XXII. 圓板ノ廻轉.

134. 一般ノ方程式.

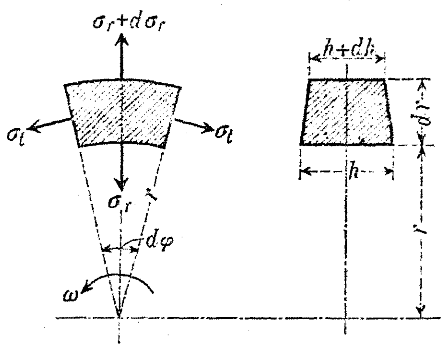
簡單ノタメ圓板ノ厚サノ方向ニ沿ヒテ應力ガ各部同一狀態ニアルモノト見テ一般方程式ヲ導カウ. 換言スレバ應力ハ凡テ廻轉軸ヨリノ距離ノミノ函數ト見做ス. 142 圖ニ於テ下ノ記號ヲ用キル.

r ＝廻轉軸ヨリノ距離,

h ＝ r ニ相當スル板ノ厚サ,

σ_r ＝半徑ノ方向ノ應力,

σ_t ＝圓周ノ方向ノ應力.



142 圖

此圖ノ中ニ表シタ圓板ノ微容積ハ $hrd\varphi dr$ デ之ニ働ク遠心力ハ $\frac{\gamma}{g}hr^2\omega^2 d\varphi dr$ デアル. 此力ノ外 σ_r 及 σ_t ヨリスル力ガ作用スル故半徑ノ方向ニ於ケル平衡式ヲ書ク爲ニ先ヅ內側ノ面 $hrd\varphi$ ニ作用スル σ_r ノ爲ノ力ヲ求メ之ヲ外側ノ面ニ作用スル力ヨリ引ケバ其差ハ $d(\sigma_r hr)d\varphi$ ニ等シイ. 又圓周方面ノ力ノ半徑方向ノ分力ハ二ツ合セテ $\sigma_t hdrd\varphi$ ＝等シク之ハ內側ニ向フ. 凡テ之等ノ力ノ平衡式ヲ作リ其各項ニ共通ナル $d\varphi$ ヲ消シ去レバ

$$d(\sigma_r hr) - \sigma_t h dr + \frac{\gamma}{g} h\omega^2 r^2 dr = 0,$$

又ハ

$$\frac{d(\sigma_r hr)}{dr} - \sigma_t h + \frac{\gamma}{g} h\omega^2 r^2 = 0. \tag{1}$$

次ニ $\varepsilon_r, \varepsilon_t, \varepsilon_x$ ヲ夫レ夫レ半徑,圓周及軸ノ方向ニ於ケル伸ビトスレバ之等ニ對シテハ XX 章(1)ト同樣ノ式ガ與ヘラレル. 而シテ圓筒壁ニ於ケル應力及變位ノ關係式(6)ヲ導イタノト同樣ニ次ノ式ヲ書ク. 但軸方向

ノ應力ハモシアリトスルモ小ナル故 $\sigma_z=0$ トオク.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_t&=\frac{2G}{m-1}\left(m\frac{u}{r}+\frac{du}{dr}\right),\\ \sigma_r&=\frac{2G}{m-1}\left(\frac{u}{r}+m\frac{du}{dr}\right).\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

茲ニ u ハ假定ニヨリテ r ノミノ函數デアル. 之等ノ式ヨリ

$$\sigma_r hr=\frac{2G}{m-1}\left(hu+mhr\frac{du}{dr}\right),$$

$$\frac{d(\sigma_r hr)}{dr}=\frac{2G}{m-1}\left(h\frac{du}{dr}+u\frac{dh}{dr}+mhr\frac{d^2u}{dr^2}+mh\frac{du}{dr}+mr\frac{dh}{dr}\frac{du}{dr}\right),$$

$$\sigma_t h=\frac{2G}{m-1}\left(mh\frac{u}{r}+h\frac{du}{dr}\right).$$

故ニ(1)ヨリ

$$2G\frac{m}{m-1}\left[hr\frac{d^2u}{dr^2}+\left(h+r\frac{dh}{dr}\right)\frac{du}{dr}+\left(\frac{1}{m}\frac{dh}{dr}-\frac{h}{r}\right)u\right]+\frac{\gamma}{g}h\omega^2r^2=0,$$

卽

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{h}\frac{dh}{dr}\right)\frac{du}{dr}+\left(\frac{1}{mhr}\frac{dh}{dr}-\frac{1}{r^2}\right)u+\frac{m-1}{2mG}\frac{\gamma}{g}\omega^2r=0,$$

又ハ簡單ニ

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2u}{dr^2}+\left(\frac{d}{dr}\log h+\frac{1}{r}\right)\frac{du}{dr}+\left(\frac{1}{mr}\frac{d}{dr}\log h-\frac{1}{r^2}\right)u+Kr=0,\\ &\text{但}\qquad K=\frac{m-1}{2mG}\frac{\gamma}{g}\omega^2=\frac{m^2-1}{m^2E}\frac{\gamma}{g}\omega^2.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

圓板ノ形ガ定マリ h ガ r ノ函數トシテ與ヘラレレバ其關係ヲ上ノ式ニ導イテ h ヲ去リ次ニ圓板周圍ノ條件ニ適合スル樣此微分方程式ヲ解ク事ニヨリテ u ヲ r ノ函數トシテ表シウル故之ヨリ應力及伸ビノ計算ヲナスコトガ出來テ玆ニ圓板ノ彈性問題ガ解ケルノデアル. 此計算法ヲ說明スルタメニ下ニ二三ノ特別ナル場合ヲ論ジヤウ.

135. 厚サ一樣ナル圓板.

假定ニヨリテ h ヲ常數トオケバ一般ノ微分方程式(5)ハ下ノ樣ニナル.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}+Kr=0,\\ &\text{但}\qquad K=\frac{m-1}{2mG}\frac{\gamma}{g}\omega^2.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

之ヲ書キ換ヘテ

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right)=-Kr$$

トスレバ此式ノ右側ヲ零トシタ微分方程式ハ已ニ XX 章(7)ニ揭ゲタモノト同ジ形デ其積分ハ同章ノ(9)ニ於ケル樣ニ

$$u=\frac{c_1}{2}r+\frac{c_2}{r}.$$

而シテ又上ノ微分方程式ハ $u=-\frac{K}{8}r^3$ ニテ滿足サレル故 u ノ式ハ一般ニ

$$u=\frac{c_1}{2}r+\frac{c_2}{r}-\frac{K}{8}r^3.\tag{5}$$

式中 c_1 及 c_2 ハ周圍ノ狀況ニヨリテ適當ニ定メラレル可キ常數デアル.

今此 u ノ式ヲ σ_t 及 σ_r ノ式(2)ニ入レル時ハ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_t&=\frac{2G}{m-1}\left[(m+1)\frac{c_1}{2}+(m-1)\frac{c_2}{r^2}-(m+3)\frac{K}{8}r^2\right],\\ \sigma_r&=\frac{2G}{m-1}\left[(m+1)\frac{c_1}{2}-(m-1)\frac{c_2}{r^2}-(3m+1)\frac{K}{8}r^2\right].\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

之ヲ前ノ厚イ圓筒壁ニ對スル應力ノ式卽 XX 章(10ニ $\sigma_z=0$ トオイタモノト比較スレバ只 K ノ項ニ於テ異ルノミデアル.

次ニ $K'=\frac{\gamma}{g}\omega^2$ トオケバ(3)ヨリ

$$K=\frac{m-1}{2mG}K'.\tag{7}$$

常數 c_1, c_2 ノ代リニ A, B ヲ用キテ(6)ヲ簡單ニ書キ直ス. 卽

$$\left.\begin{aligned}\sigma_t&=A+\frac{B}{r^2}-\left(\frac{3}{m}+1\right)\frac{K'}{8}r^2,\\ \sigma_r&=A-\frac{B}{r^2}-\left(3+\frac{1}{m}\right)\frac{K'}{8}r^2.\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

偖圓板ガ内半徑r_1及外半徑r_2ノ兩圓周ニヨリテ限ラレ之等ノ表面ニ何等力ノ作用ナシト假定スレバ

$r=r_1$ 及 $r=r_2$ ノ時 $\sigma_r=0$.

此條件ヲ用ヰレバ(8)ヨリ

$$A-\frac{B}{r_1^2}=\left(3+\frac{1}{m}\right)\frac{K'}{8}r_1^2,$$

$$A-\frac{B}{r_2^2}=\left(3+\frac{1}{m}\right)\frac{K'}{8}r_2^2.$$

故ニ之等兩式ヨリA, Bヲ求メレバ

$$\left.\begin{aligned}A&=\left(3+\frac{1}{m}\right)\frac{K'}{8}(r_1^2+r_2^2),\\ B&=\left(3+\frac{1}{m}\right)\frac{K'}{8}r_1^2r_2^2.\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

A及Bノ値ヲ(8)ノ中ニ入レル時ハ

$$\begin{aligned}\sigma_t&=\frac{3m+1}{8m}K'\left(r_1^2+r_2^2+\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}\right)-\left(\frac{3}{m}+1\right)\frac{K'}{8}r^2\\ &=\frac{K'}{8}\left[\frac{3m+1}{m}\left(r_1^2+r_2^2+\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}\right)-\frac{3+m}{m}r^2\right].\end{aligned}\tag{10}$$

又

$$\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{3m+1}{8m}K'\left(r_1^2+r_2^2-\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}\right)-\left(3+\frac{1}{m}\right)\frac{K'}{8}r^2\\ &=\frac{K'}{8}\frac{3m+1}{m}\left(r_1^2+r_2^2-\frac{r_1^2r_2^2}{r^2}-r^2\right).\end{aligned}\tag{11}$$

(10)及(11)ノ兩式ヲ比較スルニσ_tハ明カニσ_rヨリ大デ且σ_tノ最大値ハrノ最小値卽$r=r_1$ニ於テ起ル. 其値ハ

$$\begin{aligned}\sigma_{t\,max}&=\frac{K'}{8}\left[\frac{3m+1}{m}(2r_2^2+r_1^2)-\frac{3+m}{m}r_1^2\right]\\ &=\frac{K'}{4}\frac{(3m+1)r_2^2+(m-1)r_1^2}{m}.\end{aligned}\tag{12}$$

特ニ若シ$r_1=0$トオケバ

$$\sigma_{t\,max}=\frac{K'}{4}\frac{3m+1}{m}r_2^2=\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{4}\frac{3m+1}{m}r_2^2.$$

又$v=\omega r_2$トオケバ

$$\sigma_{t\,max}=\frac{\gamma}{g}v^2\frac{3m+1}{4m}.\tag{13}$$

圓周速度vニテ廻轉スル薄肉圓筒ニ生ズル應力ハ$\frac{\gamma}{g}v^2$ニ等シキ故(II章例題4ニ於テ$c=0$)之ニ比ベレバ(13)ノ應力ハ$\frac{3m+1}{4m}$ノ割合ニテ小デアル. 今假リニ$m=\frac{10}{3}$ト取レバ上記ノ比ハ0.825トナル. 故ニ中心ニ小孔ヲ有スル圓板ノ應力ハ圓筒ノ場合ノ八割强ニ當ル.

尙玆ニ附加ヘル可キコトハ上ノ計算ニ於ケル圓板周圍ノ狀況デアル. 卽圓周ニ於テ表面ヲ引キ又ハ壓ス力ガ存在セズト假定シテ$\sigma_r=0$トスレバ其結果上ノ樣ニナルモ若シ何等カノ力ガ作用スル時ハ其狀況ニ應ジテ別ニ常數A及Bヲ定メルカ又ハ上ノ計算ニヨリテ先ヅ圓板ノ遠心力ヨリ起ル應力ノミヲ求メ置キテ次ニ靜止セル圓筒ノ内外表面ニ與ヘラレタ力ノ作用スル場合ノ應力ヲ求メテ之ヲ前ノ計算ノ結果ニ加ヘ合セルカ何レカニ依レバ宜シイ.

136. 應力均一ノ圓板.

σ_t及σ_rガ相等シク且各部均一ナル場合ノ圓板斷面ノ形ヲ求メル. 卽$\sigma_t=\sigma_r=\sigma$(const.)トオケバ(2)ヨリ

$$\frac{du}{dr}=\frac{u}{r}=C.$$

而シテ常數Cノ値ヲ定メル爲ニハ(2)ヨリ

$$\sigma=\frac{m+1}{m-1}2GC.\tag{14}$$

從テ

$$u=Cr=\frac{m-1}{m+1}\frac{\sigma}{2G}r=\frac{m-1}{m}\frac{\sigma}{E}r.\tag{15}$$

又微分方程式(3)ハ次ノ樣ニナル.

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)C\frac{d}{dr}\log h+Kr=0.$$

之ヲ積分スレバ

$$\log h=-\frac{m}{m+1}\frac{K}{C}\frac{r^2}{2}+C'.$$

此式ニ於ケルK及Cヲ(3), (14)ヨリ代入スレバ

$$\log h=-\frac{\gamma}{2g}\frac{\omega^2}{\sigma}r^2+C',$$

或ハ

$$h=Ae^{-\frac{\gamma}{2g}\frac{\omega^2}{\sigma}r^2}.$$

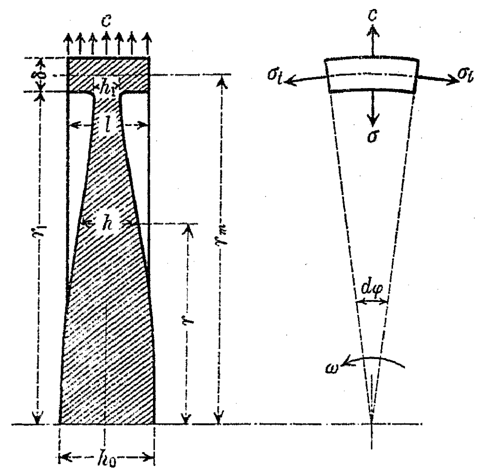
積分常數Aヲ定メルタメニ中心ニ穴ノナイ場合トシテ$r=0$ニ對スルhヲh_0ニテ表セバ

$$h_0=A.$$

從テ

$$h=h_0e^{-\frac{\gamma}{2g}\frac{\omega^2}{\sigma}r^2}. \tag{16}$$

本節ニ述ベタ圓板ノ形ハ de Laval ノ樣ナ高速度ノ蒸氣タービンニ使用サレテ居ル. 斯ル場合ニハ圓板ノ周圍ガ羽根ヲ有スル圓筒部ニテ限ラレル. 143 圖. 而シテ圓筒部及羽根ニ作用スル遠心力ガ圓板ノ周圍ニ作用スル力ヲ惹起ス. 今圓筒部ノ平均ノ半徑ヲr_mトシ此半徑ヲ有スル圓筒表面ニ作用スル羽根ノ遠心力ノ密度ヲcトスレバ圓筒部ヨリ切リ取リタル微小容積ニ作用スル力ノ平衡ニ關シテ次ノ式ガ書ケル.



143 圖

$$\frac{\gamma}{g}l\delta r_m^2\omega^2d\varphi+clr_md\varphi-\sigma r_1h_1d\varphi-\sigma_tl\delta d\varphi=0.$$

從テ

$$\sigma_t=\frac{\gamma}{g}\omega^2r_m^2+c\frac{r_m}{\delta}-\frac{\sigma r_1h_1}{l\delta}.$$

σ_tニ伴フ伸ビハ

$$\varepsilon_t=\frac{\sigma_t}{E}=\left(\frac{\gamma}{g}\omega^2r_m^2+c\frac{r_m}{\delta}-\sigma\frac{r_1h_1}{l\delta}\right)\frac{1}{E}.$$

偖$u_r=\varepsilon_tr_m$ト書クコトニヨリテ

$$u_r=\left(\frac{\gamma}{g}\omega^2r_m^2+c\frac{r_m}{\delta}-\sigma\frac{r_1h_1}{l\delta}\right)\frac{r_m}{E}.$$

若シ$r_m=r_1$ト書ケバ

$$u_r=\left(\frac{\gamma}{g}\omega^2r_m+\frac{c}{\delta}-\sigma\frac{h_1}{l\delta}\right)\frac{r_m^2}{E}.$$

然ルニ又(15)ヲ用ヰレバ

$$u_r=\frac{m-1}{m}\frac{\sigma}{E}r_m$$

ナル故u_rニ對スル兩式ヲ等シクオイテ

$$\left(\frac{\gamma}{g}\omega^2r_m+\frac{c}{\delta}-\sigma\frac{h_1}{l\delta}\right)r_m=\frac{m-1}{m}\sigma$$

又ハ

$$\sigma=\frac{\frac{\gamma}{g}\omega^2r_m^2+\frac{c}{\delta}r_m}{\frac{m-1}{m}+\frac{h_1r_m}{l\delta}}. \tag{17}$$

137. 圓板ノ厚サガ半徑ノ或ル乘羃ニ比例スル場合.

假定ニ依リテ$h=cr^{-\alpha}$トシヤウ. 但c及αハrニ無關係ノ數デアル. 此場合ニ對スル一般方程式ノ解法ハ簡單デ且式中ノc及αノ數値ニヨリテ圓板斷面ノ形ヲ種々ニ變ヘ得ル便ガアル. 偖上ノ假定ニヨレバ

$$\frac{d}{dr}\log h=-\frac{\alpha}{r}.$$

從テ(3)ハ

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1-\alpha}{r}\frac{du}{dr}-\frac{m+\alpha}{mr^2}u+Kr=0. \tag{18}$$

此微分方程式ヲ解クタメニ

$$r=e^{\theta}$$

ト置ク．然ル時ハ

$$\frac{du}{dr}=\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dr}=e^{-\theta}\frac{du}{d\theta},$$

$$\frac{d^2u}{dr^2}=e^{-2\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2}-e^{-2\theta}\frac{du}{d\theta}.$$

之等ノ式ヲ(18)ニ入レル時ハ

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}-\alpha\frac{du}{d\theta}-\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)u+Ke^{3\theta}=0. \tag{19}$$

此式ノ積分ハ次ノ樣ニ書ケル．

$$u=A_1e^{\varphi_1\theta}+A_2e^{\varphi_2\theta}-Ce^{3\theta}. \tag{20}$$

A_1, A_2 ハ積分常數デ φ_1, φ_2 ハ次ノ二次方程式ノ根デアル．

$$\varphi^2-\alpha\varphi-\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)=0.$$

又

$$C=\frac{K}{8-3\alpha-\dfrac{\alpha}{m}}.$$

從テ

$$\left.\begin{aligned}
u&=A_1r^{\varphi_1}+A_2r^{\varphi_2}-Cr^3,\\
\varphi_1&=\frac{\alpha}{2}+\sqrt{1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha^2}{4}},\\
\varphi_2&=\frac{\alpha}{2}-\sqrt{1+\frac{\alpha}{m}+\frac{\alpha^2}{4}},\\
C&=\frac{m^2-1}{mE}\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8m-(3m+1)\alpha}.
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

若シ α ガ正數ナル時ハ φ_1 ハ正デ φ_2 ハ負トナル．特ニ若シ $\alpha=0$ ナル時ハ

$$h=c=\text{常數}.$$

而シテ此時ニハ

$$\varphi_1=1,\qquad \varphi_2=-1,\qquad C=\frac{m^2-1}{m^2E}\frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{8}.$$

從テ

$$u=A_1r+\frac{A_2}{r}-\frac{K}{8}r^3$$

トナリテ 135 節ノ解(5)ト一致スルノデアル．

倘一般ノ場合ニ

$$\frac{u}{r}=A_1r^{\varphi_1-1}+A_2r^{\varphi_2-1}-Cr^2,$$

$$\frac{du}{dr}=A_1\varphi_1r^{\varphi_1-1}+A_2\varphi_2r^{\varphi_2-1}-3Cr^2.$$

從テ(2)ニヨリテ

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_t&=\frac{mE}{m^2-1}\left[A_1(m+\varphi_1)r^{\varphi_1-1}+A_2(m+\varphi_2)r^{\varphi_2-1}-C(m+3)r^2\right],\\
\sigma_r&=\frac{mE}{m^2-1}\left[A_1(1+m\varphi_1)r^{\varphi_1-1}+A_2(1+m\varphi_2)r^{\varphi_2-1}-C(1+3m)r^2\right].
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

之等ノ式中ノ二ツノ常數 A_1 及 A_2 ハ圓板周圍ノ條件ニヨリテ定メラレルベキモノデアル．

例題． 中央ニ孔ヲ有セザル厚サ一樣ノ圓板ガ廻轉スル時ニ生ズル應力ヲ計算スルコト．

此場合ニハ圓板ノ中心 $(r=0)$ ニ於ケル應力ガ有限大ナルベキ條件ニヨリテ(8)ニ於テ

$$B=0.$$

又圓周 $(r=R)$ ニ於テ半徑ノ方向ニ作用スル外力ナキ時ハ $\sigma_r=0$ ナルベキ故

$$A=\left(3+\frac{1}{m}\right)\frac{K'}{8}R^2.$$

從テ

$$\sigma_t=\frac{K'}{8}\left[\left(3+\frac{1}{m}\right)R^2-\left(\frac{3}{m}+1\right)r^2\right],$$

$$\sigma_r=\frac{K'}{8}\left(3+\frac{1}{m}\right)\left(R^2-r^2\right).$$

$K'=\frac{\gamma}{g}\omega^2$ ナル故

$$\sigma_t=\frac{\gamma\,\omega^2}{8g}\left[\left(3+\frac{1}{m}\right)R^2-\left(\frac{3}{m}+1\right)r^2\right],$$

$$\sigma_r=\frac{\gamma\,\omega^2}{8g}\left(3+\frac{1}{m}\right)\left(R^2-r^2\right).$$

兩應力ハ中心ニ於テ最大トナリ卽共ニ次ノ如クデアル.

$$\sigma_{max}=\frac{3m+1}{8m}\frac{\gamma}{g}\omega^2R^2.$$

其他ノ點ニ於テハ σ_t ガ σ_r ヨリハ大デアル.

偖上ノ最大應力ノ式ニ於テ $\omega R=v$ トシテ之ヲ(13)ノ小孔アル圓板ニ生ズル最大應力ニ比ベレバ丁度二分ノ一ニ當ル. 孔ノタメニ應力ノ倍加スルコトハ注意スベキ點デアル.