

XXIII. 平面ノ問題.

138. 平面ノ問題ニ於ケル應力函数.

例ヘバ長イ柱體ガ側面ノ外力ノ爲ニ長サノ方向ニ沿ヒテ各部一樣ニ變形スル場合又ハ薄イ板ガ其平面中ニ作用スル外力ノ爲ニ應力ヲ生ズル場合等ニ於テハ平面中ノ變形又ハ應力ヲ論ズレバ足リル. 斯ル問題ヲ取扱フ特別ノ方法トシテ下ノヤウニ進ムコトガ出來ル. 先ヅ物體ノ容積ニ作用スル力ヲ零トスル. 而シテ某平面例ヘバ xy ニ平行ナル任意ノ平面中ニ於ケル剪斷應力ヲ到ル處零トスレバ此平面上ノ垂直應力即 σ_z ハ一ツノ主應力デアツテ且之ハ z ノ方向ニ無關係トナリテ單ニ x 及 y 丈ケノ函数デアルカ又ハ全く不變數デアル. 何トナレバ例ノ直角六面體ノ平衡方程式ニ於テ假定ニヨリテ $X=Y=Z=0, \tau_x=\tau_y=0$ トスレバ其第三式ハ

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

トナルカラデアル. 從テ次ノ二式丈ケガ殘ル.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

之等兩方程式中ノ應力ノ代リニ或ルーツノ函数 F ノ微分係數ヲ導イテ次ノ様ニ書カウ.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ \tau_z &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

之等ノ式ヲ(2)ニ入レレバ平衡ノ條件ニ適フコトハ明カデアル. 此函数 F ヲ Airy ノ應力函数ト云ヒ柱體, 薄板等ノ問題ニ於テハ後ニ説明スル様ニ單ニ x, y ノミノ函数ト見ル事ガ出來ル.

此函数 F ノ満足スベキ微分方程式ニ關シテハ假定ニヨリテ $X=Y=Z=0$ ナル故先ヅ94節(14)ヨリ

$$\Delta e = 0.$$

然ルニ同ジ節ノ(10)ヨリ容易ニ判ル様ニ

$$e = \frac{m-2}{m+1} \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{2G}.$$

故ニ

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0.$$

若シ $\Delta\sigma_z = 0$ ナラバ

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0,$$

又ハ

$$\Delta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) = 0.$$

F ガ x, y ノミノ函数ナル場合ニハ此式ノ演算 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ノ最後ノ項ハ不用トナリテ $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 F = 0$ トナル. 又 F ガ必シモ x, y ノミノ函数ナラズトモ $\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_x + \sigma_y) = 0$ ナラバ同ジ式ガ成立ツ.

139. 平面變形.

先ヅ z ノ方向ニ不定ノ長サヲ有スル柱體ノ側面ニ力ガ作用シテ其何レノ横斷面ヲ取ルモ變形狀態ガ同様デ且斷面ハ變形後モ依然平面トシテ止ル場合ヲ想像シヤウ. 斯ル xy 平面ニ平行ナル平面中ノ各點デハ彈性變位 u 及 v ハ x 及 y ニヨリテ其值ヲ變ズルモ z ニ對シテハ無關係デアル. 又 w ハ x 及 y ニ對シテ無關係デアル. 此假定ヲ式ニ表セバ

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

從テ94節(11)ノ第三式ニ依リテ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0. \quad (5)$$

此式ノ θ ハ d ト書イテモヨイ. (4)ヨリ直ニ

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \\ \tau_y &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

又(5)ヨリ

$$\frac{\partial w}{\partial z} = c. \quad (7)$$

若シ最後ノ式中ノ常數 c ガ零ナラバ $\varepsilon_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ トナル故 z 軸ニ平行ナル伸ビ及込リガ凡テ消エテ xy 平面ニ平行ナル伸ビ $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ 及込リ τ_x 丈ケガ残り且明カニ $w = 0$ ナル故變位ハ各平面内ニ行ハレル. 此時物體ノ變形ハ純粹ニ平面的デアルト言ヘル. 夫レ故 c ガ零デナイ時ハ夫レハ平面變形ノ上ニ更ニ直角ノ方向ノ一樣ナル伸縮ヲ附加ヘタモノト考ヘラレル. 夫レデ今 c ナ其儘殘シテ書ケバ

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + c. \quad (8)$$

之ヲ z ニ對シテ微分スレバ $\Delta e = 0$ ヲヨリテ當然

$$\frac{\partial e}{\partial z} = 0. \quad (9)$$

倍(6)ヨリ $\tau_x = \tau_y = 0$ トナリテ前節ノ假定條件ニ適スル故 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_z$ ハ應力函数 F ニテ表サレル.

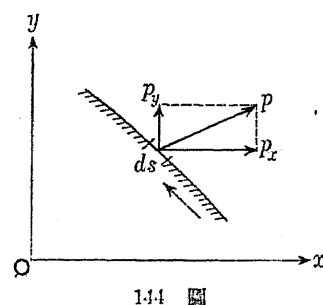
又 F ノ微分方程式ニ關シテハ $\Delta \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \Delta e = 0$ ナル故 $\Delta\sigma_z = 0$. 而シテ σ_x, σ_y ハ z ニ無關係ナル故前節ノ終リニ述べタヤウニ

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (10)$$

之ガ F ノ満足スベキ方程式デアツテ F ハ x, y ノミノ函数デアル. 倍上記方程式ノ解 F ハ xy 平面上ニ於ケル周邊ノ條件ニ適合セネバナラス. 即周邊上ノ任意ノ一點ニ於テ XIV 章ノ(4)ヲ應用スレバ(144圖)

$$p_x = p \cos \lambda = \sigma_x \cos \alpha + \tau_z \cos \beta,$$

$$p_y = p \cos \mu = \tau_z \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta.$$



144 圖

然ルニ

$$\cos \alpha = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \beta = -\frac{dx}{ds}.$$

從テ

$$p_x = \sigma_x \frac{dy}{ds} - \tau_x \frac{dx}{ds},$$

$$p_y = \tau_x \frac{dy}{ds} - \sigma_y \frac{dx}{ds}.$$

之等ノ兩式ニFヲ導ケバ

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right), \\ p_y &= - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} \right) = - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

兩式ヲ積分シテ起點ニ於ケル $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial x}$ ノ値ヲ夫レ夫レ c_1, c_2 トスレバ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \int_0^s p_x ds + c_1, \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= - \int_0^s p_y ds + c_2. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

夫レ故 p_x, p_y ガ與ヘラレル時ハ $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ ガ周邊ニ沿ヒテ如何ニ變ズベキヤヲ知ルコトガ出來ル。特ニ $p_x = p_y = 0$ ナル時 $c_1 = c_2 = 0$ トスレバ $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ ナル故周邊ニ沿ヒテ $F = C$ (常數) トナリ又周邊ヘノ法線ノ方向ニ取ラレタ微分係數 $\frac{\partial F}{\partial n} = 0$ トナル。

今與ヘラレタ問題ニ對シテ周邊ノ條件ヲ滿タス函數 F ガ見出サレル時ハ(3)ニ依リテ應力配布ノ狀態ガ判ル譯デアルガ之ヲ幾何學的ニ説明スレバ xy 平面上ニ垂直線ヲ立テ其長サヲシテ該點ニ於ケル F ノ値ヲ示サシメル時ハ此處ニ或ル曲面ヲ描キ出ス筈デ若シ斯ル曲面ガ作ラレル時ハ(3)ニ從テ其勾配ノ變化スル割合ガ應力ヲ與ヘル事ニナル。

F ガ知ラレル時ハ $\sigma_x, \sigma_y, \tau_x$ ガ直ニ計算サレル事ハ已ニ述ベタ如クデアルガ尙 σ_z モ亦直接 F ヨリ求メラレル。即94節ノ(10)及上ノ(7)ニヨリテ

$$\sigma_x + \sigma_y = 2G \left(\frac{m}{m-2} e - c \right),$$

又ハ

$$e = \frac{m-2}{m} \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2G} + c \right). \quad (13)$$

故ニ

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} + \frac{m+1}{m} 2Gc \\ &= \frac{1}{m} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + Ec. \end{aligned} \quad (14)$$

變形ヲ平面的ニ保ツタメ σ_z ガ一般ニ或ル有様ニ配布サレルヲ要スルケレドモ若シ特ニ之ガ不變ナラバ $\sigma_x + \sigma_y$ ハ常數ニ等シイコトガ判ル。

次ニ尙 x 及 y 軸ノ方向ノ伸ビ並ニ變位ヲ見出スタメニハ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right) \quad \text{及} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} \right)$$

ノ兩式ヲ F ノ形ニ書キ改メ夫レニ積分ヲ施シテ u 及 v ヲ見出ス事ガ出來ル。此積分ニヨリテ生ズル未知函數ヲ定メル際ニハ剪斷應力ノ式即 $G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ ヲ用キル。

140. 平面應力.

此標題デ述べ様トスル應力狀態ニ於テハ z 軸ノ方向ノ凡テノ應力成分ガ零デアル。即

$$\sigma_z = \tau_x = \tau_y = 0. \quad (15)$$

從テ只 xy 平面ニ平行ナル應力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_x$ 丈ケガ存在スル。此時ニハ勿論138節ノ假定ニ適フ故之等應力ハ F ノ微分係數デ表サレルガ F ノ満足スベキ微分方程式ヲ導クタメニハ假定ニヨリテ $\sigma_z = 0$ ナル故

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0,$$

又ハ

$$\Delta \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = 0.$$

此式ニ於テ $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = 0$ トナル事ハ次ノ様ニシテ證明サレル。

假定ニ依リテ $\sigma_z = 0$ ナル故

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{e}{m-2}.$$

然ルニ XVI 章ノ微分方程式(12)ノ第三式ヲ z ニ對シテ微分シ容積ニ作用スル力ヲ含ム項ヲ零ト假定スレバ

$$\Delta \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{m}{m-2} \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} = 0.$$

之ニ上ノ式 $\frac{\partial w}{\partial z}$ ヲ入レル時ハ

$$\Delta e = m \frac{\partial^2 e}{\partial z^2}.$$

然ルニ $\Delta e = 0$ ナル故

$$\frac{\partial^2 e}{\partial z^2} = 0, \quad \text{即} \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (16)$$

故ニ求メル方程式ハ矢張り

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (17)$$

前節ニ述べタ平面變形ノ場合ト異リテ只今ノ場合ニハ應力狀態ガ z 軸ニ沿ヒテ變ジ(16)ニ依レバ e ハ z ニ就テ一次デ詳シク言ヘバ $\frac{\partial e}{\partial z}$ ガ不變デアル。之ヲ證明スル爲 XVI 章(12)ノ第一式ヲ z ニ對シテ又第三式ヲ x ニ對シテ微分シ X 及 Z ヲ含ム項ヲ省略スレバ

$$\Delta \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{m}{m-2} \frac{\partial^2 e}{\partial z \partial x} = 0,$$

$$\Delta \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{m}{m-2} \frac{\partial^2 e}{\partial x \partial z} = 0.$$

$\tau_y = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ ナル故之等兩式ヲ加ヘテ

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x \partial z} = 0. \quad (18)$$

同様ニシテ

$$\Delta \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{m}{m-2} \frac{\partial^2 e}{\partial z \partial y} = 0,$$

$$\Delta \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{m}{m-2} \frac{\partial^2 e}{\partial y \partial z} = 0.$$

$\tau_x = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ ナル故之等兩式ヨリ

$$\frac{\partial^2 e}{\partial y \partial z} = 0. \quad (19)$$

(16), (18), (19) ノ結果ヲ綜合スレバ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial e}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial e}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial e}{\partial z} \right) = 0.$$

從テ

$$\frac{\partial e}{\partial z} = K \text{ (常數)}. \quad (20)$$

141. 平面的ノ力ヲ受ケル板.

xy 平面ニヨリテ厚サ h ガ二等分サレル様ナ平面ノ板ヲ考ヘヤウ。但 h ハ小ト見做シ又計算ヲ簡單ニスルタメニ之ヲ不變ト假定スル。即板ハ各部薄イ均一ノ厚サヲ有スル譯デアル。而シテ其兩表面 $z = \pm \frac{h}{2}$ ニハ應力ノ作用ナク外力ハ只板ノ周圍ニ於テ xy 平面ニ平行ニ作用スル者計リトシ且其配布ハ板ノ中央平面即 xy 平面ニ對シテ對稱ヲ保ツト假定スル。斯ル力ノ作用ヲ受ケル板ノ中央平面ハ依然平面トシテ止ル筈デアルガ之ニ平行ノ兩表面ハ z ノ方向ニ於ケル伸縮ガ必シモ各部均一デナイタメ精密ニ言ヘバ一般ニ曲面トナルガ併シ z ノ方向ノ變位ハ板ノ厚サニ比ベテ尙一段小ナル數デアル。

此場合ニ於ケル應力ノ配布ハ板ノ厚サニ沿ヒテ必シモ一様デハナイデアラウ。併シ假定ノヤウニ若シ h ガ可ナリ小ナラバ此變化ガ左程著シクナイモノト見テ全體ノ厚サ h ニ對スル平均ノ應力ヲ見出し之ヲ以テ實際ノモノニ近似シタ値デアルト見做スコトガ出來ル。前ニ廻轉スル圓板ヲ論ジタ際ニモ應力配布ガ板ノ厚サノ方向ニ於テ一様ト見做シタ點ハ只今ノ場合ト同様デアル。

諸應力ノ平均値並ニ之ニ相當スル變形ノ平均値ヲ取扱フタメニ先ヅ平衡ノ方程式ヲ導ク。即例ノ直角六面體ノ高サ dz ノ代リニ板ノ厚サ h ヲ取り其上下兩表面 $dx dy$ ニハ應力ノ作用ナク其他ノ四面 $h dx$ 及 $h dy$ ニ

作用スル應力ノ平均値ヲ何時モト同ジ様ニ $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ デ表ス。而シテ容積ノ力ヲ省略スレバ當然次ノ方程式ガ書ケル。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

從テ(3)ニ倣ヒ $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ナ x 及 y ノミノ或ル函數 F カラ導クコトガ出來ル。即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

彈性變位ト應力トノ關係ハ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} \right), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x}{m} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\tau_{xy}}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

最初ノ二式カラ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{mE}{m^2-1} \left(m \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{2G}{m-1} \left(m \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \sigma_y &= \frac{mE}{m^2-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{2G}{m-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

平面變形ノ場合ニハ(8)ニヨリテ $c = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + c$ ナル故

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2G}{m-2} \left[(m-1) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + c \right], \\ \sigma_y &= \frac{2G}{m-2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + (m-1) \frac{\partial v}{\partial y} + c \right]. \end{aligned}$$

若シ板ガ純粹ニ平面的ノ變形ヲナスモノト假定スレバ $c=0$ ナル故

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2G}{m-2} \left[(m-1) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right], \\ \sigma_y &= \frac{2G}{m-2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + (m-1) \frac{\partial v}{\partial y} \right]. \end{aligned}$$

前ノ平面板ニ對スル式(24)ニ於テハ之等ノ兩式中ノ $m-1$ ノ代リニ m ガ含マレテ居ル事ヲ知ル。

偕(23)ノ最初ノ兩式ヲ夫レ夫レ y 及 x ニ對シテ二度微分シテ加ヘレバ

$$\frac{1}{E} \left[\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \frac{1}{m} \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) \right] = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{G} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

又ハ F ノ形ニ書キ換ヘレバ

$$\frac{1}{E} \left[\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \frac{2}{m} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = -\frac{2(m+1)}{mE} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2},$$

即

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (25)$$

之ハ微分方程式(10)ト同ジ式デ前ニ述ベタ様ニ F ハ x, y ノミノ函數デアル。結局平面板ニ於ケル平均應力ノ計算ハ m ノ項ヲ換ヘレバ平面變形ノ場合ト同様ニ取扱ツテ宜シイ事ガ判ル。尙周邊ノ條件ニ關シテモ平均ノ應力ニ對シテ(11)ト同様ノ式ヲ書ク事ガ出來ル。

平面板ノ模型ヲ用キテ二次元應力問題ヲ實驗的ニ解ク方法ノ一ツトシテ所謂光彈性ノ應用盛ニ行ハレ又之ニ關スル研究モ少クナイ。此方法ハ計算ニヨリテハ解決困難ナル問題ヲ解ク爲ニ便利デアル。

142. 極座標

直交座標軸 x, y ヲ用キル代リニ次ノ關係式ニヨリテ x, y ト結び付ケラレル極座標ヲ以テ應力函數 F ニ對スル方程式ヲ書キ換ヘヤウ。¹⁾ 即

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

之等兩式ヨリ $r^2 = x^2 + y^2$, $\tan \varphi = \frac{y}{x}$ ナル故

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi,$$

又

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y \cos^2 \varphi}{x^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos^2 \varphi}{x} = \frac{\cos \varphi}{r}.$$

1) F ハ應力トノ關係カラ見テ首肯サレル様ニ點ノ位置ニヨリテ定マリ座標ヲ變ヘテモ其値ガ變ラナイ筈デアル。

從テ

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}.\end{aligned}$$

之等ヲ更ニ夫レ夫レ微分シテ

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \cos^2 \varphi + \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\sin^2 \varphi}{r} - \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi} \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r} \\ &\quad + \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r^2},\end{aligned}$$

並ニ

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \sin^2 \varphi + \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\cos^2 \varphi}{r} + \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi} \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r} \\ &\quad + \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} - \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r^2}.\end{aligned}$$

故ニ

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}. \quad (26)$$

次ニ上ノ F ノ代リニ ΔF ヲ入レル時ハ F ノ微分方程式ハ下ノ様ニ書ケル。

$$\Delta \Delta F = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 F = 0. \quad (27)$$

之ガ求メル極座標ノ方程式デアル。

諸應力 σ_r, σ_t ヲ以テ夫レ夫レ半径及之ニ直角ノ方向ノ垂直應力ヲ表シ又 τ ヲ以テ兩方向ノ間ノ角ヲ變ズル様ニ作用スル剪斷應力ヲ示ス。之等ノ應力ノ中 σ_r, σ_t ハ x 軸ヲ r ノ方向ニ一致セシメ即 $\varphi = 0$ トスレバ $\sigma_r = \sigma_x, \sigma_t = \sigma_y$ トシテ上ノ計算ノ結果ヨリ導カレル。又 τ ヲ求メル爲次ノ微分係數ヲ導ク。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right) \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \partial r} \right) (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi).\end{aligned}$$

$\varphi = 0$ ニ相當シテ $\cos \varphi = 1, \sin \varphi = 0$ トスレバ上ノ計算ニ依リテ應力ノ

式ハ次ノ形ニナル。

$$\left. \begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}, \\ \sigma_t &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \\ \tau &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right).\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

此結果ヲ見ルニ

$$\sigma_r + \sigma_t = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = \Delta F$$

トナリテ F ノ微分方程式(27)ハ次ノ様ニ書ケル。

$$\Delta(\sigma_r + \sigma_t) = 0. \quad (29)$$

最後ニ極座標ニテ表サレタ變形ノ式ヲ導イテ本節ヲ結ブ事ニスル。今半径 r ノ方向ニ於ケル彈性變位ヲ u' トシ又圓周方向ニ於ケル變位ヲ v' トスレバ之等ハ r 及 φ ノ函數デアル。

諸直交座標軸ニ對スル彈性變位ヲ例ノ如ク u, v ニテ表セバ

$$\begin{aligned}u &= u' \cos \varphi - v' \sin \varphi, \\ v &= u' \sin \varphi + v' \cos \varphi.\end{aligned}$$

故ニ

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \left(\frac{\partial u'}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial v'}{\partial r} \sin \varphi \right) \cos \varphi \\ &\quad - \left(\frac{\partial u'}{\partial \varphi} \cos \varphi - u' \sin \varphi - \frac{\partial v'}{\partial \varphi} \sin \varphi - v' \cos \varphi \right) \frac{\sin \varphi}{r}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \left(\frac{\partial u'}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial v'}{\partial r} \cos \varphi \right) \sin \varphi \\ &\quad + \left(\frac{\partial u'}{\partial \varphi} \sin \varphi + u' \cos \varphi + \frac{\partial v'}{\partial \varphi} \cos \varphi - v' \sin \varphi \right) \frac{\cos \varphi}{r}.\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= \left(\frac{\partial u'}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial v'}{\partial r} \cos \varphi \right) \cos \varphi \\ &\quad - \left(\frac{\partial u'}{\partial \varphi} \sin \varphi + u' \cos \varphi + \frac{\partial v'}{\partial \varphi} \cos \varphi - v' \sin \varphi \right) \frac{\sin \varphi}{r}\end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\partial u'}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial v'}{\partial r} \sin \varphi \right) \sin \varphi$$

$$+ \left(\frac{\partial u'}{\partial \varphi} \cos \varphi - u' \sin \varphi - \frac{\partial v'}{\partial \varphi} \sin \varphi - v' \cos \varphi \right) \frac{\cos \varphi}{r}.$$

$\varphi = 0$ トオケバ $\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_r$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_t$, $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma$ トナル. 從テ三ツノ變形成分ノ式ハ次ノ様ニ書ケル.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u'}{\partial r}, \\ \varepsilon_t &= \frac{u'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \varphi}, \\ \gamma &= \frac{\partial v'}{\partial r} - \frac{v'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

此處ニ F 函數應用ノ簡單ナル例トシテ長イ圓筒ガ其軸ノ周リニ對稱デ且長サノ方向ニ一樣ナル變形ヲナス場合ヲ論ジャウ. 變形ガ平面的ナル點ヨリ見テ F ハ一般ニ r, φ ノ函數デアアルケレドモ軸ニ對シテ對稱ノ假定ニヨリテ φ ノ値ニ對シテ無關係ナル故結局 F ハ r 丈ケノ函數デアアル. 而シテ σ_z テ不變ト假定スレバ 139 節ノ終リニ述ベタ様ニ他ノ二ツノ直角ノ方向ノ應力ノ和ガ常數トナル. 即

$$\sigma_r + \sigma_t = c_1 \text{ (常數).}$$

而シテ之ハ無論微分方程式(29)ヲ満足スル. 夫レ故(28)カラ ∂ ノ代リニ d ヲ用キテ

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = c_1,$$

又ハ

$$r \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{dF}{dr} = c_1 r.$$

之ヲ一度積分スレバ

$$r \frac{dF}{dr} = \frac{c_1}{2} r^2 + c_2,$$

即

$$\frac{dF}{dr} = \frac{c_1}{2} r + \frac{c_2}{r}.$$

更ニ一度積分シ其結果生ズル不必要ナル常數ヲ省ケバ

$$F = \frac{c_1}{4} r^2 + c_2 \log r. \quad (31)$$

之ヨリ

$$\sigma_r = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{r^2},$$

$$\sigma_t = \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{r^2}.$$

此結果ハ XX 章 127 節(12)ト同様デアツテ只常數 A, B ノ代リニ $\frac{c_1}{2}$ 及 $-c_2$ ガ書カレタニ過ギス. 而シテ之等ノ積分常數ハ圓筒内外兩壁ノ條件ニヨリテ定メラレル事曾テ述ベタ如クデアアル.

143. 扇形ノ板.

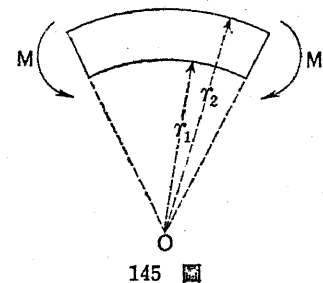
極座標ヲ用キル計算ノ例トシテ二個ノ同心圓弧ヲ以テ内外ノ周邊ヲ作ル板ノ曲グヲ考ヘヤウ. 145 圖. 此目的ニ對シテ次ノ F 函數ヲトル.

$$F = Ar^2 \log r + B \log r + Cr^2. \quad (32)$$

此式ノ右邊ニ於ケル第一項即 A ヲ係數トスル項ガ微分方程式ヲ満足スル事ハ明カデアツテ又他ノ二項ハ共ニ前節(31)ト同ジ形デアアル. F ハ φ ヲ含マヌ故應力ハ圓弧ニ沿ヒテ一樣デアツテ其値ハ(28)ニヨリテ次ノ様ニ計算サレル.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = A(2 \log r + 1) + \frac{B}{r^2} + 2C, \\ \sigma_t &= \frac{d^2 F}{dr^2} = A(2 \log r + 3) - \frac{B}{r^2} + 2C, \\ \tau &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

圓弧ノ内外兩半径ヲ夫レ夫レ r_1 及 r_2 トスレバ兩周邊ニ於テ $\sigma_r = 0$ (即 $\frac{dF}{dr} = 0$) ナル故



$$\left. \begin{aligned} A(2\log r_1 + 1) + \frac{B}{r_1^2} + 2C &= 0, \\ A(2\log r_2 + 1) + \frac{B}{r_2^2} + 2C &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

之等兩式ヨリ先ヅ C ヲ消去シテ

$$2A \log \frac{r_2}{r_1} = B \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right),$$

又ハ

$$B = 2A \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \log \frac{r_2}{r_1}. \quad (35)$$

次ニ B ヲ消去シテ

$$C = -A \left[\frac{r_2^2 \log r_2 - r_1^2 \log r_1}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{1}{2} \right]. \quad (36)$$

圓弧ノ半徑ヲ含ム任意ノ斷面ニ於テ引張りノ力ヲ求メル爲 $\sigma_t dr$ ヲ積分スレバ

$$\int_{r_1}^{r_2} \sigma_t dr = \left(\frac{dF}{dr} \right)_{r=r_2} - \left(\frac{dF}{dr} \right)_{r=r_1}. \quad (37)$$

此式ハ(34)ノ第一第二兩條件ニ示サレタ様ニ明カニ零デアル。從テ横斷面ニ引張りノ力ハ作用シナイ。

(35)及(36)ヲ(33)ニ入レテ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2A \left[\log r + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)} \log \frac{r_2}{r_1} - \frac{r_2^2 \log r_2 - r_1^2 \log r_1}{r_2^2 - r_1^2} \right], \\ \sigma_t &= 2A \left[\log r + 1 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)} \log \frac{r_2}{r_1} - \frac{r_2^2 \log r_2 - r_1^2 \log r_1}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

尙殘サレタツノ條件ハ板ノ兩端ニ於ケル曲ゲモーメント M ガ應力 σ_t ノ作ル偶力ノモーメントニ等シイ事デアル。即

$$\int_{r_1}^{r_2} \sigma_t \left(r - \frac{r_1 + r_2}{2} \right) dr = \int_{r_1}^{r_2} \sigma_t r dr = M.$$

此式ニ $\sigma_t = \frac{d^2 F}{dr^2}$ ヲ導イテ積分シ内外兩周邊上ニ於ケル條件ヲ入レレバ

$$M = F_1 - F_2 = A \left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} - \frac{2r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(\log \frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right].$$

斯様ニシテ A ヲ M ノ項ニテ表シタ後之ヲ(38)ニ入レテ σ_r, σ_t ヲ求メル。

$\frac{r_2}{r_1} = n$ トオイテ特ニ σ_t ニ對スル此計算ノ結果ヲ示セバ

$$\sigma_t = \frac{4M}{r_2^2} \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \log \frac{r}{r_1}\right) - \left(\frac{r_1^2}{r^2} + 1\right) \log n}{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2 - \frac{4}{n^2} (\log n)^2}.$$

板ノ厚サヲ1ト見レバ斷面積ハ $f = r_2 - r_1$ 。夫レ故 $(r_1 + r_2) = 2r_m$ トオイテ上ノ式ヲ書き直セバ次ノ様ニナル。

$$\sigma_t = \frac{2M}{f r_m} \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \log \frac{r}{r_1}\right) - \left(\frac{r_1^2}{r^2} + 1\right) \log n}{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{4}{n^2 - 1} (\log n)^2}. \quad (39)$$

r ニ對シテ特別ノ値 $r = r_1, r = r_2$ ヲ入レテ之等ニ相當スル σ_t ヲ夫レ夫レ σ_{t1}, σ_{t2} トスレバ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{t1} &= \frac{2M}{f r_m} \frac{1 - \frac{1}{n^2} - 2 \log n}{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{4}{n^2 - 1} (\log n)^2}, \\ \sigma_{t2} &= \frac{2M}{f r_m} \frac{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^2} \log n}{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{4}{n^2 - 1} (\log n)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

σ_{t1}, σ_{t2} ノ値ト比較スル爲ニ曲線狀ノ棒ニ對スル IX章55節ノ(6)式ヲ引用シヤウ。横斷面矩形ノ場合ニ對スル常數 κ ノ式ヲ取リテ應力 σ ヲ本節ノ記號ニテ表セバ $r = r_1, r = r_2$ ニ對シテ夫レ夫レ次ノ式ヲ得ル。

$$\sigma_1 = \frac{M}{f r_m} \frac{(n+1) \log n - (n^2 - 1)}{(n+1) \log n - 2(n-1)},$$

$$\sigma_2 = \frac{M}{f r_m} \frac{(n+1) \log n - \frac{n^2 - 1}{n}}{(n+1) \log n - 2(n-1)}.$$

上ノ二組ノ式ニ n ノ數値ヲ入レテ共通ノ項 $M/f r_m$ ノ係數ヲ計算スレバ次ノ表ニ示ス様ニ數ヲ得ル。此表ニ依レバ n ガ甚ダ大ナラザル限り相當ニ廣イ範圍内ニ於テ兩方ノ數値ガ略ボ一致スル事ガ判ル。

$n = \frac{r_2}{r_1}$	σ_{t1}	σ_{t2}	σ_1	σ_2	$\frac{\sigma_{t1}-\sigma_1}{\sigma_{t1}} \times 100$	$\frac{\sigma_{t2}-\sigma_2}{\sigma_{t2}} \times 100$
1.1	$-65.073 \frac{M}{f_{rm}}$	$61.068 \frac{M}{f_{rm}}$	$-65.051 \frac{M}{f_{rm}}$	$61.046 \frac{M}{f_{rm}}$	0.03	0.04
1.2	-35.137	31.120	-35.119	31.099	0.05	0.07
1.5	-17.332	13.244	-17.298	13.199	0.2	0.3
2.0	-11.633	7.376	-11.588	7.294	0.4	1.1
3.0	-9.168	4.518	-9.141	4.380	0.3	3.1
4.0	-8.635	3.596	-8.662	3.416	-0.3	5.0
5.0	-8.552	3.147	-8.658	2.932	-1.2	6.8
6.0	-8.628	2.883	-8.834	2.639	-2.4	8.5
8.0	-8.944	2.590	-9.392	2.299	-5.0	11.2
10.0	-9.320	2.434	-10.053	2.105	-7.9	13.5

144. 圓イ孔ヲ有ツ板.

Airy 函数應用ノ他ノ例トシテ標題ノ様ニ孔ノアル板ヲ引張ル時ニ生ズル應力狀態ヲ述ベヤウ. 一般ニ有孔板ノ問題ハ從來數學的ニモ實驗的ニモ屢々研究者ノ注意ヲ惹イテ來タ所デアツテ之ニ關シテ記載スベキ事柄ハ甚ダ多ク例ヘバ故末廣恭二博士¹⁾ノ研究並ニ次ノ節ニ述ベル横田成年博士ノ計算法ガアル. 併シ此處デハ先ヅ A. Föppl ガ其著書中ニ記シテ居ル通り F 函数ヲ用キテ半徑 a ノ圓形ノ孔ヲ有ツ平面板ノ應力配布ヲ論ジヤウ.

今孔ノ中心ヲ極トシテ半徑 r ヲ取り又引張ノ方向ヲ基トシテ之ヨリ角 φ ヲ測ル. 斯ル極座標ヲ用キタ場合ノ函数ハ

$$F = \frac{k}{4} \left[r^2 - 2a^2 \log r - \frac{(r^2 - a^2)^2}{r^2} \cos 2\varphi \right]. \quad (41)$$

式中 k ハ常數デアル. 倍之ヲ(28)ニ入レテ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{k}{2} \left[1 - \frac{a^2}{r^2} + \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right] \\ &= \frac{k}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left[1 + \left(1 - \frac{3a^2}{r^2} \right) \cos 2\varphi \right], \end{aligned} \right\}$$

1) Engineering, XCII, 1911, 280 頁. 機械學會誌, XVII, 1914, 55 頁.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= \frac{k}{2} \left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\varphi \right], \\ \tau &= -\frac{k}{2} \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\varphi \\ &= -\frac{k}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 + \frac{3a^2}{r^2} \right) \sin 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

應力函数(41)ハ其第三項ヲ含ム點ニ於テ(31)ト違テ居ル. 前者ガ基礎ノ微分方程式ヲ満足スルヤヲ確メルタメニハ便宜上(29)ノ形ヲ取リテ計算シヤウ.

$$\sigma_r + \sigma_t = k \left[1 - \frac{2a^2}{r^2} \cos 2\varphi \right],$$

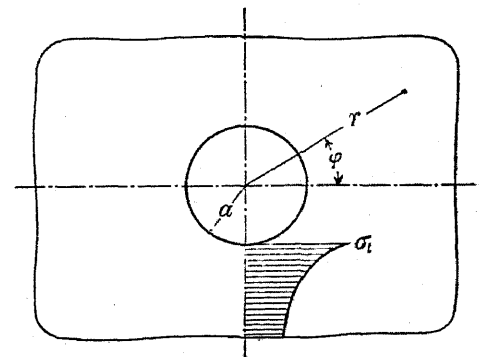
$$\Delta(\sigma_r + \sigma_t) = -2ka^2 \Delta \left(\frac{\cos 2\varphi}{r^2} \right) = 0.$$

即 F ガ基ノ方程式ヲ満足スル故之ガ或ル應力狀態ヲ與ヘル事ハ判ルガ果シテ問題ノ條件ニ適スルカヲ見ルタメニ孔ノ周圍ニ相當シテ $r=a$ ト置イタ場合ノ應力ヲ檢スレバ

$$\sigma_r = \tau = 0,$$

$$\sigma_t = k \left[1 - 2 \cos 2\varphi \right]. \quad (43)$$

孔ノ周圍ニ於テ σ_r 及 τ ガ零トナル事ハ孔ガ空虛ナル只今ノ問題ニ於テ當然満足サレルベキ條件デアルカラ此結果ハ正シイト言ハネバナラヌ. 茲ニ尙附加ヘタイ事ハ $r=a$ ニ對シテ $F=C$, $\frac{dF}{dr}=0$ トナル事デ之等ノ二條件ハ孔ノ周圍ニ外力ノ作用ナキ事ヲ示スモノデアル.



146 圖

次ニ σ_t ハ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ニ於テ最大トナリ次ノ値ヲ取ル.

$$\sigma_{max} = 3k. \quad (44)$$

引張ノ方向ニ對シテ直角ヲナス線上ニ於テ σ_t 即引張ノ方向ノ應力ガ此最大値ヨリ距離ト共ニ次第ニ其値ヲ減少スルコトハ 146 圖ノ下半分ニ曲線デ示ス様デアル。

諸孔ヲ去ルコト遠イ所デハ如何ナル應力ガ生ズルカ。(42)ニ於テ α ニ比ベテ r ヲ非常ニ大ト考ヘレバ $\frac{\alpha}{r}$ ノ二乗及四乗ノ項ヲ消シテ宜シイ。

從テ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{k}{2}(1+\cos 2\varphi) = k \cos^2 \varphi, \\ \sigma_t &= \frac{k}{2}(1-\cos 2\varphi) = k \sin^2 \varphi, \\ \tau &= -\frac{k}{2} \sin 2\varphi = -k \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

板ノ横断面ニ均一ノ應力 k ガ作用スル時ハ k ノ方向ト角 φ ヲナス平面ニハ $k \sin^2 \varphi$ ナル垂直應力ト $k \sin \varphi \cos \varphi$ ニ等シイ剪斷應力トガ生ジ又之ト直角ノ方向ニアル平面ニ於テハ $k \cos^2 \varphi$ ナル垂直應力ト前ノ面ニ於ケルト等大ノ剪斷應力トガ作用スルコトハ容易ニ知ラレル事柄デアツテ上ノ三式ハ孔ノナイ板ノ引張ニ於ケル應力ノ配布ト一致スル。尙(45)ノ τ ノ負號ハ 142 節ニ於テ(28)式ヲ導ク際 $\varphi=0$ ニ對シテ $\tau=\tau_z=-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ ト定義シタ爲素ヨリ當然デ其大サハ XIV 章例題 1ニ於テ求メタ結果ト同様デアル。要スルニ(42)ハ孔カラ遠イ處デモ事實ニ適合スル値ヲ與ヘルモノデアル。

145. 曲線直交座標

變數 α 及 β ニ夫レ夫レ或ル値ヲ與ヘテ之等ヲ暫ク一定ニ保ツ時ハ平面上ノ二曲線ノ方程式ヲ次ノ様ニ表ス事ガ出來ル。

$$f_1(x, y) = \alpha, \quad f_2(x, y) = \beta. \quad (46)$$

之等ノ二曲線ガ互ニ相交ル時ハ交點ノ位置ハ變數 α, β ノ値ニヨリテ表サレル。而シテ特ニ二曲線ガ直交スル時ハ α, β ヲ曲線直交座標ト云フ。彈性體ノ周邊ガ或ル曲線ニテ表サレル時ハ之ニ相當スル座標ヲ用キテ計算スルヲ便トスル故茲ニ曲線直交座標ニ就テ考ヘヤウ。

先ヅ α ヲ常數トスル任意ノ一曲線ヲ引イテ其上ノ一點ニ於テ之ニ法線ヲ引キ α ノ増ス方向ニ向テ法線ノ微小部分ヲ取り其長サヲ dn_1 トスル。偕(46)ニヨリテ曲線直交座標 α, β ハ直線直交座標 x, y ノ函數ナル故後ニ示ス様ニ函數 h_1 ヲ用キテ法線ノ方向餘弦ヲ $\frac{1}{h_1} \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{1}{h_1} \frac{\partial \alpha}{\partial y}$ ト書ケバ dn_1 ハ次ノ様ニ表サレル。

$$dn_1 = \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy \right) = \frac{d\alpha}{h_1}. \quad (47)$$

同様ニ β ヲ常數トスル他ノ曲線ヲ引イテ之ニ對スル法線ノ方向餘弦ヲ $\frac{1}{h_2} \frac{\partial \beta}{\partial x}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial \beta}{\partial y}$ トスレバ其長サ dn_2 ハ次ノ様ニ書ケル。

$$dn_2 = \frac{1}{h_2} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} dx + \frac{\partial \beta}{\partial y} dy \right) = \frac{d\beta}{h_2}. \quad (48)$$

偕方向餘弦ノ二乗ノ和ヲ作りテ

$$\frac{1}{h_1^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 = 1.$$

從テ

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2,$$

同様ニ

$$h_2^2 = \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2. \quad (49)$$

之ニヨリテ h_1, h_2 ガ定マル。一般ニ h_1, h_2 ハ α, β ノ函數デアル。

尙假定ニヨリテ二曲線 $\alpha = \text{const.}$ $\beta = \text{const.}$ ハ互ニ直交スル故 dn_1 及 dn_2 ニ對スル方向餘弦相乘積ノ和ハ零デアル。即

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0. \quad (50)$$

次ニ函數 F ノ x, y ニ對スル微分係數ヲ α, β ニ對スル夫レニテ表ス。但簡單ノ爲ニ dn_1 ノ方向ヲ x 軸ニ平行トシ dn_2 ノ方向ヲ y 軸ニ平行ニ

取ル。然ル時ハ $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = h_1, \frac{\partial \beta}{\partial y} = h_2, \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0$ 。

從テ(49)ヨリ

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} = h_2 \frac{\partial h_1}{\partial \beta},$$

又(50)ヨリ

$$h_1 \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + h_2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} = 0, \text{ 即 } \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} = -\frac{h_2^2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \beta}.$$

夫レ故

同様ニ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= h_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + h_1 \frac{\partial h_1}{\partial \alpha} \frac{\partial F}{\partial \alpha} - \frac{h_2^2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \beta} \frac{\partial F}{\partial \beta} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= h_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} + h_2 \frac{\partial h_2}{\partial \beta} \frac{\partial F}{\partial \beta} - \frac{h_1^2}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

尙又

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} = h_2 \frac{\partial h_1}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} = h_1 \frac{\partial h_2}{\partial \alpha}$$

等ヲ用キテ

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = h_1 h_2 \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta} + h_2 \frac{\partial h_1}{\partial \beta} \frac{\partial F}{\partial \alpha} + h_1 \frac{\partial h_2}{\partial \alpha} \frac{\partial F}{\partial \beta}. \quad (52)$$

α 及 β ヲ常數トスルニ曲線ニ夫レ夫レ直角ノ方向ノ垂直應力ヲ σ_α , σ_β トシ又兩曲線ニ沿フ剪斷應力ヲ $\tau_{\alpha\beta}$ トスレバ只今ノ x, y 軸ニ對シテ

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (53)$$

ナル故之等ノ式ノ右邊ヲ上ノ式(51), (52)ニテ置換ヘテ應力ノ計算ヲナス事ガ出來ル.

又(51)ノ兩式ヲ加ヘテ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= h_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + h_1 \frac{\partial h_1}{\partial \alpha} \frac{\partial F}{\partial \alpha} - \frac{h_1^2}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \\ &\quad + h_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} + h_2 \frac{\partial h_2}{\partial \beta} \frac{\partial F}{\partial \beta} - \frac{h_2^2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \beta} \frac{\partial F}{\partial \beta}. \end{aligned}$$

此等式ノ左邊ハ x, y 軸ノ方向ニ無關係ナル故前ニ假定シタ様ナ兩軸ノミナラズ一般ニ¹⁾

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = h_1 h_2 \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial F}{\partial \beta} \right) \right]. \quad (54)$$

此關係ヲ用キテ F ノ微分方程式ガ書ケル.

極座標(142節)ヲ曲線座標ノ一ツノ特別ノ場合ト見テ次ノ様ニ書ク.

- 1) 別ノ導キ方ハタトヘバ次ノ書ヲ參考シテ下サイ. W. E. Byerly, Fourier's Series and Spherical Harmonics, 238 頁. P. Frank u. R. v. Mises, Die Differential-und Integralgleichungen, I, 2 版, 82 頁.

$$dn_1 = \frac{d\alpha}{h_1} = dr, \quad dn_2 = \frac{d\beta}{h_2} = r d\varphi.$$

α ノ代リニ r ヲ又 β ノ代リニ φ ヲ書ケバ $h_1 = 1, h_2 = \frac{1}{r}$ トナル. 從テ前ニ述べタ様ニ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

次ノ特別ノ例トシテ橢圓座標ヲ取り下ノ様ニオク.

$$\left. \begin{aligned} x &= c \cosh \alpha \cos \beta, \\ y &= c \sinh \alpha \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

之等兩式ヨリ β 及 α ヲ消去シテ

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \alpha} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \alpha} &= 1, \\ \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \beta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \beta} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

夫レ故 $\alpha = \text{const.}$ トスレバ(56)ノ第一式ハ橢圓ヲ表シ又 $\beta = \text{const.}$ トスレバ第二式ハ双曲線ヲ表ス. 而シテ之等二組ノ曲線ハ互ニ直交スル. 又(49)ニ於テ

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{c^2 (\cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta)}.$$

書キ換ヘテ

$$h_1^2 = h_2^2 = \frac{2}{c^2 (\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)}. \quad (57)$$

$h_1 = h_2 = h$ トオケバ(54)ニヨリテ

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = h^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} \right).$$

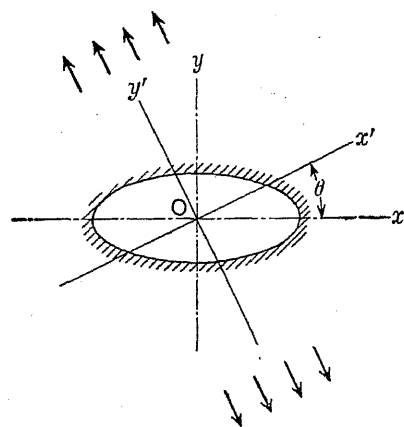
從テ應力函數ノ満足スベキ微分方程式ハ次ノ様ニナル.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) h^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) F = 0. \quad (58)$$

斯ル曲線直交座標ヲ用キル計算ノ例ヲ次ノ節ニ述ベヤウ.

146. 楕圓形ノ孔ヲ有ツ板.

楕圓形ノ孔ヲ有ツ無限ノ板ノ問題ハ C. E. Inglis,¹⁾ 横田成年博士²⁾ 等



147 圖

ニヨリテ研究サレタ。茲ニハ此問題
ヲ應力函數ノ方法ニヨリテ論ジャウ。
平面ノ板ガ一個ノ楕圓形ノ孔ヲ有チ
其一主軸ニ對シテ或ル傾ヲナスカニ
テ引張ラレル場合ヲ考ヘル。前節ニ
述べタ楕圓座標ヲ用キテ孔ノ周邊ヲ
 $\alpha = \alpha_0$ トシテ表シ此孔ノ外部ニ相當
スル板ハ無限ノ擴リヲ有ツト見做ス。
又 147 圖ニ示ス様ニ外力ノ方向ト y
軸トノ間ノ角ヲ θ ニテ示ス。然ル時

ハ T. Pöschl³⁾ ノ論文ヨリ次ノ應力函數ヲ書ク事ガ出來ル。

$$F = \frac{pc^2}{8} \left[\sinh 2\alpha - 2\alpha (\cosh 2\alpha_0 + \cos 2\theta) + e^{2\alpha_0} (\cosh 2(\alpha - \alpha_0) - 1) \cos 2(\beta - \theta) - e^{-2(\alpha - \alpha_0)} \cos 2\theta \right]. \quad (59)$$

此式ハ次ノ様ナ α, β ノ函數ヨリ成立ツ。

$$\alpha, \sinh 2\alpha, \sin 2\beta, \frac{\cosh 2\alpha}{\sinh 2\alpha} \times \cos 2\beta, \frac{\cosh 2\alpha}{\sinh 2\alpha} \times \sin 2\beta, e^{-2\alpha} + \cos 2\beta.$$

之等ノ中 $\sinh 2\alpha, \sin 2\beta$ 及最後ノ $e^{-2\alpha} + \cos 2\beta$ ニ就テハ之等ガ前節ノ微分
方程式(58)ヲ満足スル事ハ計算ニヨリテ確メラレル。又其他ノ式ハ何レ
モ方程式 $\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) F = 0$ ヲ満足スル故無論(58)ノ解デアル事ハ容易
ニ判ル。

偕上ノ應力函數ノ満足スル周邊ノ條件ヲ考ヘル爲ニ先ヅ楕圓ノ周邊

1) Trans. Inst. Naval Architects, LV, Part I, 1913, 219 頁.

2) 東京數學物理學會記事, 8, 1915, 66 頁.

3) Mathematische Zeitschrift, 11, 1921, 89 頁.

ニ對シテ $\alpha = \alpha_0$ トオケバ(59)ノ F ハ常數トナル。次ニ(47)ヨリ $d\alpha = h dn_1$
ナル故

$$\frac{\partial F}{\partial n_1} = \left[h \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=\alpha_0} = 0.$$

夫レ故孔ノ周邊ニ於テハ應力ガ作用シナイ。

次ニ孔ヲ去ル事遠イ部分ヲ考ヘルニ α ガ非常ニ大トナレバ

$$F = \frac{pc^2}{16} e^{2\alpha} [1 + \cos 2(\beta - \theta)] = \frac{pc^2}{8} e^{2\alpha} \cos^2(\beta - \theta).$$

然ルニ α 大ナル時ハ

$$x = \frac{c}{2} e^{\alpha} \cos \beta, \quad y = \frac{c}{2} e^{\alpha} \sin \beta.$$

從テ

$$x \cos \theta + y \sin \theta = \frac{c}{2} e^{\alpha} \cos(\beta - \theta).$$

故ニ F ハ次ノ形ニ書ケル。

$$F = \frac{p}{2} (x \cos \theta + y \sin \theta)^2. \quad (60)$$

Ox 軸ニ對シテ傾斜角 θ ヲ有ツ Ox' 軸ヲ引ケバ此軸ニ沿ヒテ測リタル
座標 x' ハ上ノ括弧内ノ式ニ相當スル。夫レ故

$$F = \frac{p}{2} x'^2. \quad (61)$$

斯ル F ハ Ox' ニ直角ノ方向ニ於ケル垂直應力 p ヲ與ヘル。何トナレバ

$$\sigma_{y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} = p.$$

次ニ應力ノ式ハ(53)ヨリ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} + h \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial F}{\partial \beta} - h \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial F}{\partial \alpha}, \\ \sigma_{\beta} &= h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + h \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial F}{\partial \alpha} - h \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial F}{\partial \beta}, \\ \tau_{\alpha\beta} &= -h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta} - h \frac{\partial h}{\partial \beta} \frac{\partial F}{\partial \alpha} - h \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{\partial F}{\partial \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

之等ノ式ニ F, h ヲ入レテ計算ヲ行ヒタル後 $\alpha = \alpha_0$ トオケバ孔ノ周圍ニ

於ケル應力ガ求メラレル。此處デハ當然 $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ トナリ又殘ル σ_y 即
周邊ニ沿フ垂直應力ハ次ノ様ニナル。

$$\sigma_y = \frac{p}{\cosh 2\alpha_0 - \cos 2\beta} \left[\sinh 2\alpha_0 + e^{2\alpha_0} \cos 2(\beta - \theta) - \cos 2\theta \right]. \quad (63)$$

一ツノ特別ノ場合トシテ應力 p ガ Oy 軸ノ方向ニ一致スル場合ヲ考
ヘル爲 $\theta = 0$ トオケバ

$$\sigma_y = \frac{p}{\cosh 2\alpha_0 - \cos 2\beta} \left[\sinh 2\alpha_0 + e^{2\alpha_0} \cos 2\beta - 1 \right]. \quad (64)$$

孔ガ極メテ細イ時ハ $\alpha_0 = 0$ トナル。此場合ニ $\cos \beta \neq 1$ トスレバ其他ノ
各點デ $\sigma_y = -p$ トナル。 $\beta = 0$ 即 $\cos \beta = 1$ ハ細孔ノ一端ニ相當シ此處デ
ハ σ_y ハ不定トナルモ $\alpha_0 = 0$ 就テ此不定形ヲ吟味スレバ $\sigma_y = \infty$ トナル事ガ
判ル。夫レ故細孔ノ兩端ニ於ケル應力ハ非常ニ大トナル。此事ハ尙次
ノ説明ヨリモ明カデアル。

橢圓ノ主半徑ノ長サヲ夫レ夫レ $a, b (a \geq b)$ トスレバ $\beta = 0$ ニ相當スル
點ハ $x = a = c \cosh \alpha_0, y = 0$ デ又 $\beta = \frac{\pi}{2}$ ニ相當スル點ハ即 $x = 0, y = b =$
 $c \sinh \alpha_0$ デアル。前ノ點ノ應力ハ上ノ式ニ $\beta = 0$ トオイテ

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{p}{\cosh 2\alpha_0 - 1} \left[\sinh 2\alpha_0 + e^{2\alpha_0} - 1 \right] \\ &= p \left(1 + \frac{2 \cosh \alpha_0}{\sinh \alpha_0} \right) \\ &= p \left(1 + \frac{2a}{b} \right). \end{aligned} \quad (65)$$

$a = b$ ナル時ハ $\sigma_y = 3p$ トナリテ丸イ孔ノ場合ノ結果ト一致スル。又
 a ニ對シテ b ガ小トナレバ σ_y ハ $3p$ ヨリモ大トナリ b ガ非常ニ小トナレ
バ σ_y ハ非常ニ大トナル事上ニ述べタ如クデアル。

更ニ他ノ特別ノ例トシテ板ガ Ox, Oy 軸ニ平行ナル剪斷應力 k ヲ受ケ
ル場合ヲ考ヘル爲 Oy 軸ト角 $\frac{\pi}{4}$ ナナス正負二組ノ垂直應力ヲ取ル。即
求メル應力函數ヲ $F = F_1 + F_2$ トシテ F_1 ニ對シテハ $\theta = \frac{\pi}{4}, p = -k$ トオ
キ又 F_2 ニ對シテハ $\theta = -\frac{\pi}{4}, p = k$ トオク。然ル時ハ

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{k c^2}{8} \left[\sinh 2\alpha - 2\alpha \cosh 2\alpha_0 + e^{2\alpha_0} (\cosh 2(\alpha - \alpha_0) - 1) \sin 2\beta \right], \\ F_2 &= -\frac{k c^2}{8} \left[\sinh 2\alpha - 2\alpha \cosh 2\alpha_0 - e^{2\alpha_0} (\cosh 2(\alpha - \alpha_0) - 1) \sin 2\beta \right]. \end{aligned}$$

從テ應力函數ハ次ノ様ニナル。¹⁾

$$F = -\frac{k c^2}{4} e^{2\alpha_0} (\cosh 2(\alpha - \alpha_0) - 1) \sin 2\beta. \quad (66)$$

此應力函數ニ相當スル橢圓周邊ノ應力ハ又(63)ヨリ組合セニ依リテモ
求メラレル。即次ノ様ニ

$$\sigma_y = -2k e^{2\alpha_0} \frac{\sin 2\beta}{\cosh 2\alpha_0 - \cos 2\beta}. \quad (67)$$

147. 複素函數ノ應用.

以上述べテ來タ所ハ主トシテ應力函數ヲ用キテ平面問題ノ應力ヲ計
算スル方法デアツタガ複素數 $z = x + iy$ ノ函數ヲ用キテ平面變形ノ問題
ヲ解ク事モ出スル。先ヅ此場合ニ於テ彈性變位ニ對スル基礎ノ一般方
程式ガ如何ナル形トナルカヲ考ヘヤウ。平面板ノ問題ニ對シテハ 141
節ノ注意ニ從ヒ平面變形ノ計算結果ニ於ケル m ノ代リニ $m+1$ ヲ用キレ
バ宜シイ。倍 94 節ノ(11)式ニ於テ平面變形ノ假定ニ從ヒテ 139 節ノ(4)ヨ
リ次ノ様ニオク。即

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = 0.$$

然ル時ハ X, Y ヲ省略シテ一般方程式ノ最初ノ二ツハ次ノ様ニナル。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

之等二式ヲ少シ書キ換ヘレバ

1) A. T. Starr, Slip in a Crystal and Rupture in a Solid due to Shear, Proc. Cambridge Phil. Soc., 24, 1928, 491 頁.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial y} = 0.$$

然ルニ平面變形ニ對シテ $e=0$ トスレバ $e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ ナル故上ノ式ノ
第一項ハ夫レ夫レ e ノ x 及 y ニ對スル微分係數ト見ラレル。次ニ

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega \quad (68)$$

トオケバ

$$\left. \begin{aligned} \frac{m-1}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} &= \frac{\partial \omega}{\partial y}, \\ \frac{m-1}{m-2} \frac{\partial e}{\partial y} &= -\frac{\partial \omega}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

之ハ Cauchy-Riemann 方程式デアツテ若シ $\frac{m-1}{m-2}e+i\omega$ ト云フ式ヲ作レ
バ夫レハ $z=x+iy$ ノ函數デアル。元來 $de=0$ ナル故上ノ關係ヲ満足ス
ル函數 ω ノ存在スル事ハ當然豫期サレル所デアル。依テ次ノ様ニ書ク。

$$f(z) = \frac{m-1}{m-2}e + i\omega. \quad (70)$$

又 $f(z)$ ヲ積分シテ次ノ様ニ書ク。

$$\xi + i\eta = \int f(z) dz. \quad (71)$$

然ル時ハ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{m-1}{m-2}e, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial y} &= \omega. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

而シテ彈性變位 u, v ハ次ノ式ニテ與ヘラレル。

$$\left. \begin{aligned} u &= \xi + \frac{m}{2(m-1)}y \frac{\partial \xi}{\partial y} + u_1, \\ v &= \frac{m-2}{2(m-1)}\eta - \frac{m}{2(m-1)}y \frac{\partial \eta}{\partial y} + v_1. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

但 $v_1 + iu_1$ ハ $x+iy$ ノ函數トスル。即

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\partial v_1}{\partial y}. \quad (74)$$

(73)式ノ導キ方¹⁾ ハ省略スルモ其正シイ事ハ之等兩式ヲ微分シテ e 及 ω
ヲ作レバ明カデアル。何トナレバ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{m-1}{m-2}e + \frac{m}{2(m-2)}y \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{m-2}e - \frac{m}{2(m-2)}y \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

故ニ

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = e.$$

又

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{m-2}{2(m-1)}\omega - \frac{m}{2(m-1)}y \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{3m-2}{2(m-1)}\omega - \frac{m}{2(m-1)}y \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

之ヨリ

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega.$$

148. 平面上ノ一點ニ作用スル力。

複素數ノ函數ヲ用キル計算法ハ例ヘバ平面上ノ一點ニ於テ之ニ平行
ナル力ガ作用スル場合ニ應用サレル。此計算ニ於テ平面ニ直角ナル方
向ノ變形ハ之ヲ零トシヤウ。倍函數 $f(z)$ ニ對シテ平面上ノ某點デ或ル
特異性ヲ表ス様ナ形ヲ取ル。其最モ簡單ナル例ヲ舉ゲレバ

$$f(z) = \frac{A}{z} = \frac{A}{x+iy}. \quad (77)$$

之ハ座標軸ノ原點ニ於テ無限大トナリテ一種ノ特異性ヲ示ス。今 r, φ
ヲ以テ xy 平面ノ極座標トスレバ

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, \\ x + iy &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}. \end{aligned}$$

又(71)ニ於テ

1) 初版 461 頁以下ニ試ミタ。

$$\int f(z) dz = A \log z = A(\log r + i\varphi).$$

從テ

$$\xi = A \log r, \quad \eta = A \varphi. \quad (78)$$

之等ノ式ヲ(73)ニ入レレバ

$$\left. \begin{aligned} u &= A \left(\log r + \frac{m}{2(m-1)} \frac{y^2}{r^2} \right) + u_1, \\ v &= A \left(\frac{m-2}{2(m-1)} \varphi - \frac{m}{2(m-1)} \frac{xy}{r^2} \right) + v_1. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

φ ノタメニ多意性ヲ帯ビテ居ル v テ一意ノ函數トスルタメニ

$$v_1 = -A \frac{m-2}{2(m-1)} \varphi, \quad u_1 = A \frac{m-2}{2(m-1)} \log r$$

トオケバ之等ガ(74)ノ示ス條件ニ適フ事ハ無論デアツテ此時ノ u, v ハ次ノ様ニナル.

$$\left. \begin{aligned} u &= A \left(\frac{3m-4}{2(m-1)} \log r + \frac{m}{2(m-1)} \frac{y^2}{r^2} \right), \\ v &= -A \frac{m}{2(m-1)} \frac{xy}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

u ハ $r=0$ ノ時無限大トナル故原點ハ之ヲ除イテ考ヘネバナラス.

e ハ(80)ヨリ計算スルカ又ハ(72), (78)ニヨリテ

$$e = A \frac{m-2}{m-1} \frac{x}{r^2}. \quad (81)$$

故ニ應力ノ式ハ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= GA \left(\frac{3m-2}{m-1} \frac{x}{r^2} - \frac{2m}{m-1} \frac{xy^2}{r^4} \right), \\ \sigma_y &= GA \left(-\frac{m-2}{m-1} \frac{x}{r^2} + \frac{2m}{m-1} \frac{xy^2}{r^4} \right), \\ \tau_{xy} &= GA \left(\frac{m-2}{m-1} \frac{y}{r^2} + \frac{2m}{m-1} \frac{x^2y}{r^4} \right). \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

原點 $r=0$ ニ於テ之等ノ應力ハ無限大トナル. 之ハ外力ガ一點ニ集中シテ作用スルタメデアツテ實際ノ場合ニハ材料ハ降伏スル. 尙上ノ計算ニ於ケル A ヲ定メル爲ニハ原點ノ周リニ半徑 r ノ圓ヲ描キ其周圍

ニ作用スル應力ト外力トノ間ニ成立スル平衡ヲ考ヘレバ宜シイ. 即平面ノ深サ紙面ニ直角ノ單位ニ對スル x 及 y 軸ノ方向ノ外力ノ分力ヲ夫レ夫レ P 及 Q トスレバ

$$P + \int_0^{2\pi} (\sigma_x \cos \varphi + \tau_{xy} \sin \varphi) r d\varphi = 0,$$

$$Q + \int_0^{2\pi} (\tau_{xy} \cos \varphi + \sigma_y \sin \varphi) r d\varphi = 0.$$

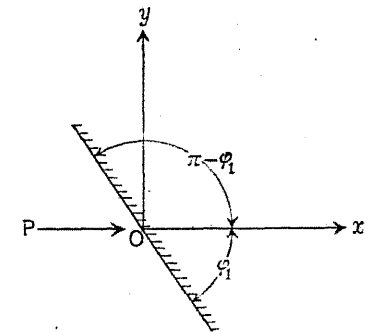
從テ

$$\left. \begin{aligned} P &= -GA \left(\frac{3m-2}{m-1} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi + \frac{m-2}{m-1} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \right) = -4\pi GA, \\ Q &= -GA \frac{2m}{m-1} \left(\int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

上ノ計算ハ圓ノ半徑ニ無關係デアリ又考ヘツツアル面積ノ周圍ニ作用スル力ノ中心ノ周リノモーメントモ明カニ零デアル. 新様ニシテ外力 P ガ與ヘラレレバ係數 A ガ定マル.

149. 周邊上ノ一點ニ作用スル力.

前節ノ問題ニ於テ若シ原點ガ 148 圖ニ示ス様ニ周邊上ニアル時ハ(79)ノ φ ノ値ガ制限サレル故 u, v ノ値ニ關セズ v ハ一意ノ函數トナル. 夫レ故簡單ニ $u_1 = v_1 = 0$ トオケバ u, v ノ式ハ次ノ様ニナル.



148 圖

$$\left. \begin{aligned} u &= A \left(\log r + \frac{m}{2(m-1)} \frac{y^2}{r^2} \right), \\ v &= A \left(\frac{m-2}{2(m-1)} \varphi - \frac{m}{2(m-1)} \frac{xy}{r^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

又 e ハ前節ト同様ニ

$$e = A \frac{m-2}{m-1} \frac{x}{r^2}. \quad (85)$$

故ニ應力ハ次ノ様ニナル。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2GA \frac{m}{m-1} \frac{x^3}{r^4}, \\ \sigma_y &= 2GA \frac{m}{m-1} \frac{xy^2}{r^4}, \\ \tau_{xy} &= 2GA \frac{m}{m-1} \frac{x^2y}{r^4}. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

極座標ヲ用キレバ XIV 章(6)ヨリ直ニ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2GA \frac{m}{m-1} \frac{\cos \varphi}{r}, \quad \sigma_t = 0. \\ \tau &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

又同章(4)ヲ用キテ容易ニ證明サレル様ニ

夫レ故半径ノ方向ニミ應力ガ作用スル事ヲ知ル。從テ又原點ヲ除ケバ直線ノ周邊上ニ應力ノ作用ナキ事モ明カデアアル。

偕原點ニ於テ x 及 y 軸ニ平行ナル力ノ成分ヲ求メル爲原點ノ周リニ半径 r ノ半圓弧ヲ畫キ此圓周ニ於ケル應力ノ兩軸ノ方向ノ分力ヲ求メル時ハ x 軸ニ平行ニ

$$\int_{-\varphi_1}^{\pi-\varphi_1} \sigma_r \cos \varphi r d\varphi = 2GA \frac{m}{m-1} \int_{-\varphi_1}^{\pi-\varphi_1} \cos^2 \varphi d\varphi = GA \frac{m}{m-1} \pi.$$

又 y 軸ニ平行ニ

$$\int_{-\varphi_1}^{\pi-\varphi_1} \sigma_r \sin \varphi r d\varphi = 0.$$

平面ノ深サ(紙面ニ直角)ノ單位ニツキ x 軸ノ方向ニ作用スル外力ヲ P トスレバ

$$P = -GA \frac{m}{m-1} \pi. \quad (88)$$

(88)ヲ(86)ニ入レル時ハ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x^3}{r^4}, \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{\pi} \frac{xy^2}{r^4}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2y}{r^4}. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

$P > 0, x > 0$ ナラバ σ_x, σ_y 共ニ負トナリ又 $x < 0$ ナラバ之等ハ正トナル。

即力ノ向フ方向ニ接スル象限内ニ於テハ壓縮應力ガ作用シ反對ノ象限内ニハ引張應力ガ作用スル。

極座標ヲ用キル場合ニハ(87), (88)ヨリ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \varphi}{r}, \\ \sigma_t &= \tau = 0. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

直線ノ邊ヲ以テ限ラレタ半無限平面内ノ應力状態ハ(89)又ハ(90)ニヨリテ決定サレル。若シ外力 P ガ周邊上ノ一點ニ於テ之ニ直角ナル壓縮力トシテ作用スル時ハ x 軸ヲ平面ノ内部ニ向テ引ケバ宜シク從テ y 軸ハ周邊ト一致スル。又若シ P ガ周邊ニ沿ヒテ作用スル時ハ x 軸ヲ周邊ニ接シテ引ク。而シテ何レノ場合ニモ境界線ニ於ケル應力 σ_t 及 τ ハ零デアアル。尙本節ノ計算ハ應力函數ヲ用キテ之ヲ行フ事モ出來ル。之ハ本章ノ終リノ例題ニ述ベヤウ。

150. 應力ノ一般式。

147 節ニ於テ複素數ノ函數ヲ用キテ彈性變位ノ式ヲ導イタ。本節ニ於テハ更ニ進ンデ複素函數ニ依ル應力ノ一般表示ヲ試ミヤウ。先ヅ前ノ様ニ純粹ノ平面變形ヲ考ヘル事トシテ(75)ノ兩式ヲ用キテ應力ノ式ヲ書ケバ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\frac{m}{m-2} e + \frac{m}{2(m-2)} y \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right), \\ \sigma_y &= 2G \left(-\frac{m}{2(m-2)} y \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

之等兩式ノ差ヲ作レバ $\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\partial v_1}{\partial y}$ ナル故

$$\sigma_x - \sigma_y = 2G \left(\frac{m}{m-2} e + \frac{m}{m-2} y \frac{\partial e}{\partial y} - 2 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right). \quad (92)$$

次ニ(76)ノ兩式ヲ加ヘテ G ヲ乘ズレバ $\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial y}$ ナル故

$$\tau_z = G \left(-\frac{m}{m-1} \omega - \frac{m}{m-1} y \frac{\partial \omega}{\partial y} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right). \quad (93)$$

從テ(92), (93)ヨリ

$$\sigma_x - \sigma_y - 2i\tau_z = 2G \left[\frac{m}{m-1} f(z) + \frac{m}{m-1} y \frac{\partial}{\partial y} f(z) - 2 \frac{\partial}{\partial y} (v_1 + iu_1) \right].$$

簡單ノタメニ次ノ様ニオク.

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{m-1} G f(z) &= g(z), \\ 2g(z) - 4G \frac{\partial}{\partial y} (v_1 + iu_1) &= 2g(z) - 4iG \frac{d}{dz} (v_1 + iu_1) = h(z). \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

然ル時ハ

$$\sigma_x - \sigma_y - 2i\tau_z = 2iy g'(z) + h(z). \quad (95)$$

上ノ式ニ於テ下ノ様ニオク.

$$\left. \begin{aligned} g(z) &= g_1 + ig_2, \\ g'(z) &= g'_1 + ig'_2, \\ h(z) &= h_1 + ih_2. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

之等ノ式ノ右邊ニ於ケル i 以外ノ項ハ何レモ x, y ノ實函數デアル. 又第二式ノ g'_1 及 g'_2 ハ微分係數 $\frac{d}{dz} g(z) = g'(z)$ ノ實部及虚部ニ對スル函數ヲ表ス. 斯ル記號ヲ用キレバ(95)ヨリ下ノ式ガ導カレル.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y &= h_1 - 2yg'_2, \\ \tau_z &= -yg'_1 - \frac{h_2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

次ニ e ハ(70)ニヨリテ $f(z)$ ノ實部ニ比例シ從テ(94), (96)ニヨリテ g_1 ニ比例スル. 今 $\sigma_x + \sigma_y$ テ e 又ハ g_1 ニテ表セバ

$$\sigma_x + \sigma_y = 2G \frac{m}{m-2} e = 2g_1. \quad (98)$$

(97), (98)ヨリ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= g_1 + \frac{h_1}{2} - yg'_2, \\ \sigma_y &= g_1 - \frac{h_1}{2} + yg'_2. \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

一般ニ應力問題ヲ解クタメニハ直線直交座標ノ代リニ曲線直交座標ヲトル方便ナ事ガアル. 曲線直交座標ヲ用キタ場合ノ垂直應力ヲ σ_α , σ_β トシ剪斷應力ヲ $\tau_{\alpha\beta}$ トスレバ先ヅ(98)ヨリ

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_x + \sigma_y = 2g_1. \quad (100)$$

次ニ σ_α ノ方向ト x 軸トノ間ノ角ヲ φ トスレバ XIV章(6)ヨリ σ_α 及 σ_β ハ次ノ様ニナル.

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_z \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$\sigma_\beta = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_z \sin \varphi \cos \varphi.$$

又同章ノ(4)ニ從ヘバ $\sigma_x \cos \varphi - \tau_{\alpha\beta} \sin \varphi = \sigma_x \cos \varphi + \tau_z \sin \varphi$ ナル故之ト上ノ第一式トノ間ニ σ_x ヲ消去スレバ

$$\tau_{\alpha\beta} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_z (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi).$$

從テ

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_\beta - 2i\tau_{\alpha\beta} &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 (\sigma_x - \sigma_y - 2i\tau_z) \\ &= e^{2i\varphi} (\sigma_x - \sigma_y - 2i\tau_z). \end{aligned}$$

此處ニ(95)ヲ導ケバ

$$\sigma_x - \sigma_\beta - 2i\tau_{\alpha\beta} = e^{2i\varphi} [2iy g'(z) + h(z)]. \quad (101)$$

前節ニ於テ周邊上ノ一點ニ作用スル集中荷重ニヨリテ生ズル應力ヲ論ジタ. 此場合ニ於ケル $f(z)$ ハ $\frac{1}{z}$ ノ形ヲ取り又 $u_1 = v_1 = 0$ トシタ. 從テ只今ノ記號ヲ用キテ言ヘバ $g(z)$ ガ $\frac{1}{z}$ ノ形ヲ取り且 $h(z) = 2g'(z)$ トナル. 從テ(101)ハ次ノ様ニ書ケル.

$$\sigma_x - \sigma_\beta - 2i\tau_{\alpha\beta} = 2e^{2i\varphi} [iy g'(z) + g(z)].$$

今 A ヲ實數トシテ $g(z) = \frac{A}{z}$ トオケバ

$$\sigma_x - \sigma_\beta - 2i\tau_{\alpha\beta} = 2Ae^{2i\varphi} \left(\frac{1}{z} - \frac{iy}{z^2} \right) = \frac{2A}{r} \cos \varphi.$$

又(100)ヨリ

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \frac{2A}{r} \cos \varphi.$$

此場合ニハ σ_α ハ半徑方向ノ應力 σ_r トナリテ $\sigma_r = \frac{2A}{r} \cos \varphi$. 又 σ_β , $\tau_{\alpha\beta}$ ノ代

リニ夫レ夫レ σ_i, τ ト書ケバ $\sigma_i = \tau = 0$ トナル. $A = -\frac{P}{\pi}$ トスレバ此結果ハ149節(90)ト合フ.

斯ル一般式ヲ用キル應力計算法並ニ其應用ガ横田成年博士¹⁾ニヨリテ研究サレタ. 其一例トシテ再ビ144節ト同様ナ有孔板ノ計算ヲ繰返シテ其計算法ヲ示シ併セテ前ノ應力函數ニ依ル計算ノ結果ト比ベヤウ.

偕只今ノ様ナ圓孔ノ場合ニハ其中心ヲ極トシテ極座標 r, φ ヲ用キル. 複素數 z ト r, φ トノ間ニハ前ニ述べタ様ニ次ノ關係ガアル. 即 $z = re^{i\varphi}$. 簡單ノタメニ之ヲ $z = rq$ トカク. 而シテ σ_x ガ半徑ノ方向ノ應力ニ又 σ_θ ガ圓周ノ方向ノ應力ニ相當スルモノト定メル. 偕境界ノ條件トシテハ圓周上ノ應力 σ_x ガ各部一樣ノ壓力 p ニ等シク又中心ヨリ非常ニ遠イ部分ニ於テハ應力 σ_x, σ_y ガ夫レ夫レ不變トナリ又 τ_{xy} ハ零ニ等シトシヤウ. 今孔ノ半徑ヲ a トスル時ハ

$$\begin{aligned} r = a, & \quad \sigma_x = -p, \quad \tau_{xy} = 0. \\ r = \infty, & \quad \sigma_x = \sigma, \quad \sigma_y = \sigma', \quad \tau_{xy} = 0. \end{aligned}$$

σ 及 σ' ハ假定ニ基イタ常數デアル. 之等ノ條件ヲ(100)及(101)ノ中ニ入レテ $r = a$ ニ對スル σ_θ ノ値ヲ $(\sigma_\theta)_a$ ト書ク.

$$\begin{aligned} -p + (\sigma_\theta)_a &= 2[g_1]_{r=a}, \\ -p - (\sigma_\theta)_a &= e^{2i\varphi}[2iyg'(z) + h(z)]_{r=a}, \\ \sigma + \sigma' &= 2[g_1]_{r=\infty}, \\ \sigma - \sigma' &= [2iyg'(z) + h(z)]_{r=\infty}. \end{aligned}$$

此問題ニ於テハ應力配布ガ孔ノ中心ニ對シテ對稱デ即 $\varphi + \pi$ ニ於ケル状態ハ φ ニ於ケルト同様デアルカラ函數 $g(z)$ 及 $h(z)$ ヲ z 即 rq ノ偶數乗ノミヲ含ム級數ニ展開シヤウ. 併シ最後ノ二條件カラ直ニ判ル様ニ之等ノ級數ハ常數ノ項カラ始リ冪數ハ必ズ負數ノミニ限ラレル筈デアルカラ下ノ様ニオカレル.

1) 機械學會誌, XVIII, 38, 1915, 1頁; 東京數學物理學會記事, 8, 1915, 38, 66及102頁.

$$\begin{aligned} g(z) &= A_0 + A_2 z^{-2} + \dots, \\ h(z) &= B_0 + B_2 z^{-2} + B_4 z^{-4} + \dots. \end{aligned}$$

尙係數中 i ノ前ノ符號ヲ換ヘタモノヲ $\bar{A}_0, \dots, \bar{B}_0, \dots$ トシテ區別スレバ

$$2g_1 = (A_0 + \bar{A}_0) + \frac{1}{q^2}(A_2 q^{-2} + \bar{A}_2 q^2) + \dots.$$

故ニ考ヘツツアル條件中ノ最後ノ二ツハ

$$\left. \begin{aligned} A_0 + \bar{A}_0 &= \sigma + \sigma', \\ B_0 &= \sigma - \sigma'. \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

次ニ最初ノ二條件ヲ用キテ

$$\begin{aligned} -p + (\sigma_\theta)_a &= (A_0 + \bar{A}_0) + \frac{1}{a^2}(A_2 q^{-2} + \bar{A}_2 q^2) + \dots, \\ -p - (\sigma_\theta)_a &= q^2 \left[a(q - q^{-1})(-2A_2 a^{-2} q^{-2} - \dots) + B_0 + B_2 a^{-2} q^{-2} + B_4 a^{-4} q^{-4} + \dots \right]. \end{aligned}$$

之等ヲ加ヘテ必要ナ項丈ケニ止メレバ

$$-2p = q^2 \left[\frac{\bar{A}_2}{a^2} + B_0 \right] + \left[A_0 + \bar{A}_0 + \frac{1}{a^2}(B_2 - 2A_2) \right] + \frac{1}{a^2 q^2} \left[3A_2 + \frac{B_4}{a^2} \right].$$

此關係ハ任意ノ φ ニ就テ成立スル事ヲ要スル故 q ノ各項ノ係數ガ零デナケレバナラス. 即

$$\begin{aligned} \frac{\bar{A}_2}{a^2} + B_0 &= 0, \\ 2p + A_0 + \bar{A}_0 + \frac{1}{a^2}(B_2 - 2A_2) &= 0, \\ 3A_2 + \frac{B_4}{a^2} &= 0. \end{aligned}$$

從テ(102)ヲ用キテ之等ノ式ニ於ケル係數ヲ計算スレバ

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= -a^2 \bar{B}_0 = -a^2(\sigma - \sigma'), \\ B_2 &= -a^2(A_0 + \bar{A}_0 + 2p) + 2A_2 = -a^2(\sigma + \sigma' + 2p) - 2a^2(\sigma - \sigma'), \\ B_4 &= -3a^2 A_2 = 3a^4(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

以上各係數中 A_0 及 $\bar{A}_0$ ハ單ニ $A_0 + \bar{A}_0$ トシテ條件式ニ顯レテ居ルカラ其虛部ハ隨意ノ値ヲ取ツテ宜シイ譯デアル. 夫レ故之ヲ零トシテ其他(102)及(103)ニ從テ係數ヲ定メレバ周邊ノ條件ニ適スル譯デアツテ級數

ノ他ノ項ノ係數ハ零トオイテ宜シイ。從テ $g(z)$ 及 $h(z)$ ガ定マリテ應力ノ計算ガ出來ル。即應力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ノ式ヲ求メルタメニハ先ヅ上記ノ函數ヲ用キテ (100), (101) = 示スニツノ式 $\sigma_x + \sigma_y$ 及 $\sigma_x - \sigma_y - 2i\tau_{xy}$ ヲ得次ニ之等ヲ解イテ $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ヲ求メ其代リニ夫レ夫レ σ_r, σ_t, τ ト書ケバ次ノ結果ガ導カレル。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -p \frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) (\sigma + \sigma') + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{3a^2}{r^2}\right) (\sigma - \sigma') \cos 2\varphi, \\ \sigma_t &= p \frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) (\sigma + \sigma') - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3a^2}{r^2}\right) (\sigma - \sigma') \cos 2\varphi, \\ \tau &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \left(1 + \frac{3a^2}{r^2}\right) (\sigma - \sigma') \sin 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

之等ノ式ノ中ニ $\sigma' = p = 0$ トオケバ之ハ (42) ト一致シ即孔ノ中ニ壓力ノ作用ナク又孔ヨリ遠方ノ部分デハ只 x 軸ノ方向ニ引張ヲ受ケル場合ニ對シテ應力函數 (41) ヨリ導カレタ結果ト一致スル。

151. 應力函數ノ一般式.

前節ニ於テ應力ノ一般式ヲ導イタ上ハ本章ノ最初ニ述ベタ應力函數ヲ應力ノ一般式ニ相當シタ形ニ表ス事モ出來ル筈デアル。即 (72) = 從ヘバ $e = \frac{m-2}{m-1} \frac{\partial \eta}{\partial y}$. 又 (69) = ヨレバ $\frac{\partial e}{\partial y} = -\frac{m-2}{m-1} \frac{\partial \omega}{\partial x}$. 之等ノ關係ヲ用キテ (91) ヨリ

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = G \left(\frac{m}{m-1} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{m}{m-2} \frac{\partial}{\partial y} (y\omega) - 2 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right), \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = G \left(\frac{m}{m-1} \frac{\partial}{\partial x} (y\omega) - 2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

之ヲ積分シテ $-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ (93) = 一致スル爲ニハ積分常數ハ x, y ナ含マヌ故

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= G \left(\frac{m}{m-1} \eta + \frac{m}{m-2} y\omega - 2v_1 \right), \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= G \left(\frac{m}{m-1} y\omega - 2u_1 \right), \end{aligned}$$

書キ直セバ

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= G \left(\frac{m}{m-1} \frac{\partial}{\partial y} (y\eta) - 2v_1 \right), \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= G \left(\frac{m}{m-1} y \frac{\partial \eta}{\partial x} - 2u_1 \right). \end{aligned}$$

更ニ積分シテ

$$F = G \left(\frac{m}{m-1} y\eta - 2 \int (v_1 dy + u_1 dx) \right).$$

倍 $\int (v_1 + iu_1) dz = t + is$ ト書ケバ

$$\int (v_1 dx - u_1 dy) + i \int (v_1 dy + u_1 dx) = t + is.$$

故ニ

$$\int (v_1 dy + u_1 dx) = s.$$

從テ

$$F = G \left(\frac{m}{m-1} y\eta - 2s \right). \quad (105)$$

此式ニ於テ $\frac{m}{m-1} G\eta$ (71) 及 (94) ヨリ判ル様ニ $\int g(z) dz$ ノ虚部ノ i 以外ノ項ニ等シイ。又 s ヲ求メル爲ニハ (94) = ヨリテ

$$4iG \frac{d}{dz} (v_1 + iu_1) = 2g(z) - h(z).$$

之ヲ積分シテ

$$\begin{aligned} 4iG \int (v_1 + iu_1) dz &= \iint (2g(z) - h(z)) dz dz \\ t + is &= -\frac{i}{4G} \iint (2g(z) - h(z)) dz dz. \end{aligned} \quad (106)$$

此式ヨリ s ガ定マル。此積分ニ於テ常數ノ項ヲ零トシタ事ハ F ノ性質上當然デアアル。

斯様ニシテ應力ノ一般表示(前節)ニ對應スル F 式ガ導カレルノデアツテ言フ迄モナク之ハ微分方程式 $\Delta \Delta F = 0$ ヲ満足スル。

此處ニ例トシテ前節ニ述ベタ有孔板ニ對スル F ノ式ヲ計算シヤウ。

此場合ニハ

$$\begin{aligned} g(z) &= A_0 + A_2 z^{-2}, \\ h(z) &= B_0 + B_2 z^{-2} + B_4 z^{-4}. \end{aligned}$$

故 =

$$\int g(z) dz = A_0 z - A_2 z^{-1},$$

$$\iint (2g(z) - h(z)) dz dz = \left(A_0 - \frac{B_0}{2}\right) z^2 - (2A_2 - B_2) \log z - \frac{B_4}{6} z^{-2}.$$

之等ノ式ニ前節ニ導イタ係數ノ値 (102) 及 (103) ヲ入レテ計算ヲ行ヘバ結局次ノ式ガ得ラレル.

$$F = \frac{\sigma + \sigma'}{4} r^2 - \frac{a^2}{2} (\sigma + \sigma' + 2p) \log r - (\sigma - \sigma') \frac{(r^2 - a^2)^2}{4r^2} \cos 2\varphi. \quad (107)$$

此式ニ於テ $\sigma' = p = 0$ トオケバ曾テ導イタ (41) 式ト一致シ又此式ヨリ (28) ノ示ス様ニ計算ヲ行ヘバ前節ノ問題ノ答 (104) ト同様ノ結果ニ到着スルコト素ヨリデアル.

152. 集中荷重ヲ受ケル梁.

直線軸ヲ有ツ矩形断面ノ梁ヲ平面ノ問題トシテ取扱ツタ計算ノ簡單ナ例ハ之ヲ例題中ニ示シ茲ニハ專ラ集中荷重ノ爲ニ生ズル局所應力ノ計算ヲ目標トシタ計算ヲ紹介シヤウ. 此種ノ問題ハ色々ノ人ニヨリテ研究サレ L. N. G. Filon,¹⁾ 奥田克己,²⁾ Th. v. Kármán,³⁾ F. Seewald,⁴⁾ 等ノ著ヲ舉ゲル事ガ出來ル. 最後ノ二論文ニ於テハ周邊ノ條件トシテ外力ノモーメント M ヲ直ニ計算ニ導イテ居ル點ガ特ニ注意サレル. 併シ下ニハ普通ノ方法ニヨリテ進ム.

梁ノ横断面ハ矩形デアツテ且一樣トシ又其長サハ非常ニ長イト假定スル. 梁ノ中心線ヲ x 軸トシ集中荷重ノ直下ニ相當スル點ヲ原點 O ト定メル. 断面ノ高サヲ $2e$ トスレバ y ハ $-e$ ヨリ $+e$ ニ至ル間ニ變化スル. 次ニ導ク應力函數ハ微分方程式 $\Delta F = 0$ ノ解デ兩邊 $y = \pm e$ ニ沿ヒテ

- 1) Phil. Trans. Roy. Soc., Series A, 201, 1903, 63 頁. Coker & Filon, Photoelasticity, 416 頁.
- 2) 九州帝國大學工學叢報, 2, 1927, 187 頁.
- 3) Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Inst., Aachen, 7, 1927, 1 頁.
- 4) 同上, 11 頁.

$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ トナル外 $y = +e$ ニ對シテ $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ ガ與ヘラレタ荷重ノ應力ニ等シク又 $y = -e$ ニ對シテ $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$ トナル様ニ選ブ. 何トナレバ之等ノ邊ニ於テハ與ヘラレタ荷重ニ依ル垂直應力以外ニハ剪斷應力ノ作用ナキ故 $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$. 從テ $\frac{\partial F}{\partial y}$ ハ常數トナル. 或ハ又 (12) ノ第一式ニ於テ $p_x = 0$ ナル故 $\frac{\partial F}{\partial y} = c_1$. 何レニシテモ此常數ヲ零トスレバ $\frac{\partial F}{\partial y}$ ニ對スル條件ハ上ノ様ニナル. 斯ル條件ヲ満足スベキ應力函數トシテ次ノ Fourier 積分式ヲ取ル.

$$F = \int_0^\infty \left[A(\lambda) \cosh \lambda y + B(\lambda) \sinh \lambda y + C(\lambda) y \cosh \lambda y + D(\lambda) y \sinh \lambda y \right] \cos \lambda x d\lambda. \quad (108)$$

之ガ微分方程式ヲ満足スル事ハ明カデアル. 依テ $A(\lambda), B(\lambda)$ 等ノ係數ヲ適當ニ選ビテ周邊ノ條件ヲ滿ス様ニスル爲先ヅ兩邊 $y = \pm e$ ニ對シテ $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ トオケバ

$$\left. \begin{aligned} C(\lambda) &= -\frac{B(\lambda) \lambda \cosh \lambda e}{\cosh \lambda e + \lambda e \sinh \lambda e}, \\ D(\lambda) &= -\frac{A(\lambda) \lambda \sinh \lambda e}{\sinh \lambda e + \lambda e \cosh \lambda e}. \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

之等ヲ (108) ニ入レテ

$$\left. \begin{aligned} F &= \int_0^\infty \left[A(\lambda) \left(\cosh \lambda y - \frac{\sinh \lambda e \lambda y \sinh \lambda y}{\sinh \lambda e + \lambda e \cosh \lambda e} \right) \right. \\ &\quad \left. + B(\lambda) \left(\sinh \lambda y - \frac{\cosh \lambda e \lambda y \cosh \lambda y}{\cosh \lambda e + \lambda e \sinh \lambda e} \right) \right] \cos \lambda x d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

此式中ノ $A(\lambda), B(\lambda)$ ヲ $y = e$ 及 $y = -e$ ニ對スル $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ ノ値ニ關スルニ條件ヨリ定メルタメ $x = \pm a$ ノ間梁ノ上面ノ 1 cm^2 ニ付 $p_1 \text{ kg}$ ノ密度ヲモツ散布荷重ガ作用シ之ヲ不變トシヤウ. 而シテ其他ノ場所デハ荷重零デアル. 總テ此距離 a ヲ微小ニ取レバ $x = 0$ ニ於テ断面ノ幅 1 cm ニ付 $2p_1 a$ ニ等シイ集中荷重ガ作用スル場合トナル. 斯ル假定ノ下ニ荷重 p ヲ Fourier 積分式ニ表ス. 即

$$p = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda x d\lambda \int_0^a p_1 \cos \lambda \xi d\xi = \frac{2p_1 a}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda x \frac{\sin \lambda a}{\lambda a} d\lambda.$$

α ナ非常ニ小ニ取レバ極限ニ於テ $\frac{\sin \lambda \alpha}{\lambda \alpha} = 1$. 又 $2p_1 \alpha = P$ トスレバ

$$p = \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda x d\lambda.$$

$y = +e$ ニ對シテ $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -p$ ニ等シク又 $y = -e$ ニ對シテ $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$ トナルヲ要スル故之等ノ條件ヨリ

$$\left. \begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{P}{\pi \lambda^2} \frac{\sinh \lambda e + \lambda e \cosh \lambda e}{\sinh 2\lambda e + 2\lambda e}, \\ B(\lambda) &= \frac{P}{\pi \lambda^2} \frac{\cosh \lambda e + \lambda e \sinh \lambda e}{\sinh 2\lambda e - 2\lambda e}. \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

從テ

$$F = \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\sinh \lambda e + \lambda e \cosh \lambda e) \cosh \lambda y - \sinh \lambda e \lambda y \sinh \lambda y}{\lambda^2 (\sinh 2\lambda e + 2\lambda e)} \cos \lambda x d\lambda \\ + \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\cosh \lambda e + \lambda e \sinh \lambda e) \sinh \lambda y - \cosh \lambda e \lambda y \cosh \lambda y}{\lambda^2 (\sinh 2\lambda e - 2\lambda e)} \cos \lambda x d\lambda. \quad (112)$$

此式ヲ微分シテ應力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ニ對スル式ヲ得ル. 例ヘバ σ_x ニ對シテハ

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\lambda e \cosh \lambda e - \sinh \lambda e) \cosh \lambda y - \sinh \lambda e \lambda y \sinh \lambda y}{\sinh 2\lambda e + 2\lambda e} \cos \lambda x d\lambda \\ + \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\lambda e \sinh \lambda e - \cosh \lambda e) \sinh \lambda y - \cosh \lambda e \lambda y \cosh \lambda y}{\sinh 2\lambda e - 2\lambda e} \cos \lambda x d\lambda. \quad (113)$$

上ノ計算ニ於テハ梁ノ兩端ノ條件ヲ考ヘテ居ナイ. 此條件ヲ考ヘル代リニ任意ノ横断面ニ於ケル應力ヲ吟味シテ梁ガ P 以外ニ如何ナル力ヲ受ケテ居ルカタ見ル事ニシヤウ. 之ガタメニ先ヅ σ_x ノ生ズル合力ヲ計算スレバ

$$\int_{-e}^{+e} \sigma_x dy = \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_{-e}^{+e} = 0.$$

又梁ヲ y 軸ノ正ノ方向ニ凹形ナラシメル様ナ偶力ヲ正トシテ之ヲ M ニテ表セバ

$$M = - \int_{-e}^{+e} \sigma_x y dy = \left[F \right]_{-e}^{+e} = \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2} d\lambda.$$

夫レ故梁ハ長サノ方向ニ張力又ハ壓力ヲ受ケズシテ單ニ曲グノミヲ受ケル. 併シ此計算ニヨリテ求メラレタ曲グモーメントハ其値無限大デ

アル. 之ハ梁ガ非常ニ長イ爲デアアル. 夫レ故斯ル曲グモーメントニ依ル普通ノ曲グ應力ヲ引去リテ局所應力ノミヲ求メヤウ. 即偶力ニ就テ言ヘバ $\frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2} d\lambda$ ヲ引去リ又應力ニ就テ言ヘバ下ニ述ベル様ナ無限大ノ項ヲ去レバ問題ノ焦點ヲ明カニスル事ガ出來ル.

併シ其計算ニ移ル前ニ尙剪斷力ノ値ヲ求メヤウ.

$$\int_{-e}^{+e} \tau_{xy} dy = - \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_{y=-e}^{y=+e} = \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{\lambda} d\lambda.$$

然ルニ此積分式ハ $x \geq 0$ ナルニ從テ $\pm \frac{\pi}{2}$ ニ等シイ. 故ニ剪斷力ハ $x > 0$ ニ於テハ x ノ値ニ關セズ $\frac{P}{2}$ ニ等シク又 $x < 0$ ニ於テハ $-\frac{P}{2}$ ニ等シイ. 之ハ上ノ様ナ周邊ノ條件ヲ滿ス F ガ y 軸ニ對シテ對稱的ナル點ヨリ見テ當然ノ結果デアアル.

サテ問題ノ σ_x ノ計算ヲ完了シヤウ. σ_x ノ式 (113) ニ於テ第二ノ積分記號内ノ式ノ分子ヲ λ ノ小ナル値ニ對シテ展開シ λ^3 及夫レ以上ノ項ヲ省略スレバ

$$(\lambda e \sinh \lambda e - \cosh \lambda e) \sinh \lambda y - \cosh \lambda e \lambda y \cosh \lambda y = -2\lambda y.$$

之ニ對シテ分母ハ $\frac{4}{3} \lambda^3 e^3$ ノ項ヲ以テ始マル. 從テ展開式ノ初項ハ次ノ様ニナル.

$$- \frac{3y}{2e^3} \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2} d\lambda. \quad (114)$$

此式ニ於テ $\frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2} d\lambda$ ハ前ニ示シタ曲グモーメント M デアル. 又 $\frac{2}{3} e^3$ ハ幅 1 cm ノ断面ノ慣性モーメントニ等シク之ヲ I ニテ表セバ (114) ノ應力ハ $-\frac{My}{I}$ トナル. 之ハ普通ノ曲グ應力デ只今ノ計算ニ必要ナキ項ナル故之ヲ引去リテ殘リノ應力ヲ計算スル. 依テ

$$\sigma_x' = \sigma_x + \frac{My}{I} \\ = \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{(\lambda e \cosh \lambda e - \sinh \lambda e) \cosh \lambda y - \sinh \lambda e \lambda y \sinh \lambda y}{\sinh 2\lambda e + 2\lambda e} \right. \\ \left. + \frac{(\lambda e \sinh \lambda e - \cosh \lambda e) \sinh \lambda y - \cosh \lambda e \lambda y \cosh \lambda y}{\sinh 2\lambda e - 2\lambda e} + \frac{3}{2} \frac{y}{\lambda^2 e^3} \right] \cos \lambda x d\lambda. \quad (115)$$

$\frac{y}{e} = -1$ ヨリ $+1$ ニ至ル間ノ數ヲ與ヘテ此積分ヲ行ヘバ σ_x' ハ次ノ形ニ表サレル.

$$\sigma_x' = \frac{P}{e} r(t), \quad t = \frac{x}{e}.$$

タトヘバ $y = +e$ ノ邊ニ對スル $r(t)$ ノ値ヲ見ルニ之ハ荷重直下 ($x=0$) ニ於テ $-\infty$ トナリ此點ヲ少シ離レレバ急ニ増シテ正ノ極大値ヲ取ル.¹⁾ 其値ハ凡ソ 0.616 ニ等シク之ヨリ先ハ次第ニ減少スル. 即梁ノ受ケル長サノ方向ノ壓縮應力ハ集中荷重ノ直下ニ於テ非常ニ大トナルモ其附近ニ於テハ普通ノ計算ニ於ケル數値ヨリモ多少輕減サレル. 上ノ計算ノ示ス様ニ $r(t)$ ハ梁ノ支ヘ方ニ無關係ナルニ對シテ普通ノ計算ニヨル曲グ應力ハ支點間ノ距離ト共ニ大トナル故長サノ長イ梁ニ於テハ局所應力ノ影響小ナルモ短イ梁ニ於テハ大デアル. 尙荷重真下ニ於テ應力ガ負ノ無限大トナルハ荷重ガ一點ニ集中スルト假定シタ爲デアル.

σ_x' ノ $y = +e$ 以外ノ點ニ於ケル値及 σ_y, τ_x 等ノ計算ニ就テ述ベル事ハ省略シテ詳細ハ之ヲ文献ニ譲ルモ計算ノ方法ハ上ノ説明ニヨリテ明カニサレタト考ヘル.

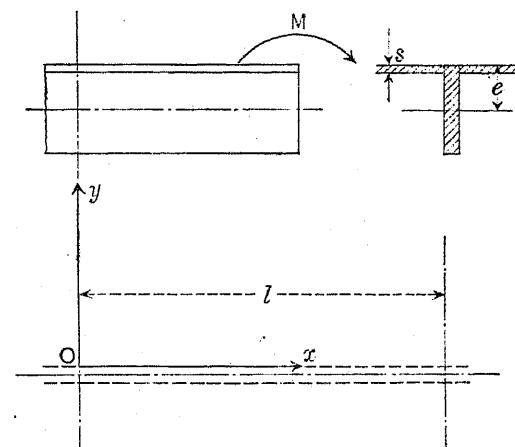
153. 廣イ板ヲ持ツ梁.

梁ノ普通ノ計算法ニ依レバ伸ビ及應力ハ横斷面中ニ於ケル中立軸ヨリノ距離ニ正比例スル. 從テ丁形斷面ノ梁ニ於テハ其水平部ヲナス板ノ各點ニ於ケル應力ハ縱ノ對稱軸ヨリノ距離ニハ無關係デ全部一樣ナル應力ヲ受ケルト見做ス. 併シ板ノ幅ガ斷面ノ縱ノ寸法ニ比ベテ大ナル時ハ應力ハ對稱軸ノ左右ニ漸減スル故上ノ計算法ハ實際ト違フ譯デアル. 夫レデ對稱軸中ニ於ケル様ナ比較的大ナル應力ガ幅ノ非常ニ廣イ板ノ一部分中ニ一樣ニ配布サレルトスレバ此有効ナル部分ノ幅ハ如何ニシテ定メラレルカ. Th. v. Kármán ハ斯ル意味ニ於ケル有効幅ノ計

1) F. Seewald, 前出論文, 23 頁.

算法ヲ研究シタ.¹⁾ 下ニ之ヲ述ベヤウ.

先ヅ問題ヲ次ノ様ニ定メル. 即 149 圖ニ示ス様ナ厚サノ薄イ水平ノ



149 圖

板ト之ニ結び付ケラレテ居ル縦板トヨリ成ル構造ヲ考ヘ前者ヲ平板トシテ取扱ヒ後者ヲ普通ノ梁ト見做ス. 即板ノ曲グニ對スル剛性ハ之ヲ省略シ又梁ノ計算ニ於テハ單ニ長サノ方向ノ應力ノミヲ考ヘル. 又梁ハ斷面一樣デ長ク連續シ支點ハ距離 l ヲ隔テテ幾ツモ並ブモノトシヤウ. 梁ノ長サニ沿ヒテ x 軸ヲ取り一支點ノ位置ニ原點ヲ選ブ. $x=l$ ハ他ノ支點ノ位置ヲ示ス.

偕 y 軸ヲ以テ境トスル板ノ兩區劃中 x ノ符號ヲ異ニスルニツノ對稱點ニ於ケル應力 σ_x, σ_y ハ其値同一デアルトシヤウ. 而シテ $x=l$ ニ相當スル他ノ境界線ニ沿ヒテ同様ノ事が成立ツヲ要スル故 F ハ l ヲ週期トスル偶函數デアル. 依テ之ヲ次ノ様ニ選ブ.

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \cos \frac{2n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (116)$$

此式ハ F ノ微分方程式ヲ満足スルヲ要スル故 $\alpha = \frac{2n\pi}{l}$ トスレバ

1) Die mittragende Breite, August Föppl 七十歳記念論文集, 1924, 114 頁.

$$\frac{d^4 f_n}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 f_n}{dy^2} + \alpha^4 f_n = 0. \quad (117)$$

f_n ハ明カニ $e^{\pm \alpha y}$ 及 $y e^{\pm \alpha y}$ ノ形ヲ取ル。今 y テ正ノ値ノミニ限レバ之等ノ解ノ中 y ノ値ト共ニ大トナルモノハ應力ノ式トシテ不適當ナル故之ヲ除キ f_n テ次ノ様ニ取ル。

$$f_n = A_n e^{-\alpha y} + B_n \alpha y e^{-\alpha y}.$$

未定ノ常數 c_n テ用キテ $B_n = c_n A_n$ トスレバ

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (e^{-\alpha y} + c_n \alpha y e^{-\alpha y}) \cos \alpha x. \quad (118)$$

之ヲ用キテ應力ヲ計算スレバ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \alpha^2 (1 - 2c_n + c_n \alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x, \\ \sigma_y &= - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \alpha^2 (1 + c_n \alpha y) e^{-\alpha y} \cos \alpha x, \\ \tau_{xy} &= - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \alpha^2 (1 - c_n + c_n \alpha y) e^{-\alpha y} \sin \alpha x. \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

$y = \infty$ トオケバ之等ノ式ハ何レモ零トナル。僭梁ニ沿ヒテ常ニ $v = 0$ トナルベキ故此條件ヲ用キテ常數 c_n テ定メル。即 $y = 0$ ニ對シテ $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ トオケバ

$$\tau_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

此式ヲ x ニ對シテ微分シ且 τ_{xy} ノ代リニ $\frac{\tau_{xy}}{G}$ ト書ク。又 $\frac{\partial u}{\partial x}$ テ應力ニテ表セバ

$$\frac{1}{G} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} - \frac{1}{m} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right).$$

容積ノ力ヲ省ケバ平衡ノ理論ニヨリテ

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}.$$

又 $\frac{E}{G} = \frac{2(m+1)}{m}$ ナル故 $y = 0$ ニ對スル上ノ條件式ハ次ノ様ニナル。

$$\frac{2m+1}{m} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial y}.$$

應力成分ノ式 (119) ヨリ代入スレバ

$$(m-1)c_n = -(m+1). \quad (120)$$

斯様ニシテ c_n ガ決定サレ A_n ヲ除イテハ應力ノ式ガ定マル。

次ニ梁及板ノ任意ノ横断面ヲ作リテ此處ニ作用スル應力ト外力トノ間ニ成立スル平衡ノ條件ヲ考ヘヤウ。板ノ存在ノ爲梁ハ其軸ノ方向ニ作用スル力ヲ受ケル故之ヲ P トスル。又曲グモーメントハ二支點間拋物線狀ニ變ジ且支點ノモーメントヲ $\frac{pl^2}{12}$ トスレバ

$$M = \frac{pl^2}{12} - \frac{px}{2}(l-x).$$

149 圖ニ示ス M ハ其直下ノ断面ノ右側ニアル部分ガ左側ニ作用スル應力ノモーメントヲ意味スル。今之ヲ Fourier 級數ニテ表セバ

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos \alpha x. \quad (121)$$

M ハ板ニ作用スル應力ノモーメント及梁ノ曲グ應力ノモーメントヨリ成ル。今板ノ厚サヲ s トシ中立軸ヨリノ板ノ距離ヲ e トスル。又断面ノ最上層ニ於ケル梁ノ最大曲グ應力ヲ σ_0 トスレバ

$$\left. \begin{aligned} P + 2s \int_0^{\infty} \sigma_x dy &= 0, \\ \frac{I}{e} \sigma_0 + 2se \int_0^{\infty} \sigma_x dy &= M. \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

第一ノ式ヨリ

$$P = 2s \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_{y=0} = -2s \sum_{n=1}^{\infty} A_n \alpha (1 - c_n) \cos \alpha x.$$

(120) ニヨリテ $1 - c_n = \frac{2m}{m-1}$ ナル故

$$P = -\frac{4m}{m-1} s \sum_{n=1}^{\infty} A_n \alpha \cos \alpha x. \quad (123)$$

梁ノ横斷面積ヲ f トスレバ P ノ爲ニ生ズル應力ハ次ノ様ニナル。

$$\sigma_0 = \frac{P}{f} = -\frac{4m}{m-1} \frac{s}{f} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \alpha \cos \alpha x. \quad (124)$$

此 σ_0 と σ_b とノ和ハ梁ノ最上層部ノ合成應力デ之ニ相當スル伸ビハ板ノ接合部ノ伸ビト相等シイ。何トナレバ之等兩者ハ到ル處結合シテ離レナイ故變位 u ガ常ニ相等シク從テ相隣スル二點ノ變位ノ差ニ就テモ同様ナル故デアル。從テ伸ビノ式ニ於ケル共通ノ E ヲ省ケバ

$$\sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} = \sigma_0 + \sigma_b.$$

然ルニ (119) ヨリ $y=0$ ニ對シテ

$$\sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \alpha^2 \left(1 - 2e_n + \frac{1}{m}\right) \cos \alpha x.$$

(120) ニヨリテ $1 - 2e_n = \frac{3m+1}{m-1}$ ナル故上ノ條件式ハ次ノ様ニ表サレル

$$\sigma_0 + \sigma_b = \frac{3m^2 + 2m - 1}{m(m-1)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \alpha^2 \cos \alpha x. \quad (125)$$

(124) ヨリ σ_0 ヲ代入スレバ

$$\sigma_b = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\frac{3m^2 + 2m - 1}{m(m-1)} \alpha^2 + \frac{4m}{m-1} \frac{\alpha s}{f} \right] \cos \alpha x. \quad (126)$$

(122) ニ示セル平衡ノ第二式ニ (121), (126) ヲ導キ又其左邊ノ第二項ハ $-Pe$ ニ等シキ故此處ニ (123) ヲ入レテ $\cos \alpha x$ ノ係數ヲ比ベレバ

$$A_n \left[\frac{I}{e} \left(\frac{3m^2 + 2m - 1}{m(m-1)} \alpha^2 + \frac{4m}{m-1} \frac{\alpha s}{f} \right) + \frac{4m}{m-1} \alpha s e \right] = M_n. \quad (127)$$

之ヨリ A_n ガ決定サレ從テ應力ヲ計算スル事ガ出來ル。此計算ヲ尙最後迄進メル爲簡單ニ M ガ其第一項ノミニテ表サレルトシヤウ。即

$$M = M_1 \cos \frac{2\pi x}{l}.$$

然ル時ハ $\alpha = \frac{2\pi}{l}$ トシテ

$$A_1 = \frac{M_1}{\frac{4m}{m-1} \alpha s e \left(1 + \frac{I}{f e^2} + \frac{3m^2 + 2m - 1}{4m^2} \frac{\alpha I}{s e^2} \right)}.$$

モシ水平ノ板ノ或ル幅ガ梁上層部ノ最大應力 $\sigma_0 + \sigma_b$ ト同大ノ應力ヲ

受ケルト見做セバ斯ル部分ノ幅ハ如何。之ハ次ノ様ニナル。

$$2bs(\sigma_0 + \sigma_b) = 2s \int_0^{\infty} \sigma_x dy = -P.$$

式中 b ハ片側ノ幅ヲ表ス。之ニ (123) 及 (125) ヨリ各級數ノ第一項ヲ代入スレバ簡單ナ計算ノ後

$$b = \frac{2m^2}{(3m^2 + 2m - 1)\alpha} = \frac{m^2}{3m^2 + 2m - 1} \frac{l}{\pi}.$$

又ハ

$$\frac{b}{l} = \frac{1}{3\pi \left(1 + \frac{2}{3m} - \frac{1}{3m^2} \right)}.$$

$m = \frac{10}{3}$ トスレバ

$$\frac{b}{l} = 0.0907.$$

即板ノ有効幅ハ梁ノ兩側ニ於テ其支點間距離ノ凡ソ 9% 宛ニ等シイ。

上ノ計算ニ從ヘバ板ノ最大應力ハ梁自身ノ最大應力ト完全ニハ一致シナイ。若シ板ノ應力 $(\sigma_x)_{y=0}$ ヲ用キテ有効幅ヲ定義スレバ之ハ次ノ様ニ書ケル。

$$b(\sigma_x)_{y=0} = \int_0^{\infty} \sigma_x dy.$$

終リニ注意スベキハ梁ト板トノ接合部ノ伸ビヲ等シク置ク代リニ應力ヲ等シク置ク事デアルガ茲ニハ變形ニ重キヲ置イテ上ノ様ニ計算ヲ行ツタ。

例題 1. 引張. $F = k \frac{y^2}{2}.$

之ハ無論微分方程式 $\Delta \Delta F = 0$ ヲ満足スル。夫レデハ此 F 函數ハ如何ナル荷重ノ場合デアルカト云フニ應力成分ハ

$$\sigma_x = k, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$

即六面體ハ一樣ナル引張應力 σ_x ノ作用ヲ受ケル。150 圖。

周邊中右ノ端ニ於ケル應力ノ x 及 y 軸ノ方向ノ射影ハ夫レ夫レ

$$p_x = k, \quad p_y = 0.$$

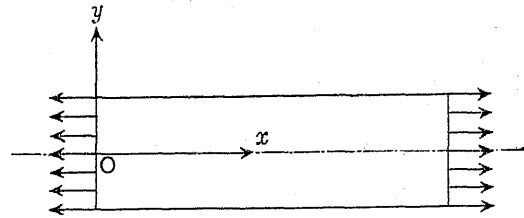
又左端ニ於テハ

$$p_x = -k, \quad p_y = 0.$$

而シテ上下ノ兩側デハ

$$p_x = p_y = 0.$$

即外力ノ作用ハ圖ニ示ス様デアル。



150 圖

尙(14)ヨリ

$$\sigma_x = \frac{k}{m} + Ec.$$

$\sigma_x = 0$ ニ對シテ

$$c = -\frac{k}{mE}.$$

即 z ノ方向ノ伸ビハ x ノ方向ノ伸ビト符號ヲ異ニシ其大サハ後者ノ

$\frac{1}{m}$ ニ當ル。

例題 2. 曲ゲ. $F = k \frac{y^3}{6}.$

此函数ハ微分方程式 $\Delta \Delta F = 0$ ヲ満足スル。而シテ

$$\sigma_x = ky, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$

故ニ六面體ノ横斷面ハ y ニ比例シテ直線狀ニ變ズル應力ノ作用ヲ受ケ

且其値ハ x ニ無關係デアル。之ハ一様ナル曲ゲモーメントヲ受ケル場合デアル。

周邊中右端表面ニ於テ應力ノ x 及 y 軸ノ方向ノ射影ヲ求メレバ

$$p_x = ky, \quad p_y = 0.$$

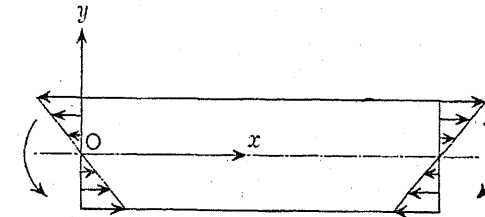
又左端ニ於テハ

$$p_x = -ky, \quad p_y = 0.$$

兩端ニ於ケル應力ハ他ノ横斷面上ノ應力ト無論同様デアル。而シテ x 軸ニ平行ナル長イ兩側デハ

$$p_x = p_y = 0.$$

之ニ依テ見レバ外力ノ作用ハ 151 圖ノ様デアル。



151 圖

尙變形ニ對シテハ平板ノ一例ト見做シテ u, v ノ平均値ヲ求メヤウ。

141 節ノ(23)ヨリ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{ky}{E}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{ky}{mE}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

最初ノ二式ヲ積分スレバ

$$u = \frac{kxy}{E} + \varphi(y),$$

$$v = -\frac{ky^2}{2mE} + \psi(x).$$

之等ノ式ヲ上ノ第三式ニ入レテ

$$\frac{kx}{E} + \varphi'(y) + \psi'(x) = 0.$$

左邊ハ x ノミノ函数及 y ノミノ函数ヨリ成ル故之等ハ常數ニ等シイ。

$$\varphi'(y) = a, \quad \psi'(x) = -\frac{kx}{E} - a.$$

從テ積分スレバ

$$\varphi(y) = ay + b, \quad \psi(x) = -\frac{kx^2}{2E} - ax + c.$$

夫レ故

$$u = \frac{kxy}{E} + ay + b,$$

$$v = -\frac{ky^2}{2mE} - \frac{kx^2}{2E} - ax + c.$$

然ルニ座標軸ノ原点ニ於テハ $u=v=0$ ナルヲ要スル故 $b=c=0$ トナ
ツ又同點ノ附近ニ於テ $\frac{\partial v}{\partial x}=0$ ナルベキ故 $a=0$ トナル。即

$$u = \frac{kxy}{E},$$

$$v = -\frac{k}{2E} \left(x^2 + \frac{y^2}{m} \right).$$

以上ハ板ノ厚サガ薄イモノト見做シテ平板ノ計算法ヲ應用シタノ
デアツテ曾テ XVI 章ノ例題 2 ニ於テ同様ノ問題ヲ論ジタノト趣キ異
ニスル。併シ同處ノ結果ニ於テ板ノ厚サガ薄イト云フ條件ヲ入レレバ
只今ノ計算ト合フ。

例題 3. 二直線ノ交點ニ於ケル集中荷重。

境界ヲナス二直線ノ交點ニ集中荷重ガ作用スル場合ヲ考ヘル爲 150
節ニ述ベタ様ニ $g(z) = \frac{A}{z}$, $h(z) = 2g(z)$ トオク。但 A ハ實數デアル。然

ル時ハ(94)ニヨリテ $f(z) = \frac{m-1}{mG} \frac{A}{z}$ ナル故之ヲ積分シテ

$$\xi + i\eta = \int f(z) dz = \frac{m-1}{mG} A \log z.$$

從テ

$$\eta = \frac{m-1}{mG} A \varphi.$$

又 $2g(z) - h(z) = 0$ トナリテ(106)ハ

$$t + is = 0.$$

故ニ(105)ヨリ

$$F = Ay\varphi = Ar\varphi \sin\varphi.$$

此式ニ $A = -\frac{P}{\pi}$ トオケバ一直線ニテ限ラレタ半無限平面ノ應力函數
トナル。併シ 152 圖ニ示ス様ニ二直線ニテ圍マレタ平面形ノ角ニ集中

荷重ノ作用スル場合ヲ考ヘルタメニハ之ニ應ジタ A ノ値ヲ取レバ宜シ
イ。先ヅ F ヲ微分シテ應力ヲ計算スレバ

$$\sigma_r = \frac{2A}{r} \cos\varphi.$$

$$\sigma_t = \tau = 0.$$

諸原点ヨリ或ル不定ノ長サヲ有スル任意ノ半徑ヲ引ケバ之ヲ以テ境

トスル平面ノ兩部分ノ間ニハ應力

ガ作用シナイ。故ニ $\varphi = \varphi_1$ 及 $\varphi = \varphi_2$

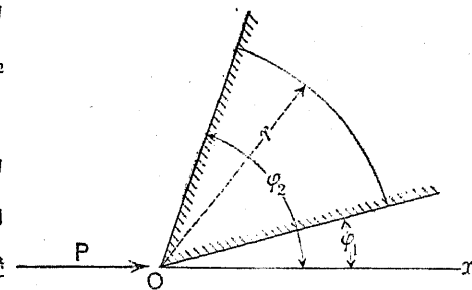
ヲ以テ楔形圖形ノ二ツノ境界線ト

スレバ之等ノ直線上ニ於テハ外力

ノ作用ガ無イ。而シテ半徑ノ方向

ニ於ケル應力 σ_r ハ $\frac{1}{r} \cos\varphi =$ 依テ變

リ原点 $r=0$ ニ於テ無限大トナル。



152 圖

之ハ原点ニ集中荷重ガ作用スル爲デアル。原点ヲ中心トシテ任意ノ半
徑 r ヲ以テ圓弧ヲ描キ之ニ依テ切ラレタ部分ニ作用スル力ノ平衡ヲ考
ヘル爲外力 P (原点ニ射影サレル稜ノ長サ 1cm ニ對スル力) ノ方向ヲ $\varphi=0$
トシ此力ト圓弧上ノ應力トノ間ニ於ケル平衡ヲ次ノ式ニテ表ス。

$$P + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sigma_r r \cos\varphi d\varphi = 0, \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sigma_r r \sin\varphi d\varphi = 0,$$

又ハ

$$P + 2A \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^2\varphi d\varphi = 0, \quad 2A \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi = 0.$$

之等ヨリ

$$A = -\frac{P}{\varphi_2 - \varphi_1 + \frac{1}{2}(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)},$$

及

$$\cos 2\varphi_2 = \cos 2\varphi_1.$$

第二式ノ條件ニヨリテ φ_1 及 φ_2 ノ關係定マル。即 n ヲ零又ハ整數トス
レバ $\varphi_2 = n\pi \pm \varphi_1$ トナル故之ヲ滿ス φ_1, φ_2 ノ關係トシテハ φ_1 ノ前ノ符號
ヲ正トスレバ $\varphi_2 = \pi + \varphi_1, 2\pi + \varphi_1$ 等ノ場合ガアル。之等ニ相當シテ $\varphi_2 - \varphi_1$

ハ夫レ夫レ $\pi, 2\pi$ トナリテ初メノ場合ハ半無限平面ニ又後ノ場合ハ細隙ヲ有スル平面ニ相當スル。而シテ之等ノ場合ニハ任意ノ方向ニ作用スル集中荷重ノ線ヲ基線トシテ之ヨリ角 φ ヲ計リ之ニ相當スル λ ヲ用キテ直ニ應力 σ_r ガ見出サレル。次ニ他ノ場合ヲ取リテ $\varphi_2 = n\pi - \varphi_1$ トスレバ $\varphi_2 = -\varphi_1$ ナル時荷重ハ楔形圖形ノ對稱軸ノ方向ヲ取り又 $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$ ナル時荷重ハ楔ノ對稱軸ニ對シテ直角ノ方向ヲ取ル。斯様ニ楔ノ軸方向及之ニ直角方向ノ二様ノ場合ニ對スル應力ノ計算ガ出來ル故軸ニ對シテ任意ノ傾キヲナスカノ場合ニハ之ヲ前記ノ二ツノ方向ニ分解シ各成分ニ對スル計算ヲナシテ其結果ヲ組合セレバ求メル應力ヲ見出す事ガ出來ル。