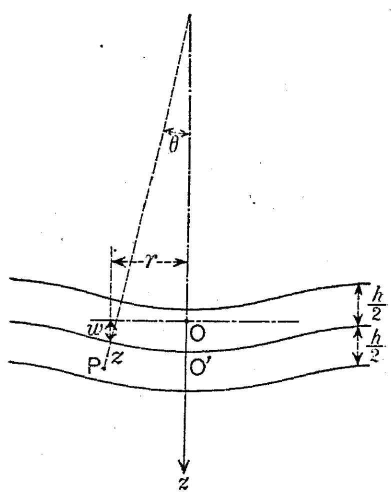
XXIV. 圓板ノ曲ゲ.

154. 應力及變形ノ計算.

中心ヲ通ル縱軸ニ對シテ對稱變形ヲナス圓板ノ計算法ハ次ノ章ニ述ベル平面板ノ曲ゲノ一ツノ特別ノ場合デアルガ特ニ此處ニ章ヲ分ケテ論ズルノハ XX 章 126 節ニ述ベタ圓柱體ノ式ガ役立ツカラデアツテ從テ記號モ差支ナキ限リ前ト類似ノモノヲ用キル.

偖圓板ノ厚サヲ h トシ其中心軸上ノ中點ノ最初ノ位置ヲ以テ座標軸ノ原點ト定メル. 153圖. 變形ハ中心軸卽 z 軸ニ對シテ對稱的ト假定スル故最初平面ナリシ板ハ其軸ノ周リノ廻轉體トナル. 此際次ノ假定ヲナス. 卽板ノ周圍ニ之ヲ引キ又ハ壓ス力ガ作用セザル限リハ兩表面ヨリ等距離ニアル中央面ハ伸ビヲ受ケズ. 又板ノ內部ニ於テ此面ニ引キタル垂直線ハ依然直線トシテ彎曲セル中央面ニ對シテ直角ヲ保ツ. 尙斯ル變形ノ結果中央面上ノ各點ガ z 軸ノ方向ニナス變位ハ小サイト假定シヤウ. 此變位ハ $z=0$ ニ對スル w ノ値デアルカラ w_0 ト書ケバ宜シイ譯デアルガ簡單ヲ主トスルタメニ之ヲ w ト名ヅケヤウ. w ガ r ノ函數トシテ表サレル時ハ彎曲シタ中央面ノ形ガ定マル事ニナル.



153 圖

次ニ z 軸ヨリ距離 r ニアル任意ノ一點ヲ P トシ P ヲ通リテ中央面ニ直角ノ直線ガ變形後 z 軸トナス角ヲ θ トシテ表ス. 但之ハ當然 r ノミノ函數デアル. 然ル時ハ變形後ニ於ケル P ノ z 軸ヨリノ距離ハ $r+z\theta$

ナル故 $u=z\theta$ デ z ハ殆ンド不變ト考ヘレバ $\frac{\partial u}{\partial r}=z\frac{d\theta}{dr}$ トナル.

從テ XX章(1)ヨリ

$$\varepsilon_t=\frac{z\theta}{r},\quad \varepsilon_r=z\frac{d\theta}{dr}. \tag{1}$$

次ニ簡單ノタメニ板ノ面ニ直角ナル方向ノ應力 σ_z ヲ零ト見做セバ XX 章(3)ニヨリテ

$$\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{m-1}\left(\frac{u}{r}+\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

之ヲ σ_t 及 σ_r ノ兩式ニ入レル時ハ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_t&=\frac{2G}{m-1}\left(m\frac{u}{r}+\frac{\partial u}{\partial r}\right),\\ \sigma_r&=\frac{2G}{m-1}\left(\frac{u}{r}+m\frac{\partial u}{\partial r}\right).\end{aligned}\right\}$$

$u=z\theta$ ヲ入レレバ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_t&=\frac{2G}{m-1}z\left(m\frac{\theta}{r}+\frac{d\theta}{dr}\right),\\ \sigma_r&=\frac{2G}{m-1}z\left(\frac{\theta}{r}+m\frac{d\theta}{dr}\right).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

應力平衡ニ關スル式卽 XX 章(5)ノ中ニ之等ノ σ_t 及 σ_r ヲ導イテ

$$\frac{\partial\tau}{\partial z}=\frac{1}{r}\left[\sigma_t-\frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r}\right]=\frac{2mG}{m-1}\frac{z}{r}\left(\frac{\theta}{r}-\frac{d\theta}{dr}-r\frac{d^2\theta}{dr^2}\right).$$

此式ヲ z ニ對シテ積分スレバ

$$\tau=\frac{mG}{m-1}\frac{z^2}{r}\left(\frac{\theta}{r}-\frac{d\theta}{dr}-r\frac{d^2\theta}{dr^2}\right)+c,$$

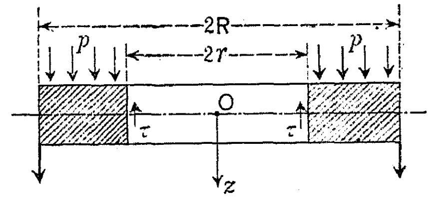
c ハ z ニ無關係デアツテ只 r 丈ケノ函數デアル. 之ハ板ノ表面卽 $z=\pm\frac{h}{2}$ ニ對シテ $\tau=0$ ナルコトカラ定マル. 卽

$$c=-\frac{mG}{m-1}\frac{h^2}{4r}\left(\frac{\theta}{r}-\frac{d\theta}{dr}-r\frac{d^2\theta}{dr^2}\right).$$

從テ

$$\tau=-\frac{mG}{m-1}\frac{h^2-4z^2}{4r}\left(\frac{\theta}{r}-\frac{d\theta}{dr}-r\frac{d^2\theta}{dr^2}\right). \tag{3}$$

次ニ半徑 r ノ同心圓柱ノ表面ヲ以テ圓板ヲ切ツタモノト考ヘ(154圖)此斷面ヨリ外部ノ輪ニ就テ z 軸方向ノ力ノ平衡ヲ見ルニ圓板ノ上表面ニ矢ノ如キ方向ニ密度 p ナル液壓ガ作用シ外圓周ニ沿ヒテハ P ナル力ガ加ヘラレルトスレバ之等ノ力ト斷面ニ作用スル辷リノ力トノ間ニ次ノ平衡關係ガ成立スル.



154 圖

$$P+p\pi(R^2-r^2)=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\tau\,2\pi r\,dz. \tag{4}$$

此式ニ於ケル P ハ圓板全體ニ働ク力ノ有樣ガ示サレヌ以上ハ不明ナルモ之ハ實際ニ出會フ個々ノ場合ニ就テ考ヘル可キ問題デアルカラ暫ク此儘トシテ置ク. 偖(3)ニヨリテ

$$2\pi r\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\tau\,dz=-\frac{m}{m-1}\pi G\frac{h^3}{3}\left(\frac{\theta}{r}-\frac{d\theta}{dr}-r\frac{d^2\theta}{dr^2}\right).$$

故ニ(4)ハ次ノ樣ニナル.

$$\frac{\theta}{r}-\frac{d\theta}{dr}-r\frac{d^2\theta}{dr^2}=-\frac{P+p\pi(R^2-r^2)}{\frac{m}{m-1}\pi G\frac{h^3}{3}}. \tag{5}$$

簡單ノタメニ次ノ樣ニ書ク.

$$\left.\begin{aligned}a&=3\frac{m-1}{m}\frac{p}{Gh^3},\\ b&=-3\frac{m-1}{m}\frac{P+p\pi R^2}{\pi Gh^3}=-aR^2-3\frac{m-1}{m}\frac{P}{\pi Gh^3}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

然ル時ハ(5)カラ

$$\frac{d^2\theta}{dr^2}+\frac{d}{dr}\left(\frac{\theta}{r}\right)+ar+\frac{b}{r}=0.$$

之ヲ積分スレバ

$$\frac{d\theta}{dr}+\frac{\theta}{r}+\frac{ar^2}{2}+b\log r+c_1=0,$$

又ハ

$$\frac{d}{dr}(\theta r)+\frac{ar^3}{2}+br\,logr+c_1r=0.$$

之ヲ更ニ積分スル。但

$$\int r\,logr\,dr=\frac{1}{2}\int logr\,d(r^2)=\frac{r^2}{2}\left(logr-\frac{1}{2}\right)$$

ナル故

$$\theta r+\frac{ar^4}{8}+\frac{br^2}{2}\left(logr-\frac{1}{2}\right)+c_1\frac{r^2}{2}+c_2=0. \tag{7}$$

未知常數ヲ除イテハ已ニθノ式ガ定マリタル故伸ビ及應力ノ計算ヲナス事ガ出來ル. (7)ニヨリテ

$$-\frac{\theta}{r}=\frac{ar^2}{8}+\frac{b}{2}\left(logr-\frac{1}{2}\right)+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{r^2},$$

$$-\frac{d\theta}{dr}=\frac{3ar^2}{8}+\frac{b}{2}\left(logr+\frac{1}{2}\right)+\frac{c_1}{2}-\frac{c_2}{r^2}.$$

從テ(1)ヨリ

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_t&=-z\left[\frac{ar^2}{8}+\frac{b}{2}\left(logr-\frac{1}{2}\right)+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{r^2}\right],\\ \varepsilon_r&=-z\left[\frac{3ar^2}{8}+\frac{b}{2}\left(logr+\frac{1}{2}\right)+\frac{c_1}{2}-\frac{c_2}{r^2}\right].\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

又(2)ヨリ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_t=-\frac{2G}{m-1}z\Big\{&(m+3)\frac{a}{8}r^2+\frac{b}{2}\left[(m+1)logr-\frac{m-1}{2}\right]\\&+(m+1)\frac{c_1}{2}+(m-1)\frac{c_2}{r^2}\Big\},\\ \sigma_r=-\frac{2G}{m-1}z\Big\{&(3m+1)\frac{a}{8}r^2+\frac{b}{2}\left[(m+1)logr+\frac{m-1}{2}\right]\\&+(m+1)\frac{c_1}{2}-(m-1)\frac{c_2}{r^2}\Big\}.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

τ ハ(3)ト(5)トヨリ

$$\tau=\frac{3}{4}\,\frac{h^2-4z^2}{h^3}\left[\frac{p}{r}(R^2-r^2)+\frac{P}{\pi r}\right]. \tag{10}$$

中央面ノ撓ミヲ見出スタメニハ

$$\theta=-\frac{dw}{dr}.$$

故ニ(7)ヲ用キテ

$$\frac{dw}{dr}=\frac{ar^3}{8}+\frac{br}{2}\left(logr-\frac{1}{2}\right)+\frac{c_1r}{2}+\frac{c_2}{r}.$$

之ヲ積分シテwノ式ヲ求メル.

$$w=\frac{ar^4}{32}+\frac{br^2}{4}\left(logr-1\right)+\frac{c_1r^2}{4}+c_2logr+c_3. \tag{11}$$

此式ニ於ケル常數c_3ハ座標軸ノ取リ方ニヨリテ定マル. 例ヘバ原點ガ常ニ圓板ノ外周ト同ジ水平面中ニアリトスレバ外周ニ於ケルwハ零デアル.

以上述ベタトコロニヨリテ軸ノ周リニ對稱彎曲ヲナス圓板ノ一般解ガ導カレタ. 次ニハ個々ノ問題ニ就テ常數a, bヲ計算シ又周圍ノ條件ニ合フ樣積分常數c_1, c_2, c_3ヲ定メネバナラヌ. 此事ハ後ニ述ベル一二特別ノ例ニ依リテ自ラ明カニナル. 併シ其前ニ尙周邊ノ條件ニ就テ述ベヤウ.

155. 周邊ノ條件.

前節ニ導イタwノ式(11)ヲ見ルニ三個ノ積分常數ガ含マレテ居ル. 之等ヲ決定スルタメニハ圓板ノ周圍ガ如何ニ支持サレルカヲ考ヘネバナラヌ. 先ヅ圓板ガ半徑Rヲ有スル只一ツノ圓周デ限ラレ其周邊ニ於テ或ル有樣ニ支ヘラレタ場合ヲ考ヘヤウ. 此時ニハ圓板ノ中心 $r=0$ ニ於テハ(7)式中次ノ二項ヲ除ク外皆零トナル.

$$\left[\frac{b}{2}r^2logr+c_2\right]_{r=0}=0.$$

此式ノ第一項ハ一見不定ナル如キモ之ハ不定形ノ計算ヨリ直ニ明カナル如ク零ナル故 $c_2=0$ デアル.

又外周卽 $r=R$ ニ對シテ $w=0$. 卽(11)ヨリ

$$c_3 = -\frac{aR^4}{32} - \frac{bR^2}{4}\left(log R - 1\right) - \frac{c_1 R^2}{4}. \tag{12}$$

常數 c_1 ハ周圍ヲ支持スル方法ニヨリテ定マル. 若シ此處ニ少シモ無理ナシト假定スレバ應力 σ_r ハ零ナル故(9)ヨリ

$$(3m+1)\frac{a}{8}R^2 + \frac{b}{2}\left[(m+1)log R + \frac{m-1}{2}\right] + (m+1)\frac{c_1}{2} = 0.$$

從テ

$$c_1 = -\frac{3m+1}{m+1}\frac{a}{4}R^2 - b\left(log R + \frac{1}{2}\frac{m-1}{m+1}\right). \tag{13}$$

之ニ反シテ若シ周圍ガ完全ニ固定サレテ變形後モ $\theta=0$ ト假定スレバ(7)ヨリ

$$\frac{aR^2}{4} + b\left(log R - \frac{1}{2}\right) + c_1 = 0,$$

卽

$$c_1 = -\frac{aR^2}{4} - b\left(log R - \frac{1}{2}\right). \tag{14}$$

斯樣ニ周邊ガ全ク自由ニ支ヘラレルカ又ハ完全ニ固定サレルカト云フ二ツノ條件ハ式ノ取扱上簡單ナ假定デアルガ實ハ曾テ梁ノ問題ニ於テモ同樣デアツタ樣ニ實現シ難イ條件デアル. 以下ノ計算ニ於テ一々注意シナイデ進ムケレドモ豫メ茲ニ此點ヲ明カニシテオキタイト思フ.

次ニ圓板ガ半徑 r_1 及 r_2 ヲ有スル內外兩圓周デ限ラレル時卽圓板ノ中央ニ孔ヲモツ時ハ前ノ場合ノ樣ニ $r=0$ トオイテ $c_2=0$ トスル譯ニ行カヌ. 其代リニ兩半徑 $r=r_1$ 及 $r=r_2$ ニ對シテ夫レ夫レ支持ノ方法ガ與ヘラレル故之等ニ相當スル二條件ガアル. 尙別ニ座標軸ノ原點ヲ含ム平面 $z=0$ ガ何レニ取ラレルカヲ定メレバ茲ニ一ツノ條件ガ出來ル. 例ヘバ $r=r_1$ ニ對シテ $w=0$ トスル. 之等ノ三條件カラ三ツノ常數ガ決定サレル故圓板ノ彎曲狀態ガ見出サレル譯デアル. 其一例ハ例題中ニ述ベル積リデアル.

尙孔ノ有無ニ拘ラズ一般ニ圓板ガ他ノ圓板又ハ他ノ彈性體ト連續スル事ガアル. 此時ニハ周邊ノ條件ガ明カニ前ノ樣ニ簡單ナ假定ヲ許サナイ. 卽周邊ハ自由ニ支ヘラレルノデモナク又完全ニ固定サレルノデモナイ. 從テ計算ガ面倒デアル. 併シ變形及應力ニ關シテ周邊ニ於ケル條件ガ導カレル故之ヲ滿ス樣ニ双方ノ彈性體ノ變形狀態ヲ定メル樣ニスレバ宜シイ. 此場合ニ屬スル計算ノ例ハ 157 節ニ於テ起ツテ來ル.

156. 全面ニ一樣ナル壓力ヲ受ケル圓板.

孔ノナイ完全ナル圓板ガ其周邊デ或ル有樣ニ支ヘラレ全面ニ一樣ナル壓力ノミヲ受ケル場合ヲ考ヘヤウ. 斯樣ニ問題ノ意味ヲ制限スレバ初メテ計算ヲ最後ノ狀態迄進メル事ガ出來ル. 此時 P ハ荷重 $p\pi R^2$ ヲ支ヘル周邊ノ支力ナル故 154 圖ノ矢ノ方向トハ反對ニ向フ. 故ニ

$$P = -p\pi R^2.$$

又(6)ニ於テ $b=0$. 偖圓板ハ只一ツノ周邊ヲモツ故前節ノ(12), (13), (14)ヲ用キル事ガ出來ル. 卽周邊ガ自由ニ支ヘラレルカ又ハ固定サレルカニヨリテ(13)又ハ(14)ヨリ

$$c_1 = -\frac{3m+1}{m+1}\frac{a}{4}R^2, \tag{13a}$$

$$c_1 = -\frac{aR^2}{4}. \tag{14a}$$

尙(12)ヨリ

$$c_3 = -\frac{aR^4}{32} - \frac{c_1 R^2}{4}. \tag{12a}$$

次ニ(9)ヨリ

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t &= -\frac{G}{m-1}z\left[(m+3)\frac{a}{4}r^2 + (m+1)c_1\right], \\ \sigma_r &= -\frac{G}{m-1}z\left[(3m+1)\frac{a}{4}r^2 + (m+1)c_1\right]. \end{aligned}\right\} \tag{9a}$$

又(11)ヨリ

$$w = \frac{ar^4}{32} + \frac{c_1 r^2}{4} + c_3 = -\frac{a}{32}(R^4 - r^4) - \frac{c_1}{4}(R^2 - r^2)$$

$$= -\left[\frac{a}{8}(R^2 + r^2) + c_1\right]\frac{R^2 - r}{4}. \tag{11a}$$

(i) 自由ニ支ヘラレタ場合.

(13a) ヨリ $$c_1=-\frac{3m+1}{m+1}\frac{a}{4}R^2.$$

從テ (9a) ヨリ

$$\sigma_t=\frac{G}{m-1}\frac{az}{4}\Big[(3m+1)R^2-(m+3)r^2\Big],$$

$$\sigma_r=\frac{3m+1}{m-1}G\frac{az}{4}(R^2-r^2).$$

之等ニ(6)ヨリ $a=3\dfrac{m-1}{m}\dfrac{p}{Gh^3}$ ヲ入レル時ハ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_t&=\frac{3}{4}\frac{pz}{mh^3}\Big[(3m+1)R^2-(m+3)r^2\Big],\\ \sigma_r&=\frac{3}{4}\frac{3m+1}{m}\frac{pz}{h^3}(R^2-r^2).\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

σ_t 及 σ_r ハ $r=0$ ノ時相等シク且之ニ $z=\pm\dfrac{h}{2}$ トオケバ其絕對値最大トナル. 之ヲ $(\pm\sigma)_{max}$ ト記セバ

$$(\pm\sigma)_{max}=\frac{3}{8}\frac{3m+1}{m}\left(\frac{R}{h}\right)^2p.\tag{16}$$

次ニ (11a) ヨリ

$$w=\frac{a}{16}(R^2-r^2)\Big[\frac{3m+1}{m+1}R^2-\frac{R^2+r^2}{2}\Big]$$

$$=\frac{a}{32}(R^2-r^2)\Big[\frac{5m+1}{m+1}R^2-r^2\Big].$$

從テ

$$w=\frac{3}{32}\frac{m-1}{m}\frac{p}{G}\frac{R^2-r^2}{h^3}\Big[\frac{5m+1}{m+1}R^2-r^2\Big],$$

又ハ

$$w=\frac{3}{16}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{p}{E}\frac{R^2-r^2}{h^3}\Big[\frac{5m+1}{m+1}R^2-r^2\Big].\tag{17}$$

此式中ニ $r=0$ トオイテ圓板中心ノ撓ミ δ ヲ求メレバ

$$\delta=\frac{3}{16}\frac{(5m+1)(m-1)}{m^2}\frac{p}{E}\frac{R^4}{h^3}.\tag{18}$$

(ii) 完全ニ固定サレタ場合.

(14a) ヨリ $$c_1=-\frac{aR^2}{4}.$$

從テ (9a) ヨリ

$$\sigma_t=\frac{G}{m-1}\frac{az}{4}\Big[(m+1)R^2-(m+3)r^2\Big],$$

$$\sigma_r=\frac{G}{m-1}\frac{az}{4}\Big[(m+1)R^2-(3m+1)r^2\Big].$$

又ハ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_t&=\frac{3}{4}\frac{pz}{mh^3}\Big[(m+1)R^2-(m+3)r^2\Big],\\ \sigma_r&=\frac{3}{4}\frac{pz}{mh^3}\Big[(m+1)R^2-(3m+1)r^2\Big].\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

$r=0,\ z=\pm\dfrac{h}{2}$ ニ對シテ

$$\sigma_t=\sigma_r=\pm\frac{3}{8}\frac{m+1}{m}\left(\frac{R}{h}\right)^2p.$$

又 $r=R,\ z=\pm\dfrac{h}{2}$ ニ對シテ

$$\sigma_t=\mp\frac{3}{4m}\left(\frac{R}{h}\right)^2p,$$

$$\sigma_r=\mp\frac{3}{4}\left(\frac{R}{h}\right)^2p.$$

此最後ノ應力卽周邊ニ於ケル半徑ノ方向ノ應力ガ最大デアル.

$$(\pm\sigma)_{max}=\frac{3}{4}\left(\frac{R}{h}\right)^2p.\tag{20}$$

次ニ (11a) ヨリ

$$w=\frac{a}{32}(R^2-r^2)^2.$$

從テ

$$\begin{aligned}w&=\frac{3}{32}\frac{m-1}{m}\frac{p}{G}\frac{(R^2-r^2)^2}{h^3}\\ &=\frac{3}{16}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{p}{E}\frac{(R^2-r^2)^2}{h^3}.\end{aligned}\tag{21}$$

中心 $r=0$ ニ於ケル撓ミ δ ハ

$$\delta = \frac{3}{16}\,\frac{m^2-1}{m^2}\,\frac{p}{E}\,\frac{R^4}{h^3}. \tag{22}$$

157. 中心ニ荷重ヲ受ケル圓板.

本節ニ於テハ周邊ニ於テ或ル有樣ニ支ヘラレタ孔ノナイ圓板ガ其中心ニノミ荷重ヲ受ケル場合ヲ考ヘヤウ. 今中心荷重ヲ Q トスレバ P ハ支力ニ相當シテ其値ハ次ノ樣デアル.

$$P = -Q.$$

而シテ $p=0$ ナル故(6)ニ於テ

$$a = 0,$$

$$b = 3\,\frac{m-1}{m}\,\frac{Q}{\pi G h^3}.$$

之等ノ a 及 b ヲ 155 節ニ示シタ (12), (13), (14) ノ中ニ入レル. 卽圓板ノ周圍ガ自由ナルカ又ハ固定サレルカニ從テ (13) 又ハ (14) ヨリ

$$c_1 = -b\left(\log R + \frac{1}{2}\,\frac{m-1}{m+1}\right), \tag{13b}$$

$$c_1 = -b\left(\log R - \frac{1}{2}\right). \tag{14b}$$

又(12)ヨリ

$$c_3 = -\frac{bR^2}{4}(\log R - 1) - \frac{c_1 R^2}{4}. \tag{12b}$$

(9)ニヨリテ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_t &= -\frac{G}{m-1}z\left\{b\left[(m+1)\log r - \frac{m-1}{2}\right] + (m+1)c_1\right\},\\ \sigma_r &= -\frac{G}{m-1}z\left\{b\left[(m+1)\log r + \frac{m-1}{2}\right] + (m+1)c_1\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{9b}$$

更ニ(11)及(12b)ヨリ

$$\begin{aligned}w &= \frac{br^2}{4}(\log r - 1) + \frac{c_1 r^2}{4} + c_3\\ &= -\frac{b}{4}\left[R^2(\log R - 1) - r^2(\log r - 1)\right] - \frac{c_1}{4}(R^2 - r^2).\end{aligned} \tag{11b}$$

上ノ σ ノ式ヲ見ルニ若シ $r=0$ トオケバ明カニ無限大トナル. 之ハ荷重 Q ガ板ノ中心ニ集中スルト假定シタ爲デ實際ハ中心ニ於ケル小面積タトヘバ小サイ半徑ノ圓周內ニ散布シテ作用スルト考ヘルノガ至當デアル. 尤モ斯ル場合デモ中心ヲ遠ザカル他ノ點デハ上ノ式ヲ用キテ大キナ差ハナイ. 又 w ノ近似値ハ (11b) ニヨリテ計算サレル.

偖中心ニ近イ點ニ於ケル σ ノ値ヲ知ルタメニ圓板ヲ半徑 r_0 ノ圓ヲ以テ內外ノ兩部分ニ分ケ內部ニハ $p = \dfrac{Q}{\pi r_0^2}$ ニ等シイ密度ノ壓力ガ一樣ニ作用スルト見做ス. 又外部ハ $p=0$ ナル狀態ニアル故之等兩部ノ變位ニ對シテ先ヅ(11)ヨリ次ノ形ノ式ヲ書ク. 此處デ常數 a, b 及 c_1, c_3 ハ前カラ使ヒ慣レタモノト同名ノ字ヲ用キテ只區別ノ爲肉太トシタ. 又第二ノ式ニ於テハ c ノ代リニ k ヲ用キタ.

$$\left.\begin{aligned}&\text{內部}\quad r<r_0, &\quad w &= \frac{ar^4}{32} + \frac{c_1 r^2}{4} + c_3,\\ &\text{外部}\quad r>r_0, &\quad w &= \frac{br^2}{4}(\log r - 1) + \frac{k_1 r^2}{4} + k_2\log r + k_3.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

又 a, b ノ値ハ

$$\left.\begin{aligned}&\text{內部}\quad r<r_0, &\quad a &= 3\,\frac{m-1}{m}\,\frac{p}{Gh^3} = 3\,\frac{m-1}{m}\,\frac{Q}{\pi G r_0^2 h^3},\\ &\text{外部}\quad r>r_0, &\quad b &= 3\,\frac{m-1}{m}\,\frac{Q}{\pi G h^3} = a r_0^2.\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

兩圓板周圍ノ條件トシテハ $r=R$ ノ時 $w=0$ 並ニ支持ノ方法ニヨリテ或ル一ツノ條件ガアル. 次ニ $r=r_0$ ニ對シテ兩圓板ノ w, θ 及 $\dfrac{d\theta}{dr}$ ガ共通ナルベキ故茲ニ三ツノ條件ガ存在シ合セテ五ツノ條件ガ滿足サレル樣ニ同數ノ常數 c 及 k ヲ定メルコトガ出來ル.

先ヅ $r=r_0$ ニ於ケル條件中 θ 及 $\dfrac{d\theta}{dr}$ ノ連續性ヲ式デ示セバ

$$\left.\begin{aligned}\frac{ar_0^3}{8} + \frac{c_1 r_0}{2} &= \frac{br_0}{2}\left(\log r_0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{k_1 r_0}{2} + \frac{k_2}{r_0},\\ \frac{3ar_0^2}{8} + \frac{c_1}{2} &= \frac{b}{2}\left(\log r_0 + \frac{1}{2}\right) + \frac{k_1}{2} - \frac{k_2}{r_0^2}.\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

之等兩式ヨリ k_1 ヲ消去スレバ

$$\frac{ar_0^2}{4}=\frac{b}{2}-\frac{2k_2}{r_0^2}.$$

又ハ(24)ニヨリテ

$$k_2=\frac{br_0^2}{4}-\frac{ar_0^4}{8}=\frac{br_0^2}{8}.$$

次ニ同ジ二式ヨリ k_2 ヲ消去シテ

$$c_1=b\,\log r_0+k_1-\frac{ar_0^2}{2}=b\left(\log r_0-\frac{1}{2}\right)+k_1.$$

モシ周邊ガ自由ニ支ヘラル時ハ $r=R$ ニ對シテ $\sigma_r=0$ ナル故

$$\frac{k_1}{2}(m+1)-\frac{k_2}{R^2}(m-1)+(m+1)\frac{b}{2}\log R+\frac{b}{4}(m-1)=0,$$

即

$$k_1=\frac{2k_2}{R^2}\frac{m-1}{m+1}-b\left[\log R+\frac{1}{2}\frac{m-1}{m+1}\right].$$

故ニ

$$k_1=b\left[\frac{1}{4}\frac{m-1}{m+1}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2-\log R-\frac{1}{2}\frac{m-1}{m+1}\right].$$

從テ(13b)トハ別ノ意味ニ用キラレタ常數 c_1 ハ次ノ樣ニナル.

$$c_1=b\left[\log\frac{r_0}{R}-\frac{m}{m+1}+\frac{1}{4}\frac{m-1}{m+1}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right]$$

$$=3\frac{m-1}{m}\frac{Q}{\pi Gh^3}\left[\log\frac{r_0}{R}-\frac{m}{m+1}+\frac{1}{4}\frac{m-1}{m+1}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right]. \qquad (26)$$

又モシ周邊ガ完全ニ固定サレル時ハ $r=R$ ニ對シテ $\theta=0$. 故ニ

$$\frac{b}{2}R\left(\log R-\frac{1}{2}\right)+\frac{k_1R}{2}+\frac{k_2}{R}=0,$$

即

$$k_1=-\frac{2k_2}{R^2}-b\left(\log R-\frac{1}{2}\right)=-b\left[\log R-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right].$$

從テ

$$c_1=b\left[\log\frac{r_0}{R}-\frac{1}{4}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right]$$

$$=3\frac{m-1}{m}\frac{Q}{\pi Gh^3}\left[\log\frac{r_0}{R}-\frac{1}{4}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right]. \qquad (27)$$

斯樣ニシテ三ツノ常數ヲ求メタガ殘ル二ツノ常數ハ上ニ用キナカツタ他ノ二條件カラ求メラレル. 併シ只今ノ目的ニ對シテハ上ノ常數ヲ以テ足ルノデアル.

圓板ノ中心ヲ含ム半徑 r_0 ノ圓内ニ於テハ b 及 c_2 ガ零デ此點ニ關シテハ(9a)ノ時ト同樣ノ狀況ニアル. 依テ常數 a, c_1 ヲ用キテ

$$\sigma_t=-\frac{G}{m-1}z\left[(m+3)\frac{a}{4}r^2+(m+1)c_1\right],$$

$$\sigma_r=-\frac{G}{m-1}z\left[(3m+1)\frac{a}{4}r^2+(m+1)c_1\right].$$

板ノ中心 $r=0$ ニ對シテハ

$$\sigma_t=\sigma_r=-\frac{m+1}{m-1}Gzc_1. \qquad (28)$$

(i) 自由ニ支ヘラレタ場合.

先ヅ内外部ノ區別ヲ要セザル計算ニ對シテハ(13b)ヨリ

$$c_1=-b\left(\log R+\frac{1}{2}\frac{m-1}{m+1}\right).$$

本節初メノ注意ニ從ヒ此式ヲ(9b)ニ入レテ中心ヨリ遠イ部分ノ σ_t, σ_r ノ式ヲ導キ得ルモ普通最モ必要トスル中心又ハ之ニ近イ點ノ値ハ別ニ計算セネバナラヌ故應力ノ計算ハ後廻シトシテ先ヅ(11b)ニヨリテ板ノ撓ミヲ求メヤウ. 今同式中ニ上ノ c_1 ヲ入レテ

$$w=\frac{b}{4}\left[(R^2-r^2)\left(\log R+\frac{1}{2}\frac{m-1}{m+1}\right)-R^2(\log R-1)+r^2(\log r-1)\right]$$

$$=\frac{b}{4}\left[r^2\log\frac{r}{R}+\frac{3m+1}{2(m+1)}(R^2-r^2)\right].$$

又ハ

$$\left.\begin{aligned} w&=\frac{3}{4}\frac{m-1}{m}\frac{Q}{\pi Gh^3}\left[r^2\log\frac{r}{R}+\frac{3m+1}{2(m+1)}(R^2-r^2)\right]\\ &=\frac{3}{2}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{Q}{\pi Eh^3}\left[r^2\log\frac{r}{R}+\frac{3m+1}{2(m+1)}(R^2-r^2)\right].\end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

$r=0$ ニ對スル w ヲ δ トスレバ

$$\delta=\frac{3}{4}\frac{(3m+1)(m-1)}{m^2}\frac{QR^2}{\pi Eh^3}. \qquad (30)$$

次ニ板ノ中心ニ於ケル應力ヲ求メル爲ニハ(26)ノ c_1 ヲ(28)ニ入レテ

$$\sigma_t=\sigma_r=3\frac{m+1}{m}\frac{Qz}{\pi h^3}\left[\frac{m}{m+1}-log\frac{r_0}{R}-\frac{1}{4}\frac{m-1}{m+1}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right].$$

此中ニ $z=\pm\frac{h}{2}$ トオケバ

$$(\pm\sigma)_{max}=\frac{3}{2}\frac{Q}{\pi h^2}\left[1+\frac{m+1}{m}log\frac{R}{r_0}-\frac{1}{4}\frac{m-1}{m}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right]. \tag{31}$$

上ノ式ニ於テ $\left(\frac{r_0}{R}\right)^2$ ハ假定ニヨリテ小ナル故之ヲ略スルモ大差ナキ譯デアル.

(ii) 完全ニ固定サレタ場合.

內外部ノ區別ヲ要セザル計算ニ對シテハ(14b) ヨリ

$$c_1=-b\left(log R-\frac{1}{2}\right).$$

此時ニハ板ノ周圍ニ於ケル應力ヲ計算スル必要アル故先ヅ其近似値ヲ求メル爲ニ上ノ c_1 ノ式ヲ(9b)ニ入レテ

$$\sigma_t=\frac{G}{m-1}bz\left[(m+1)log\frac{R}{r}-1\right],$$

$$\sigma_r=\frac{G}{m-1}bz\left[(m+1)log\frac{R}{r}-m\right].$$

之等ノ式ニ b ノ値ヲ入レル時ハ

$$\sigma_t=\frac{3}{m}\frac{Qz}{\pi h^3}\left[(m+1)log\frac{R}{r}-1\right],$$

$$\sigma_r=\frac{3}{m}\frac{Qz}{\pi h^3}\left[(m+1)log\frac{R}{r}-m\right].$$

$r=R$, $z=\pm\frac{h}{2}$ トオイテ周邊兩極端ノ應力ヲ求メレバ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_t&=\mp\frac{3Q}{2\pi mh^2},\\ \sigma_r&=\mp\frac{3Q}{2\pi h^2}.\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

又板ノ撓ミニ關シテハ(11b)ヨリ

$$w=\frac{b}{4}\left[(R^2-r^2)\left(log R-\frac{1}{2}\right)-R^2(log R-1)+r^2(log r-1)\right]$$

$$=\frac{b}{4}\left[r^2 log\frac{r}{R}+\frac{R^2-r^2}{2}\right].$$

又ハ

$$w=\frac{3}{4}\frac{m-1}{m}\frac{Q}{\pi G h^3}\left[r^2 log\frac{r}{R}+\frac{R^2-r^2}{2}\right]$$

$$=\frac{3}{2}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{Q}{\pi E h^3}\left[r^2 log\frac{r}{R}+\frac{R^2-r^2}{2}\right]. \tag{33}$$

$r=0$ ニ對スル w ノ値ヲ δ トスレバ

$$\delta=\frac{3}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{QR^2}{\pi E h^3}. \tag{34}$$

終リニ板ノ中心ニ於ケル應力ヲ求メル爲ニハ(27)ノ c_1 ヲ(28)ニ入レテ

$$\sigma_t=\sigma_r=3\frac{m+1}{m}\frac{Qz}{\pi h^3}\left[log\frac{R}{r_0}+\frac{1}{4}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right].$$

之ニ $z=\pm\frac{h}{2}$ トオイテ

$$(\pm\sigma)_{max}=\frac{3}{2}\frac{m+1}{m}\frac{Q}{\pi h^2}\left[log\frac{R}{r_0}+\frac{1}{4}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right]. \tag{35}$$

例題 1. 圓板ノ應力計算.

周邊ニ於テ自由ニ支ヘラレテ全面ニ一様ナル壓力ヲ受ケル圓板ノ略式計算法ヲ III 章曲ゲノ後ニ例題 8 トシテ示シ且其結果ヲ本章ノ計算ノ結果ト比較シタ. 卽略式計算ニ依レバ半徑 r ノ圓板ニ對シテ

$$\sigma=p\frac{r^2}{h^2}.$$

然ルニ(16)ニ依レバ

$$\sigma=\frac{3}{8}\frac{3m+1}{m}\frac{r^2}{h^2}p.$$

モシ $m=\frac{10}{3}$ トスレバ $\sigma=1.24\frac{r^2}{h^2}p$. 故ニ略式計算ノ結果ハ 1 ヨリ大ナル補正係數ヲ附ケテ修正スベキ事前ニ述ベタ通リデアル.

例題 2. 板ノ厚サヲ定メル規則ノ吟味.

周邊ニ於テ自由ニ支ヘラレテ一樣ナル壓力ヲ受ケル圓板ニ於テ

$h=$ 板ノ厚サ cm,

$d=$ 圓板ノ直徑 cm,

$p=$ 壓力 kg/cm^2

トシテ h ヲ定メタルタメニ次ノ規則ヲ用キルト假定スル.

$$h=0.017\,d\sqrt{p}.$$

然ル時ハ之ハ如何ナル應力ヲ許ス事トナルカ.

(16)ニヨリテ

$$\sigma=\frac{3}{8}\frac{3m+1}{m}p\left(\frac{d}{2h}\right)^2.$$

$m=\dfrac{10}{3}$ トスレバ

$$\sigma=1.24\,p\left(\frac{d}{2h}\right)^2.$$

上ノ規則ニヨレバ

$$p\left(\frac{d}{2h}\right)^2=\frac{1}{0.034^2}.$$

從テ

$$\sigma=1073\quad kg/cm^2.$$

例題 3. 圓周ヲ固定シ中心ヨリ距離 c ニ於テ荷重 Q ヲ受ケル圓板ノ中心ノ撓ミヲ見出スコト.

偏心荷重ノ圓板各部ノ撓ミヲ求メ樣トスル事ハ簡單ナル計算デ行ハレナイ. 此點ニ關シテハ Love ノ著書[1] ヲ參考シテ下サイ. 玆ニハ特ニ圓板中心ノ撓ミ丈ケガ入用デアルトシテ Maxwell ノ定理ヲ應用シヤウ. 此定理ニ從ヘバ偏心荷重ノタメニ生ズル圓板中心ノ撓ミハ中心ニ同ジ荷重ガ作用シタ場合ニ中心ヨリノ距離 c ニアル點ノ撓ミト相等シキ譯ナル故本章ノ (33) ニヨリテ $r=c$ トスレバ直ニ次ノ式ガ書ケル.

1) The Mathematical Theory of Elasticity, 2 版, 467 頁; 4 版, 490 頁.

$$w=\frac{3}{2}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{Q}{\pi Eh^3}\left[c^2\,log\frac{c}{R}+\frac{R^2-c^2}{2}\right].$$

例題 4. 半徑ガ夫レ夫レ r_1 及 r_2 ニ等シイ內外二ツノ圓周デ限ラレタ輪狀ノ圓板ガ荷重ヲ受ケテ曲ル時ニ生ズル撓ミヲ計算スルコト.

兩周邊ハ完全ニ固定サレテ居ルト假定シヤウ. 然ル時ハ $r=r_1$ 並ニ $r=r_2$ ニ對シテ $\theta=-\dfrac{dw}{dr}=0$ ナル故(7)ヨリ

$$\frac{a}{8}r_1^3+\frac{b}{2}r_1\left(log\,r_1-\frac{1}{2}\right)+\frac{c_1}{2}r_1+\frac{c_2}{r_1}=0,$$

$$\frac{a}{8}r_2^3+\frac{b}{2}r_2\left(log\,r_2-\frac{1}{2}\right)+\frac{c_1}{2}r_2+\frac{c_2}{r_2}=0.$$

之等ノ聯立方程式ヲ解イテ

$$c_1=-\frac{a}{4}(r_1^2+r_2^2)-b\left[\frac{r_2^2\,log\,r_2-r_1^2\,log\,r_1}{r_2^2-r_1^2}-\frac{1}{2}\right],$$

$$c_2=\frac{r_1^2r_2^2}{8}\left[a+\frac{4b}{r_2^2-r_1^2}log\frac{r_2}{r_1}\right].$$

次ニ w ニ對スル(11)式中ノ c_3 ヲ定メルタメニハ $r=r_1$ ノ時 $w=0$ トシヤウ. 然ル時ハ

$$w=\frac{a}{32}(r^4-r_1^4)+\frac{b}{4}\left[r^2\,log\,r-r_1^2\,log\,r_1-(r^2-r_1^2)\right]+\frac{c_1}{4}(r^2-r_1^2)+c_2\,log\frac{r}{r_1}.$$

特ニ $r=r_2$ ニ對スル w ノ値ヲ δ トスレバ

$$\delta=-\frac{a}{32}(r_2^4-r_1^4)-\frac{b}{8}(r_2^2-r_1^2)+\frac{r_1^2r_2^2}{8}\left(a+\frac{4b}{r_2^2-r_1^2}log\frac{r_2}{r_1}\right)log\frac{r_2}{r_1}.$$

之ニ(6)ノ a, b ヲ入レテ計算スレバ

$$\delta=\frac{3}{16}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{p}{E}\frac{r_1^2r_2^2}{h^3}\left[\left(\frac{3r_2^2}{r_1^2}-1\right)\left(1-\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)+4\left(1-\frac{4}{1-\frac{r_1^2}{r_2^2}}log\frac{r_2}{r_1}\right)log\frac{r_2}{r_1}\right]$$

$$+\frac{3}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\frac{Pr_1^2}{\pi Eh^3}\left[\frac{r_2^2}{r_1^2}-1-\frac{4}{1-\frac{r_1^2}{r_2^2}}\left(log\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right].$$

此式中ノ p ハ一樣ニ散布サレタ壓力デ又 P ハ外圓周ニ沿ヒテ散布サレタ荷重デアル.