - x} \\ &= \int_0^\pi \left( \cos \theta + \frac{x}{a} \right) d\theta - \frac{a^2 - x^2}{a} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_0^{\theta_1 - \varepsilon} \frac{d\theta}{a \cos \theta - x} + \int_{\theta_1 + \varepsilon}^\pi \frac{d\theta}{a \cos \theta - x} \right]. \end{aligned}$$

此右邊第二項ノ括弧内ヲ積分シテ共通ノ係數ヲ除外スレバ

$$\begin{aligned} &\left| \log \frac{\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x} \tan \frac{\theta}{2}}{\sqrt{a-x} - \sqrt{a+x} \tan \frac{\theta}{2}} \right|_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta_1 + \varepsilon} + \left| \log \frac{\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x} \tan \frac{\theta}{2}}{\sqrt{a-x} - \sqrt{a+x} \tan \frac{\theta}{2}} \right|_{\theta_1 + \varepsilon}^\pi \\ &= \log \left\{ \frac{\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x} \tan \frac{\theta_1 - \varepsilon}{2}}{\sqrt{a-x} - \sqrt{a+x} \tan \frac{\theta_1 - \varepsilon}{2}} \times \frac{\sqrt{a-x} - \sqrt{a+x} \tan \frac{\theta_1 + \varepsilon}{2}}{\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x} \tan \frac{\theta_1 + \varepsilon}{2}} \right\} + \log(-1). \end{aligned}$$

$\tan^2 \frac{\theta_1}{2} = \frac{a-x}{a+x}$  チ入レテ  $\varepsilon$  チ零ニ近寄セル時ハ第一項ハ  $\log(-1)$  トナリ

テ之ヲ第二項ト合セレバ零トナル。夫レ故

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2}}}{x-\xi} d\xi = \frac{\pi x}{a}. \quad (42)$$

從テ(41)ハ次ノ様ニナル。

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{p_0 x}{G a} \frac{m-1}{m}. \quad (43)$$

ニツノ圓柱體ノ彈性常數ヲ區別スレバ

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x} = -\left( \frac{m_1 - 1}{m_1 G_1} + \frac{m_2 - 1}{m_2 G_2} \right) \frac{p_0 x}{a}. \quad (44)$$

163 圖ニ就テ球ノ場合ニ述ベタト同ジ様ニ距離ト變位トノ關係ヲ幾何學的ニ求メレバ(19)ノ  $\rho$  ノ代リニ  $x$  チ用キテ次ノ式ガ得ラレル。

$$w_1 + w_2 = c - \frac{x^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

但  $R_1, R_2$  ハ兩圓柱ノ半徑ヲ示ス。此式ヲ微分シテ

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x} = -x \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (45)$$

(44)及(45)ヲ比ベテ

$$\left( \frac{m_1-1}{m_1 G_1} + \frac{m_2-1}{m_2 G_2} \right) \frac{p_0}{a} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (46)$$

然ルニ圓柱體ノ長サ 1cm ニ對スル全荷重ヲ  $P$  トスレバ

$$P = \int_{-a}^{+a} p d\xi = \frac{\pi}{2} p_0 a,$$

又ハ

$$p_0 = \frac{2}{\pi} \frac{P}{a}. \quad (47)$$

故ニ之ヲ(46)=入レテ  $a$  チ求メレバ

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi} \left( \frac{m_1-1}{m_1 G_1} + \frac{m_2-1}{m_2 G_2} \right) P \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}.$$

若シ兩方ノ彈性常數等シイ時ハ

$$a = \sqrt{\frac{4}{\pi} \frac{m-1}{m} \frac{P}{G} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{m^2-1}{m^2} \frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}, \quad (48)$$

$p_0$  ノ式ハ(47), (48)ヨリ

$$p_0 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \frac{m^2 E}{m^2-1} P \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}. \quad (49)$$

$$m = \frac{10}{3} \text{ トスレバ}$$

$$a = 1.522 \sqrt{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}},$$

$$p_0 = 0.418 \sqrt{\frac{PE}{R} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}.$$

平面ノ上ニ置カレタ圓柱體ニ對シテハ一方ノ半徑ヲ無限ニ大トシ例ヘバ  $R_1 = R, R_2 = \infty$  トシテ

$$a = 1.522 \sqrt{\frac{PR}{E}},$$

$$p_0 = 0.418 \sqrt{\frac{PE}{R}}.$$

圓柱體ノ場合ニモ尙應力ノ計算ガ殘サレテ居ル。之ニ就テハ次ノ節ニ述べヤウ。

### 176. 圓柱内ノ應力。

本節ニ於テモ球ノ場合ノ様ニ圓柱體内部ニ起ル剪斷應力ヲ論ジヤウ。此場合ニモ最大剪斷應力ガ内部ニ起ル故デアル。<sup>1)</sup> 前節ノ計算ニ用キタ半無限平面ノ解(149節)ニ於ケル應力ノ式(89)ヲ只今ノ問題ニ適スル様書キ直ス爲ニハ荷重  $P$  ノ代リニ  $p d\xi = \frac{p_0}{a} \sqrt{a^2 - \xi^2} d\xi$  チ入レ且座標ヲ現在用キツツアル記號ニ改メル事が必要デアル。而シテ之ヲ  $\xi = -a$  ヨリ  $\xi = +a$  ニ至ル間ニ積分スレバ中心線  $x = 0$  ノ上ニ於テ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2p_0}{\pi} \frac{z}{a} \int_{-a}^{+a} \xi^2 \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{(\xi^2 + z^2)^2} d\xi, \\ \sigma_z &= -\frac{2p_0}{\pi} \frac{z^3}{a} \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{(\xi^2 + z^2)^2} d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

之等ノ積分ヲ計算スル爲先づ積分  $\int \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi^2 + z^2} d\xi$  ノ計算ヲ行フ。之ガ爲ニ  $\xi = a \sin \theta$  ト置ケバ

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi^2 + z^2} d\xi &= \int \frac{a^2 \cos^2 \theta d\theta}{z^2 + a^2 \sin^2 \theta} = \int \frac{a^2 \cos^2 \theta d\theta}{a^2 + z^2 - a^2 \cos^2 \theta} \\ &= (a^2 + z^2) \int \frac{d\theta}{a^2 + z^2 - a^2 \cos^2 \theta} - \int d\theta \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + z^2} \left[ \int \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 + z^2 + a \cos \theta}} + \int \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 + z^2 - a \cos \theta}} \right] - \theta. \end{aligned}$$

此最後ノ積分ヲ行ヒテ次ニ  $\theta$  ノ限界値ヲ入レル爲假ニ  $z^2 + a^2 = b^2$  ト書ケバ  $\theta$  ハ  $-\frac{\pi}{2}$  ト  $+\frac{\pi}{2}$  トノ間ニ變ル故括弧内ノ式ハ次ノ様ニナル。

$$\frac{2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \left[ \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{b-a}{a+b}} \tan \frac{\theta}{2} \right) + \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{a+b}{b-a}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

1) 久野重一郎土木學會誌, 19, 1933, 1頁。

2) L. Föppl, 579 頁脚註 1).

$$= \frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}} \left| \tan^{-1} \left[ \left( \sqrt{\frac{b-a}{a+b}} + \sqrt{\frac{a+b}{b-a}} \right) \frac{1}{2} \tan \theta \right] \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{b^2-a^2}}.$$

従テ

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{\xi^2+z^2} d\xi = \pi \sqrt{1+\frac{a^2}{z^2}} - \pi.$$

次ニ之テ  $z$  ニ對シテ微分スレバ

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{(\xi^2+z^2)^2} d\xi = \frac{\pi}{2z^3} \frac{a^2}{\sqrt{a^2+z^2}}.$$

又

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{+a} \frac{\xi^2 \sqrt{a^2-\xi^2}}{(\xi^2+z^2)^2} d\xi &= \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{\xi^2+z^2} d\xi - z^2 \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{(\xi^2+z^2)^2} d\xi \\ &= \pi \sqrt{1+\frac{a^2}{z^2}} - \pi - \frac{\pi}{2} \frac{a^2}{z \sqrt{a^2+z^2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{a^2+2z^2}{z \sqrt{a^2+z^2}} - \pi. \end{aligned}$$

之等ノ積分ノ結果ヲ(50)ニ入レバ

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -p_0 \left[ \frac{a^2+2z^2}{a \sqrt{a^2+z^2}} - \frac{2z}{a} \right], \\ \sigma_z &= -p_0 \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}. \end{aligned} \quad (51)$$

中心線上ノ任意ノ點ニ於ケル之等ノ應力成分ハ明カニ主應力デアツ  
テ平面變形ノ場合ニハ圓柱軸ノ方向ノ應力  $\sigma_y$  ハ次ノ様ニナル。

$$\sigma_y = \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_z) = -\frac{2p_0}{m} \left[ \sqrt{1+\frac{z^2}{a^2}} - \frac{z}{a} \right]. \quad (52)$$

 $\sigma_x, \sigma_y$  ヲ書キ直セバ

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -p_0 \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}} \left[ 1 - \frac{2z}{a} \left( \sqrt{1+\frac{z^2}{a^2}} - \frac{z}{a} \right) \right], \\ \sigma_y &= -p_0 \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}} \frac{2}{m} \left[ 1 - \frac{z}{a} \left( \sqrt{1+\frac{z^2}{a^2}} - \frac{z}{a} \right) \right]. \end{aligned}$$

符號ニ關係シテ言ヘバ之等ノ應力ハ何レモ  $\sigma_z$  ョリ大デアル。従テ次ノ  
何レカガ最大ノ剪斷應力ヲ決定スル。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_z) &= p_0 \frac{z}{a} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} \right), \\ \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_z) &= p_0 \left[ \frac{m-2}{2m} \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}} + \frac{z}{ma} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

第一式ノ剪斷應力ハ  $z$  及  $x$  軸ニ對シテ又第二式ノ夫レハ  $z$  及  $y$  軸ニ  
對シテ夫レ夫レ  $45^\circ$  ノ傾チナス平面内ニ起ル。而シテ若シ  $m=2$  ナラ  
バ第二式ノ第一項ハ消エテ第一式ノ方常ニ大デアル。併シ例ヘバ  $m=\frac{10}{3}$  トスレバ  $\frac{z}{a}$  ノ小ナル値ニ對シテハ第二式ノ應力が第一式ノモノヨ  
リ大ナルモ  $\frac{z}{a}$  が増セバ第一式ノ方優リ兩方ノ極大値ハ次ノ數値ノ示ス  
様ニ第一式ノ方大デアル。

$$\frac{z}{a} = 0.786, \quad \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_z)_{max} = 0.301 p_0,$$

$$\frac{z}{a} = 0.465, \quad \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_z)_{max} = 0.262 p_0.$$

上ノ計算ニ於ケル様ニ中心線上ノ或ル一點ニ剪斷應力ノ極大値ガ生  
ズル事ハ實驗ニヨリテモ證明サレル。<sup>1)</sup>

1) 583 頁脚註 1).