XXI. 熱應力.

131. 一般方程式.

物體ニ外力ノ作用ナクシテ其内部ニ應力ノ潜伏スル事ハ屢々遭遇スル所デアルガ其一例ハ玆ニ述ベル熱應力デアル. 卽最初物體ガ應力ノ作用ヲ受ケテ居ラヌニ拘ラズ若シ其内部ニ溫度ノ不等分布ガ生ジ各部ガ自由ニ伸縮シ難キ時ハ相互間ノ牽制ガ起リ從テ應力ノ作用ヲ見ルノデアル. 例ヘバ内燃機關ノピストン棒及氣筒壁ノ如キハ内外溫度ノ高低ニヨリテ烈シイ熱應力ヲ生ズ可キデアルカラ之ヲ考ヘズシテ單ニ瓦斯ノ壓力ヨリ壁ノ强サヲ論ズルハ不充分デアル.[1] 斯樣ニ熱應力ハ重要ナル問題ノ一ツデアルカラ之ニ關スル研究モ少クナイ.[2] 併シ此處デハ其原理及簡單ナル計算ヲ紹介スルニ止メヤウ.

偖物體中ノ任意ノ點ニ於ケル溫度ガ $(t-t_0)$ ナル變化ヲスレバ之ガタメ各方向ニ取ラレタ單位ノ長サハ $\alpha(t-t_0)$ ナル膨脹ヲシヤウトスル. 但 α ハ材料ノ線膨脹係數デアル. 此時同點ニ或ル應力ガ作用スル故之丈ケニ相當シタ伸ビヲ $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ トスレバ實際ノ伸ビハ兩者ノ和トナル. 卽次ノ如クデアル.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x+\alpha(t-t_0), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y+\alpha(t-t_0), \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z+\alpha(t-t_0). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

此際溫度ノ變化ハ直接辷リヲ引起サヌ故辷リニ對シテハ從來ノ式ヲ其儘用キテ宜シイ. 夫レ故先ヅ XV 章(3)ノ ε ニ對スル式ノ代リニ(1)ヲ用キ且

1) 氣筒壁ニ關シテハ 423 頁脚註著者論文參照.
2) 例ヘバ栖原豐太郞,機械學會誌, XXI, 50, 1918, 25 頁; XXIV, 70, 1921, 81 頁.

$$e=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \tag{2}$$

トオケバ垂直應力ハ XVI 章(7)ニヨリテ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=2G\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{e}{m-2}-\frac{m+1}{m-2}\alpha(t-t_0)\right],\\ \sigma_y&=2G\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{e}{m-2}-\frac{m+1}{m-2}\alpha(t-t_0)\right],\\ \sigma_z&=2G\left[\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{e}{m-2}-\frac{m+1}{m-2}\alpha(t-t_0)\right].\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

而シテ剪斷應力ハ上述ノ如ク XVI 章(10)ニヨリテ

$$\tau_x=G\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

ノ型ニ屬スル三式ヲ其儘使フ.

次ニ之等ノ式ヲ直角六面體ノ平衡式卽 XIV 章(3)ノ中ニ導キ且容積ノ力 $X=Y=Z=0$ ト假定スレバ XVI 章ノ一般方程式(12)ニ相當シテ次ノ式ヲ書ク事ガ出來ル.

$$\left.\begin{aligned}\Delta u+\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x}-2\frac{m+1}{m-2}\alpha\frac{\partial t}{\partial x}&=0,\\ \Delta v+\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial y}-2\frac{m+1}{m-2}\alpha\frac{\partial t}{\partial y}&=0,\\ \Delta w+\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial z}-2\frac{m+1}{m-2}\alpha\frac{\partial t}{\partial z}&=0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

若シ溫度ノ分布ガ與ヘラレル時ハ之等微分方程式ノ左邊ノ末項ハ已知ノ函數トナル故問題ノ性質ニ合フ樣之ヲ解ク事ガ出來レバ其處デ物體ノ受ケル彈性變位ガ判ル. 併シ次ノ樣ニ簡單ナル場合ニハ(4)ノ解ヲ得ルタメニ六カシイ計算ヲ要シナイ.

例ヘバ物體ガ xy 平面ニ平行ナル二面デ限ラレ溫度ハ此面ニ直角ナル z ノ方向ニハ一樣デナイケレドモ x, y ノ方向ニハ無關係トシヤウ. 而シテ簡單ノタメニ

$$t-t_0=\theta$$

トオク. 此時若シ θ ノ配布ガ板ノ厚サヲ二等分スル中央面ノ兩側ニ於テ對稱的ナラバ板ハ夫レ自身平面トシテ止ルケレドモ一般ニハ曲ル筈デアル. 併シ斯ル彎曲ヲ妨ゲテ依然平面ヲ保タシメル樣ナ力ガ作用スレバ xy 平面ニ並行ナル伸ビハ各處一樣ナル可キ故 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=c$ (常數). 斯樣ナ力ヲ加ヘルノハ夫レ自身デ或ル應力狀態ヲ發生スルト云フ說明ニ反スルノデアルガ之ハ前記ノ力ヲ板ニ働ク外力ト見ルタメデ板及之ヲ支ヘル物體ヲ一括シテ一ツノ構造物ト見レバ此力ハ內力デアル. 此意味デ下ノ計算ニ入ラウ. 卽(3)ヨリ

$$\sigma_x=\sigma_y=\frac{2G}{m-2}\left[\frac{\partial w}{\partial z}+mc-(m+1)\alpha\theta\right].$$

板ノ兩表面ニ力ノ作用ナク從テ z ノ方向ニハ應力ガ零トスレバ(3)ノ第三式ヨリ

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{m+1}{m-1}\alpha\theta-\frac{2c}{m-1}.$$

之ヲ上ノ σ_x 及 σ_y ノ兩式中ニ入レル時ハ

$$\begin{aligned}\sigma_x=\sigma_y&=-2G\frac{m+1}{m-1}(\alpha\theta-c)\\ &=-\frac{mE}{m-1}(\alpha\theta-c).\end{aligned} \tag{5}$$

偖 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=c$ トシ又 $\frac{\partial w}{\partial z}$ ヲ上ノ如ク假定スレバ之ハ當然微分方程式(4)ヲ滿足スル. 併シ未ダ(5)ノ中ニハ不定常數 c ガ存在スル故之ヲ板ノ周圍ノ條件ニヨリテ定メヤウ. 例ヘバ板ニ働ク力ガ單ニ彎曲ヲ妨ゲル偶力ノミトスレバ板ノ厚サニ對シテ取ラレタ次ノ積分ハ零デアル.

$$\int\sigma_x dz=\int\sigma_y dz=0. \tag{6}$$

若シ板ノ兩表面間溫度ガ直線狀ニ分布サレルモノトスレバ座標軸ノ原點ヲ溫度 t_1 ノ表面上ニ取リ $z=h$ (板ノ厚サ)ニ對スル溫度ヲ t_2 トシテ任意ノ點ニ於ケル溫度ヲ次ノ式ニテ表ス.

$$t=t_1+\frac{t_2-t_1}{h}z. \tag{7}$$

從テ

$$\theta=t_1-t_0+\frac{t_2-t_1}{h}z.$$

偖彈性係數及線膨脹係數ハ溫度ニヨリテ變ズルモノデアルガ近似計算ニ於テ簡單ノタメニ之等ヲ溫度ニ無關係ト見テ上ノ條件式(6)ヲ計算スレバ

$$\alpha\int_0^h\theta\,dz=c\int_0^h dz,$$

又ハ

$$c=\alpha\left(\frac{t_1+t_2}{2}-t_0\right). \tag{8}$$

故ニ伸ビ c ハ中央面ノ溫度上昇ニ對スル膨脹ニ相當スル．卽最初ニ板ヲ中央面ノ溫度迄一樣ニ溫メテ此伸ビヲ生ゼシメ次ニ與ヘラレタ狀態ニ相當スル迄溫度ヲ變ズレバ此際板ハ少シモ伸縮ナキ筈デアル．

應力ノ値ハ(5)ニヨリテ

$$\sigma_x=\sigma_y=\frac{mE}{m-1}\alpha(t_1-t_2)\left(\frac{z}{h}-\frac{1}{2}\right). \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} z=0\ \text{ニ對シテ}\quad &\sigma_{x1}=\sigma_{y1}=-\frac{mE}{m-1}\alpha\frac{t_1-t_2}{2},\\ z=h\ \text{ニ對シテ}\quad &\sigma_{x2}=\sigma_{y2}=\frac{mE}{m-1}\alpha\frac{t_1-t_2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

若シ $t_1>t_2$ ナラバ $z=0$ ノ表面ニハ絕對値最大ナル壓縮應力ガ働キ又 $z=h$ ノ表面ニハ最大ノ引張應力ガ働ク．

132. 圓筒壁．

圓筒內外表面ノ溫度ノ差異ニ歸スベキ應力ヲ計算スルタメニ圓筒ノ微容積(141 圖)ニ對シテ前節ノ(3)ヲ用キヤウ．卽此場合ニハ XX 章 126 節ニ述ベタ樣ニ $\frac{\partial v}{\partial y}$ ノ代リニ $\frac{u}{r}$ ヲ書キ其他同章ノ記號ニ倣フ時ハ(3)ノ代リニ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{2G}{m-2}\left[(m-1)\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}-(m+1)\alpha\theta\right],\\ \sigma_t&=\frac{2G}{m-2}\left[\frac{\partial u}{\partial r}+(m-1)\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}-(m+1)\alpha\theta\right],\\ \sigma_z&=\frac{2G}{m-2}\left[\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+(m-1)\frac{\partial w}{\partial z}-(m+1)\alpha\theta\right].\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

之等ノ式ニ於テ $\sigma_r, \sigma_t, \sigma_z$ ハ夫レ夫レ圓筒壁中ニ考ヘラレタ圓ノ半徑，圓周ヘノ切線並ニ圓筒ノ軸ノ方向ニ於ケル應力デアツテ各式ノ形ヲ見ルニ夫レハ括弧內ノ末項ニ於テ XX 章ノ(3)ト違テ居ル丈ケデアル．

偖溫度ノ分布ガ圓筒ノ軸ニ沿ヒテハ不變デアツテ θ ガ單ニ半徑ノ方向ニノミ變ズルモノトスル．此假定ニ基ク計算ハ兩端ノ影響ヲ省略シテ差支ガナイ程長イ圓筒壁ニ於テ其內外兩面ニ夫レ夫レ一樣ナル壓力ノ作用スル場合ノ應力及變形ガ長サノ方向ニ無關係デアルト見做サレルノト類似デ只今ノ場合ニ於ケル圓筒壁ノ變形モ當然 z ニ無關係デ圓筒ハ依然タル圓筒トシテ止ル．從テ u ハ r ノミノ函數デ w ハ z ノミノ函數デアル．尙 141 圖中ニ示スモノハ零デ角ノ變化ナク從テ $\sigma_r, \sigma_t, \sigma_z$ ガ主應力デアル．

夫レ故只今ノ場合ニ於ケル計算法ハ大體ニ於テ 127 節ニ述ベタ厚イ圓筒壁ノソレト同樣デアルガ多少趣ヲ異ニスル點ハ前ノ σ_z ガ橫斷面ニ一樣ニ配布サレルモノトシテ荷重 P ヲ斷面積 $\pi(r_2^2-r_1^2)$ ニテ除ス事ニヨリテ之ヲ求メ得タノニ對シテ今ノ σ_z ハ橫斷面ニ一樣デナク P ノ作用ナシニ發生シ得ル處ニアル．卽筒壁橫斷面中ニ積分シタ結果次ノ條件ガ成立スル．

$$\int_{r_1}^{r_2}\sigma_z r\,dr=0. \tag{12}$$

之ハ筒壁表面ノ條件ト共ニ以下計算中ニ現レル未知常數ノ決定ニ用キラレルベキモノデアル．

先ヅ 126 節ノ(4)及(5)ヨリ

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0,\\&\frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r}-\sigma_t=0.\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

之等ノ式ニ(11)ヲ入レ且函數 u, w, θ ニ關スル注意ヲ考ヘ ∂ ノ代リニ d ヲ用キレバ

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2w}{dz^2}=0,\\&r\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{du}{dr}-\frac{u}{r}=\frac{m+1}{m-1}\alpha r\frac{d\theta}{dr}.\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

此處デ若シ $\dfrac{d\theta}{dr}=0$ トスレバ第二式ハ 127 節ノ基礎方程式ト全ク同一デアッテ其左邊ノ積分ハ已ニ舊知ノ感ガアル. 卽上式ハ次ノ形ニ書キ改メラレル.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dw}{dz}=k(\text{常數}),\\&\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(ru)}{dr}\right)=\frac{m+1}{m-1}\alpha\frac{d\theta}{dr}.\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

m 及 α ヲ常數ト見テ若クハ或ル範圍內ノ平均値ヲ取リテ第二式ヲ積分スレバ

$$u=\frac{m+1}{m-1}\frac{\alpha}{r}\int\theta r\,dr+\frac{c_1}{2}r+\frac{c_2}{r}.\qquad(16)$$

從テ

$$\frac{u}{r}=\frac{m+1}{m-1}\frac{\alpha}{r^2}\int\theta r\,dr+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{r^2},$$

$$\frac{du}{dr}=\frac{m+1}{m-1}\alpha\left[\theta-\frac{1}{r^2}\int\theta r\,dr\right]+\frac{c_1}{2}-\frac{c_2}{r^2}.$$

$\dfrac{du}{dr}$, $\dfrac{u}{r}$ 及 $\dfrac{dw}{dz}$ ニ對スル上ノ式ヲ(11)ノ中ニ入レル時ハ

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_r=\frac{2G}{m-2}\left[k+m\frac{c_1}{2}-(m-2)\frac{c_2}{r^2}-\frac{(m+1)(m-2)}{m-1}\frac{\alpha}{r^2}\int\theta r\,dr\right],\\&\sigma_t=\frac{2G}{m-2}\left[k+m\frac{c_1}{2}+(m-2)\frac{c_2}{r^2}-\frac{(m+1)(m-2)}{m-1}\alpha\left(\theta-\frac{1}{r^2}\int\theta r\,dr\right)\right],\\&\sigma_z=\frac{2G}{m-2}\left[(m-1)k+c_1-\frac{(m+1)(m-2)}{m-1}\alpha\theta\right].\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

次ニ未知常數ノ計算ニ移リタイノデアルガ簡單ノタメニ

$$\int\theta r\,dr=\varphi$$

トシヤウ. 而シテ $r=r_1$ ニ對スル θ, φ ヲ θ_1, φ_1 トシ $r=r_2$ ニ對スル者ヲ θ_2, φ_2 ト記ス. 然ル時ハ先ヅ σ_z ニ對スル條件(12)ヨリ

$$\frac{1}{2}\left[(m-1)k+c_1\right](r_2^2-r_1^2)=\frac{(m+1)(m-2)}{m-1}\alpha(\varphi_2-\varphi_1).\qquad(18)$$

又筒壁內外表面ノ條件卽 $r=r_1$ 及 $r=r_2$ ニ對シテ $\sigma_r=0$ ナル事ヨリ

$$k+m\frac{c_1}{2}-(m-2)\frac{c_2}{r_1^2}=\frac{(m+1)(m-2)}{m-1}\frac{\alpha}{r_1^2}\varphi_1,$$

$$k+m\frac{c_1}{2}-(m-2)\frac{c_2}{r_2^2}=\frac{(m+1)(m-2)}{m-1}\frac{\alpha}{r_2^2}\varphi_2.$$

之等兩式ヨリ

$$\left.\begin{aligned}&k+m\frac{c_1}{2}=\frac{(m+1)(m-2)}{m-1}\alpha\frac{\varphi_2-\varphi_1}{r_2^2-r_1^2},\\&c_2=\frac{m+1}{m-1}\alpha\frac{r_1^2\varphi_2-r_2^2\varphi_1}{r_2^2-r_1^2}.\end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

若シ各常數ヲ別々ニ知ル必要ガアレバ(18), (19)ノ三方程式ヨリ更ニ計算ヲナスベキデアルガ應力ヲ求メルニハ上ノ結果デ充分デアル. 卽(17)ニ(18), (19)ヲ入レ $2G(m+1)=mE$ ノ關係ヲ用キレバ

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_r=\frac{mE}{m-1}\alpha\left[\frac{1}{r_2^2-r_1^2}\left(\varphi_2-\varphi_1-\frac{r_1^2\varphi_2-r_2^2\varphi_1}{r^2}\right)-\frac{\varphi}{r^2}\right],\\&\sigma_t=\frac{mE}{m-1}\alpha\left[\frac{1}{r_2^2-r_1^2}\left(\varphi_2-\varphi_1+\frac{r_1^2\varphi_2-r_2^2\varphi_1}{r^2}\right)+\frac{\varphi}{r^2}-\theta\right],\\&\sigma_z=\frac{mE}{m-1}\alpha\left[\frac{2(\varphi_2-\varphi_1)}{r_2^2-r_1^2}-\theta\right].\end{aligned}\right\}\qquad(20)$$

上ノ式ニ於テ

$$\theta=t-t_0,$$

$$\varphi=\int\theta r\,dr=\int tr\,dr-t_0\frac{r^2}{2}$$

ナル故更ニ最後ノ不定積分ヲ別ノ記號

$$\psi=\int tr\,dr \tag{21}$$

ニテ表シ $r=r_1$ 及 $r=r_2$ ニ對スル ψ ノ値ヲ夫レ夫レ ψ_1, ψ_2 トスレバ

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r&=\frac{mE}{m-1}\alpha\left[\frac{1}{r_2^2-r_1^2}\left(\psi_2-\psi_1-\frac{r_1^2\psi_2-r_2^2\psi_1}{r^2}\right)-\frac{\psi}{r^2}\right],\\
\sigma_t&=\frac{mE}{m-1}\alpha\left[\frac{1}{r_2^2-r_1^2}\left(\psi_2-\psi_1+\frac{r_1^2\psi_2-r_2^2\psi_1}{r^2}\right)+\frac{\psi}{r^2}-t\right],\\
\sigma_z&=\frac{mE}{m-1}\alpha\left[2\frac{\psi_2-\psi_1}{r_2^2-r_1^2}-t\right].
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

此結果ヲ見ルニ全ク t_0 ヲ含マヌ故應力狀態ハ最初ノ溫度ニハ無關係デ只不等分布ニ依テ定マルコトガ判ル. 之ハ當然ノ話デ物體全部ヲ平等ニ溫メ又ハ冷シテモ應力ヲ生ジナイカラ最初ノ溫度如何ハ實際間フヲ要シナイノデアル.

次ニ(22)ニ $r=r_1$ 及 $r=r_2$ トオイテ表面ノ應力ヲ求メレバ σ_r ハ零デ他ノ二ツハ夫レ夫レ相等シクナル. 卽

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{t_1}=\sigma_{z_1}&=\frac{mE}{m-1}\alpha\left[2\frac{\psi_2-\psi_1}{r_2^2-r_1^2}-t_1\right],\\
\sigma_{t_2}=\sigma_{z_2}&=\frac{mE}{m-1}\alpha\left[2\frac{\psi_2-\psi_1}{r_2^2-r_1^2}-t_2\right].
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

壁中ノ溫度分布ガ與ヘラレテ t 及 ψ ガ判レバ上ノ式カラ應力ノ計算ヲナス事ガ出來ル.

133. 圓筒壁ノ溫度分布.

圓筒ノ内外兩側ノ一方カラ他ニ向テ絕エズ一定ノ速サデ或ル熱量ガ流レルモノトシテ溫度ガ r_1 カラ r_2 迄如何ナル規則ニ從ヒ分布サレルカヲ定メ前節熱應力ノ式ヲ最後ノ形ニ導キタイト思フ. 偖壁中ニ考ヘラレタ薄イ同心圓筒壁(半徑 r, 長サ l)ノ肉 dr ニ相應シテ dt ナル溫度ノ差異アルタメ單位時間ニ Q ナル熱量ガ流レルトシヤウ. 然ル時ハ次ノ關係ガアル.

$$Q=\pm\lambda 2\pi rl\frac{dt}{dr}.$$

但 λ ハ圓筒材料ノ熱傳導係數デアル. 又正負ノ符號ハ常ニ Q ヲ正トスル樣ニ選ブ.

$$dt=\pm\frac{Q}{2\pi\lambda l}\frac{dr}{r}.$$

之ヲ積分シテ

$$\begin{aligned}
t&=\pm\frac{Q}{2\pi\lambda l}\log r+k\\
&=c\log r+k.
\end{aligned}$$

常數 c 及 k ヲ表面ノ溫度 t_1, t_2 ニヨリテ定メレバ

$r=r_1,\qquad t_1=c\log r_1+k.$

$r=r_2,\qquad t_2=c\log r_2+k.$

故ニ

$$c=\frac{t_2-t_1}{\log r_2-\log r_1},$$

及

$$k=\frac{t_1\log r_2-t_2\log r_1}{\log r_2-\log r_1}.$$

之等ノ値ヲ入レテ

$$t=\frac{(t_2-t_1)\log r+t_1\log r_2-t_2\log r_1}{\log r_2-\log r_1}.$$

又ハ書キ換ヘテ

$$\begin{aligned}
t&=\frac{(t_2-t_1)\log\dfrac{r}{r_1}+t_1\log\dfrac{r_2}{r_1}}{\log\dfrac{r_2}{r_1}}\\
&=t_1+(t_2-t_1)\frac{\log\dfrac{r}{r_1}}{\log\dfrac{r_2}{r_1}}.
\end{aligned} \tag{24}$$

筒壁ノ厚サ h ガ半徑ニ比ベテ小ナル時ハ寧ロ次ノ式ヲ用キルノガ便デアル. 卽上ノ式(24)ニ於テ $r_2=r_1+h$ 及 $r=r_1+\xi$ トスレバ

$$t=t_1+(t_2-t_1)\frac{\dfrac{\xi}{r_1}-\dfrac{\xi^2}{2r_1^2}+\cdots}{\dfrac{h}{r_1}-\dfrac{h^2}{2r_1^2}+\cdots}.$$

此式ニ於テ $\dfrac{\xi}{r_1}$ 及 $\dfrac{h}{r_1}$ ノ二乘以上ヲ省略スレバ

$$t=t_1+(t_2-t_1)\frac{\xi}{h}.$$

故ニ薄イ圓筒壁ノ場合ニハ丁度平面板ノ樣ニ直線狀ノ溫度分布ヲ考ヘテ大差ナイ譯デアル.

以上述ベタ溫度分布ガ存在スルモノトシテ前節ノ熱應力ノ計算ヲ完了シヤウ. 卽(24)ノ t ヲ(23)ニ入レテ兩表面ノ應力ヲ計算スルタメ先ヅ(21)ニヨリテ

$$\begin{aligned}\phi_2-\phi_1&=t_1\int_{r_1}^{r_2}r\,dr+\frac{t_2-t_1}{\log\dfrac{r_2}{r_1}}\int_{r_1}^{r_2}r\log\frac{r}{r_1}dr\\&=\frac{t_1}{2}(r_2^2-r_1^2)+\frac{t_2-t_1}{2}\left[r_2^2-\frac{r_2^2-r_1^2}{2\log\dfrac{r_2}{r_1}}\right]\\&=\frac{t_2r_2^2-t_1r_1^2}{2}-\frac{(t_2-t_1)(r_2^2-r_1^2)}{4\log\dfrac{r_2}{r_1}}.\end{aligned}$$

從テ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{t_1}=\sigma_{z_1}&=\frac{mE}{m-1}\alpha(t_2-t_1)\left[\frac{r_2^2}{r_2^2-r_1^2}-\frac{1}{2\log\dfrac{r_2}{r_1}}\right],\\\sigma_{t_2}=\sigma_{z_2}&=\frac{mE}{m-1}\alpha(t_2-t_1)\left[\frac{r_1^2}{r_2^2-r_1^2}-\frac{1}{2\log\dfrac{r_2}{r_1}}\right].\end{aligned}\right\}\qquad(25)$$

筒壁ノ厚サガ薄イ時ハ之等ノ式ヲ簡單ニスルコトガ出來ル. 卽

$$\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2=2\left[\frac{r_2^2-r_1^2}{r_2^2+r_1^2}+\frac{1}{3}\left(\frac{r_2^2-r_1^2}{r_2^2+r_1^2}\right)^3+\cdots\right]$$

ニ於テ $\dfrac{r_2^2-r_1^2}{r_2^2+r_1^2}=\dfrac{r_2+r_1}{r_2^2+r_1^2}h$ ハ $\dfrac{h}{r_1}$ ト同程度ノ數ナル故其三乘以上ヲ省略スレバ近似的ニ

$$\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2=2\frac{r_2^2-r_1^2}{r_2^2+r_1^2}.$$

從テ

$$\sigma_{t_1}=\sigma_{z_1}=-\frac{mE}{m-1}\alpha\frac{t_1-t_2}{2},$$

$$\sigma_{t_2}=\sigma_{z_2}=\frac{mE}{m-1}\alpha\frac{t_1-t_2}{2}.$$

之ハ 131 節(10)卽平面板ニ對スル式ト全ク同一デアツテ內側ヨリ外側ニ向テ熱ノ傳達サレル時ニ ($t_1>t_2$) 內面及外面ニ生ズル熱應力(前ノハ負, 後ノハ正)ハ單ニ兩面ノ溫度ノ差ニ比例スルモノデアル. 故ニ圓筒內外兩表面ノ溫度ノ差サヘ一定ナラバ壁ノ厚サハ應力ニ關係シナイ. 併シ流レル熱量ガ一定ナラバ厚イ壁ノ方ガ大ナル差ヲ必要トスル故此爲ニ熱應力ハ薄イ場合ヨリモ大トナルノデアル. 例ヘバ內燃機關ノ氣筒壁ノ如キ場合ニハ瓦斯ノ壓力ニ對シテ厚サヲ增セバ一方ニ於テ熱應力ヲ增大シテ反テ益スル所ガナイ事ガアル. 卽適當ナル厚サヲ選ベバ兩者ノ和ヲ最小ナラシメルコトガ出來ル.

例題. $\dfrac{r_2}{r_1}=2.4$ ナル比ヲ有ツ鋼製圓筒ノ內部ニ水ヲ通シテ外部ノ過熱ヲ防グ. 此場合ニハ外面ノ溫度ガ內面ヨリモ高ク其差ヲ $t_2-t_1=50^\circ C$ ト假定シ次ノ數値ヲ用キテ兩表面ノ應力ヲ計算スル事.

$$E=2.1\times10^6\,kg/cm^2,$$

$$m=\frac{10}{3},$$

$$\alpha=1.1\times10^{-5}.$$

(25)ニ於テ

$$\frac{m}{m-1}E\alpha=\frac{10}{7}\times2.1\times10^6\times1.1\times10^{-5}=33,$$

$$\frac{\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2}{\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2-1}=\frac{5.76}{4.76}=1.210,\quad\frac{1}{\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2-1}=\frac{1}{4.76}=0.227,$$

$$\frac{1}{2\log\frac{r_2}{r_1}}=\frac{1}{2\times 0.8755}=0.571、$$

故＝

$$\sigma_{t_1}=\sigma_{z_1}=33\times 50\times(1.210-0.571)=\ 1054\ kg/cm^2,$$

$$\sigma_{t_2}=\sigma_{z_2}=33\times 50\times(0.227-0.571)=-568\ kg/cm^2.$$