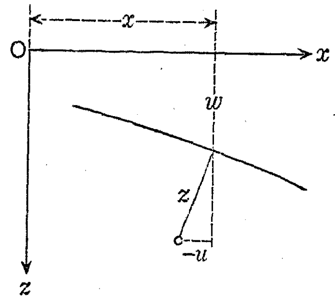
XXV. 平面板ノ曲ゲ.

158. 板ノ平面内ニ作用スル力ノ無イ場合.

周邊ノ形ハ暫ク隨意トシテ標題ノ樣ニ板ノ平面内ニ力ノ無イ場合ニ於ケル曲ゲ彈性ニ關スル一般方程式ヲ導カウ. 茲ニ取扱フ平面板ハ無論其兩表面ガ平面デアル計リデナク厚サガ一樣デ且薄イト見做ス. 斯ル板ガ力ノ作用ヲ受ケル時ニ兩表面カラ等距離ニアル中央ノ平面ガ如何ニ撓ムカヲ見出スタメニ變形前ノ中央平面ヲ x, y ノ座標面ニ取リ之ト垂直ニ z 軸ヲ設ケル. 但 z ノ正ノ方向ハ荷重ノ方向ト一致スルト定メテオク. 偖板ガ其表面ニ作用スル力ヲ受ケルカ又ハ周邊ニ作用スル偶力ヲ受ケレバ板ノ各點ハ或ル有樣ニ動イテ中央平面ハ曲面トナル. 此曲面ヲ彈性面ト呼ブ. 而シテ彈性面ノ撓ミハ厚サニ比ベテ大デナク又其傾キモ小デアルト假定シヤウ.

夫レデ變形前ニ中央平面中ノ一點 $(x, y, 0)$ ニ於テ座標軸ニ平行ナル短イ三直線 1, 2, 3 ヲ引キオケバ變形ト共ニ之等ガ如何ナル變化ヲナスカト云フニ假定ニヨリテ元ノ位置ニ比ベテ大ナル變化ハナイ筈デアルガ此際起ル小變化ヲ分析スレバ該點ノ x 及 y ノ方向ノ移動ハ之ヲ省略シテ單ニ z ノ方向ニ w 丈ケ動クト見ルコトガ出來ル. 又同時ニ三直線ノ方向ガ小變化ヲ起スタメニ新シイ三方向ハ互ニ直角デナイ筈デアルガ直線 3 卽平面ニ引イタ法線ハ變形後モ依然トシテ 1 及 2 ノ兩方向ニ對シテ直角ヲ保チ卽彈性面ニ法線ヲナスト假定シ且此方向ノ直線ハ飯ノ厚サニ相當スル長サノ間何處モ直線トシテ止ルトシヤウ. 前章ノ圓板ノ場合ニ於ケルト同樣ノ此假定ハ曲ゲラレタ梁ノ斷面ガ彈性線ニ垂直ナル平面トシテ止ルト云フ假定ト類似デアル. 斯ル變形ノ結果トシテ法線上ニ於ケル中央面以外ノ各點ハ z ノ方向計リデナク x 及 y ノ方向ニモ移動スル. 今任意ノ點カラ彈性面ニ垂直線ヲ引イテ之ヲ先ヅ zx

平面ニ射影スレバ(155 圖) 假定ニヨリテ面ノ傾キ小ナル故射影サレタ垂線ノ長サハ殆ンド z ニ等シク又其方向ハ面ノ切口ヲ示ス圖ノ曲線ニ對シテ殆ンド直角デアル. 從テ x ノ方向ノ分移動ヲ求メレバ圖カラ了解サレル樣ニ下ノ第一式ガ得ラレル. 又同樣ニ yz 平面ヘノ射影ヲ考ヘテ y ノ方向ノ分移動ヲ求メレバ第二式ガ書ケル.



155 圖

$$\left.\begin{aligned} u &= -z\frac{\partial w}{\partial x}, \\ v &= -z\frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

之等ノ二式ニ對シテハ尙多少一般的ノ說明ヲ附加ヘタイト思フ. 上ニ述ベタ樣ニ 1, 2, 3 ノ三方向ガ最初ノ位置カラ少シ變ツテ居ルニ過ギナイト云フ假定ヲ置イテ直ニ之等ヲ導イタノデアルガ併シ此計算ヲモ少シ詳シク說明スルタメ變形後ノ 1, 2, 3 ノ方向ヲ次ノ表ニ示ス樣ナ方向餘弦デ表サウ.

	x	y	z
1	l_1	m_1	n_1
2	l_2	m_2	n_2
3	l_3	m_3	n_3

卽 1 ノ方向ハ x, y, z ノ方向ニ對シテ夫レ夫レ方向餘弦 l_1, m_1, n_1 ヲモチ其他モ亦之ニ準ズル. 然ル時ハ中央平面中ノ點ノ u, v ガ假リニ零デナイトスレバ微小ナル長サ 1, 2 ノ變形後ニ於ケル座標軸ノ方向ノ射影ヲ求メテ容易ニ知ル樣ニ次ノ式ガ書ケル.

$$l_1 = 1, \qquad m_1 = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad n_1 = \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$l_2 = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad m_2 = 1, \qquad n_2 = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

偖 l_3, m_3, n_3 ヲ之等ノ方向餘弦デ表スタメニハ三直線 1, 2, 3 ノ方向ガ互ニ殆ンド直交スル故先ヅ次ノ式ガ書ケル.

$$l_3=m_1n_2-m_2n_1,\qquad m_3=n_1l_2-n_2l_1,\qquad n_3=l_1m_2-l_2m_1.$$

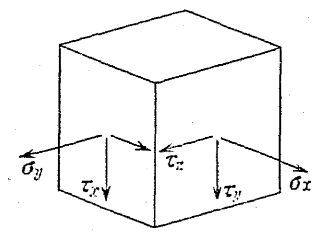
從テ二次ノ小ナル數ヲ省略スレバ u, v ガ零デナクトモ一般ニ

$$l_3=-\frac{\partial w}{\partial x},\qquad m_3=-\frac{\partial w}{\partial y},\qquad n_3=1.$$

此最後ノ結果カラ中央面ヲ去ルコト距離 z ニアル點ノ變位ヲ書ケバ直ニ前ノ如キ結果ガ得ラレル.

偖(1)式中ノ w ハ之ヲ單ニ x 及 y ノミノ函數ト見テ卽中央面ノ法線中ノ凡テノ點ハ同ジ距離 w 丈ケ z ノ方向ニ移動スルト見做ス. (1)ノ兩式ヲ夫レ夫レ x 及 y ニ對シテ微分スレバ

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\\ \varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$



156 圖

斯樣ニシテ撓ミ w ノ微分係數デ表サレタ之等ノ伸ビヲ應力ト伸ビトノ關係式ニ入レルノデアルガ丁度圓板ノ時ト同樣ニ最初先ヅ近似的ニ σ_z ヲ零ト假定スレバ(156圖)

$$\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{m-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right),\quad e=\frac{m-2}{m-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

トナリ從テ

$$\sigma_x=\frac{2G}{m-1}\left(m\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$\sigma_y=\frac{2G}{m-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+m\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

之等兩式中ニ(2)ヲ導ケバ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=-\frac{2Gz}{m-1}\left(m\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\ \sigma_y&=-\frac{2Gz}{m-1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

尙剪斷應力 τ_z ニ對シテハ(1)ニヨリテ下ノ式ガ書ケル.

$$\tau_z=G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-2Gz\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.\tag{4}$$

以上導イタ三應力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_z$ ニ對スル式ヲ直角四面體ノ平衡ヲ示ス方程式XIV章(3)ノ第一,第二ニ入レル. 但容積ニ作用スル力ヲ凡テ省略シヤウ. 然ル時ハ

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial z}=-\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_z}{\partial y}\right)=\frac{2mGz}{m-1}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right),$$

並ニ

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial z}=-\left(\frac{\partial \tau_z}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right)=\frac{2mGz}{m-1}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right).$$

之等ノ式ヲ z ニ對シテ積分シ且兩表面卽 $z=\pm\frac{h}{2}$ ニ對シテ τ_x, τ_y ガ零デアル事ヲ考ヘテ積分常數ヲ定メレバ

$$\left.\begin{aligned}\tau_y&=\frac{mG}{m-1}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)\left(z^2-\frac{h^2}{4}\right),\\ \tau_x&=\frac{mG}{m-1}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)\left(z^2-\frac{h^2}{4}\right).\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

斯樣ニ τ_x, τ_y ハ $z=0$ ニ相當スル中央面ヨリ兩表面ニ向フニ從テ次第ニ減少スル. 而シテ之等應力ノ作用ノタメニ小六面體ノ角ハ直角ヲ失ヒ中央面ニ對スル法線ハ垂直線デナクナル筈デアル. 併シ τ_x, τ_y ノ値ガ小サイ間ハ此影響ヲ省略シ得ルコト梁ノ場合ト同樣デアル.

偖上ノ計算ハ素ヨリ近似的デアツテ殊ニ $\sigma_z=0$ ト云フ假定ヲ用ヰタノデアルガ已ニ τ_x 及 τ_y ガ w ヲ含ム函數トシテ見出サレタ上ハ之等ヲ平衡ノ方程式ニ入レテ σ_z ヲ近似的ニ求メルコトガ出來ヤウ. 而シテ之ト同時ニ w ニ對スル微分方程式ヲ導クノガ次ノ問題デアル. 依テXIV章(3)ノ第三式ニ於テ容積ノ力 $Z=0$ トシテ

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=-\left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x}+\frac{\partial \tau_x}{\partial y}\right)=\frac{mG}{m-1}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right).$$

之ヲ z ニ對シテ積分シテ且微分係數ノ項ヲ $\varDelta\varDelta w$ ト書ケバ

$$\sigma_z=\frac{mG}{m-1}\left(\frac{h^2}{4}z-\frac{z^3}{3}\right)\varDelta\varDelta w+f(x,y).$$

此式中ノ二式 $\Delta\Delta w$ 及 $f(x,y)$ ハ兩表面ノ條件ニ適シタ者デナケレバナラヌ. 卽 $z=\dfrac{h}{2}$ ノ時 $\sigma_z=0$, $z=-\dfrac{h}{2}$ ノ時 $\sigma_z=-p$ トシヤウ. 然ル時ハ第一ノ條件ヨリ

$$\frac{mG}{m-1}\frac{h^3}{12}\Delta\Delta w+f(x,y)=0.$$

又第二ノ條件ヨリ

$$\frac{mG}{m-1}\frac{h^3}{12}\Delta\Delta w-f(x,y)=p.$$

從テ

$$\frac{mG}{m-1}\frac{h^3}{6}\Delta\Delta w=p.$$

此式ニ於テ $\dfrac{m}{m-1}G\dfrac{h^3}{6}=\dfrac{m^2}{m^2-1}E\dfrac{h^3}{12}=D$ トオケバ

$$\left.\begin{aligned}&D\Delta\Delta w=p,\\ \text{又ハ}\quad &D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=p.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

之ガ求メル微分方程式デアル.

次ニ又

$$f(x,y)=-\frac{p}{2}.$$

$\Delta\Delta w$ 及 f ノ値ヲ σ_z ノ式ニ入レル時ハ

$$\sigma_z=\frac{6p}{h^3}\left(\frac{h^2}{4}z-\frac{z^3}{3}\right)-\frac{p}{2}=-p\left[\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{z}{h}\right)+2\left(\frac{z}{h}\right)^3\right].\tag{7}$$

此式ノ σ_z ガ $z=\dfrac{h}{2}$ ニ於テ消エ又 $z=-\dfrac{h}{2}$ ニ於テ $-p$ トナルノハ當然デアル.

此節ヲ結ブ前ニ注意スベキ事ハモシ上ノ微分方程式(6)ニ於テ $p=0$ トスレバ其形ハ曾テ述ベタ平面問題ニ於ケル應力函數ノ微分方程式ト全ク一致スル點デアル.

159. 極座標ヲ用キタ撓ミノ方程式.

極座標 r,φ ヲ用キテ $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ トスレバ平面板ノ撓ミ w ニ對

スル方程式ハ XXIII 章ノ應力函數 F ノ時ト同樣ニシテ(6)カラ容易ニ導クコトガ出來ル. 卽同章ノ(26)ニ依リテ

$$\Delta w=\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}.$$

從テ

$$D\Delta\Delta w=D\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)^2 w=p.\tag{8}$$

特別ノ場合トシテ平面板ガ圓形デ其中心ノ周リニ對稱變形ヲナス場合ニ座標軸ノ原點ガ板ノ中心ニ取ラレレバ w ハ φ ニ無關係デアツテ單ニ r ノミノ函數ト見ラレル.

$$D\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2 w=p.\tag{9}$$

然ルニ

$$\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)$$

ナル故 p ヲ r ニ無關係ノ常數ト見レバ一度ノ積分ニヨリテ

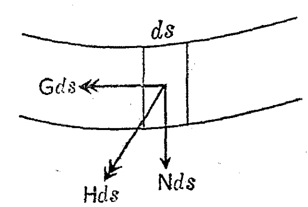
$$D\left(r\frac{d^3 w}{dr^3}+\frac{d^2 w}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)=p\frac{r^2}{2}+C.\tag{10}$$

此式ニ於テ C ハ積分常數デアルガ全體ノ形ハ XXIV 章ノ(5)ニ於テ θ ノ代リニ $-\dfrac{dw}{dr}$ ヲ用キタ場合ト同樣デアツテ以上計算ノ結果ガ圓板ニ對スル比較的簡單ナ計算ト一致スル事ガ判ル.

160. 周邊ノ條件.

板ノ中央平面ヲ直角ニ切ル境界面ノ一部ヲトリテ圖ニ示ス. 157圖.

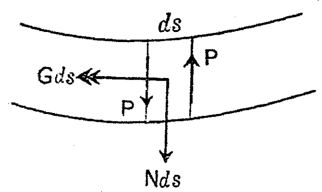
此面上ニ於テ長サ ds ノ矩形ヲ想像シ此處ニ作用スル應力ノ力ヲ考ヘレバ夫レハ先ヅ z 軸ニ沿ヒテ作用スル剪斷應力ノ力 Nds ト垂直應力ニヨリテ生ズル偶力 Gds 並ニ水平方向ノ剪斷應力ニヨリテ生ズル偶力 Hds ニ區別サレル.



157 圖

卽圖ニ於テ Nds 及 Gds ハ境界面內ニ於ケルベクトルヲ表シ Hds ハ之ニ

垂直デアル．而シテ N, G, H ハ境界線ノ單位ノ長サニ對スル力及偶力ノ密度デアル．サテ之等ノ三ツノ代リニ次ニ述ベル二ツヲ用キテ境界ノ條件ヲ論ズル事ガ出來ル．何トナレバ N, G, H ノ中 G ハ別トシテ N 及 H ヲ組合セテ一ツノ剪斷力ヲ作レバ境界面ニ極メテ近イ板ノ內部ニ於ケル應力狀態ノ變化ハ避ケ得ラレナイケレドモ其他ノ大部分ニ於テハ何等ノ變化ガナイト見做サレル故デアル．之ハ一般ニ外力ノ作用スル有樣ヲ變ジテモ外力ノ合成力ガ不變ナラバ稍離レタ場所ニ於ケル應力狀態ハ殆ンド變化シナイ故 (Saint-Venant ノ原理)容易ニ證明サレル事柄デ具體的ニ言ヘバ水平ノ剪斷應力ニ依ル偶力 Hds ノ代リニ境界面上ノ小サナ矩形ヲ作ル縱ノ二直線ニ沿フ反對方向ノ二ツノ力 P, P ヨリ成立ツ偶力 Pds ヲトル事ガ出來ル．158圖．然ル時ハ



158 圖

$$P = H. \tag{11}$$

此方法ヲ s ノ方向ニ於テ ds 丈ケ手前ノ矩形ニ就テ行ヘバ其處ニ作用スル $H-\frac{\partial H}{\partial s}ds$ ノ代リニ導カレル縱ノ方向ノ二ツノ力ハ何レモ $P-\frac{\partial P}{\partial s}ds$ ニ等シイ．斯樣ニシテ相隣レル矩形ノ境界線ニ沿ヒテ方向相反スル二ツノ力 $P-\frac{\partial P}{\partial s}ds$ 及 P ガ作用スル故其差 $\frac{\partial P}{\partial s}ds$ ガ殘ル．此力ヲ N ト組合セテ得ル力ノ密度ヲ Q トスレバ

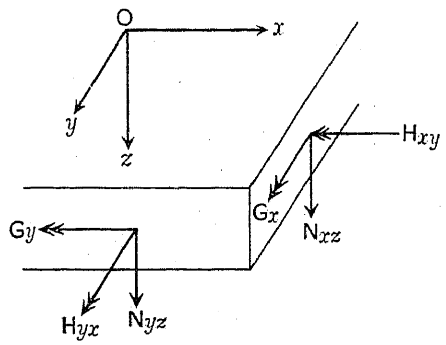
$$Q = N+\frac{\partial P}{\partial s} = N+\frac{\partial H}{\partial s}. \tag{12}$$

此剪斷力 Q ト前ノ偶力 G トヲ以テ境界面上ニ作用スル外力ト見做ス．

上ニ述ベタ境界面上ノ工作ハ境界線ガ急激ナル方向變化ヲ示サザル限リハ連續シテ之ヲ行ヘル故 (11) 及 (12) ハ境界面上ノ任意ノ點ニ於テ之ヲ用キル事ガ出來ル．併シ方向ガ急ニ變ル時ハ斯ル點ヲ越エテ上ノ計算ヲ進メル事ハ出來ナイ．從テ此處デハ特別ノ考ヘガ必要ニナル．例ヘバ境界線ガ直角ニ折レル點デハ此點ヲ境トスル兩境界面ヨリ來ル一

ツノ力ガ集リテ $2P$ ニ等シイ力ガ殘ル．此事ヲ明カニスル爲ニ先ヅ x 及 y 軸ニ平行ナル二ツノ境界面ニ於テ上ノ計算ヲ尙一層精シク說明シヤウ．

159 圖ニ示ス樣ナ二ツノ境界面上ニ於テ夫レ夫レ N, G, H ヲ考ヘル．但之等ノ記號ニ添ヘタ x 及 y ノ文字ハ依テ來ル應力ノ性質ヲ示ス積リデアル．夫レデ應力ノ力及モーメントヲ表ス式ヲ $z=-\frac{h}{2}$ ヨリ $z=\frac{h}{2}$ ニ至ル間ニ積分スレバ



159 圖

$$\left.\begin{aligned} N_{xz} &= \int \tau_{xz}\,dz, \quad N_{yz} = \int \tau_{yz}\,dz, \\ G_x &= \int \sigma_x z\,dz, \quad G_y = \int \sigma_y z\,dz, \\ H_{xy} &= \int \tau_{xy} z\,dz, \quad H_{yx} = \int \tau_{yx} z\,dz. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

併一ツノ點ニ於テハ $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ ナル故互ニ直交スル二ツノ境界面ノ接スル處ニ於ケル偶力 H_{xy} 及 H_{yx} ハ等シイ．之等ノ偶力ハ下ニ示ス樣ナ同ジ形ノ式ニテ表サレル故特ニ區別スル必要ナキ限リ共ニ記號 H ヲ以テ之ヲ表ス．(13)ニ應力ノ式(3), (4), (5) ヲ入レル時ハ次ノ式ヲ得ル．但 $D=\frac{m}{m-1}G\frac{h^3}{6}=\frac{m^2}{m^2-1}E\frac{h^3}{12}$.

$$\left.\begin{aligned} N_{xz} &= -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right), \\ N_{yz} &= -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} G_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{m}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ G_y &= -D\left(\frac{1}{m}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$H=-D\frac{m-1}{m}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}. \tag{16}$$

又(12)ニヨリテ Q ヲ計算スルニ當リテ N_{xz} 及 N_{yz} ニ對スルモノヲ夫レ夫レ Q_{xz}, Q_{yz} ト記セバ

$$\left.\begin{aligned} Q_{xz}&=N_{xz}+\frac{\partial H}{\partial y}=-D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(2-\frac{1}{m}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right],\\ Q_{yz}&=N_{yz}+\frac{\partial H}{\partial x}=-D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\left(2-\frac{1}{m}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right].\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

斯樣ニシテ二ツノ境界面ノ交線ニ沿ヒテ二ツノ力 P 及 P ガ殘ル. 之等ハ互ニ相等シク從テ此點ニ於ケル支力ハ $2H$ トナル. 若シ $H=0$ ナラバ P モ亦零トナル事素ヨリデアル.

周邊ノ條件ノ例トシテ若シ板ガ $x=a$ ニテ示サレル邊ノ兩端ヲ除イテハ其全長ニ沿ヒテ全ク自由ナル時ハ $Q_{xz}=G_x=0$ ナル故

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{m}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(2-\frac{1}{m}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}=0.$$

又板ガ上ノ邊ニ於テ自由ニ支ヘラレル時ハ撓ミ w ガ支持臺ノ線ニ從フ外 $G_x=0$ ナル故

$$w=f(y),\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{m}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0.$$

此時 Q_{xz} ガ其符號ヲ變ズル事ナキヤヲ調ベモシ符號ヲ變ズル時ハ此事ガ果シテ實際ノ狀況ニ照シテ可能ナルヤヲ確メル事ガ必要デアル.

尚最後ニ板ガタトヘバ一邊 $x=a$ ニ沿ヒテ直線狀ノ支持臺ニ固定サレル時ノ條件ハ $w=\frac{\partial w}{\partial x}=0$ デアル.

161. 楕圓板.

座標軸 x 及 y ガ楕圓ノ主軸ノ方向ト一致スルモノトスレバ楕圓板周圍ノ方程式ハ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

先ヅ板ノ周圍ニ於テ固定ノ條件ニ適スル樣ナ微分方程式(6)ノ解トシテ次ノ樣ニ書カウ.

$$w=c\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2. \tag{18}$$

此式ニ於テ c ハ x 及 y ニ無關係ノ常數デアッテ之ハ中央面ノ中心ニ於ケル w ノ値ニ等シイ. 偖

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{4cx}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{8cx^2}{a^4}+\frac{4c}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right).$$

同樣ニシテ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{8cy^2}{b^4}+\frac{4c}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right).$$

更ニ尚二度ノ微分ニヨリテ

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=\frac{24c}{a^4},\qquad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{24c}{b^4},$$

及

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}=\frac{8c}{a^2b^2}.$$

之等ノ微分係數ヲ方程式(6)ノ中ニ入レル時ハ

$$D\left(\frac{24}{a^4}+\frac{16}{a^2b^2}+\frac{24}{b^4}\right)c=p.$$

$D=\frac{m^2}{m^2-1}E\frac{h^3}{12}$ ナル故 c ハ次ノ樣ニナル.

$$c=p\frac{m^2-1}{2m^2Eh^3\left(\frac{1}{a^4}+\frac{2}{3a^2b^2}+\frac{1}{b^4}\right)}. \tag{19}$$

夫レ故 c ニ此値ヲ與ヘレバ微分方程式ハ滿足サレル. 而シテ板ノ周圍ニ於テハ

$$w=0,\quad \frac{\partial w}{\partial x}=0 \ \text{及}\ \frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

卽板ノ周圍ガ固定サレタ場合デアル.

次ニ應力ニ關シテハ板ノ表面卽 $z=\pm\frac{h}{2}$ ニ對スル値ヲ計算シヤウ. 先ヅ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\mp\frac{4Ghc}{m-1}\left[\left(\frac{3m}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{m}{a^2}+\frac{3}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}-\left(\frac{m}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right],\\ \sigma_y&=\mp\frac{4Ghc}{m-1}\left[\left(\frac{3}{a^2}+\frac{m}{b^2}\right)\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{3m}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m}{b^2}\right)\right],\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

並ニ

$$\tau_z=\mp 8Ghc\frac{xy}{a^2b^2}. \tag{21}$$

兩表面ニ於ケル主應力ハ之等ノ値ヲXIV章(18)ニ入レテ直ニ計算サレル. 卽

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_z^2}$$

ト書キ此式ノ値ガ成ル可ク大トナル樣ナ點ニ就テ計算シヤウ. 今應力ノ絕對値ヲ考ヘルニ $\sigma_x, \sigma_y, \tau_z$ ハ x 及 y ノ成ル可ク大トナル點卽楕圓ノ周邊上ノ點デ比較的大デアル. 又 σ_x 及 σ_y ハ x 及 y ガ零ノ時卽中心ニ於テモ比較的大デアル. 依テ之等ノ點デ計算ヲ試ルタメニ先ヅ(20)式中ノ二重ノ符號ヲ避ケテ

$$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}=2Ghc\frac{m+1}{m-1}\left[\left(\frac{3}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{3}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right],$$

$$\sigma_x-\sigma_y=4Ghc\left[\left(\frac{3}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{3}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right].$$

次ニ周邊ノ方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ヲ導ケバ

$$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}=4Ghc\frac{m+1}{m-1}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right),$$

$$\sigma_x-\sigma_y=8Ghc\left(\frac{x^2}{a^4}-\frac{y^2}{b^4}\right).$$

之等ノ外 τ_z ニ對シテ上ノ(21)ヲ用キテ

$$\begin{aligned}\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\}&=4Ghc\left[\frac{m+1}{m-1}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^4}-\frac{y^2}{b^4}\right)^2+\frac{4x^2y^2}{a^4b^4}}\right]\\ &=4Ghc\left(\frac{m+1}{m-1}\pm1\right)\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)\\ &=\frac{8mGhc}{m-1}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)\ \text{及}\ \frac{8Ghc}{m-1}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right).\end{aligned}\tag{22}$$

之ニ依テ見レバ强サノ計算ニハ第一式丈ケヲ考ヘレバ宜シイ. 而シテ $a<b$ ト假定スレバ

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\frac{y^2}{b^2}\right)\leqq\frac{1}{a^2}.$$

故ニ此式ガ $\frac{1}{a^2}$ ニ等シイ點卽 $x=\pm a, y=0$ ニ於テ最大ノ主應力ガ起ル. 其値ハ

$$\sigma_a=\frac{8m}{m-1}\frac{Ghc}{a^2}=\frac{4m^2}{m^2-1}\frac{Ehc}{a^2} \tag{23}$$

デアッテ符號ヲ考ヘレバ板ノ下面 $\left(z=\frac{h}{2}\right)$ ニ於テ壓縮應力ガ作用シ上面 $\left(z=-\frac{h}{2}\right)$ ニ於テ引張應力ガ働ク.

楕圓ノ兩主軸上ニ於テハ $\tau_z=0$ ナル故 σ_x 及 σ_y ガ直ニ主應力デアル. 而シテ $x=\pm a$ ナル兩點ニ於テハ σ_x ガ上ノ結果ト一致スル事ハ素ヨリ當然デアル.

次ニ中心 $x=y=0$ ニ於ケル主應力ノ絕對値ハ直ニ下ノ如クナリ其符號ハ下面ガ正卽引張デ上面ガ負卽壓縮デアル.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{x0}&=\frac{4Ghc}{m-1}\left(\frac{m}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right),\\ \sigma_{y0}&=\frac{4Ghc}{m-1}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m}{b^2}\right).\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

假定ニヨリテ $a<b$ ナル故之等ノ二應力中デハ $\sigma_{x0}>\sigma_{y0}$ デアル. 而シテ σ_{x0} ヲ σ_a ト比ベレバ

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{x0}}=\frac{2m}{a^2}\Big/\left(\frac{m}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=\frac{2m}{m+\frac{a^2}{b^2}}>1.$$

夫レ故最大ノ主應力ハσ_aデアル．此式ニ常數cノ値ヲ入レル時ハ

$$\sigma_{max}=\sigma_a=\frac{2pa^2}{h^2\left(1+\frac{2a^2}{3b^2}+\frac{a^4}{b^4}\right)}. \tag{25}$$

162. 四隅ニ力ヲ加ヘテ矩形板ヲ捩ル場合.

試ニ $w=cxy$ ニテ示サレルーツノ解ヲ取ル．此式ガ板ニ作用スル壓力 $p=0$ ノ時微分方程式(6)ヲ滿足スル事ハ明カデアルガ境界ノ條件ヲ見ルニ $G_x=G_y=0$ 又 $Q_{xz}=Q_{yz}=0$ ナル故矩形板ノ四邊ハ自由デアル．只板ノ四隅ニ於テ外力ノ作用ヲ見ル．即

$$P=H=-D\frac{m-1}{m}c. \tag{26}$$

從テ四隅ノ外力ハ各 $2P$ ニ等シク其方向ハ 158 圖ヲ擴張シテ考ヘレバ容易ニ判ル樣ニ一邊ノ兩端ニ於テ互ニ相反向スル筈デアル．夫レ故矩形ノ y 軸ニ沿フ邊ノ長サヲ$2b$トスレバ板ハ其兩端ニ於テ$4Pb$ニ等シイ偶力ヲ受ケル．之ヲMニテ示ス時ハ

$$c=-\frac{m}{m-1}\frac{P}{D}=-\frac{m}{m-1}\frac{M}{4bD}. \tag{27}$$

偖 $w=cxy$ ナル故 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=c$ ハ板ノ捩レノ割合ヲ示ス數デ其絕對値ヲθトスレバ $D=\dfrac{m}{m-1}G\dfrac{h^3}{6}$ ナル故

$$\theta=\frac{3}{2}\frac{M}{Gbh^3}. \tag{28}$$

又應力τ_zノ式ハ次ノ樣ニナル．

$$\tau_z=-2Gzc=\frac{3Mz}{bh^3}. \tag{29}$$

$z=\pm\dfrac{h}{2}$ トオケバτ_zノ絕對値ハ次ノ式デ與ヘラレル．

$$\tau_z=\frac{3}{2}\frac{M}{bh^2}. \tag{30}$$

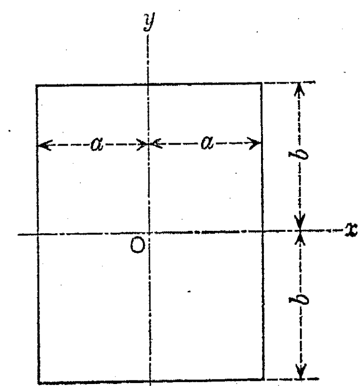
Saint-Venant ノ捩リノ理論中矩形斷面ノ棒ニ對スル捩リノ計算ノ結果ニ於テ横斷面ノ兩邊ノ比即 XIX 章ノ $\dfrac{b}{a}$ ヲ無限大トシテ極メテ細長イ矩形ヲ想像スレバ丁度上ニ導イタθ及τ_zノ式ト符合スル事ガ判ル．

163. 周邊ニ於テ自由ニ支ヘラレタ矩形板ノ曲ゲ.

一般ニ板ノ計算ニ於テ基礎ノ微分方程式ヲ滿足スル樣ナ比較的嚴密ナル解ヲ求メル事ハ簡單ナ問題デナイカラ工學上ノ計算デハ屢々略式計算法ヲ用キル．其一例ハ丁度前ニ(III 章例題 8)圓板ヲ論ジタ時ト同樣ニ板ヲ實際荷重シタ場合ニ如何ナル方向ニ破面ヲ生ズルカヲ實驗シテ此破面ニ於ケル曲ゲモーメントヲ近似的ニ計算シ之ニ依リテ生ズル曲ゲノ應力ヲ見出スノデアル．タトヘバBach ノ著書ニ斯ル計算法ヲ見ル事ガ出來ル.[1] 併シ略式計算法トシテハ後ニ述ベル樣ナ變形勢力ノ方法ヲ取ル方遙ニ合理的デアル．

又問題ノ性質ニヨリテハ基礎ノ微分方程式ノ解ヲ求メル事モ强チ困難デナイ故下ニハ斯ル方法ニ就テ述ベヤウ．

先ヅ矩形ノ邊ヲ $2a$, $2b$ トシ板ノ厚サヲhトスル．而シテ板ガ周邊ニ於テ自由ニ支ヘラレテ全面ニ一樣ナル密度ノ壓力pガ作用スル場合ニ就テ微分方程式(6)ノ解ヲ求メヤウ．



160 圖

座標軸ノ原點ヲ矩形板ノ中心ニ取リ x, y 兩軸ガ夫レ夫レ長サ $2a$, $2b$ ノ稜邊ト平行スル樣ニシテ (160 圖)微分方程式(6)ノpヲ次ノ形ノ級數ニ展開スル．

$$p=\sum_{\mu}\sum_{\nu}k_{\mu\nu}\cos\frac{\mu\pi x}{2a}\cos\frac{\nu\pi y}{2b}. \tag{31}$$

1) Bach, Elastizität und Festigkeit, 6 版, 576 頁; 9 版 (R. Baumann 共著), 625 頁.

但 μ 及 ν ハ奇整數デアル. 之ニ對シテ(6)ノ一ツノ解ヲ次ノ級數ニ表ス.

$$w=\sum_{\mu}\sum_{\nu}C_{\mu\nu}\cos\frac{\mu\pi x}{2a}\cos\frac{\nu\pi y}{2b}. \tag{32}$$

之ハ下ニ述ベル樣ニ $C_{\mu\nu}$ ヲ適當ニ選ブ事ニヨリテ方程式ヲ滿足シ又周邊 $x=\pm a,\ y=\pm b$ ニ於テ $w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$ トナル故自由ニ支ヘラレタ板ノ條件ニ適ス. 依テ(32)ヲ(6)ニ入レテ同類項ノ係數ヲ比ベレバ

$$C_{\mu\nu}=\frac{16\,k_{\mu\nu}}{D\pi^4\left(\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}\right)^2}. \tag{33}$$

斯樣ニシテ係數ガ定マル. 之ヲ(32)ニ入レル時ハ w ノ式ガ定マル.

偖上ニ述ベタ樣ニ p ヲ μ 及 ν ノ無限級數ニ展開スル爲ニハ先ヅ $y=$ const. トシテ p ヲ $\frac{\mu\pi x}{2a}$ ノ餘弦級數ニ展開シ次ニ $x=$ const. トシテ各項ノ係數ヲ $\frac{\nu\pi y}{2b}$ ノ餘弦級數ニ展開スレバ宜シイ. 此展開ニ於テ次ノ定理ヲ用キル事ガ出來ル. 卽一般ニ $f(\pi-x)=-f(x)$ ノ關係ヲ滿足スル函數ヲ餘弦級數ニ又 $f(\pi-x)=f(x)$ ノ關係ヲ滿足スル函數ヲ正弦級數ニ展開スレバ單ニ奇數項ノミヲ含ム級數ガ得ラレル. 前ニ矩形斷面ノ棒ノ捩リヲ論ズル際ニ用キタ正弦級數ト同樣ニ只今ノ餘弦級數ハ此定理ノ一例デアル. 而シテ展開ノ結果ヲ示セバ $\mu,\nu=1,3,5,\cdots$ ニ對シテ

$$p=\frac{16p}{\pi^2}\sum_{\mu}\sum_{\nu}\frac{(-1)^{\frac{\mu+\nu}{2}-1}}{\mu\nu}\cos\frac{\mu\pi x}{2a}\cos\frac{\nu\pi y}{2b}. \tag{34}$$

從テ(31)ノ級數ノ係數ハ

$$k_{\mu\nu}=\frac{16p}{\pi^2}\frac{(-1)^{\frac{\mu+\nu}{2}-1}}{\mu\nu}. \qquad \mu,\nu=1,3,5,\cdots. \tag{35}$$

夫レ故(33)ヨリ

$$C_{\mu\nu}=\frac{256p}{\pi^6 D}\frac{(-1)^{\frac{\mu+\nu}{2}-1}}{\mu\nu\left(\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}\right)^2}. \tag{36}$$

之ヲ(32)ニ入レル時ハ

$$w=\frac{256p}{\pi^6 D}\sum_{\mu}\sum_{\nu}\frac{(-1)^{\frac{\mu+\nu}{2}-1}}{\mu\nu\left(\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}\right)^2}\cos\frac{\mu\pi x}{2a}\cos\frac{\nu\pi y}{2b}. \tag{37}$$

此級數ハ可ナリ早ク收斂スル故變形及應力ノ大體ノ數値ヲ知ル爲ニハ其第一項ノミヲ取リテ近似計算ヲ行ヘル. 然ル時ハ

$$w=\frac{256p}{\pi^6 D}\frac{a^4b^4}{(a^2+b^2)^2}\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}. \tag{38}$$

板ノ中心卽 $x=y=0$ ニ於ケル撓ミヲ δ トスレバ

$$\delta=\frac{256p}{\pi^6 D}\frac{a^4b^4}{(a^2+b^2)^2}. \tag{39}$$

又同點ニ於ケル板ノ兩表面 $\left(z=\pm\frac{h}{2}\right)$ ノ應力ハ

$$\sigma_{x0}=\mp\frac{Gh}{m-1}\left[m\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_{x=y=0},$$

$$\sigma_{y0}=\mp\frac{Gh}{m-1}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_{x=y=0}.$$

然ルニ(38)ヨリ

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]_{x=y=0}=-\frac{64p}{\pi^4 D}\frac{a^2b^4}{(a^2+b^2)^2},$$

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_{x=y=0}=-\frac{64p}{\pi^4 D}\frac{a^4b^2}{(a^2+b^2)^2}.$$

故ニ

$$\sigma_{x0}=\pm\frac{384p}{m\pi^4h^2}\frac{a^2b^2(a^2+mb^2)}{(a^2+b^2)^2},$$

$$\sigma_{y0}=\pm\frac{384p}{m\pi^4h^2}\frac{a^2b^2(ma^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}.$$

若シ $b>a$ ナラバ σ_{x0} ノ方大デアル. 夫レ故 $\frac{b}{a}=n$ トスレバ最大應力ノ大サハ次ノ式ニヨリテ與ヘラレル.

$$\sigma_{x0}=\frac{384}{\pi^4}\frac{n^2(mn^2+1)}{m(n^2+1)^2}\frac{pa^2}{h^2}. \tag{40}$$

尙序ニ近似式(38)ヲ用キテ周邊ニ作用スル支力ノ計算ヲナセバ次ノ樣ニナル. (16)ヨリ $x=\pm a,\ y=\pm b$ ニ對シテ

$$H=-D\frac{m-1}{m}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right]_{x=\pm a,\ y=\pm b}=\mp\frac{64}{\pi^4}\frac{m-1}{m}p\frac{a^3b^3}{(a^2+b^2)^2}. \tag{41}$$

此式ノ正負兩記號ニ就テハ x 及 y ガ同記號ナラバ負ヲトリ又異符號ナラバ正ヲ取ル. 而シテ何レノ H ニ就テモ板ノ上ヨリ下ニ向テ作用スル事ガ判ル. 夫レ故板ノ四隅ニ於ケル支力 $2H$ ハ板ノ上ルヲ抑ヘル樣ニ作用スル. 又(17)ヨリ

$$\left.\begin{aligned}
Q_{xz}&=-D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(2-\frac{1}{m}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right]_{x=\pm a}\\
&=\mp\frac{32p}{\pi^3}\frac{ab^2}{(a^2+b^2)^2}\left[\left(2-\frac{1}{m}\right)a^2+b^2\right]\cos\frac{\pi y}{2b},\\
Q_{yz}&=-D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\left(2-\frac{1}{m}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\right]_{y=\pm b}\\
&=\mp\frac{32p}{\pi^3}\cdot\frac{a^2b}{(a^2+b^2)^2}\left[a^2+\left(2-\frac{1}{m}\right)b^2\right]\cos\frac{\pi x}{2a}.
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

大體ノ見當ヲ知ル爲ニ導イタ之等ノ式ハ上ニ述ベタ樣ニ w ノ無限級數ノ第一項ノミヲ取リタル結果デ從テ其値ノ精度ニ對シテ高イ要求ヲナシ得ザルハ勿論デアル.

164. 周邊ニ於テ自由ニ支ヘラレタ矩形板ノ曲ゲ. 他ノ方法.

前節ニ於テハ p 及 w ヲ x 及 y ニ對スル無限級數ニ表シタ. 併シ本節ニ於テハ他ノ解法ヲ用キテ w ヲ例ヘバ x ノミニ對スル無限級數ヲ含ム式ニ表シ得ル事ヲ述ベヤウ. 先ヅ微分方程式(6)ノ解デ二邊 $x=\pm a$ ニ於ケル條件ヲ滿足スル次ノ式ヲ取ル.

$$w_1=\frac{p}{24D}(5a^2-x^2)(a^2-x^2). \tag{43}$$

此式ガ微分方程式ヲ滿足シ且 $x=\pm a$ ニ對シテ $w_1=\frac{d^2w_1}{dx^2}=0$ トナル事ハ明カデアツテ之ハ $x=\pm a$ ニテ限ラレ y 軸ノ方向ニ無限ノ長サヲモツ板ノ曲リヲ表ス. 依テ之ヲ求メル解ノ第一部トシテ他ノ周邊ニ於ケル條件ヲ滿足スル爲ニ解ノ第二部ヲ作ル. 之ハ微分方程式 $\varDelta\varDelta w_2=0$ ノ解デ次ノ條件ヲ滿足スル樣ニスル.

(1) $x=\pm a$, $\quad w_2=\dfrac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}=0$,

(2) $y=\pm b$, $\quad w_1+w_2=0,\quad \dfrac{\partial^2(w_1+w_2)}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}=0$.

斯ル解ヲ得ル爲 x, y ノ偶函數ナル次ノ形ノ式ヲ取ル.

$$(A\cosh\alpha y+By\sinh\alpha y)\cos\alpha x.$$

之ハ明カニ微分方程式 $\varDelta\varDelta w_2=0$ ノ解デアツテ之ガ條件(1)ヲ滿足スル爲ニハ $\cos\alpha a=0$ トナルヲ要スル故

$$\alpha=\frac{\mu\pi}{2a},\qquad \mu=1,3,5,\cdots. \tag{44}$$

依テ w_2 ニ對シテ次ノ級數ヲ取ル.

$$w_2=\sum_\mu(A_\mu\cosh\alpha y+B_\mu y\sinh\alpha y)\cos\alpha x. \tag{45}$$

次ニ條件(2)ヲ滿足スルタメニ先ヅ w_1 ヲ $\Sigma C\cos\alpha x$ ノ形ニ展開スル. 之ハ(43)ノ右邊ヲ展開シテモ又ハ元ノ微分方程式 $\frac{d^4w_1}{dx^4}=\frac{p}{D}$ ニ於テ右邊 $\frac{p}{D}$ ヲ αx ノ餘弦級數ニ展開シテ然ル後之ヲ四度積分シテモ同樣デアル. 何レニシテモ結局次ノ式ヲ得ル.

$$w_1=\frac{64a^4}{\pi^5}\frac{p}{D}\sum_\mu\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^5}\cos\alpha x, \tag{46}$$

但 $\quad\alpha=\dfrac{\mu\pi}{2a},\qquad \mu=1,3,5,\cdots.$

(45), (46) ヲ用キテ條件(2)ヲ表セバ其第一第二ノ兩條件ハ同ジ事ヲ意味スル故條件ハ次ノ二式トナル.

$$A_\mu\cosh\alpha b+B_\mu b\sinh\alpha b+\frac{64a^4}{\pi^5}\frac{p}{D}\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^5}=0,$$

$$A_\mu\alpha^2\cosh\alpha b+B_\mu(\alpha^2b\sinh\alpha b+2\alpha\cosh\alpha b)=0.$$

之等兩式ヨリ

$$\left.\begin{aligned}
A_\mu&=-\frac{32a^4}{\pi^5}\frac{p}{D}\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^5}\frac{2+\alpha b\tanh\alpha b}{\cosh\alpha b},\\
B_\mu b&=\frac{32a^4}{\pi^5}\frac{p}{D}\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^5}\frac{\alpha b}{\cosh\alpha b}.
\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

斯様ニシテ(45)式ノ係數ガ判リ w_2 ガ定マル. 從テ(43),(45)ヲ組合セテ

$$w = w_1 + w_2 = \frac{p}{24D}(5a^2-x^2)(a^2-x^2)$$
$$+\sum_\mu\left(A_\mu\cosh\frac{\mu\pi y}{2a}+B_\mu y\sinh\frac{\mu\pi y}{2a}\right)\cos\frac{\mu\pi x}{2a}. \tag{48}$$

特別ニ矩形板中心ノ撓ミヲ δ トスレバ

$$\delta = \frac{5}{24}\frac{pa^4}{D}+\sum_\mu A_\mu$$
$$= \frac{pa^4}{D}\left[\frac{5}{24}-\frac{64}{\pi^5}\sum_\mu\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^5\cosh\frac{\mu\pi b}{2a}}-\frac{16}{\pi^4}\frac{b}{a}\sum_\mu\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^4}\frac{\tanh\frac{\mu\pi b}{2a}}{\cosh\frac{\mu\pi b}{2a}}\right]. \tag{49}$$

簡單ノタメニ(49)ノ無限級數ノ第一項ヲ取リ且例ヘバ $a=b$ トオケバ

$$\delta = 0.0649\frac{pa^4}{D}.$$

之ト比ベル爲ニ(39)ニ於テ $a=b$ トオケバ δ ノ式ノ係數ハ $\frac{64}{\pi^6}=0.0666$ トナル.

又中心ニ於ケル板ノ表面 $\left(z=\pm\frac{h}{2}\right)$ ノ應力 σ_{x0}, σ_{y0} ヲ計算スレバ

$$\sigma_{x0} = \pm\frac{pa^2}{h^2}$$
$$\times 3\left[1-\frac{32}{\pi^3}\sum_\mu\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^3\cosh\frac{\mu\pi b}{2a}}-\frac{8}{\pi^2}\frac{b}{a}\frac{m-1}{m}\sum_\mu\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^2}\frac{\tanh\frac{\mu\pi b}{2a}}{\cosh\frac{\mu\pi b}{2a}}\right],$$

$$\sigma_{y0} = \pm\frac{pa^2}{h^2}$$
$$\times 3\left[\frac{1}{m}-\frac{32}{m\pi^3}\sum_\mu\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^3\cosh\frac{\mu\pi b}{2a}}+\frac{8}{\pi^2}\frac{b}{a}\frac{m-1}{m}\sum_\mu\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^2}\frac{\tanh\frac{\mu\pi b}{2a}}{\cosh\frac{\mu\pi b}{2a}}\right]. \tag{50}$$

實用上ノ便利ノ爲ニ δ 及 σ_{x0} ノ兩式ニ於ケル係數ノ値ヲ $\frac{b}{a}$ ノ種々ノ値ニ對シテ計算シテ之ヲ表ニ示ス. 表中ノ f' 及 g' ノ數値ヲ圖ニ示セバ更ニ一層便デアラウ.

$$\delta = \frac{pa^4}{D}f'\left(\frac{b}{a}\right),\qquad \sigma_{x0} = \pm\frac{pa^2}{h^2}g'\left(\frac{b}{a}\right).$$

$\frac{b}{a}$	1	1.25	1.5	2	3	4
$f'\left(\frac{b}{a}\right)$	0.0650	0.0964	0.1236	0.1621	0.1957	0.2051
$g'\left(\frac{b}{a}\right)$	1.149	1.586	1.948	2.440	2.853	2.963

165. 周邊ニ於テ固定サレタ矩形板ノ曲ゲ.

周邊ヲ自由ニ支ヘタ矩形板ノ計算ハ比較的容易デアルガ標題ノ樣ニ周邊ヲ固定シタ場合ノ計算ハ可ナリ困難デアル. 故ニタトヘ嚴密ノ程度ニ於テ多少欠ケルトモ或ル程度迄正確ナル解ヲ得ル事ガ望マシイ. 斯ル目的ニ向テ進メラレタ種々ノ研究ノ中ニ妹澤克惟博士[1]ノ計算及實驗ガアル. 之ニ依レバ矩形ノ周邊ニ於テ $w=0$ トナリ且長邊ノ中點ニ於テ傾斜ガ零トナル條件ニヨリテ導カレタ解ガ實用上充分ナル精度ノ結果ヲ與ヘル. 玆ニ注意スベキハ長邊ノ條件ノ重要性ガ表レテ居ル事デアル. 下ニ別ノ近似計算ヲナスニ際シテモ此點ニ注意シテ成ルベク長邊ノ條件ヲ滿足スル樣ニ計算ヲ運ビタイト考ヘル.

偕微分方程式(6)ノ解 w ヲ二ツニ分ケテ w_1 及 w_2 トスル. 即

$$w = w_1 + w_2.$$

w_1 ヲ或ル周邊ノ條件ヲ滿足スル 6) ノ解トシ又 w_2 ヲ(6)ノ右邊ヲ零トシタ同次微分方程式 $\Delta\Delta w_2=0$ ノ解トスレバ w ハ(6)ノ解デアル. 而シテ w_1+w_2 ガ周邊ノ條件ヲ滿ス樣ニスレバ宜シイ. タトヘバ w_1 ヲ(37)ノ w ニ等シクオケバ周邊ニ於テ $w_1=\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}=0$ トナル. 次ニ w_2 ハ周邊ニ於テ $w_2=0$ トナル外成ルベク $\frac{\partial}{\partial x}(w_1+w_2)=\frac{\partial}{\partial y}(w_1+w_2)=0$ トナル樣ニ選ブ. 斯樣ニシテ得タ $w=w_1+w_2$ ハ求メル解トナル.[2]

又タトヘバ w_1 ヲ幅 $2a$ ノ無限ノ固定板ニ對スル解ニ等シク取ル事丁

1) 造船協會會報, 33, 1923, 38 頁; Engineering, CXVI, 1923, 188 頁.
2) G. Pigeaud, Resistance des Materiaux et Élasticité, 1920, 643 頁.

度 164 節ノ自由支持ノ場合ノ樣ニシ次ニ w_2 ヲ適當ニ選ブ事ニヨリテ求メル w ヲ定メル事ガ出來ル.[1] 本節ニ於テハ多クノ計算法ヲ一々紹介スル繁ヲ避ケテ今述ベタ方法ニ依ル計算ヲ近似的ニ終局迄進メヤウ.

上ニ述ベタ樣ニ w_1 ハ微分方程式(6)ノ一ツノ解デ二邊 $x=\pm a$ ニ於テ $w_1=\dfrac{dw_1}{dx}=0$ トナル樣ニ選ブ. 卽

$$w_1=\frac{p}{24D}(a^2-x^2)^2. \tag{51}$$

之ハ y 軸ノ方向ニ無限ノ長サヲモツ板ノ撓ミヲ表ス. 若シ $b>a$ トスレバ此解ハ長邊ニ沿ヒテ固定條件ヲ完全ニ滿足スル. 夫レ故之ヲ基トシテ長邊ニ於ケル條件ヲ滿足スル計リデナク他ノ二邊ニ於テモナルベク完全ニ w ノ條件ヲ滿足スル樣ニ w_2 ヲ選ベバ本節ノ始メニ述ベタ方針ト一致スル. 依テ $\Delta\Delta w_2=0$ ノ解 w_2 ヲ次ノ條件ニ合フ樣ニ作ル.

(1) $x=\pm a,\qquad w_2=\dfrac{\partial w_2}{\partial x}=0.$

(2) $y=\pm b,\qquad w_1+w_2=0,\qquad \dfrac{\partial w_2}{\partial y}=0.$

求メル解ノ構成分子トシテ次ノ形ノ式ヲ考ヘヤウ.

$$(A\cosh\alpha y+B\alpha y\sinh\alpha y)\cos\alpha x+(C\cosh\beta x+D\beta x\sinh\beta x)\cos\beta y. \tag{52}$$

之ガ上ノ同次微分方程式ヲ滿足スル事ハ明カデアルガ大切ナ事ハ周邊ノ條件ヲ滿足スル樣ニ常數 α,β 及 A,B,C,D ヲ定メル事デアル. 先ヅ(52)ノ式ガ $x=\pm a$ ニ於テ消エル爲ニハ

$$\cos\alpha a=0,\qquad \alpha a=\frac{\mu\pi}{2},\qquad \mu=1,3,5\cdots \tag{53}$$

並ニ

$$C\cosh\beta a+D\beta a\sinh\beta a=0.$$

從テ

$$D=-C\frac{\cosh\beta a}{\beta a\sinh\beta a}. \tag{54}$$

1) A. Nádai, Elastische Platten, 1925, 180 頁.

次ニ $y=\pm b$ ニ於テ $\dfrac{\partial w_2}{\partial y}=0$ トナル爲ニハ

$$\sin\beta b=0,\qquad \beta b=\nu\pi,\qquad \nu=1,2,3,\cdots \tag{55}$$

並ニ

$$A\sinh\alpha b+B(\alpha b\cosh\alpha b+\sinh\alpha b)=0.$$

從テ

$$B=-A\frac{\sinh\alpha b}{\alpha b\cosh\alpha b+\sinh\alpha b}. \tag{56}$$

(54), (56) ヲ (52) ニ入レ且簡單ノ爲ニ A, C ノ代リニ A', C' ヲ下ノ樣ニオク.

$$A'=\frac{A}{\alpha b\cosh\alpha b+\sinh\alpha b},\qquad C'=\frac{C}{\beta a\sinh\beta a}. \tag{57}$$

然ル時ハ(52)ハ次ノ形ヲ取ル.

$$\begin{aligned}&A'\Big[(\alpha b\cosh\alpha b+\sinh\alpha b)\cosh\alpha y-\alpha y\sinh\alpha y\sinh\alpha b\Big]\cos\alpha x\\&+C'\Big[\beta a\sinh\beta a\cosh\beta x-\beta x\sinh\beta x\cosh\beta a\Big]\cos\beta y.\end{aligned} \tag{58}$$

此式ハ w_2 ニ對スル周邊ノ條件ノ中二ツヲ滿足スルモ尙他ニ二ツノ條件ガ殘ル. 其中 $x=\pm a$ ニ於テ $\dfrac{\partial w_2}{\partial x}=0$ トナルベキ條件ヲ滿足スルタメニ(58)ノ微分係數ヲ作リテ $x=a$ トオケバ

$$\begin{aligned}&-(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}A'\alpha\Big[(\alpha b\cosh\alpha b+\sinh\alpha b)\cosh\alpha y-\alpha y\sinh\alpha y\sinh\alpha b\Big]\\&-C'\beta\Big[\sinh\beta a\cosh\beta a+\beta a\Big]\cos\beta y.\end{aligned} \tag{59}$$

$x=-a$ ニ對シテハ之ト符號ヲ異ニスル同ジ形ノ式ガ得ラレルガ(59)ヲ考ヘレバ充分デアル. 偖此式ヲ見ルニ之ハ無論 y ノ偶函數デ其第二項ハ $\cos\beta y$ ニ從テ變ズル故 y ガ 0 ヨリ b ニ至ル間ノ平均値ハ零デアル. 之ニ對シテ第一項ハ平均値零トナラザル故此式ニ或ル常數ヲ加ヘテ平均値ヲ零トスル樣ニシヤウ. 之ガ爲(58)ニ次ノ一項ヲ增ス. 卽 $c\Big(1-\dfrac{x^2}{a^2}\Big)$. 此式ハ同次微分方程式ヲ滿足シ且(58)ト同ジ程度ニ只今ノ周邊條件ヲ滿足スル. 夫レ故之ヲ加ヘタ式ヲ微分スレバ(59)ハ更ニ一項 $-\dfrac{2c}{a}$ ヲ增ス故次ノ式ノ平均値ヲ零トスル樣ニ係數 A' ヲ定メヤウ.

$$-\frac{2c}{a}-(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}A'\alpha\Big[(\alpha b\cosh\alpha b+\sinh\alpha b)\cosh\alpha y-\alpha y\sinh\alpha y\sinh\alpha b\Big].$$

依テ此式ヲ $y=0$ ト $y=b$ トノ間ニ積分シテ之ヲ零ニ等シクオケバ

$$-2c\frac{b}{a}-(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}A'\Big[(\alpha b\cosh\alpha b+\sinh\alpha b)\sinh\alpha b-(\alpha b\cosh\alpha b-\sinh\alpha b)\sinh\alpha b\Big].$$

$$=-2c\frac{b}{a}-(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}2A'\sinh^2\alpha b=0.$$

之ヨリ

$$A'=(-1)^{\frac{\mu+1}{2}}c\frac{b}{a\sinh^2\alpha b}. \qquad (60)$$

斯様ニシテ微分係數ノ平均値ハ零トナルモ夫レ自身零トナル爲ニハ(58)ニ於ケル $\cos\beta y$ ノ項ヲ無數取リテ w_2 ヲ次ノ様ニ書ク.

$$w_2=c\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$
$$+(-1)^{\frac{\mu+1}{2}}c\frac{b}{a\sinh^2\alpha b}\Big[(\alpha b\cosh\alpha b+\sinh\alpha b)\cosh\alpha y-\alpha y\sinh\alpha y\sinh\alpha b\Big]\cos\alpha x$$
$$+\sum_\nu C_\nu\Big[\beta a\sinh\beta a\cosh\beta x-\beta x\sinh\beta x\cosh\beta a\Big]\cos\beta y. \qquad (61)$$

此式ノ微分係數ハ $x=a$ ニ對シテ

$$\frac{\partial w_2}{\partial x}=-\frac{2c}{a}+c\frac{\alpha b}{a\sinh^2\alpha b}\Big[(\alpha b\cosh\alpha b+\sinh\alpha b)\cosh\alpha y-\alpha y\sinh\alpha y\sinh\alpha b\Big]$$
$$-\sum_\nu C_\nu\beta\Big[\sinh\beta a\cosh\beta a+\beta a\Big]\cos\beta y.$$

此式ニ於テ下ノ様ニオク.

$$F(y)=\frac{\alpha b}{2\sinh^2\alpha b}\Big[(\alpha b\cosh\alpha b+\sinh\alpha b)\cosh\alpha y-\alpha y\sinh\alpha y\sinh\alpha b\Big]-1. \qquad (62)$$

然ル時ハ

$$\frac{\partial w_2}{\partial x}=\frac{2c}{a}F(y)-\sum_\nu C_\nu\beta\Big[\sinh\beta a\cosh\beta a+\beta a\Big]\cos\beta y. \qquad (63)$$

$F(y)$ ヲ展開シテ

$$F(y)=\sum_\nu A_\nu\cos\beta y$$

トスレバ係數 A_ν ハ次ノ様ニ計算サレル.

$$A_\nu=\frac{2}{b}\int_0^b F(y)\cos\beta y\,dy.$$

(62)ヲ入レテ積分スレバ

$$\int_0^b\cosh\alpha y\cos\beta y\,dy=\frac{(-1)^\nu}{\alpha^2+\beta^2}\alpha\sinh\alpha b,$$

$$\int_0^b\alpha y\sinh\alpha y\cos\beta y\,dy=\frac{(-1)^\nu\alpha^2 b}{\alpha^2+\beta^2}\cosh\alpha b-\frac{(-1)^\nu\alpha(\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\sinh\alpha b,$$

$$\int_0^b\cos\beta y\,dy=0.$$

從テ

$$F(y)=\alpha\sum_\nu(-1)^\nu\Big[(\alpha b\coth\alpha b+1)\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}-\frac{\alpha^2 b}{\alpha^2+\beta^2}\coth\alpha b+\frac{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\Big]\cos\beta y$$

$$=2\alpha^4\sum_\nu\frac{(-1)^\nu}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\cos\beta y. \qquad (64)$$

之ヲ(63)ニ入レル時ハ

$$\frac{\partial w_2}{\partial x}=\frac{4c}{a}\alpha^4\sum_\nu\frac{(-1)^\nu}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\cos\beta y-\sum_\nu C_\nu\beta\Big[\sinh\beta a\cosh\beta a+\beta a\Big]\cos\beta y.$$

夫レ故 C_ν ヲ次ノ様ニ選ベバ $\frac{\partial w_2}{\partial x}=0$ トナル.

$$C_\nu\beta\Big[\sinh\beta a\cosh\beta a+\beta a\Big]=\frac{4c\alpha^4}{a}\frac{(-1)^\nu}{(\alpha^2+\beta^2)^2}. \qquad (65)$$

此係數ヲ用ヰテ w_2 ノ式(61)ヲ書キ直セバ

$$w_2=c\Big[1-\frac{x^2}{a^2}$$
$$+(-1)^{\frac{\mu+1}{2}}\frac{b}{a\sinh^2\alpha b}\Big((\alpha b\cosh\alpha b+\sinh\alpha b)\cosh\alpha y-\alpha y\sinh\alpha y\sinh\alpha b\Big)\cos\alpha x$$
$$+\frac{4\alpha^4}{a}\sum_\nu\frac{(-1)^\nu}{\beta(\alpha^2+\beta^2)^2}\frac{\beta a\sinh\beta a\cosh\beta x-\beta x\sinh\beta x\cosh\beta a}{\sinh\beta a\cosh\beta a+\beta a}\cos\beta y\Big]. \qquad (66)$$

此式ハ周邊ノ條件中 $y=\pm b$ ニ對スル $w_1+w_2=0$ ヲ除ク外他ノ條件ヲ凡テ滿足スルモ殘サレタ此條件ヲ滿足スルタメニハ尙不充分デアル. 併シ簡單ヲ期スル爲ニ此條件ガ二邊 $y=\pm b$ ノ兩端ノ外單ニ其中點 $x=0$ ニ於テノミ滿足サレル爲ニハ此式ニ於ケル μ ヲ勝手ニ只一ツ取レバ宜シクタトヘバ $\mu=1$ トスレバ考ヘツツアル點 $(x=0,\ y=\pm b)$ ニ於テ

$$(w_2)_{x=0,\,y=\pm b}=c\Big[1-\frac{b}{a}\frac{\sinh 2\alpha b+2\alpha b}{\cosh 2\alpha b-1}+8\alpha^4\sum_\nu\frac{\sinh\beta a}{(\alpha^2+\beta^2)^2(\sinh 2\beta a+2\beta a)}\Big]. \qquad (67)$$

但此場合 $\alpha=\frac{\pi}{2a}$, $\beta=\frac{\nu\pi}{b}$.

而シテ同點$(x=0,\ y=\pm b)$ニ於ケルw_1ハ(51)ニヨリテ次ノ如クデアル.

$$(w_1)_{x=0}=\frac{pa^4}{24D}.$$

故ニ$w_1+w_2=0$トナルタメニハ

$$c=\frac{pa^4}{24D}\varphi\left(\frac{b}{a}\right).$$

此式ニ於テ

$$\frac{1}{\varphi\left(\frac{b}{a}\right)}=\frac{b}{a}\,\frac{\sinh\frac{\pi b}{a}+\frac{\pi b}{a}}{\cosh\frac{\pi b}{a}-1}-8\sum_{\nu}\frac{\sinh\frac{\nu\pi a}{b}}{\left(1+\frac{4\nu^2a^2}{b^2}\right)^2\left(\sinh\frac{2\nu\pi a}{b}+\frac{2\nu\pi a}{b}\right)}-1. \tag{68}$$

斯様ニシテcガ定マレバ從テwガ書ケル. 併シ上ノ近似計算ト同ジ様ナ行キ方デ多少異ル計算法ヲ幾ツモ考ヘル事ガ出來ル故此$\varphi\left(\frac{b}{a}\right)$ノ式ハ素ヨリ一定デナイ. 後ニ比較ノ爲別ノ計算法ヲ導ク事トシテ只今ノ$\varphi\left(\frac{b}{a}\right)$ニ對スル$w$ノ式ヲ書ケバ

$$\begin{aligned}w=\frac{pa^4}{24D}\Bigg\{&\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^2\\&+\varphi\left(\frac{b}{a}\right)\Bigg[1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{b}{a\sinh\frac{\pi b}{2a}}\left(\left(\frac{\pi b}{2a}\coth\frac{\pi b}{2a}+1\right)\cosh\frac{\pi y}{2a}-\frac{\pi y}{2a}\sinh\frac{\pi y}{2a}\right)\cos\frac{\pi x}{2a}\\&+8\sum_{\nu}\frac{(-1)^{\nu}}{\left(1+\frac{4\nu^2a^2}{b^2}\right)^2}\,\frac{\sinh\frac{\nu\pi a}{b}\cosh\frac{\nu\pi x}{b}-\frac{x}{a}\sinh\frac{\nu\pi x}{b}\cosh\frac{\nu\pi a}{b}}{\sinh\frac{2\nu\pi a}{b}+\frac{2\nu\pi a}{b}}\cos\frac{\nu\pi y}{b}\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{69}$$

之ヨリ中心ニ於ケル撓ミδヲ求メレバ

$$\begin{aligned}\delta=\frac{pa^4}{24D}\Bigg\{&1-\varphi\left(\frac{b}{a}\right)\Bigg[\frac{b}{a\sinh\frac{\pi b}{2a}}\left(\frac{\pi b}{2a}\coth\frac{\pi b}{2a}+1\right)-1\\&-8\sum_{\nu}\frac{(-1)^{\nu}}{\left(1+\frac{4\nu^2a^2}{b^2}\right)^2}\,\frac{\sinh\frac{\nu\pi a}{b}}{\sinh\frac{2\nu\pi a}{b}+\frac{2\nu\pi a}{b}}\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{70}$$

又長邊ノ中點卽$x=\pm a,\ y=0$ニ於ケル應力σ_{x1}及中心ニ於ケル應力σ_{x0}ヲ求メレバ

$$\sigma_{x1}=\mp\frac{pa^2}{h^2}\left\{2-\varphi\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{1}{2}+\frac{2\pi a}{b}\sum_{\nu}\frac{(-1)^{\nu}\nu}{\left(1+\frac{4\nu^2a^2}{b^2}\right)^2}\,\frac{\cosh\frac{2\nu\pi a}{b}+1}{\sinh\frac{2\nu\pi a}{b}+\frac{2\nu\pi a}{b}}\right]\right\}, \tag{71}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{x0}=\pm\frac{pa^2}{h^2}\Bigg\{&1+\varphi\left(\frac{b}{a}\right)\Bigg[\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{16}\,\frac{b}{a\sinh\frac{\pi b}{2a}}\left(\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{\pi b}{2a}\coth\frac{\pi b}{2a}+1+\frac{1}{m}\right)\\&-2\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{\pi^2a^2}{b^2}\sum_{\nu}\frac{(-1)^{\nu}\nu^2}{\left(1+\frac{4\nu^2a^2}{b^2}\right)^2}\,\frac{\sinh\frac{\nu\pi a}{b}}{\sinh\frac{2\nu\pi a}{b}+\frac{2\nu\pi a}{b}}\\&+4\pi\frac{a}{b}\sum_{\nu}\frac{(-1)^{\nu}\nu}{\left(1+\frac{4\nu^2a^2}{b^2}\right)^2}\,\frac{\cosh\frac{\nu\pi a}{b}}{\sinh\frac{2\nu\pi a}{b}+\frac{2\nu\pi a}{b}}\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{72}$$

實用上ノ便利ノ爲ニ$\varphi\left(\frac{b}{a}\right)$及$\delta,\ \sigma_{x1},\ \sigma_{x0}$ノ式ニ於ケル係數ヲ計算スレバ次ノ表(A)ノ樣ニナル. 尙表ノ末行ニ兩應力ノ絕對値ノ比ヲ示ス. 表ノ數字ヲ用キテ曲線ヲ作リオケバ更ニ便デアラウ.

(A) $\delta=\frac{pa^4}{D}\times f\left(\frac{b}{a}\right),\quad \sigma_{x0}=\pm\frac{pa^2}{h^2}\times g_0\left(\frac{b}{a}\right),\quad \sigma_{x1}=\mp\frac{pa^2}{h^2}\times g_1\left(\frac{b}{a}\right).$

$\frac{b}{a}$	1	1.25	1.5	2	3	4
$\varphi\left(\frac{b}{a}\right)$	2.6781	2.2053	1.8415	1.3755	0.9161	0.6871
$f\left(\frac{b}{a}\right)$	0.02022	0.02914	0.03514	0.04053	0.04188	0.04171
$g_0\left(\frac{b}{a}\right)$	0.550	0.754	0.883	0.988	1.006	1.001
$g_1\left(\frac{b}{a}\right)$	1.231	1.592	1.816	1.989	2.010	2.001
$\frac{\lvert\sigma_{x1}\rvert}{\lvert\sigma_{x0}\rvert}$	2.24	2.11	2.06	2.01	2.00	2.00

上ノ計算ニ於テ $y=\pm b$ ニ對スル $w=w_1+w_2$ ノ値ハ完全ニ零トナラズシテ單ニ邊ノ中點 $x=0$ 及兩端 $x=\pm a$ ニ於テノミ零トナル樣ニシタ. 夫レ故之等ノ邊ニ沿ヒテ w ノ値ヲ計算シテ何程ノ差ガ生ズルカヲ知ル事ハ必要デアル. 此目的デ w ノ式(69)ニ $y=\pm b$ トオキ $\frac{b}{a}=1$ 及 $\frac{b}{a}=2$ ノ二ツノ場合ニ就テ w ノ値ヲ計算シタ處其最大値ハ凡ソ δ ノ 1% 强ニ當ル事ヲ知ツタ. 問題ノ邊ノ一部ニ於ケル此程度ノ差ハ所要ノ答ニ影響スル所恐ラク僅少ナラントト想像サレル. 併シ此想像ヲ幾分ニテモ確メル爲次ニ邊 $y=\pm b$ ニ對スル條件ヲ少シ變ヘテ別ノ計算ヲ試ミヤウ.

元來周邊上ノ條件ヲ完全ニ滿足セザル時取ルベキ次善ノ處置ニ關シテ一層確ナ根據ヲ求メル事モ結構デアルガナルベク簡單ニ前ノ計算ヲ一部修正シテ其結果數値ニ如何ナル影響ヲ生ズルヤヲ見ル事ニスル. 其結果若シ二ツノ計算ノ結果ガ大差ナケレバ只今求メル板ノ中心ニ於ケル撓ミ及長邊中點ノ應力ニ關スル限リ之等二組ノ結果ハ互ニ他ヲ支持シテ其何レヲ用キルモ差支ナク且恐ラク周邊ニ關スル吾々ノ判斷ニ大ナル誤ナキモノト見テ宜シイデアラウ. 依テ別ノ假定トシテ w_1+w_2 ノ平均値ヲ零トシヤウ. 之ヲ式ニ示セバ

$$\int_0^a (w_1+w_2)_{y=\pm b}\,dx=0.$$

此條件ニ從テ c ヲ定メレバ

$$c=\frac{pa^4}{24D}\varphi\left(\frac{b}{a}\right),$$

$$\frac{1}{\varphi\left(\frac{b}{a}\right)}=\frac{15}{4\pi}\frac{b}{a}\frac{\sinh\frac{\pi b}{a}+\frac{\pi b}{a}}{\cosh\frac{\pi b}{a}-1}-\frac{5}{4}$$

$$-\frac{15}{2\pi^2}\frac{b^2}{a^2}\sum_{\nu}\frac{1}{\nu^2\left(1+\frac{4\nu^2a^2}{b^2}\right)^2}\frac{\sinh\frac{2\nu\pi a}{b}-\frac{2\nu\pi a}{b}}{\sinh\frac{2\nu\pi a}{b}+\frac{2\nu\pi a}{b}}. \tag{73}$$

此式ヲ用キテ計算シタ $\varphi\left(\frac{b}{a}\right)$ 及其他ノ數値ハ下ノ表(B)ニ示ス樣ニナル.

(B)　$\delta=\frac{pa^4}{D}\times f\left(\frac{b}{a}\right),\quad \sigma_{x0}=\pm\frac{pa^2}{h^2}\times g_0\left(\frac{b}{a}\right),\quad \sigma_{x1}=\mp\frac{pa^2}{h^2}\times g_1\left(\frac{b}{a}\right).$

$\frac{b}{a}$	1	1.25	1.5	2	3	4
$\varphi\left(\frac{b}{a}\right)$	2.6611	2.1853	1.8235	1.3619	0.9071	0.6803
$f\left(\frac{b}{a}\right)$	0.02036	0.02925	0.03521	0.04055	0.04188	0.04171
$g_0\left(\frac{b}{a}\right)$	0.553	0.756	0.884	0.988	1.006	1.001
$g_1\left(\frac{b}{a}\right)$	1.236	1.596	1.818	1.989	2.010	2.001
$\frac{\lvert\sigma_{x1}\rvert}{\lvert\sigma_{x0}\rvert}$	2.24	2.11	2.06	2.01	2.00	2.00

此表ノ數字ヲ前ノ表ノ數字ニ比ベレバ $\varphi\left(\frac{b}{a}\right)$ ニ於テ最大 1% 小デアリ $f\left(\frac{b}{a}\right)$ ハ前ノモノヨリ最大0.7%大デアル. 又 $g_0\left(\frac{b}{a}\right)$, $g_1\left(\frac{b}{a}\right)$ 共ニ前ノ者ヨリ最大0.5%大デアル. 要スルニ兩者何レノ假定ニヨルモ大差ノナイ事ガ判ル.

166. 變形勢力ヲ用キル近似計算.

微分方程式ノ解ヲ求メル代リニ場合ニヨリテハ變形勢力ニ依ル近似計算法ヲ用キル事ガ出來ル. 而シテ近似計算法トシテモ周邊ノ條件ニ適スル w ノ式ヲ假定シテ其中ノ只一ツノ不定係數ヲ仕事ノ式カラ定メルノガ最モ簡單デアル. 併シ之ハ二ツ以上ノ係數ヲ用キル方法ニ比ベテ精度ノ及バナイノハ已ムヲ得ヌトコロデアル.

先ヅ變形ノ仕事ヲ計算スルタメニ σ_z, τ_x, τ_y ノ項ヲ省略シテ

$$dA=\frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2-\frac{2}{m}\sigma_x\sigma_y\right)dx\,dy\,dz+\frac{1}{2G}\tau_z^2\,dx\,dy\,dz.$$

此式ニ於テ

$$\sigma_x=-\frac{mE}{m^2-1}z\left(m\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right),\quad \sigma_y=-\frac{mE}{m^2-1}z\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right),$$

及

$$\tau_z = -2Gz\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

之等ノ式ヲ入レテ積分ヲ行ヘバ矩形板ノ變形ノ仕事ハ

$$A = \frac{m^2 E h^3}{24(m^2-1)}\int_{-b}^{+b}\int_{-a}^{+a}\left\{\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]^2 - \frac{2(m-1)}{m}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\}dxdy. \tag{74}$$

次ニ外力ノ仕事ハ變形ノ仕事ニ等シイ故矩形板ノ全面ニ作用スル壓力ノ密度 p ヲ不變トスレバ

$$A = \frac{p}{2}\int_{-b}^{+b}\int_{-a}^{+a} w\,dx\,dy. \tag{75}$$

今 X 及 Y ヲ以テ夫レ夫レ x 及 y ノミノ或ル函數ヲ表シ $w = XY$ トスレバ(74)ノ中

$$\int_{-b}^{+b}\int_{-a}^{+a}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dx\,dy = \int_{-b}^{+b}\int_{-a}^{+a} XY\frac{d^2X}{dx^2}\frac{d^2Y}{dy^2}dx\,dy.$$

然ルニ X ハ積分ノ上下兩限ニ於テ消滅スル故此式ノ一部卽 X ヲ含ム項ノミヲ積分スレバ

$$\int_{-a}^{+a} X\frac{d^2X}{dx^2}dx = \left|X\frac{dX}{dx}\right|_{-a}^{+a} - \int_{-a}^{+a}\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 dx = -\int_{-a}^{+a}\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 dx.$$

Y ニ就テモ同樣ノ事ガ成立ツ故

$$\int_{-b}^{+b}\int_{-a}^{+a}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dx\,dy = \int_{-b}^{+b}\int_{-a}^{+a}\left(\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy}\right)^2 dx\,dy = \int_{-b}^{+b}\int_{-a}^{+a}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 dx\,dy.$$

從テ $\dfrac{m^2}{m^2-1}E\dfrac{h^3}{12} = D$ ト書ケバ(74)ハ次ノ樣ニナル.

$$A = \frac{D}{2}\int_{-b}^{+b}\int_{-a}^{+a}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 dx\,dy. \tag{76}$$

(75)式ノ左邊ノ代リニ此式ヲオケバ w ニ對スル等式ヲウル.[1]

斯ル近似計算法ノ一例トシテ周邊ニ於テ或ル有樣ニ支ヘラレタ矩形板ノ近似計算ニ就テ述ベヤウ. 今板ノ周邊ニ於ケル條件ヲ滿足スル撓ミノ式トシテ下ノ形ヲトル.

1) $w = XY$ トオカズトモ周邊ニ於テ固定サレタ板ニ對シテハ一般ニ(76)ヲ用キル事ガ出來ル. Handbuch d. Physik, VI, 90 頁參照.

$$w = c(a^2-x^2)(f^2-x^2)(b^2-y^2)(g^2-y^2). \tag{77}$$

但 c, f, g ハ x 及 y ヲ含マヌ常數デアル.

此式ハ $x = \pm a$ 並ニ $y = \pm b$ ニ對シテ消滅シ又一般ニ

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -2cx(a^2+f^2-2x^2)(b^2-y^2)(g^2-y^2),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -2c(a^2+f^2-6x^2)(b^2-y^2)(g^2-y^2)$$

トナリ $\dfrac{\partial w}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ ニ對シテモ類似ノ式ガ書ケル故 f, g ノ値ヲ適當ニ選ベバ周邊ノ條件ガ滿足サレル.

若シ周邊ガ完全ニ固定サレテ $x = \pm a$ 及 $y = \pm b$ ニ對シテ夫レ夫レ $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0$ 及 $\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0$ ナラバ次ノ樣ニ選ブ.

$$f^2 = a^2 \quad 及 \quad g^2 = b^2.$$

又若シ周邊ガ自由ニ支ヘラレテ曲ゲ應力ガ零ナラバ周邊上ノ各點ニ於テ $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ 及 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ トナルタメニ

$$f^2 = 5a^2 \quad 及 \quad g^2 = 5b^2.$$

若シ周邊ノ狀態ガ上ノ二ツノ場合以外ニアルナラバ夫レニ應ジテ f 及 g ノ値ガ定マル. 下ノ計算ニ於テハ周邊ガ凡テ同ジ樣ニ支ヘラレルモノト假定シテ

$$\frac{f^2}{a^2} = \frac{g^2}{b^2} = k \tag{78}$$

ト置カウ. k ハ周邊ガ固定サレル時其數値1トナリ又自由ニ支ヘラレル時5トナル.

A ノ式(76)ニ(77)ノ w ヲ導イテ積分ヲ行ヘバ結局

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{64}{7\times 15^2}Da^5b^5c^2\left[\alpha_1(a^4+b^4)+\alpha_2 a^2 b^2\right], \\ \text{但}\quad \alpha_1 &= (21-10k+5k^2)(1-6k+21k^2), \\ \alpha_2 &= \frac{1}{7}(11-14k+35k^2)^2. \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

又(75)式ノ右邊ハ

$$\frac{p}{2}\int_{-b}^{+b}\int_{-a}^{+a} w\,dx\,dy = \frac{8}{15^2}(5k-1)^2 c a^5 b^5 p.$$

夫レ故此式ヲ(79)ノ A ト等シクオイテ c ヲ求メレバ

$$c = \frac{7(5k-1)^2}{8D}\,\frac{p}{\alpha_1(a^4+b^4)+\alpha_2 a^2 b^2}. \tag{80}$$

從テ之ヨリ w ノ式ガ定マリ應力ノ計算ヲナス事ガ出來ル. 特ニ矩形板中心ノ撓ミハ w ノ式ニ於テ $x=y=0$ トオイテ

$$\delta = ck^2a^4b^4 = \frac{7}{8}\,\frac{k^2(5k-1)^2}{D}\,\frac{pa^4b^4}{\alpha_1(a^4+b^4)+\alpha_2 a^2b^2}. \tag{81}$$

若シ

$$n = \frac{b}{a}, \quad \phi = \frac{21k^2(5k-1)^2}{2\alpha_1} \tag{82}$$

トスレバ $D = \dfrac{m^2}{m^2-1}E\dfrac{h^3}{12}$ ナル故

$$\delta = \frac{m^2-1}{m^2}\,\frac{\phi n^4}{n^4+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}n^2+1}\,\frac{pa^4}{Eh^3}. \tag{83}$$

此式中ノ係數 ϕ 及 $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$ ノ値ハ次ノ如クデアル.

k	ϕ	$\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$
1	0.656	0.57
2	2.22	1.41
3	2.99	1.86
4	3.17	1.99
5	3.17	2.00

次ニ應力ニ對シテハ板ノ中心卽 $x=0,\ y=0$ 及一邊ノ中點 $x=a,\ y=0$ ニ於ケル σ_x ヲ求メヤウ. $x=0,\ y=0$ ノ時ハ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -2ck(1+k)a^2b^4, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -2ck(1+k)a^4b^2.$$

又 $x=a,\ y=0$ ノ時ハ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2ck(5-k)a^2b^4, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

從テ $z=\pm\dfrac{h}{2}$ トオケバ中心及周邊中點ニ於ケル應力 σ_{x0} 及 σ_{x1} ハ夫レ夫レ次ノ樣ニナル.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{x0} &= \pm\frac{mE}{m^2-1}ck(1+k)ha^2b^2(a^2+mb^2),\\ \sigma_{x1} &= \mp\frac{m^2E}{m^2-1}ck(5-k)ha^2b^4.\end{aligned}\right\} \tag{84}$$

σ_y ニ對シテモ同樣ノ計算ガナサレルケレドモ若シ $b>a$ ナラバ之等兩式ノ方ガ明カニ大デアル. 偖 c ノ値(80)ヲ導ケバ

$$\sigma_{x0} = \pm\frac{21}{2m}k(1+k)(5k-1)^2\frac{p}{h^2}\,\frac{a^2b^2(a^2+mb^2)}{\alpha_1(a^4+b^4)+\alpha_2a^2b^2},$$

$$\sigma_{x1} = \mp\frac{21}{2}k(5-k)(5k-1)^2\frac{p}{h^2}\,\frac{a^2b^4}{\alpha_1(a^4+b^4)+\alpha_2a^2b^2}.$$

又ハ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{x0} &= \pm\frac{1+k}{k}\,\frac{\phi n^2(mn^2+1)}{m\left(n^4+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}n^2+1\right)}\,\frac{pa^2}{h^2},\\ \sigma_{x1} &= \mp\frac{5-k}{k}\,\frac{\phi n^4}{n^4+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}n^2+1}\,\frac{pa^2}{h^2}.\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

而シテ兩應力ノ比ハ

$$\frac{\sigma_{x1}}{\sigma_{x0}} = -\frac{5-k}{1+k}\,\frac{mn^2}{mn^2+1}. \tag{86}$$

最初ニ述ベタ樣ニ板ノ周邊ガ完全ニ固定サレル時ハ $k=1$ トナリ又自由ニ支ヘラレル時ハ $k=5$ トナル. 之等ノ場合ニ對スル撓ミ及應力ヲ求メレバ次ノ樣デアル.

完全ニ固定サレタ板.

$$\delta = \frac{m^2-1}{m^2}\,\frac{0.656\,n^4}{n^4+0.57\,n^2+1}\,\frac{pa^4}{Eh^3}, \tag{87}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{x0} &= \pm\frac{1.31\,n^2(mn^2+1)}{m(n^4+0.57\,n^2+1)}\,\frac{pa^2}{h^2},\\ \sigma_{x1} &= \mp\frac{2.62\,n^4}{n^4+0.57\,n^2+1}\,\frac{pa^2}{h^2}.\end{aligned}\right\} \tag{88}$$

自由ニ支ヘラレタ板.

$$\delta=\frac{m^2-1}{m^2}\,\frac{3.17\,n^4}{n^4+2n^2+1}\,\frac{pa^4}{Eh^3},\tag{89}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{x0}&=\pm\frac{3.80\,n^2(mn^2+1)}{m(n^4+2n^2+1)}\,\frac{pa^2}{h^2},\\ \sigma_{x1}&=0.\end{aligned}\right\}\tag{90}$$

之等ノ結果ハ簡單ナ w ノ式ヲ假定シテ導イタ者デアルカラ精度ノ低イ近似値ニ相違ナク從テ充分滿足シ得ベキモノデハナイ. 卽 n ニ種々ノ値ヲ入レテ計算スレバ判ル樣ニ本節ノ δ ハ前ニ見出シタ比較的正確ナル値(164節及165節)ニ比ベテ大デアリ殊ニ n ノ大ナル場合ニ於ケル差ガ著シイ. 又應力ノ値ハ尙不正確デアツテ試ミニ固定ノ場合ニ於ケル應力ノ比ニ就テ見ルニ(86)ノ與ヘル比ハ絕對値ニ於テ常ニ 2 以下デアル. 併シ前ニ示シタ表ノ數値ハ 2 又ハ 2 以上デアル.

167. 平面板ノ實驗.

平面板ノ曲ゲ試驗ノ例トシテ先ヅ C. Bach[1] 及 J. Montgomerie[2] ノ實驗ノ結果ヲ吟味シヤウ.

Bach ノ實驗ニ於ケル板ノ寸法ハ次ノ表ノ最初ノ三行ニ示ス樣デアツテ之等ノ板ヲ第四行ニ記シタ壓力デ曲ゲタ時ニ生ズル撓ミ及應力等ノ實驗値ハ次ノ頁ニ亘ル表ノ各行ノ上段ニ肉太ノ字ニテ示ス如クデアル.

板ノ番號	I	II	III	IV
$2a$ *cm*	80	80	40	40
$2b$ 〃	80	80	80	80
h 〃	0.84	1.68	0.86	1.65
p *kg/cm²*	0.6	2.4	1.6	6.0

1) Zeitschrift des V. D. I., Bd. 52, 1908, 1781 頁.
2) Transactions of the Institution of Naval Architects, LIX, 1917, 33 頁; LXI, 1919, 281 頁. 又ハ Engineering, CIV, 1917, 35 頁; CVII, 1919, 786 頁.

		I	II	III	IV
δ *cm*	實驗	0.2735	0.1545	0.0725	0.0475
	計算	0.2725	0.1362	0.0848	0.0450
$\lvert\sigma_{x0}\rvert$ *kg/cm²*	實驗[1]	812	865	940	975
	計算	748	748	855	871
$\lvert\sigma_{x1}\rvert$ *kg/cm²*	實驗[1]	1891	1720	332	1501
	計算	1675	1675	1721	1753
$\dfrac{\lvert\sigma_{x1}\rvert}{\lvert\sigma_{x0}\rvert}$	實驗	2.33	1.99	0.35	1.54
	計算	2.24	2.24	2.01	2.01

此實驗ニ於テハ鋼板ノ周邊ヲ鑄鐵製ノ臺ニ鋲デ取付ケ壓力ノ作用スル時板ノ各所ニ起ル撓ミヲ測定シタノデアルガ其結果ヲ見ルニ必シモ正確ニ固定條件ニ相當シナイ事ガ判ル. 併シ簡單ノタメニ固定サレタモノト見テ 165 節ノ表 (*A*) ニ示ス數ヲ用ヰテ計算スレバ上ノ表ニ實驗値ト對照シテ記入サレタ樣ナ數値ガ得ラレル.

次ニ前ノ例ニ做ヒテ Montgomerie ノ實驗ノ結果ヲ示セバ次ノ表ノ樣デアル.

板ノ番號		*A*	*B*	*C*	*D*
$2a$ *cm*		61	61	61	61
$2b$ *cm*		122	122	122	122
h *cm*		0.62	0.90	1.22	1.87
p *kg/cm²*		0.70	1.41	2.11	2.81
δ *cm*	實驗	0.517	0.414	0.228	0.104
	計算	0.536	0.353	0.212	0.078
$\lvert\sigma_{x0}\rvert$ *kg/cm²*	實驗	1764	1575	1433	913
	計算	1674	1600	1303	739
$\lvert\sigma_{x1}\rvert$ *kg/cm²*	實驗	1921	1559	1291	803
	計算	3369	3220	2623	1487
$\dfrac{\lvert\sigma_{x1}\rvert}{\lvert\sigma_{x0}\rvert}$	實驗	1.09	0.99	0.90	0.88
	計算	2.01	2.01	2.01	2.01

此實驗デハ鋼板ノ周邊ヲ鑄鐵製ノ枠ニ挿ミ捻子ヲ以テ締付ケタ. 周圍ハ完全ニ固定サレタモノトハ言ヘナイノデ實際壓力ノ作用ノタメニ板ガ少シク傾斜ヲ生ジテ居ルガ併シ完全ニ近イト考ヘテ 165 節ノ表 (*A*)

1) 之等ノ實驗値ハ Bach ノ報告ニ記載セル結果ヨリ $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 及 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ ノ値ヲ取リ $E=2.1\times10^6\,kg/cm^2$, $m=\dfrac{10}{3}$ トシテ計算シタ者デアル.

ヲ用キテ計算スレバ其結果上ノ表ニ示ス様デアル.[1]

之等ノ實例ヲ見ルニ多少ノ相違ハアルガ撓ミノ計算ハ大體ニ於テ實測ニ近イ. 次ニ應力ニ就テハ $\frac{|\sigma_{x1}|}{|\sigma_{x0}|}$ ノ比ガ兩實驗ニ於テ著シイ相違ヲ示シテ居ル. 卽前ノ實驗デハ例外ト考ヘル可キ一ツノ場合ヲ除ケバ皆1.5以上デアルノニ後ノ方デハ1ヨリ少シ大ナル場合一ツアル計リデ其他ハ皆1以下デアル. 此差異ハ周邊支持ノ條件ニ相違ノアルタメデ之ニ依テ見ルモ如何ニ周邊ノ條件ニ注意ヲ拂フ可キカガ判ル. 夫レ故實驗ニ際シテハ周邊ノ曲ゲ狀態ヲ精密ニ知ル事ガ必要デ又計算ニ於テハ周邊ノ條件ガナルベク實際ニ適合スル樣ニ勉メナケレバナラヌ. 例ヘバMontgomerie ノ實驗ニ於ケル樣ニ $|\sigma_{x1}|$ ノ實驗値甚ダ小ナルハ計算ノ假定ト實際トガ違フ適例デアル.

妹澤克惟博士[2]ハ二枚ノ鋼板ノ枠ニ挿ンダセルロイド板ニ就テ實驗シタ. セルロイドハ鋼ニ比ベテ遙ニ小ナル彈性係數($E=21900\,kg/cm^2$)ヲ有スル爲枠ヲ無理セズニ低イ壓力ニテ板ヲ曲ゲル事ガ出來ル. 實驗ノ結果ヲ見ルニ二ツノ應力比ハ2以上デアル.

此節ヲ結ブニ當リテ尙一般ニ板ノ問題デ考ヘルベキ點ヲ述ベテ置カウ. 夫レハ前ノ計算ニ於テ板ノ中央面ガ殆ンド伸縮シナイト假定シタ事柄デアツテ此假定ハ大ナル撓ミヲ生ズル薄イ板ノ場合ニハ可ナリ著シイ誤差ヲ生ズル故之ニ對シテハ中央面ノ伸縮ヲ考ヘニ入レル必要アル事恰モ梁ノ問題ニ於ケルト同樣デアル.

168. 板ノ平面內ニ力ガ作用スル場合ノ基礎方程式.

之迄ノ計算ニ於テハ板ノ中央平面ニ沿ヒテ作用スル外力ナシト見做シ又板ノ曲リモ烈シカラズト假定シタ. 今板ノ中央平面ニ沿フ外力及之ニ伴フ應力ヲ入レテ考ヘレバ基礎ノ微分方程式ヲ改造セネバナラヌ.

1) $E=2.1\times10^6\,kg/cm^2$, $m=\frac{10}{3}$ ト假定シテ計算シタ.

2) 前出, 537頁脚註 1).

夫レデ前トハ別ノ方法ニヨリテ成ルベク一般ノ形ノ方程式ヲ導ク爲板ノ厚サ $h=2e$ ノ間一樣ニ配布サレタ應力成分ヲ σ_{x0}, σ_{y0}, τ_{z0} トシ之等ニ夫レ夫レ h ヲ乘ジタ積ヲ次ノ樣ニ表ス.

$$T_1=\sigma_{x0}h,\qquad T_2=\sigma_{y0}h,\qquad S=\tau_{z0}h. \tag{91}$$

斯ル力ノ作用スル場合ニハ板ノ曲リガ大ナラズトモ變形成分ノ計算ヲ精密ニシテ卽 XV 章(25)式ヲ用キル事ガ必要デアル. 此事ハ前ニ眞直ナ梁ノ軸方向ノ應力ヲ計算スル時ニ述ベタトコロト同樣デアル, 依テ w ノ微分係數ノ二次項ヲ含ム ε 及 γ ノ式ヲ記セバ次ノ樣デアル.

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{x0}&=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\\
\varepsilon_{y0}&=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,\\
\gamma_{z0}&=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{92}$$

而シテ $\sigma_{z0}=0$ ナル故

$$\varepsilon_{x0}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{x0}-\frac{\sigma_{y0}}{m}\right),\qquad \varepsilon_{y0}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{y0}-\frac{\sigma_{x0}}{m}\right).$$

從テ

$$\sigma_{x0}-\frac{\sigma_{y0}}{m}=E\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right],\quad \sigma_{y0}-\frac{\sigma_{x0}}{m}=E\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right], \tag{93}$$

偖容積ノ力ヲ省略スレバ

$$\frac{\partial\sigma_{x0}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{z0}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\tau_{z0}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{y0}}{\partial y}=0.$$

故ニ應力成分ハ x, y ノ或ル函數 F ヨリ微分ニヨリテ計算サレル. 卽

$$\sigma_{x0}=\frac{\partial^2F}{\partial y^2},\quad \sigma_{y0}=\frac{\partial^2F}{\partial x^2},\quad \tau_{z0}=-\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial y}. \tag{94}$$

之ヲ(93)ニ入レル時ハ

$$\frac{\partial^2F}{\partial y^2}-\frac{1}{m}\frac{\partial^2F}{\partial x^2}=E\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right],$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}-\frac{1}{m}\frac{\partial^2F}{\partial y^2}=E\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right].$$

之等ノ式ヲ y 及 x ニ對シテ夫レ夫レ二度微分シテ加ヘレバ

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}-\frac{2}{m}\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}=E\Big[\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Big(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\Big)$$
$$+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}+2\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big)^2+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial w}{\partial x}\Big].$$

$\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\tau_{z0}}{G}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y}$ ナル故此式ノ右邊括弧内ノ第一項ハ次ノ樣ニナル.

$$-\frac{2(m+1)}{mE}\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}-\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big)^2.$$

夫レ故 F ノ微分方程式ハ次ノ樣ニ書ケル.

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=E\Big[\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big]. \tag{95}$$

(92)ノ變形成分ハ $z=0$ ノ場所ニ於ケル値ヲ與ヘル. $z=0$ ナラザル他ノ場所ニ對シテハ前ニ導イタ(1)ノ u, v ニヨリテ與ヘラレル成分ヲ組合セレバ宜シイ. 依テ之等ヲ $\varepsilon_{xb}, \varepsilon_{yb}, \tau_{zb}$ トスレバ

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\varepsilon_{x0}+\varepsilon_{xb}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\\ \varepsilon_y&=\varepsilon_{y0}+\varepsilon_{yb}=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\\ \gamma_z&=\gamma_{z0}+\gamma_{zb}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{96}$$

次ニ各應力成分ヲ分ケテ $z=0$ ノ場所ニ於ケル應力ト曲ゲニ依ル應力トノ二ツトスレバ下ノ各式ノ第一項ハ z ヲ含マザルモ第二項ハ(3)及(4)ヨリ明カナル樣ニ何レモ皆 z ヲ含ム.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\sigma_{x0}+\sigma_{xb},\\ \sigma_y&=\sigma_{y0}+\sigma_{yb},\\ \tau_z&=\tau_{z0}+\tau_{zb}.\end{aligned}\right\} \tag{97}$$

倍上ノ樣ナ變形及應力成分ヲ以テ平衡狀態ニアル板ニ於テ單ニ w ノミヲ假想的ニ極少シ變ヘヤウ. 板ノ曲ゲニ關スル周邊ノ條件ハ前ニ之

ヲ述ベタカラ簡單ノ爲玆ニハ新シク考ヘナイ事トシ從テ此假想變位ノ際 w 及其微分係數ハ周邊ニ於テ變化シナイト見做ス. 然ル時ハ支點ニ變位(迴轉ヲ含ム)ナキ爲支力(モーメントヲ含ム)ハ仕事ヲシナイ. 又集中荷重ガアツテモ其作用スル點ノ變位ハ變化シナイ樣ニスル. w ノ變分ハ勝手ニ行ヘル故斯樣ナ制限ヲ設ケル事モ隨意デアル. 尙板ノ容積ニ作用スル力ハ省略サレテ居ルト見做ス. 斯ル假定ノ下ニ假想變位ノ原理ヲ應用スレバ外力ノ仕事ハ $\iint p\,\delta w\,dx\,dy$ ニ等シイ. 此積分ハ次ノ計算ニ於ケル他ノ積分ト同樣ニ假想變位ヲ起ス板ノ凡テノ部分ニ取ラレル.

次ニ變形勢力ノ假想變化ヲ行ヘバ夫レハ次ノ樣ニ表サレル.

$$\delta A=\int(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\tau_z\delta\gamma_z)\,dv,\qquad dv=dx\,dy\,dz.$$

此式ニ於テ $\varepsilon_x, \cdots, \sigma_x, \cdots$ ノ處ニ(96), (97)ヨリ代入スレバ $\int_{-e}^{+e} z\,dz=0$ ナル故 $\sigma_{xb}\delta\varepsilon_{x0}, \cdots$ 及 $\sigma_{x0}\delta\varepsilon_{xb}, \cdots$ ノ積分ハ消エテ結局次ノ樣ニ書ケル.

$$\delta A=\int(\sigma_{x0}\delta\varepsilon_{x0}+\sigma_{y0}\delta\varepsilon_{y0}+\tau_{z0}\delta\gamma_{z0})\,dv+\int(\sigma_{xb}\delta\varepsilon_{xb}+\sigma_{yb}\delta\varepsilon_{yb}+\tau_{zb}\delta\gamma_{zb})\,dv.$$

上ニ假定シタ樣ニ只今ノ計算デハ單ニ w ノミヲ變化シタ故 $\delta\varepsilon_{x0}, \cdots$ 中ニ於ケル u, v ノ項ハ自然之ヲ不變トシタ. 此假定ハ必シモ必要デナク周邊ニ於テサヘ不變ナラバ前ニ述ベタ外力ノ仕事ニ關スル假定ガ成立スル故其他ノ場所ニ於テハ變ジテモ差支ハナイ. 併シ今ノ樣ニ考ヘタ方ガ少シデモ計算ヲ簡單ニスル事ハ勿論デアル. 此意味ニ於テ(91), (92)ヲ第一ノ積分ニ導イテ之ヲ書キ直シ又第二ノ積分ハ前ノ曲ゲ勢力ノ式(74)同樣ノ式ノ假想變化ニ等シイ故此積分モ之ヲ w ノ形ニ書キ直セバ

$$\delta A=\iint\Big(\frac{T_1}{2}\delta\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2+\frac{T_2}{2}\delta\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2+S\delta\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\Big)\Big]\,dx\,dy$$
$$+\frac{D}{2}\delta\iint\Big\{\Big[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big]^2-\frac{2(m-1)}{m}\Big[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big)^2\Big]\Big\}\,dx\,dy,$$

但前ノ樣ニ

$$D=\frac{m^2}{m^2-1}E\frac{h^3}{12}.$$

卽

$$\delta A=\iint\Big[T_1\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial x}+T_2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \delta w}{\partial y}+S\Big(\frac{\partial \delta w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial y}\Big)\Big]dxdy$$

$$+D\iint\Big[\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)\Big(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}\Big)$$

$$-\frac{m-1}{m}\Big(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\partial y}\Big)\Big]dxdy. \qquad (98)$$

此右邊ノ計算ヲ行ヒテ前ニ假定シタ様ニ周邊ニ於テハ w 及其微分係數ヲ不變ト假定スレバ

$$\delta A=D\iint \Delta\Delta w\,\delta w\,dxdy$$

$$-\iint\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(T_1\frac{\partial w}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(T_2\frac{\partial w}{\partial y}\Big)+\frac{\partial}{\partial x}\Big(S\frac{\partial w}{\partial y}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(S\frac{\partial w}{\partial x}\Big)\Big]\delta w\,dxdy, \qquad (99)$$

但　$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}.$

而シテ假想變位ノ原理ニ從ヘバ

$$\delta A-\iint p\,\delta w\,dxdy=0. \qquad (100)$$

此處ニ(99)ヲ代入シテ δw ガ隨意ノ値ヲ取ル事ヲ考ヘレバ次ノ方程式ガ成立セネバナラヌ.

$$D\Delta\Delta w=\frac{\partial}{\partial x}\Big(T_1\frac{\partial w}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(T_2\frac{\partial w}{\partial y}\Big)+\frac{\partial}{\partial x}\Big(S\frac{\partial w}{\partial y}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(S\frac{\partial w}{\partial x}\Big)+p.$$

容積ニ作用スル力ナキ時ハ平衡ノ方程式ハ

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_z}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial \tau_z}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0.$$

之等ノ式ヲ $z=-e$ ヨリ $z=+e$ ニ至ル間ニ積分スレバ $\sigma_{zb},\cdots$ ノ項ハ消エテ

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial S}{\partial x}+\frac{\partial T_2}{\partial y}=0$$

從テ上ノ式ハ次ノ様ニナル.

$$D\Delta\Delta w=T_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+T_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2S\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+p. \qquad (101)$$

又ハ(94)ニヨリテ $T_1=h\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2},\cdots$ ナル故

$$D\Delta\Delta w=h\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big)+p. \qquad (102)$$

板ノ中央面ニ沿ヒテ作用スル應力ガナイ場合ニハ(101)又ハ(102)ノ右邊ニ於ケル p 以外ノ項ハ凡テ消エル故之ハ前ニ導イタ撓ミノ方程式(6)ニ一致スル事勿論デアル.

169.　薄イ板ノ曲ゲ.

前節ニ導イタ最後ノ微分方程式ニハ板ノ曲ゲ剛性 D ヲ含ム項ト中央平面ニ平行ナル力 T_1, T_2, S ヲ含ム項トガ存在スル. 撓ミガ板ノ厚サニ比ベテ小デ且特ニ之等ノ力ヲ考ヘル必要ノナイ場合ニハ普通曲ゲ剛性ノミヲ考ヘテ多クノ問題ヲ取扱フ. 之ニ對シテ板ガ非常ニ薄ケレバ曲ゲ剛性ハ微力トナル故 D ヲ含ム項ハ之ヲ省略シテ差支ガナイ. 併シ曲ゲニ對スル抵抗ト共ニ板ノ中央平面ニ平行ナル力ガ存在スル場合ノ例トシテ x 軸ノ方向ニ沿ヒテ一定ノ長サヲ有スルモ y 軸ノ方向ニ於ケル長サガ不定ノ薄イ板ヲ考ヘヤウ. 此目的デ撓ミ及應力ヲ y ニ無關係ト見做セバ先ヅ(94),(95)ヨリ

$$\Delta\Delta F=\frac{d^2}{dx^2}(\sigma_{x0}+\sigma_{y0})=0. \qquad (103)$$

又 y 軸ノ方向ニ於ケル板ノ寸法大ナル爲 $\varepsilon_{y0}=0$ ト見做セバ

$$\sigma_{y0}=\frac{\sigma_{x0}}{m}.$$

故ニ

$$\sigma_{x0}+\sigma_{y0}=\frac{m+1}{m}\sigma_{x0}.$$

從テ

$$\frac{d^2\sigma_{x0}}{dx^2}=0. \qquad (104)$$

之ヲ一度積分シタ結果ハ矢張リ零デアル. 何トナレバ只今ノ場合ニハ平衡ノ式ニ於テ $\tau_{z0}=0$ ナル故 $\dfrac{d\sigma_{x0}}{dx}=0$. 之ヲ更ニ積分スレバ σ_{x0} ハ常數トナル. 已ニ σ_{x0} ガ常數ナル故 ε_{x0} モ亦常數デアル. 其値ヲ c トスレバ

$$\varepsilon_{x0}=c=\frac{m^2-1}{m^2}\frac{\sigma_{x0}}{E}\quad 又ハ\quad \sigma_{x0}=\frac{m^2}{m^2-1}Ec.$$

次ニ微分方程式(101)ヨリ

$$D\frac{d^4w}{dx^4}=T_1\frac{d^2w}{dx^2}+p.$$

之ニ $D=\frac{m^2}{m^2-1}E\frac{h^3}{12}$, $T_1=\frac{m^2}{m^2-1}Ech$ ヲ導ケバ

$$\frac{h^2}{12}\frac{d^4w}{dx^4}-c\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{m^2-1}{m^2}\frac{p}{Eh}. \qquad (105)$$

y 軸ニ平行ニ單位ノ長サヲ取リテ之ヲ幅トスル板ノ部分ヲ考ヘル. 板ノ横斷面ノ慣性半徑ヲ i トスレバ $i^2=\frac{h^2}{12}$. 故ニ(105)ノ左邊ニ於ケル初項ノ係數ハ i^2 ニ等シク又右邊分母ノ h ハ斷面積ニ相當スル. 夫レ故此方程式ヲ梁ニ對スル103節ノ(27)ト比ベテ p ガ其次元ニ於テ相違スル點ヲ考ヘレバ兩者異ルハ E ガ係數 $\frac{m^2}{m^2-1}$ ヲ有スルカ否カノ點ノミデアル. 従テ問題ノ性質ニ合フ様ナ上ノ式ノ解ヲ求メル事ハ梁ノ場合ヲ擴張シテ考ヘレバヨイ譯デアル.[1]

w ガ x 及 y ニ關係スル一般ノ場合ニ薄イ板ノ曲ゲヲ論ズル爲前節ノ微分方程式ヲ解ク事ハ六カ敷イ問題デアル. 従テ多少近似的ノ解ヲ求メテ滿足スル. 例ヘバ圓板ニ對スル研究ハ之ヲ脚註ノ文獻ニ讓ル.[2]

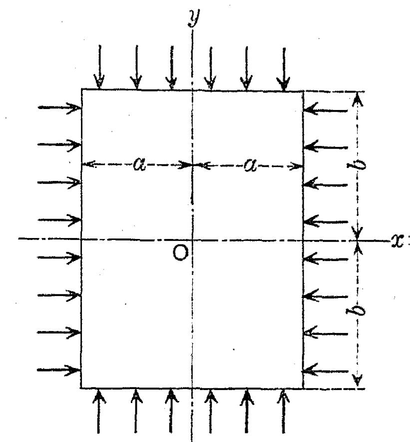
170. 平面板ノ安定.

或ル周邊ノ形並ニ條件ヲ有ツ平面板ニ其平面内ノ力ヲ加ヘテ之ヲ壓シ又ハ辷ラセル時若シ力ガ相當ニ大トナレバ遂ニ板ハ安定ヲ失ヒテ曲ル. 此問題ノ計算及實驗ハ種々ノ著者ニヨリテ進メラレタ. 玆ニハ前ニ導イタ微分方程式(101)ヲ用ヰテ矩形板ノ安定ニ關スル最モ簡單ナ問題ヲ解ク事ヲ述ベヤウ. 板ニ作用スル力ハ只其平面内ニ於ケル者ノミニテ表面ニハ壓力ノ作用ナキ故 $p=0$ トオク. 又問題ノ性質ニ應ジテ T_1, T_2, S ノ中ノ或ル者ヲ殘シテ之ニ對スル曲ゲノ可能性ヲ追求スル.

1) 著者論文, 312 頁脚註.
2) S. Way, Trans. of the Amer. Soc. of Mech. Engineers, Vol. 56, 1934, 627 頁.
K. Federhofer, Forschung, 7, 1936, 148 頁. 其他之等論文中ニ記載ノ文獻.

(a) 周邊ニ於テ自由ニ支ヘラレタ矩形板ノ周圍ニ一様ナル壓力ガ作用スル場合.

$x=\pm a,\ y=\pm b$ ニテ表サレル四邊ニ於テ自由ニ支ヘラレタ矩形平面板ニ壓力 $T_1=T_2=-q$ ガ作用スル場合ヲ考ヘヤウ. 161圖. 此處ニ T_1, T_2 ハ負デ其絶對値ガ q デアル. $S=p=0$ ナル故微分方程式(101)ハ次ノ様ニナル.



161 圖

$$D\Delta\Delta w+q\Delta w=0. \qquad (106)$$

又周邊ノ條件ハ

$$w=0,\quad G_x=G_y=0.$$

斯ル條件ヲ滿足スル解ヲ得ル爲先ヅ次ノ様ニ書ク.

$$w=C\cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{n\pi y}{2b}. \qquad (107)$$

m 及 n ハ奇整數デアル. 之ハ w ガ x 及 y 軸ノ兩側ニ夫レ夫レ對稱ヲナスト假定シタ場合デアッテ最小ノ限界荷重ノ決定ニ對シテハ此場合丈ケデ足ル. 何トナレバモシ餘弦ノ代リニ正弦ヲ用ヰレバ下ニ求メル限界荷重ヨリモ大ナル値ヲ得ル故デアル. 偖(107)ガ微分方程式ヲ滿足スルニハ次ノ關係ガ成立スルヲ要スル.

$$q=D\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right). \qquad (108)$$

q ノ最小値ハ $m=n=1$ ニ相當シテ

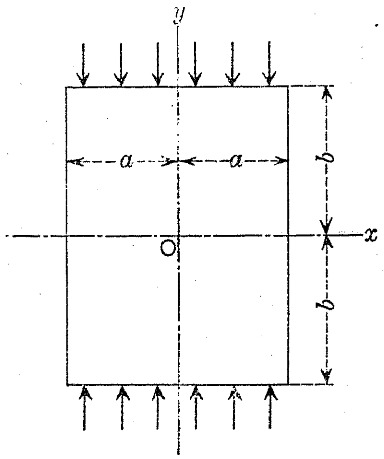
$$q=D\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right). \qquad (109)$$

此式ガ與ヘラレタ問題ニ於テ板ヲ壓シ曲ゲルニ要スル壓力密度ノ最小値ヲ決定シ此荷ニヨリテ曲ル板ハ $m=n=1$ ナル故元ノ平面ノ何レカ一方ニノミ膨レル. 換言スレバ x 又ハ y 軸ニ沿ヒテ半波長ヲ進メバ板ノ一邊ヨリ他ノ邊ニ達スル.

(b) 周邊ニ於テ自由ニ支ヘラレタ矩形板ノ相對スル二邊ニ一樣ナル壓力ガ作用スル場合.

上ト同樣ニ四邊自由ニ支ヘラレタ板ガ 162 圖ニ示ス樣ニ y 軸ノ方向ニ $T_2=-q$ ニ等シイ壓力ニテ壓サレ $T_1=S=p=0$ トスレバ微分方程式 (101) ハ次ノ樣ニナル.

$$D\Delta\Delta w+q\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0. \qquad (110)$$



162 圖

此式ノ解ヲ次ノ形ニ表シテ $y=\pm b$ ノ時 $w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$ トナル樣ニスル.

$$w=X\binom{\cos}{\sin}\frac{n\pi y}{2b}. \qquad (111)$$

式中 X ハ x ノミノ函數デ又 $y=\pm b$ ニ對スル上ノ條件ヲ滿ス爲 n ハ餘弦ニ對シテ奇整數デアリ正弦ニ對シテ偶整數デアル. 簡單ノ爲ニ次ノ樣ニオク.

$$\frac{n\pi}{2b}=\beta, \quad \frac{q}{D}=\gamma^2.$$

然ル時ハ

$$\frac{d^4X}{dx^4}-2\beta^2\frac{d^2X}{dx^2}+\beta^2(\beta^2-\gamma^2)X=0. \qquad (112)$$

此微分方程式ヲ滿足スベキ X ハ一般ニ $e^{\alpha x}$ ノ形ニ表サレル. 而シテ α ハ次ノ四次方程式ノ根デアル.

$$\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^2(\beta^2-\gamma^2)=0,$$

又ハ

$$(\alpha^2-\beta^2)^2=\beta^2\gamma^2.$$

之ヨリ α ヲ求メレバ

$$\alpha^2=\beta^2\pm\beta\gamma=\beta(\beta\pm\gamma).$$

從テ

$$\alpha=\pm\sqrt{\beta(\beta\pm\gamma)}. \qquad (113)$$

夫レ故モシ $\alpha_1=\sqrt{\beta(\gamma-\beta)}$, $\alpha_2=\sqrt{\beta(\beta+\gamma)}$ ト記セバ α ハ $\pm i\alpha_1$ 及 $\pm\alpha_2$ トナル故

$$X=A\cos\alpha_1 x+B\sin\alpha_1 x+C\cosh\alpha_2 x+D\sinh\alpha_2 x. \qquad (114)$$

偖周邊ノ條件トシテ $x=\pm a$ ニ對シテ $w=\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{d^2w}{dy^2}=0$ トナルヲ要スル故モシ X ノ式中第一項即餘弦ノ項丈ケヲ取リテ

$$w=A\cos\alpha_1 x\binom{\cos}{\sin}\frac{n\pi y}{2b}$$

トスレバ此式ガ $x=\pm a$ ニ對スル條件ヲ滿足スル爲ニハ

$$\alpha_1 a=m\frac{\pi}{2}, \qquad m=1,3,5,\cdots.$$

或ハ書キ換ヘテ

$$\frac{m^2\pi^2}{4a^2}=\beta(\gamma-\beta),$$

即

$$\frac{n^2}{b^2}\frac{q}{D}=\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2.$$

從テ求メル限界荷重ハ次ノ樣ニナル.

$$q=D\frac{\pi^2}{4}\frac{b^2}{n^2}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2. \qquad (115)$$

成ル可ク小ナル q ノ値ヲ得ル爲ニ $m=1$ トオク. 然ル時ハ x 軸ニ沿ヒテ半波長ノ波ガ出來ル譯デアル. 又 n ハ(111)ノ二ツノ場合ニ應ジテ奇數又ハ偶數トナル故結局 1, 2, 3, … ト取ル. 上ノ式ニ於テ $\frac{b}{na}=z$ ト書ケバ

$$q=D\frac{\pi^2}{4a^2}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2. \qquad (116)$$

此式ノ右邊括弧内ノ式ハ $z=1$ ノ時極小トナル故此條件ニ合フ q ノ値ハ次ノ樣デアル.

$$q=\frac{\pi^2}{a^2}D. \qquad (117)$$

$z=1$ トスレバ $\frac{b}{a}=n$ トナル故 $\frac{b}{a}\geqq 1$ デ而モ丁度兩邊ノ長サノ比ガ整數ナラバ n ヲ此比ニ等シク取リテ極小條件ニ合フ荷重ガ上ノ樣ニ定メラレル. 此時板ハ一邊ノ長サガ半波長ニ等シイ n 個ノ正方形ニ分レル. 併シ邊ノ比ガ整數ナラザル時ハ極小條件ヲ滿足スル事ガ出來ナイカラ限界荷重ハ上ノ (117)式ノ値ヨリ少シ大トナル. 此點ヲ明カニスルタメ二ツノ連續スル整數 n 及 $n+1$ ヲ取リテ之等ニ對シテ別々ニ函數 $z+\frac{1}{z}$ ノ數値ヲ求メレバ二組ノ値ハ夫レ夫レ $\frac{b}{a}=n$ 及 $n+1$ ニ於テ極

小トナル事已ニ述ベタ通リデアル．今之等極小點ノ間ノ$\frac{b}{a}$ニ對スル$z+\frac{1}{z}$ノ必要ナル値ハn及$n+1$ニ相當スル二本ノ曲線ヲ描ケバ明カナル樣ニ兩曲線ノ交點ニ至ル迄增スケレドモ夫レ以上ニ昇ル事ハナイ．何トナレバ二組ノ値ノ中比較的小ナルモノガ必要ナル故デアル．依テ兩曲線ノ交點ノ$\frac{b}{a}$ヲ求メルタメ二ツノ値ヲ等シクオケバ

$$\frac{b}{na}+\frac{na}{b}=\frac{b}{(n+1)a}+\frac{(n+1)a}{b}.$$

之ヨリ$\frac{b^2}{a^2}=n(n+1)$トナリ之ニ相當シテ$z=\sqrt{\frac{n+1}{n}}$トナル．nガ大ナラバzヲ1ト見テ大差ナキモnガ小ナラバ多少ノ差ヲ生ズル．而シテ(116)ヲ(117)ニ比ベレバ二ツノ比ハ$\frac{1}{4}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=\frac{(2n+1)^2}{4n(n+1)}$．タトヘバ$n=1$トスレバ此數ハ$\frac{9}{8}$ニ等シク此割合ニテ$q$ハ(117)ノ値ヨリ大トナル．今此程度ノ差ヲ無視シテ極小點以外ノ$\frac{b}{a}$ニ對シテモ極小點ニ於ケルト殆ンド同樣ノ限界荷重ガ存在スルモノト見レバ一般ニ$b>a$ナル場合ニ(117)ヲ用キル事ガ出來ル．素ヨリ精密ニ言ヘバ(116)ニ立歸リテ數値ヲ決定スル必要ガアル．

次ニ$a>b$ナル時ハ別ノ考ヲ要スル．此時ハ極小條件ヲ滿ス事ハ出來ナイ故比較的小ナルqヲ定メル爲ニnヲ如何ニ選ベバ宜シイカ．zハ常ニ1ヨリ小デzガ小トナレバナル程(116)ノ括弧內ノ値ハ大トナル故zヲナルベク大トスルタメニ$n=1$卽$z=\frac{b}{a}$ト取ル．然ル時ハ

$$q=D\frac{\pi^2}{4a^2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2=D\frac{\pi^2}{4b^2}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^2. \tag{118}$$

若シ$a\gg b$ナラバ

$$q=D\frac{\pi^2}{4b^2}.$$

$D=\frac{m^2}{m^2-1}E\frac{h^3}{12}$ヲ入レ且$2qa=P$ト記セバ

$$P=\pi^2\frac{m^2}{m^2-1}\frac{EI}{4b^2},\quad I=\frac{ah^3}{6}. \tag{119}$$

之ハ Euler ノ限界荷重ニ對シテ$\frac{m^2}{m^2-1}$ノ割合デ大デアル．

上ニ述ベタ例ノ外種々ノ周邊條件ニ對スル安定ガ研究サレタ．其概

要ハ例ヘバ S. Timoshenko[1]ノ著ニ見ル事ガ出來ル．尙限界荷重ノ別ノ計算法ニ就テハ之ヲ次ノ節ニ述ベヤウ．

安定ノ問題ニ於テ重要ナル事ノ一ツハ周邊ノ條件デアル．タトヘバ162圖ニ示ス板ノ場合ニ於テモ板ノ周邊ガ自由ニ支ヘラレ且壓力ガ邊ノ各部ニ於テ一樣ト見做シテアル．實際ノ板ニ於テ此假定ガ成立シナケレバ其彈性安定ノ限界荷重ハ自ラ計算ト異ル筈デアル．

又薄イ板ハ限界荷重ヲ受ケテ彈性ノ曲リヲ生ジ始メレバ周邊ニ作用スル力ノ配布ニ變化ヲ生ジ易イ．例ヘバ上ノ自由支持ノ矩形板bノ場合ニ就テ見ルニ板ガ曲レバ縱ノ中心線ニ近イ部分ガ膨レ出ス故壓力ノ配布ハ最早一樣デナイ．若シ壓縮面ガ相當ニ丈夫ナラバ兩端附近ガ大部分ノ壓力ヲ受ケル筈デアル．從テ彈性安定ノ限界以上ニ迄荷重サレタ板ニ起ル破損ヲ研究スル爲ニハ斯ル周邊ノ條件ニ注意ヲ拂フ事ガ必要デアル．

自由支持ノ薄板ヲ一方向ニ壓シタ或ル試驗成績ニ依レバ板ノ支ヘ得ル最大荷重ハ上ニ導イタ限界荷重ト趣ヲ異ニシテ板ノ厚サノ二乘ニ比例シ其他ノ寸法ニハ殆ンド無關係ト見做サレル樣デアル．Th. v. Kármán ハ彈性安定ノ限界以上ノ荷重ヲ受ケル板ハ縱ノ二邊附近ノ或ル幅ノ材料ガ降伏シテ此部分ニノミ一樣ナル壓縮荷重ヲ受ケルモノト見做シテ上ノ結果ヲ計算ニヨリテ說明シタ.[2] 又其後之ニ關スル種々ノ硏究ガ行ハレタガ玆ニハ之ヲ省略スル．

171. 變形勢力ニ依ル安定問題ノ解法．

前節ニ於ケル樣ニ微分方程式ヲ基トシテ板ノ安定ノ問題ヲ解ク事ハ丁度43節ニ於テ眞直ナ棒ニ對シテ行ツタ方法ト同樣デアル．併シ安定

1) Verhandlungen des 3. Internationalen Kongresses für Technische Mechanik, Stockholm, 1930, III, 3頁. F. Auerbach u. W. Hort, Handbuch der Physikalischen und Technischen Mechanik Band IV, Lieferung 1, 128頁. Theory of Elastic Stability, 1936.

2) A. S. M. E., Transactions, APM—54—5, 1932.

ノ問題ヲ變形勢力ノ計算ニ依テ直接解ク事モ出來ル故此事ヲ先ヅ簡單ナ棒ニ就テ說明シ然ル後板ニ就テ述ベヤウ. 今一樣斷面ノ眞直ナ棒ガ兩端ニ於テ或ル有樣ニ支ヘラレ軸線ノ方向ニ壓サレル時荷重 P ガ一定ノ限界値ニ達スレバ曲リヲ生ジ之ニ對スル變形勢力 $\frac{EI}{2}\int_0^l\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2dx$ ガ棒ノ中ニ蓄ヘラレ其大サハ此際ナサレタ外力ノ仕事卽兩端ノ相對變位 $\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx$ ニ P ヲ乘ジタモノニ等シイ故

$$P\int_0^l\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx=EI\int_0^l\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2dx. \tag{120}$$

此式ハ微分方程式 $-EI\frac{d^2y}{dx^2}=Py$ ノ兩邊ニ $\frac{d^2y}{dx^2}dx$ ヲ乘ジテ之ヲ棒ノ全長ニ對シテ積分シ兩端ニ於テ y 又ハ $\frac{dy}{dx}$ ガ零ニ等シイト云フ條件ヲ入レテモ直ニ導カレル. 而シテ若シ y ニ微分方程式ノ解ト同ジ式ヲ入レル時ハ此計算ニ依リテ得ラレル限界荷重ノ値モ素ヨリ微分方程式ノ解ト同樣デアル.

上ノ說明ニ於テハ變位 y ヲ實際的トシタケレドモ無論假想變位ノ原理ニ立歸リテ考ヘ直ス事モ出來ル. 今再ビ假想變位ニ就テ上ノ例ヲ考ヘ直ス繁ヲ避ケルケレドモ玆ニ注意シタイノハ次ノ點デアル. 夫レハ此原理ヲ應用スル時周邊ニ作用スル外力ガ假想上ノ變位ニ依ル仕事ヲナスト見ル事モ出來ルケレドモ又一方ニ於テハ此外力ガ仕事ヲシナイト假定シテ進ム事モ出來ル譯デアル. 168 節ニ於テ板ノ微分方程式ヲ導ク際ニ行ツタ計算デハ後ノ方法ニ從ヒ周邊ニ作用スル外力ノ仕事ヲ零ト見做シタ. 斯樣ニ考ヘレバ (100) ニ於テ $p=0$ ナル故單ニ變形勢力ノ假想變分ヲ零トオイテ

$$\delta A=0. \tag{121}$$

今 δw ハ隨意ニ選ビウル故便宜上 $\delta w=cw$ (c ハ常數) トオケバ (98) ヨリ

$$\delta A=c\iint\left[T_1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+T_2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+2S\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]dx\,dy$$
$$+cD\iint\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-\frac{2(m-1)}{m}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right)\right]dx\,dy. \tag{122}$$

此變分ヲ零ニ等シク置イテ板ノ安定ノ限界荷重ヲ求メル際若シ w ノ正確ナル式ヲ用キレバ得ル解モ亦正シイ. 併シ w ガ周邊ノ條件ヲ滿足スルモ微分方程式ヲ滿足シナイ近似解デアレバ限界荷重モ亦近似値デアルガ其値ハ正シイ値ヨリモ多少大デアル. 此事ヲ證明スル前ニ上ノ δA ノ式ヲ簡單ニシヤウ. 先ヅ (122) ノ第二項ノ積分ガ前ニ (74) ヨリ (76) ヲ導イタト同樣ニ簡單トナル場合ニハ (121) ニヨリテ

$$\iint\left[T_1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+T_2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+2S\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]dx\,dy$$
$$+D\iint\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2dx\,dy=0. \tag{123}$$

偖問題ヲ具體的トスル爲周邊ニ於テ壓縮荷重ノミヲ受ケル矩形板ヲ考ヘ荷重ノ密度ヲ q トスレバ $T_1=T_2=-q,\ S=0.$ 從テ (123) ヨリ

$$D\iint\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2dx\,dy-q\iint\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=0. \tag{124}$$

此式ノ成立スル限界狀態ニ於ケル w 自身ノ大サハ不定デアルカラ次ノ樣ナ條件ヲ入レテモ q ノ決定ニ對シテハ何等ノ差支ガナイ. 條件トハ卽

$$\iint\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=const.$$

此條件ノ下ニ求メラレタ q ハ (124) ノ第一項ニ比例スル. 然ルニ變形勢力 A ヲ極小ニスレバ $\iint(\Delta w)^2dx\,dy$ ガ極小トナリ從テ q モ亦極小トナル. 若シ w ガ多少正確デナイ場合ニハ A 及 q ハ夫レ夫レノ極小値ヨリ少シ大デアル. 併シ極小値附近ニ於ケル多少ノ差異ハ之ヲ小ト見ル事ガ出來ル故 w ニ近似式ヲ與ヘテ計算シタ q ハ一般ニ正確ナル値ニ近イ.

例ヘバ固定周邊ヲ有スル正方形ノ板ニ對スル限界荷重ノ近似値ヲ求メテ之ヲ比較的正確ナル値ト比ベヤウ. 此問題ニ對シテハ或ル程度迄精密ニ周邊ノ條件ヲ滿足スル微分方程式ノ解ガ求メラレテ居ル.[1)]

1) 妹澤克惟,東京帝國大學航空研究所報告, VI, 1931, 45 頁. XI, 1936, 409 頁. Zeitschrift f. angewandte Mathematik und Mechanik, 12, 1932, 227 頁.
S. Iguti, Ingenieur-Archiv, VII, 1936, 207 頁. 其他ノ文獻ハ之等著者ノ論文中ニ記載サレテ居ル. 下ニ引用スル G. I. Taylor ノ著ハ其一ツデアル.

正方形ノ一邊ノ長サヲ $2a$ トシ其中心ヲ原點トシテ邊ニ平行ニ座標軸ヲ引ク. 而シテ w ヲ次ノ樣ニ選ブ.

$$w=\frac{c}{4}\left(1+\cos\frac{\pi x}{a}\right)\left(1+\cos\frac{\pi y}{a}\right). \tag{125}$$

c ハ中心ニ於ケル撓ミヲ示ス. 此式ハ $x=\pm a$ 及 $y=\pm a$ ニ於テ $w=\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial w}{\partial y}=0$ トナリテ固定ノ條件ニ適フ故之ヲ (124) ニ入レテ四方ヨリ壓サレル正方形ノ板ノ安定ノ限界ヲ定メル事ガ出來ル.

先ヅ板ノ全面ニ積分スレバ

$$\iint\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=\frac{3}{8}\pi^2c^2,$$

$$\iint\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]^2dx\,dy=\frac{\pi^4}{2a^2}c^2.$$

從テ求メル限界荷重ノ密度ハ次ノ樣デアル.

$$q=\frac{4}{3}\pi^2\frac{D}{a^2}=5.33\pi^2\frac{D}{(2a)^2}. \tag{126}$$

關係文獻中 G. I. Taylor[1] ノ計算ニ依レバ係數ノ比較的正確ナル値ハ 5.30 ニ等シク從テ只今ノ粗イ簡單ナ計算ガ已ニ可ナリ良イ近似値ヲ與ヘル事ガ判ル.

此例ニ於テハ w ガ只一ツノ係數ヲ有ツ故 q ハ直ニ定マル. 併シ一般ニヨイ結果ヲ得ル爲ニハ二ツ以上ノ係數ヲ含ム w ノ式ヲ取リテ求メル荷重ヲ極小ニスル事ガ考ヘラレル.

上ニ述ベタ樣ナ方法デ求メラレル答ハ實際ヨリ多少大ナル故限界値ノ一ツノ上限デアル. 之ニ對シテ實際ヨリ小ナル數値ヲ與ヘル近似計算ヲ目的トシタ研究ガアル.[2] 玆ニハ其詳細ヲ省クケレドモ此計算ニ依レバ微分方程式ヲ完全ニ滿足スルモ周邊ノ條件ヲ一部變更シテ緩和サレタ或ル條件ニ對スル解ヲ作リテ限界荷重ノ一ツノ下限ヲ導ク事ガ

1) Zeitschrift f. angewandte Mathematik und Mechanik, 13, 1933, 147 頁.
2) E. Trefftz, Zeitschrift f. angewandte Mathematik und Mechanik, 15, 1935, 339 頁.
A. Weinstein, The Journal of the London Math. Soc., X, 1935, 184 頁.

出來ル.

例題 1. 矩形板ノ撓ミニ對シテ 166 節トハ別ノ式ヲ與ヘテ同ジ趣旨ノ計算ヲ行フコト.[1]

板ノ周邊ガ自由ニ支ヘラレル場合ニ對スル撓ミ w ヲ 166 節ト同樣ノ座標軸ニ對シテ下ノ樣ニ表ス.

$$w=c\cos\alpha x\cos\beta y.$$

但 c ハ x 及 y ヲ含マヌ常數デアツテ $x=y=0$ ノ時ノ w ニ等シイ. 偖周邊ノ條件トシテハ $x=\pm a,\ y=\pm b$ ニ對シテ $w=\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$ トナルヲ要シ之等ノ條件ハ $\alpha a=\beta b=\dfrac{\pi}{2}$ ナル時滿足サレル. 此場合ノ w ハ 163 節ニ述ベタ w ノ第一項ニ當ル.

上ノ w ノ式ヲ(76)ニ導ケバ

$$A=c^2\frac{\pi^4}{32}D\frac{(a^2+b^2)^2}{a^3b^3},$$

又

$$\frac{p}{2}\iint w\,dx\,dy=\frac{8}{\pi^2}cabp.$$

故ニ之等兩式ヲ等シク置イテ c ヲ求メレバ

$$c=\frac{256}{\pi^6}\frac{a^4b^4}{(a^2+b^2)^2}\frac{p}{D}.$$

之ヲ w ノ式ニ入レテ撓ミガ定マル. 此撓ミノ式ハ其係數ノ値ニ至ル迄無限級數(37)ノ第一項ト符合スル. 從テ應力ニ對シテハ同節ノ計算ヲ其儘用キル事ガ出來ル.

$\dfrac{b}{a}=n$ トスレバ中心ノ撓ミ及最大應力ハ夫レ夫レ次ノ樣デアル.

$$\delta=\frac{256}{\pi^6}\frac{pa^4n^4}{D(n^2+1)^2},$$

$$\sigma_{x0}=\pm\frac{384}{\pi^4}\frac{n^2(mn^2+1)}{m(n^2+1)^2}\frac{pa^2}{h^2}.$$

1) H. Lorenz, Technische Physik IV, 1913, 455 頁.

之等ノ撓ミ δ 及應力 σ_{x0} ノ値ハ夫レ夫レ(89)及(90)ト比ベテ大差ノナイ事ヲ知ル. 殊ニ δ ノ差ハ 1% 以下デアル. 換言スレバ w ノ式ノ何レヲ取ルモ自由ニ支ヘラレタ板ノ計算ノ結果ハ餘リ影響ヲ受ケナイノデアル. 併シ周邊ヲ完全ニ固定シタ板ニ對シテ例ヘバ

$$w=c(1+\cos 2\alpha x)(1+\cos 2\beta y)$$

ト假定スレバ計算ノ結果周邊ニ於ケル應力ガ(88)ニ比ベテ餘程相違シタ者トナル. 更ニ進ンデ周邊ノ剪斷力ヲ求メル爲ニ $\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}$, $\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}$ ヲ作レバ之等ハ皆夫レ夫レノ邊ニ於テ零トナル. 之等ノ點カラ見テ w ノ取リ方ノ影響スル所大ナル事ガ判ル.

例題 2. 變形勢力ヲ用キテ自由ニ支ヘラレタ矩形平面板ガ一方向ニ壓サレル時ノ限界荷重ヲ定メル事.

四邊ニ於テ自由ニ支ヘラレタ矩形板ノ撓ミヲ次ノ式ニテ表ス.

$$w=C\cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{n\pi y}{2b},\qquad m,n=1,3,5,\cdots.$$

y 軸ノ方向ニ於ケル壓縮力ノ密度ヲ q トシ他ニ力ノ作用ナシトスレバ $T_2=-q$, $T_1=S=0$ ナル故 (123) ヨリ

$$q\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2\iint\cos^2\frac{m\pi x}{2a}\sin^2\frac{n\pi y}{2b}\,dx\,dy$$

$$=D\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2\iint\cos^2\frac{m\pi x}{2a}\cos^2\frac{n\pi y}{2b}\,dx\,dy.$$

之ヨリ

$$q=D\frac{\pi^2b^2}{4n^2}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2.$$

此式ハ (115) ト同一デアルカラ m,n ヲ適當ニ選ビテ成ルベク小ナル q ヲ見出ス方法及計算ノ結果ハ前ニ述ベタトコロト同樣デアツテ之ヲ繰返ス必要ハナイ.

上ノ計算ニ於ケル樣ニ w ヲ只一ツノ項ニテ表ス代リニ之ヲ次ノ樣ナ級數ニテ表セバ異リタル結果ヲ得ルカ.

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{mn}\cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{n\pi y}{2b},\qquad m,n=1,3,5,\cdots.$$

之ヲ用キテ計算スレバ

$$q=D\frac{\pi^2b^2}{4}\frac{\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_{mn}^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}{\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_{mn}^2n^2}.$$

此分數ノ分母分子ハ凡テ正ノ項ノミヨリナリテ次ノ樣ナ形ヲナス.

$$\frac{b_1+b_2+b_3+\cdots}{a_1+a_2+a_3+\cdots}.$$

今數多ノ分數 $\frac{b_1}{a_1}$, $\frac{b_2}{a_2}$, $\frac{b_3}{a_3}$, $\cdots$ ハ其中ノ何レカ一ツタトヘバ $\frac{b_1}{a_1}$ ヲ最小トスレバ假定ニヨリテ凡テノ分母子ハ正ナル故次ノ不等式ガ容易ニ證明サレル.

$$\frac{b_1+b_2+b_3+\cdots}{a_1+a_2+a_3+\cdots}>\frac{b_1}{a_1}.$$

夫レ故上ノ q ノ式ニ於ケル無限級數ヲ取ル代リニ單ニ最小ノ分數一ツヲ取レバ宜シイ事ガ判ル. 即 m,n ノ適當ナル選擇ニヨリテ一ツノ分數ノ最小ノ値ヲ求メレバヨイ.