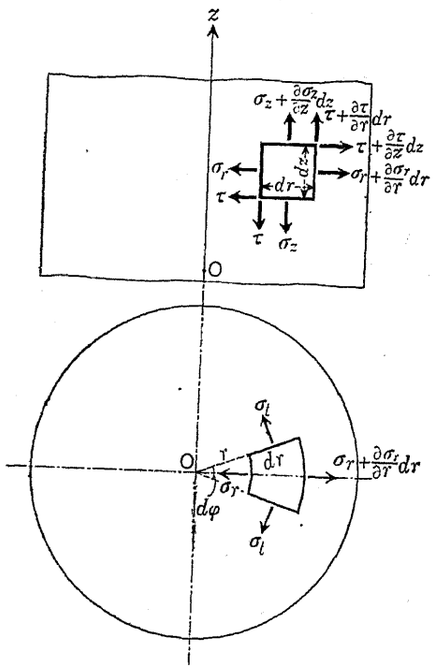
XX. 圓柱及圓筒.

126. 圓柱體ノ一般方程式.

圓柱ガ其軸ノ周リニ對稱ナル變形ヲナス場合ノ一般方程式ヲ導キタイト思フ. 141 圖ニ於テ O ハ圓柱軸中ニ取ラレタ原點デ軸ノ方向ヲ z



141 圖

軸トスレバ任意ノ點ノ位置ハ O ヲ含ム横斷面ヨリノ距離 z, 中心軸ヨリノ距離 r, 及軸ノ周リノ角 φ (某縱斷面ヨリ測ル)ノ三座標ニヨリテ定マル. 而シテ只今ノ計算デハ變形ガ φ ニ無關係ト假定シテ居ル故 z ノ或ル値ヲ有スル斷面中デ與ヘラレタ任意ノ r ヲ半徑トスル圓周上ノ何レノ點ヲトルモ變リガナイ. 偖物體ガ變形ヲ生ズル時ハ斯ル代表點ハ z 軸ニ平行ニ w 丈ケ又半徑 r ノ方向ニ u 丈ケ移動スル. 從テ半徑,圓周並ニ軸

ノ方向ニ於ケル伸ビヲ夫レ夫レ $\varepsilon_r, \varepsilon_t, \varepsilon_z$ トスレバ

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \\ \varepsilon_t &= \frac{2\pi(r+u)-2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

從テ

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_t + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{2}$$

以上ノ式ヲ曾テ述ベタXVI章(7)ノ中ニ入レル. 卽同式ヲ再錄スレバ

$$\sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{e}{m-2}\right),$$

$$\sigma_y = 2G\left(\varepsilon_y + \frac{e}{m-2}\right),$$

$$\sigma_z = 2G\left(\varepsilon_z + \frac{e}{m-2}\right).$$

只今ノ場合ニハ z ハ依然 z ナルモ x 及 y ノ代リニ夫レ夫レ r 及 t ト書ク. 然ル時ハ

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2G}{m-2}\left[(m-1)\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right], \\ \sigma_t &= \frac{2G}{m-2}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + (m-1)\frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right], \\ \sigma_z &= \frac{2G}{m-2}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + (m-1)\frac{\partial w}{\partial z}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

之ガ只今ノ場合ニ彈性變位ト應力トノ間ノ關係ヲ與ヘル式デアルガ一方應力ノ平衡ニ關シテハ 141 圖ノ樣ニ圓柱ノ微小ナル容積ヲトルノガ便デアル. 此微容積ノ表面ハ互ニ dz ナル距離ヲナス二斷面, r 及 $r+dr$ ヲ半徑トスル圓柱ノ表面並ニ互ニ $d\varphi$ ヲナス二軸面等ニテ出來テ居リ之等ノ面ニ働ク應力ハ凡テ圖ニ示シタ者丈ケヲ取レバ充分デアル. 此外ニ剪斷應力ヲ考ヘレバ變形ガ z 軸ノ周リニ對稱デアルト云フ約束ニ一

致セヌ故之ハ考ヘル必要ガナイ. 又此物體ノ質量ニ作用スル力ハ之ヲ省略シテ差支ヘナイモノトスレバ z 軸ノ方向ニ於ケル力ノ平衡ノ條件ニヨリテ次ノ式ガ書ケル.

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\left(r+\frac{dr}{2}\right)dz\,d\varphi\,dr+\tau\,dz\,d\varphi\,dr+\frac{\partial\tau}{\partial r}(r+dr)\,dz\,d\varphi\,dr=0.$$

此兩邊ヲ $dz\,d\varphi\,dr$ ニテ除シ且 r ニ對シテ dr ヲ省ク時ハ

$$r\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\tau+r\frac{\partial\tau}{\partial r}=0,$$

或ハ

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau)}{\partial r}=0. \tag{4}$$

次ニ半徑ノ方向ニ於ケル平衡ノ式ハ

$$\sigma_r\,dz\,d\varphi\,dr+\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}(r+dr)\,dz\,d\varphi\,dr+\frac{\partial\tau}{\partial z}\left(r+\frac{dr}{2}\right)dz\,d\varphi\,dr-\sigma_t\,dz\,d\varphi\,dr=0.$$

此兩邊ヲ $dz\,d\varphi\,dr$ ニテ除シ且 r ニ對シテ dr ヲ省ケバ

$$\sigma_r+r\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+r\frac{\partial\tau}{\partial z}-\sigma_t=0,$$

或ハ

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r}+\frac{\partial\tau}{\partial z}-\frac{\sigma_t}{r}=0. \tag{5}$$

偖前ニ記シタ(3)ヲ(4)及(5)ノ中ニ入レ且 τ ニ對シテハ XVI 章(10)ヨリ座標ノ關係上 τ_y ニ相當シテ

$$\tau=G\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)$$

ヲ導キ來ル時ハ結局 u 及 w ヲ含ム二ツノ微分方程式ヲ得ル故之等ヲ解イテ與ヘラレタ條件ヲ滿足スル答ヲ求メルコトガ出來レバ宜シイノデアル. 之ガ一般方程式ノ導キ方デアルガ先ヅ簡單ナル場合ニ就テ此計算ヲ下ニ述ベヤウ.

127. 變形ガ軸ニ沿ヒテ一樣ナル場合.

圓筒壁ノ厚サガ薄イ時ハ圓周ノ方向ノ應力 σ_t ガ壁ノ半徑ノ方向ニ一

樣ニ配布サレルモノト見テ極簡單ナル計算ヲナス事ガ出來ルケレドモ(II章例題3)壁ガ厚クナレバ此假定ニヨル計算デハ應力配布ノ眞相ヲ窺フ譯ニ行カナイノデアル. 本節ニ於テハ肉厚キ圓筒ノ內外ニ夫レ夫レ流體ノ壓力 p_1, p_2 ガ作用シ圓筒ノ長サニ沿ヒテ各部一樣ノ變形ヲ生ズル場合ヲ論ジヤウ. 先ヅ σ_z ハ圓筒ノ兩端ニ於テ橫斷面ニ一樣ニ配布サレルモノト假定スレバ各斷面ニ就テモ亦同樣デアラネバナラヌ. σ_z ガ半徑上ニ其値ヲ變ジ筒壁ガ曲ル樣ナ比較的一般ノ場合ハ後ニ讓リテ玆ニハ之ヲ論ジナイ. 卽兩端面ニ働ク力ヲ P トスレバ

$$\sigma_z=\frac{P}{\pi(r_2^2-r_1^2)}.$$

但 r_1 及 r_2 ハ圓筒ノ內外兩半徑デアル. 又圓筒壁ノ微容積ノ角ハ變ジナイ故

$$\tau=0.$$

偖筒壁ノ變形ガ長サノ方向ニ沿ヒテ一樣ナリト云フ假定ニ據リテ u 及 w ハ夫レ夫レ r 及 z ノミノ函數ナル可キ故 ∂ ノ代リニ d ヲ用ヰテ(3)ノ第三式ヨリ

$$\frac{dw}{dz}=\frac{m-2}{2(m-1)}\frac{\sigma_z}{G}-\frac{1}{m-1}\left(\frac{u}{r}+\frac{du}{dr}\right).$$

之ヲ他ノ二式中ニ入レテ w ノ項ヲ消去スレバ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_t&=\frac{2G}{m-1}\left(m\frac{u}{r}+\frac{du}{dr}\right)+\frac{\sigma_z}{m-1},\\ \sigma_r&=\frac{2G}{m-1}\left(\frac{u}{r}+m\frac{du}{dr}\right)+\frac{\sigma_z}{m-1}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

本題ニ於テハ z ノ方向ノ平衡式(4)ハ當然滿足サレル故(5)ノミニ就テ考ヘレバ宜シイ. (6)ノ第二式ヨリ

$$\frac{d(r\sigma_r)}{dr}=\frac{2G}{m-1}\left[(m+1)\frac{du}{dr}+mr\frac{d^2u}{dr^2}\right]+\frac{\sigma_z}{m-1}$$

トナリ之ニ(6)ノ第一式ヲ配シテ(5)ハ次ノ樣ニナル.

$$r\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{du}{dr}-\frac{u}{r}=0,$$

從テ

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right)=0. \tag{7}$$

此式ヲ積分スレバ

$$\frac{du}{dr}+\frac{u}{r}=c_1, \tag{8}$$

又ハ

$$r\frac{du}{dr}+u=c_1r,$$

即

$$\frac{d(ru)}{dr}=c_1r.$$

再ビ之ヲ積分スレバ

$$\left.\begin{aligned} ru&=\frac{c_1}{2}r^2+c_2,\\ \frac{u}{r}&=\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{r^2}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

從テ(8)ヨリ

$$\frac{du}{dr}=c_1-\frac{u}{r}=\frac{c_1}{2}-\frac{c_2}{r^2}.$$

$\frac{u}{r}$ 及 $\frac{du}{dr}$ ノ値ヲ(6)ノ中ニオク時ハ

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t&=\frac{2G}{m-1}\left[\frac{c_1}{2}(m+1)+\frac{c_2}{r^2}(m-1)\right]+\frac{\sigma_z}{m-1},\\ \sigma_r&=\frac{2G}{m-1}\left[\frac{c_1}{2}(m+1)-\frac{c_2}{r^2}(m-1)\right]+\frac{\sigma_z}{m-1}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

又ハ簡單ノタメニ下ノ樣ニオク

$$\left.\begin{aligned} A&=\frac{m+1}{m-1}Gc_1+\frac{\sigma_z}{m-1},\\ B&=2Gc_2. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

然ル時ハ

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t&=A+\frac{B}{r^2},\\ \sigma_r&=A-\frac{B}{r^2}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

上ノ計算ニ於ケル積分常數 c_1, c_2 ノ代リニ直ニ常數 A, B ヲ定メルヲ便トスル. 即

$$r=r_1,\qquad \sigma_r=-p_1,$$

$$r=r_2,\qquad \sigma_r=-p_2$$

ト置ク時ハ

$$-p_1=A-\frac{B}{r_1^2},$$

$$-p_2=A-\frac{B}{r_2^2}.$$

從テ

$$\left.\begin{aligned} A&=\frac{p_1r_1^2-p_2r_2^2}{r_2^2-r_1^2},\\ B&=(p_1-p_2)\frac{r_1^2r_2^2}{r_2^2-r_1^2}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

故ニ之等ノ値ヲ(12)ノ中ニ入レテ σ_t 及 σ_r ヲ計算シ又 σ_z ハ兩端面ニ作用スル外力ノ方向及大サニヨリテ直ニ決定サレル故茲ニ上ノ應力ハ皆見出サレルコトニナル. 而シテ之等ハ明カニ主應力デアル.

次ニ伸ビ $\varepsilon_t, \varepsilon_r, \varepsilon_z$ ヲ求メルタメニハ

$$E\varepsilon_t=\sigma_t-\frac{\sigma_r+\sigma_z}{m},$$

$$E\varepsilon_r=\sigma_r-\frac{\sigma_z+\sigma_t}{m},$$

$$E\varepsilon_z=\sigma_z-\frac{\sigma_t+\sigma_r}{m}$$

ナル故

$$\left.\begin{aligned} E\varepsilon_t&=\frac{m-1}{m}A+\frac{m+1}{m}\frac{B}{r^2}-\frac{\sigma_z}{m},\\ E\varepsilon_r&=\frac{m-1}{m}A-\frac{m+1}{m}\frac{B}{r^2}-\frac{\sigma_z}{m},\\ E\varepsilon_z&=\sigma_z-\frac{2A}{m}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

(a) 內壓ノ場合. $p_1=p,\quad p_2=0.$

先ヅ(13)ニヨリテ

$$A=\frac{pr_1^2}{r_2^2-r_1^2},$$

$$B=\frac{pr_1^2r_2^2}{r_2^2-r_1^2}=Ar_2^2.$$

故ニ(12)ニヨリテ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_t&=\frac{pr_1^2}{r_2^2-r_1^2}\left(1+\frac{r_2^2}{r^2}\right),\\ \sigma_r&=\frac{pr_1^2}{r_2^2-r_1^2}\left(1-\frac{r_2^2}{r^2}\right).\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

次ニ(14)ニヨリテ

$$\left.\begin{aligned}E\varepsilon_t&=\frac{pr_1^2}{r_2^2-r_1^2}\left(\frac{m+1}{m}\frac{r_2^2}{r^2}+\frac{m-1}{m}\right)-\frac{P}{m\pi(r_2^2-r_1^2)},\\ E\varepsilon_r&=-\frac{pr_1^2}{r_2^2-r_1^2}\left(\frac{m+1}{m}\frac{r_2^2}{r^2}-\frac{m-1}{m}\right)-\frac{P}{m\pi(r_2^2-r_1^2)},\\ E\varepsilon_z&=\frac{P}{\pi(r_2^2-r_1^2)}-\frac{2}{m}\frac{pr_1^2}{r_2^2-r_1^2}.\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

例ヘバ兩端面ニ $P=p\pi r_1^2$ ニ等シイ力ガ作用シテ軸ノ方向ニ圓筒ヲ引張レバ $\sigma_z=\frac{pr_1^2}{r_2^2-r_1^2}$ トナル. 而シテ此 σ_z 及上ノ σ_t, σ_r ヲ比較スルニ最大ナル應力ハ $r=r_1$ ニ對スル σ_t デ次ノ如キ値ヲトルコト明カデアル.

$$\sigma_{max}=p\frac{r_2^2+r_1^2}{r_2^2-r_1^2}.\tag{17}$$

又最小ナル應力モ $r=r_1$ ニ對スル σ_r 卽

$$\sigma_{min}=-p$$

ナル故最大剪斷應力ハ矢張リ $r=r_1$ ニ於テ起リ其値次ノ式ノ如クナル.

$$\tau_{max}=p\frac{r_2^2}{r_2^2-r_1^2}.\tag{18}$$

尙(17)及(18)ト同樣ナル式ガ $\sigma_z=0$ ノ時ニモ成立スル.

(b) 外壓ノ場合. $p_1=0$, $p_2=p$.

(13)ニヨリテ

$$A=-\frac{pr_2^2}{r_2^2-r_1^2},$$

$$B=-\frac{pr_1^2r_2^2}{r_2^2-r_1^2}=Ar_1^2.$$

從テ(12)ヨリ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_t&=-\frac{pr_2^2}{r_2^2-r_1^2}\left(1+\frac{r_1^2}{r^2}\right),\\ \sigma_r&=-\frac{pr_2^2}{r_2^2-r_1^2}\left(1-\frac{r_1^2}{r^2}\right).\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

次ニ(14)ヨリ

$$\left.\begin{aligned}E\varepsilon_t&=-\frac{pr_2^2}{r_2^2-r_1^2}\left(\frac{m+1}{m}\frac{r_1^2}{r^2}+\frac{m-1}{m}\right)-\frac{P}{m\pi(r_2^2-r_1^2)},\\ E\varepsilon_r&=\frac{pr_2^2}{r_2^2-r_1^2}\left(\frac{m+1}{m}\frac{r_1^2}{r^2}-\frac{m-1}{m}\right)-\frac{P}{m\pi(r_2^2-r_1^2)},\\ E\varepsilon_z&=\frac{P}{\pi(r_2^2-r_1^2)}+\frac{2}{m}\frac{pr_2^2}{r_2^2-r_1^2}.\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

例ヘバ $P=-p\pi r_2^2$ ナル壓力ガ作用スレバ $\sigma_z=-\frac{pr_2^2}{r_2^2-r_1^2}$ トナル. 而シテ何レモ負量ナル三應力中絕對値ノ最大ナルハ $r=r_1$ ニ對スル σ_t デ其大サハ

$$(-\sigma)_{max}=\frac{2pr_2^2}{r_2^2-r_1^2}.\tag{21}$$

又最小ナルハ同ジク $r=r_1$ ニ對スル σ_r 卽零デアル. 從テ最大剪斷應力ハ前ト同樣ニ

$$\tau_{max}=\frac{pr_2^2}{r_2^2-r_1^2}.\tag{22}$$

(21),(22)ハ $\sigma_z=0$ ノ時ニモ成立スル.

128. 破損ニ關スル假說ノ應用.

XVIII 章ニ述ベタ材料破損ニ關スル假說 d ヲ厚イ圓筒壁ガ內壓及縱ノ引張ヲ受ケル場合ニ應用シヤウ. 先ヅ前節 a ニ述ベタ樣ニ圓筒壁ガ內壓ヲ受ケル場合ニハ內壁上ノ一點ニ於テ圓周ノ方向ニ正ノ主應力ガ起リ半徑ノ方向ニ負ノ主應力ガ起ル. 卽

$$\sigma_t = p\frac{r_2^2+r_1^2}{r_2^2-r_1^2},$$

$$\sigma_r = -p.$$

但 p ハ圓筒內ノ壓力, r_1 及 r_2 ハ壁ノ內外兩半徑デアル. 次ニ圓筒軸ニ平行ナル力ヲ以テ引クタメニ生ズル第三ノ主應力 σ_z ハ簡單ノタメニ之ヲ σ ト命名スル. 之ハ σ_t 以下ニモ又ハ以上ニモナリウル故次ノ二ツノ場合ガ區別サレル.

(i) 圓周ノ方向ノ應力ガ圓筒軸ノ方向ノ應力ヨリ大ナル場合. $\sigma_t > \sigma$.

此時ニハ

$$\sigma_1 = p\frac{r_2^2+r_1^2}{r_2^2-r_1^2}, \quad \sigma_3 = -p.$$

從テ主要圓ノ中心ハ原點ヨリ $\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3) = \frac{pr_1^2}{r_2^2-r_1^2}$ ナル距離ニアリテ其半徑ハ $\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3) = \frac{pr_2^2}{r_2^2-r_1^2}$. 故ニ應力狀態ハ105節ニ於ケル主要圓I及 III ノ二ツノ間ニアリテ限界線ハ XVIII 章(3)ニヨリテ表サレル. 從テ考ヘツツアル應力狀態ガ限界線內ニ止マルタメニハ

$$K_3 - \left(\frac{2K_3}{K_1}-1\right)\frac{pr_1^2}{r_2^2-r_1^2} \geqq \frac{pr_2^2}{r_2^2-r_1^2},$$

又ハ

$$K_3 \geqq p\left[1+\frac{2K_3}{K_1}\frac{r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\right],$$

$$K_3 \geqq p\frac{r_2^2+\left(\frac{2K_3}{K_1}-1\right)r_1^2}{r_2^2-r_1^2}.$$

$\frac{r_2}{r_1} = n$ トオケバ

$$\left.\begin{aligned} K_3 &\geqq p\frac{n^2+\left(\frac{2K_3}{K_1}-1\right)}{n^2-1}, \\ \text{又ハ} \quad p &\leqq K_3\frac{n^2-1}{n^2+\left(\frac{2K_3}{K_1}-1\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

此式ハ Mohr ガ其著書ノ第二版 234 頁ニ於テ Cook 及 Robertson 兩氏ノナシタ實驗ノ結果[1] ヲ考察スルタメニ用ヰタ式ト同一形式デアル.

(ii) 圓筒軸ノ方向ノ應力ガ圓周ノ方向ノ應力ヨリ大ナル場合. $\sigma > \sigma_t$.

此時ニハ

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_3 = -p$$

トナル故主要圓ノ中心ハ原點ヨリ $\frac{1}{2}(\sigma-p)$ ナル距離ニアリ又其半徑ハ $\frac{1}{2}(\sigma+p)$ ニ等シイ. 而シテ $\sigma > p$. 從テ中心ハ σ 軸ノ正ノ側ニアル故前ト同樣ニ限界線(3)ヲ用ヰ得可ク卽求メル條件ハ次ノ樣ニナル.

$$K_3 - \left(\frac{2K_3}{K_1}-1\right)\frac{\sigma-p}{2} \geqq \frac{\sigma+p}{2},$$

又ハ

$$K_3 \geqq \left(\frac{2K_3}{K_1}-1\right)\frac{\sigma-p}{2} + \frac{\sigma+p}{2}$$

$$= \frac{K_3}{K_1}(\sigma-p)+p.$$

從テ

$$\left.\begin{aligned} K_3 &\geqq \frac{K_3}{K_1}\sigma + p\left(1-\frac{K_3}{K_1}\right), \\ p &\leqq \frac{K_3-\frac{K_3}{K_1}\sigma}{1-\frac{K_3}{K_1}}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

以上計算ノ結果ヲ實驗ノ結果ト對照スルハ甚ダ興味アル事柄ト思ハレル.

Cook 及 Robertson ノ實驗.[1]

筒壁內外兩半徑ノ比ガ種々ナル試驗片ニ內壓ヲ加ヘテ之ヲ破損セシメタノデアルガ軟鋼ニ對スル結果カラ Mohr ノ導イタ式ハ次ノ如クデアル.

1) Engineering, XCII, 1911, 786 頁.

$$\frac{p}{K_1}=0.65\frac{n^2-1}{n^2+0.30}.$$

而シテ此式ハ實驗ノ結果トヨク一致シテ居ル. 之ヲ上ノ計算ノ結果ナル(23)ト比較スレバ $\frac{K_3}{K_1}=0.65$ ニ相當スルコトガ判ル.

Turner ノ實驗.[1]

同氏ノ實驗中軟鋼試驗片第四種 ($n=1.57$) ガ引張,捩リ,內壓及之等ノ組合セニヨリテ試驗サレタ結果ヲ見ルニ大要次ノ如キ成績ヲ示シテ居ル(單位ハ lbs/in^2).

(1) 引張. K_1 (五實驗ノ平均) $=34\,900.$

(2) 捩リ. K_3 (一實驗ノ結果) $=20\,900.$

(3) 組合應力. 圓周方向ノ應力 σ_t ガ軸方向ノ應力 σ ヨリ大ナル場合. 內壓 p ノ最大値(σ ノ値ヲ異ニセル三實驗ノ平均) $=11\,550.$

(4) 組合應力. 軸方向ノ應力 σ ガ圓周方向ノ應力 σ_t ヨリ大ナル場合. 軸ノ方向ノ應力 σ ノ最大値 ($p=11\,200$ ナル一實驗ノ結果) $=27\,500.$

上ノ結果ヨリ知ルコトハ先ヅ

$$\frac{K_3}{K_1}=0.599.$$

$$\frac{2K_3}{K_1}-1=0.20.$$

之ヲ(23)ニ入レテ材料ノ流レル時ノ壓力 p ヲ計算スレバ

$$p=20\,900\,\frac{1.57^2-1}{1.57^2+0.20}=11\,500.$$

次ニ又(24)ヨリ p ヲ計算スレバ

$$p=\frac{20\,900-0.599\times27\,500}{1-0.599}=11\,060.$$

之等ノ計算値ハ實驗ノ結果トヨク符合スル例デアル.

上ニ引用シタ實驗ニ於テ $\frac{K_3}{K_1}$ ガ0.5ヨリ多少大デアルノハ剪斷應力ノ

1) Engineering, XCII, 1911, 117 頁.

假說ガ只近似的ニ正シイコトヲ示ス例ト見ルコトガ出來ル. 卽實驗ノ結果ヲ正確ニ表スタメニハ垂直及剪斷兩種ノ應力ヲ用ヰル方ガヨリ適當デアル. 併シ此 σ,τ ノ假說モ前ニ述ベタ樣ニ素ヨリ完全トハ考ヘラレテ居ラヌ.

129. 變形ガ軸ニ沿ヒテ一樣ナラザル場合.

126 節ニ述ベタ樣ニ平衡式(4)及(5)ノ中ノ應力ヲ變位 u,w ニテ表セバ先ヅ次ノ二式ヲ得ル.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial z}=0, \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial r}=0. \tag{26}$$

之等ノ式ニ於テ

$$e=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

(25)ヲ r ニ對シテ又(26)ヲ z ニ對シテ夫レ夫レ微分シテ兩式相當邊ノ差ヲ作リ $\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial z}=f$ トスレバ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f}{r}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0. \tag{27}$$

偖 $\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial z}+f$ ナル故

$$\frac{\partial e}{\partial r}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial f}{\partial z}.$$

從テ(26)ヨリ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{m}{2(m-1)}\frac{\partial f}{\partial z}=0. \tag{28}$$

次ニ又 $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial r}-f$ ナル故

$$\frac{\partial e}{\partial z}=\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{f}{r}.$$

從テ(25)ヨリ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-\frac{m}{2(m-1)}\left(\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{f}{r}\right)=0. \tag{29}$$

(28)ヲ z ニ對シテ又(29ヲ r ニ對シテ微分スレバ夫レ夫レ次ノ樣ニナル.

但後ノ式ニアリテハ(27)ノ關係ヲ用ヰテ書直ス.

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{m}{2(m-1)}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0,\\&\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{m}{2(m-1)}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0.\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

之等兩式ニ於テ便宜上次ノ樣ニ書ク.

$$D^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r},\quad y=\frac{\partial u}{\partial z}\text{ 又ハ }\frac{\partial w}{\partial r}.$$

而シテ更ニ一度記號 $D^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ニヨリテ示サレル演算ヲ行ヘバ(27)ニヨリテ f ノ項ハ消エル故(30)ノ兩式ハ共ニ次ノ形ヲトル.

$$\left(D^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 y=0. \tag{31}$$

此微分方程式ヲ解ク爲ニ最初次ノ微分方程式ヲ考ヘル.

$$\left(D^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)y_1=0. \tag{32}$$

此式ノ解ヲ r ノミノ函數 R_1 ト z ノミノ函數 Z_1 トノ相乘積ト見テ次ノ樣ニオク

$$y_1=R_1Z_1.$$

之ヲ用ヰテ(32)ヨリ

$$\frac{1}{R_1}D^2R_1+\frac{1}{Z_1}\frac{d^2Z_1}{dz^2}=0.$$

此式ノ左邊ハ r ノミノ函數ト z ノミノ函數トノ和ナル故之ガ成立スル爲ニハ之等兩項ガ常數ナルヲ要ス. 從テ

$$\frac{1}{R_1}D^2R_1=-\frac{1}{Z_1}\frac{d^2Z_1}{dz^2}=k^2. \tag{33}$$

之等ノ二ツノ微分方程式ヲ滿足スル樣ニ R_1 及 Z_1 ヲ定メル. 先ヅ R_1 ニ

對シテハ

$$\frac{d^2R_1}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_1}{dr}-\left(\frac{1}{r^2}+k^2\right)R_1=0. \tag{34}$$

此式ノ兩邊ヲ k^2 ニテ除シ (kr) ヲ變數ト見レバ一ツノ解ハ Bessel 函數デ表サレル. 卽 $R_1=J_1(ikr)$. 今 $i^{-1}J_1(ikr)=I_1(kr)$ トスレバ之ハ R_1 ノ一ツノ解デアル. 而シテ他ノ一ツノ解トシテハ $K_1(kr)$ ヲトル事ガ出來ル.

次ニ y_1 ノ他ノ成分 Z_1 ニ對シテハ

$$\frac{d^2Z_1}{dz^2}+k^2Z_1=0. \tag{35}$$

之ハ明カニ $Z_1=\cos kz$ 又ハ $\sin kz$ ニヨリテ滿足サレル.

偖元ノ微分方程式(31)ニ歸リテ y ガ矢張リ r ノミノ函數ト z ノミノ函數トノ積ニ等シト見テ $y=RZ$ トオケバ

$$\left(D^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(ZD^2R+R\frac{d^2Z}{dz^2}\right)=0.$$

此處ニ於テモシ

$$ZD^2R+R\frac{d^2Z}{dz^2}=0$$

ナラバ方程式ハ無論滿足サレル. 之ハ $y=y_1$ ト取ルニ同ジ. 次ニ又

$$ZD^2R+R\frac{d^2Z}{dz^2}=y_1$$

トオイテモ矢張リ方程式ハ滿足サレル. 依テ此式ニ $y_1=R_1Z_1$ ヲ導キ兩邊ヲ RZ ニテ除セバ

$$\frac{1}{R}D^2R+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\frac{R_1}{R}\frac{Z_1}{Z}.$$

此式ノ左邊ハ r ノミノ項ト z ノミノ項トノ和デ又右邊ハ r 及 z ノ函數ノ積デアル. 故ニ此方程式ガ成立ツ爲ニハ右邊ガ單ニ r ノミノ函數デアルカ又ハ z ノミノ函數デアルカヲ要シ從テ次ノ二ツノ場合ガ區別サレル.

(a) 右邊ガ r ノミノ函數ナル場合.

假定ニヨリテ $Z=aZ_1$ トオケバ $\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\frac{1}{Z_1}\frac{d^2Z_1}{dz^2}$ ナル故

$$D^2R+\frac{1}{Z_1}\frac{d^2Z_1}{dz^2}R=\frac{R_1}{a}.$$

故ニ(33)ニヨリテ

$$(D^2-k^2)R=\frac{R_1}{a}.$$

此式ノ右邊 R_1 ヲ $I_1(kr)$ トスレバ $R=rJ_0(ikr)=rI_0(kr)$ ガ之ニ對スル解デアル事ハ計算ニヨリテ容易ニ確メラレル. 又 R_1 ニ對シテ I_1 ノ代リニ K_1 ヲオケバ $R=rK_0(kr)$ トナル.

(b) 右邊ガ z ノミノ函數ナル場合.

$R=bR_1$ トオケバ

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+\frac{Z}{R_1}D^2R_1=\frac{Z_1}{b}.$$

故ニ(33)ニヨリテ

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+k^2Z=\frac{Z_1}{b}.$$

右邊ノ Z_1 ハ $\sin kz$ 又ハ $\cos kz$ デ之等ニ對シテ

$$Z=z\cos kz \quad 又ハ \quad z\sin kz.$$

以上述ベタトコロヲ綜合シテ y ノ一般式ヲ示セバ次ノ樣ニナル.[1]

$$\begin{aligned} y=&AI_1(kr)\cos(kz+\alpha)+BK_1(kr)\cos(kz+\beta)\\ &+CrI_0(kr)\cos(kz+\gamma)+DrK_0(kr)\cos(kz+\delta)\\ &+EI_1(kr)z\cos(kz+\varepsilon)+FK_1(kr)z\cos(kz+\theta). \end{aligned} \tag{36}$$

此式ニ於テ $A, B, C, \cdots, \alpha, \beta, \gamma, \cdots$ ハ常數デアル. 又圓柱體ニ於テ $r=0$ トナル場合ニハ K ハ無限大トナル故之等ノ項ヲ除ク. y ハ $\frac{\partial u}{\partial z}$ 又ハ $\frac{\partial w}{\partial r}$ ヲ示ス故之等ニ對シテ夫レ夫レ常數ヲ區別スル.

次ニ常數ノ決定ヲ述ベヤウ. 簡單ノ爲ニ圓柱ガ中空ナラズト假定シテ $B=D=F=0$ トオク. 然ル時ハ

$$\frac{\partial u}{\partial z}=A_1I_1(kr)\cos(kz+\alpha_1)+C_1rI_0(kr)\cos(kz+\gamma_1)+E_1I_1(kr)z\cos(kz+\varepsilon_1),$$

1) L. N. G. Filon, Phil. Trans. Royal Soc., 198, 1902, 147 頁.

$$\frac{\partial w}{\partial r}=A_2I_1(kr)\cos(kz+\alpha_2)+C_2rI_0(kr)\cos(kz+\gamma_2)+E_2I_1(kr)z\cos(kz+\varepsilon_2).$$

微分方程式(27)ト(32)トヲ比ベレバ判ル樣ニ $f=\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial z}$ ハ y_1 ト同ジ形ノ微分方程式ヲ滿足セネバナラヌ. 然ルニ上ノ兩式ニ於テ夫レ夫レノ第一項ヲ除ク外他ノ諸項ハ(31)ヲ滿足スルモ(32)ノ解デハナイ. 夫レ故 f ガ(32)ヲ滿足スル爲ニハ

$$C_1=C_2,\quad E_1=E_2,\quad \gamma_1=\gamma_2,\quad \varepsilon_1=\varepsilon_2.$$

從テ次ノ樣ニ書ク.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z}&=A_1I_1(kr)\cos(kz+\alpha_1)+CrI_0(kr)\cos(kz+\gamma)+EI_1(kr)z\cos(kz+\varepsilon),\\ \frac{\partial w}{\partial r}&=A_2I_1(kr)\cos(kz+\alpha_2)+CrI_0(kr)\cos(kz+\gamma)+EI_1(kr)z\cos(kz+\varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

モシ問題ノ性質上變形ガ横斷面 $z=0$ ノ兩側ニ對稱ヲナストスレバ u ハ z ノ偶函數又 w ハ z ノ奇函數ナル故 $\alpha_1=\alpha_2=\gamma=-\frac{\pi}{2}$, $\varepsilon=0$ ト取ル. 然ル時ハ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z}&=A_1I_1(kr)\sin kz+CrI_0(kr)\sin kz+EI_1(kr)z\cos kz,\\ \frac{\partial w}{\partial r}&=A_2I_1(kr)\sin kz+CrI_0(kr)\sin kz+EI_1(kr)z\cos kz. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

之等兩式ヲ積分シテ

$$\left.\begin{aligned} u&=\varphi(r)-\frac{A_1}{k}I_1(kr)\cos kz-\frac{C}{k}rI_0(kr)\cos kz+\frac{E}{k}I_1(kr)\left(z\sin kz+\frac{1}{k}\cos kz\right),\\ w&=\psi(z)+\frac{A_2}{k}I_0(kr)\sin kz+\frac{C}{k}rI_1(kr)\sin kz+\frac{E}{k}I_0(kr)z\cos kz. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

之ヨリ e ヲ計算スレバ

$$e=\frac{d\varphi}{dr}+\frac{\varphi}{r}+\frac{d\psi}{dz}-\left[A_1-A_2+\frac{2}{k}(C-E)\right]I_0(kr)\cos kz. \tag{40}$$

(25)ニ(39), (40)ヲ入レル時ハ結局

$$2(m-1)\frac{d^2\psi}{dz^2}+\left[mk(A_1-A_2)+4(m-1)(C-E)\right]I_0(kr)\sin kz=0.$$

次ニ(26)ニ(39), (40)ヲ入レル時ハ

$$2(m-1)\left[\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{d}{dr}\left(\frac{\varphi}{r}\right)\right]-\left[mk(A_1-A_2)+4(m-1)(C-E)\right]I_1(kr)\cos kz=0.$$

之等ノ兩式ガ成立スル爲ニハ

$$mk(A_1-A_2)+4(m-1)(C-E)=0, \tag{41}$$

並ニ

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{d}{dr}\left(\frac{\varphi}{r}\right)=0,\quad \frac{d^2\psi}{dz^2}=0. \tag{42}$$

(42)ヲ滿足スル φ 及 ψ ヲ夫レ夫レ u_1 及 w_1 トスレバ

$$u_1=\frac{c_1}{2}r+\frac{c_2}{r},\quad w_1=az+b.$$

之等ハ圓柱ガ長サノ方向ニ一樣ナル變形ヲナス場合ノ解デアル事 u_1 ヲ(9)ニ比ベレバ明カデアル. 故ニ必要ニ應ジテ之ヲ組合セル事トシテ以下此種ノ變形ヲ省略シヤウ.

偖常數 A_1, A_2, C, E ヲ定メル爲ニ先ヅ第一ニ圓柱體ノ表面 $r=a$ ニ於テ剪斷應力ヲ零トシヤウ. 然ル時ハ(38)ヨリ

$$\frac{\tau_{r=a}}{G}=\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=a}$$
$$=[(A_1+A_2)I_1(ka)+2CaI_0(ka)]\sin kz+2EI_1(ka)z\cos kz=0.$$

此式ガ成立スル爲ニハ

$$(A_1+A_2)I_1(ka)+2CaI_0(ka)=0, \tag{43}$$

及 $$E=0.$$

此第二ノ結果ニヨリテ(41)ハ次ノ樣ニナル.

$$\frac{mk}{4(m-1)}(A_1-A_2)+C=0. \tag{44}$$

(43), (44) ヨリ C ヲ消去スレバ

$$A_1\left[I_1(ka)-\frac{m}{2(m-1)}kaI_0(ka)\right]+A_2\left[I_1(ka)+\frac{m}{2(m-1)}kaI_0(ka)\right]=0. \tag{45}$$

簡單ノ爲ニ次ノ樣ニオク.

$$\alpha=\frac{I_1(ka)-\frac{m}{2(m-1)}kaI_0(ka)}{I_1(ka)+\frac{m}{2(m-1)}kaI_0(ka)}. \tag{46}$$

然ル時ハ

$$\left.\begin{aligned}A_2&=-\alpha A_1,\\ C&=-\frac{mk}{4(m-1)}(1+\alpha)A_1.\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

斯樣ニシテ A_1 ヲ除ク他ノ常數ハ凡テ定マリ殘サレタ A_1 ハ圓柱體表面ニ於ケル應力 σ_r ヨリ求メラレル. 尙常數 k ハ有限ノ長サノ柱體ニ於テハ兩端面ニ於ケル σ_z ヲ例ヘバ零トスル樣ニ之ヲ定メル. 別ニ兩端面ニ作用スル τ ハ消滅セザルモ之ハ半徑ノ方向ニ沿ヒテ作用シ夫レ自身平衡ヲナス故兩端面ヨリ相當ニ距リタル場所ニ於テハ此應力ノ影響ハ省略サレル.

尙計算ノ便宜ノ爲(44)ヲ用ヰテ(40)ヲ書キ直セバ φ, ψ ノ項ヲ省イテ

$$e=-\frac{m-2}{2(m-1)}(1+\alpha)A_1I_0(kr)\cos kz. \tag{48}$$

又應力成分ノ中 σ_r 及 σ_z ヲ書ケバ

$$\sigma_r=2G\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{e}{m-2}\right)$$
$$=\frac{G}{2(m-1)}A_1\cos kz\left\{\left[\left(mkr+\frac{4(m-1)}{kr}\right)I_1(kr)-(3m-2)I_0(kr)\right]\right.$$
$$\left.+\alpha\left[mkrI_1(kr)+(m-2)I_0(kr)\right]\right\}, \tag{49}$$

$$\sigma_z=2G\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{e}{m-2}\right)$$
$$=-\frac{G}{2(m-1)}A_1\cos kz\left\{\left[mkrI_1(kr)+2I_0(kr)\right]\right.$$
$$\left.+\alpha\left[mkrI_1(kr)+2(2m-1)I_0(kr)\right]\right\}. \tag{50}$$

上ニ述ベタ樣ニ有限ノ長サヲ有ツ圓柱ニ於テハ兩端面ニ相當スル z ノ値ニ對シテ $\cos kz=0$ トナル樣ニ k ヲ定メル. 斯ル條件ニ合フ無數ノ k ヲ取リテ應力ヲ無限級數ニ表シ σ_r ガ $r=a$ ニ於テ與ヘラレタ外力ノ應力ト一致スル樣ニ係數ヲ定メレバ宜シイ. 若シ此計算ガ都合ヨク出來レバ玆ニ問題ハ解ケタ事ニナル. 併シ斯ル場合ニ級數ノ收斂性ガ果シテ滿足ナ結果ヲ示スヤ否ヤヲ注意セネバナラヌ.

130. 薄肉圓筒ノ對稱變形.

薄肉圓筒ガ其軸 z ニ對スル對稱變形ヲナス場合ノ計算ハ以上ノ計算トハ別ニ論ズルヲ便トスル故先ヅ厚サ h ヲ二等分スル圓筒壁ノ中央面ヲ取リ其半徑ヲ r トシテ微容積 $hrd\varphi dz$ ニ於ケル力ノ平衡ヲ考ヘヤウ. 之ガ爲ニ厚サノ方向ニ對シテ應力及應力ノモーメントヲ積分シタ次ノ式ヲ作ル. 玆ニ σ_t, σ_z, τ ハ從來通リノ應力ヲ示シ ξ ハ中央面ヨリノ距離ヲ示ス. 又記號 Z ハ z 軸ノ方向ノ力ノ密度ヲ示ス. 之ハ前ヨリ使用シテ來タ容積ノ力ト混同サレナイ樣ニシタイ. 只今ノ計算ニ於テ容積ノ力ハ之ヲ全部省略スル. 然ル時ハ力及モーメントノ密度ハ

$$T=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\sigma_t d\xi,\quad S=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\tau d\xi,\quad Z=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\sigma_z d\xi,\quad M=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\sigma_z\xi d\xi. \tag{51}$$

偖圓筒ノ內壓ヲ p トシテ(外壓ノ場合ニハ $-p$ トスル)圓筒軸及半徑ノ兩方向ニ於ケル力ノ平衡ヲ考ヘルニ微小ナル圓弧ノ兩端ニ於ケル半徑間ノ角ヲ $d\varphi$ トシ變形後ノ平均半徑ヲ $r+u=\rho$ トスレバ先ヅ z 軸ノ方向ニ對シテ

$$\left[Z\rho+\frac{d}{dz}(Z\rho)dz\right]d\varphi-Z\rho d\varphi-\left[S\rho\frac{du}{dz}+\frac{d}{dz}\left(S\rho\frac{du}{dz}\right)dz\right]d\varphi+S\rho\frac{du}{dz}d\varphi=0,$$

又ハ

$$\frac{d}{dz}\left(Z\rho\right)-\frac{d}{dz}\left(S\rho\frac{du}{dz}\right)=0. \tag{52}$$

此式ニ於テ第二項ノ $S\rho\frac{du}{dz}$ ハ $Z\rho$ ニ比ベテ小ナルベキ故近似的ニ $Z\rho=$ const. 又半徑ノ方向ニ對シテ

$$\left[S\rho+\frac{d}{dz}(S\rho)dz\right]d\varphi-S\rho d\varphi+\left[Z\rho\frac{du}{dz}+\frac{d}{dz}\left(Z\rho\frac{du}{dz}\right)dz\right]d\varphi$$
$$-Z\rho\frac{du}{dz}d\varphi-Tdzd\varphi+p\rho dzd\varphi=0,$$

又ハ

$$\frac{d}{dz}(S\rho)+\frac{d}{dz}\left(Z\rho\frac{du}{dz}\right)-T+p\rho=0. \tag{53}$$

次ニモーメントノ平衡式ヲ書ケバ S ニ對シテ一段下位ノ項ハ省略サ

レル故

$$\left(M\rho+\frac{d}{dz}(M\rho)dz\right)d\varphi-M\rho d\varphi-S\rho dzd\varphi=0,$$

又ハ

$$\frac{d}{dz}(M\rho)-S\rho=0. \tag{54}$$

(53)及(54)ヨリ S ノ項ヲ消去シ(52)ノ後ニ述ベタ樣ニ $Z\rho=$ const. トスレバ

$$\frac{d^2}{dz^2}(M\rho)+Z\rho\frac{d^2u}{dz^2}-T+p\rho=0. \tag{55}$$

筒壁薄キ故 σ_r ハ他ノ應力ニ比ベテ小ナル故近似的ニ $\sigma_r=0$ ト見做ス. 然ル時ハ

$$(m-1)\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

之ヨリ $\frac{\partial u}{\partial r}$ ヲ求メテ σ_t 及 σ_z ノ兩式ニ導ケバ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_t&=\frac{2G}{m-1}\left(m\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right),\\ \sigma_z&=\frac{2G}{m-1}\left(\frac{u}{r}+m\frac{\partial w}{\partial z}\right).\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

之等ノ式ニ於ケル $\frac{u}{r}$ ハ未ダ一般性ヲ有スルモ以下ノ計算ニ於テハ前ニ述ベタ平均半徑 r 並ニ之ニ對スル變位 u ヲ用ヰテ結局平均値ヲ取ルトシヤウ. 又 z 軸ノ方向ニ於ケル變位 w ニ對シテハ中央面上ノ點ノ變位 w_0 ト壁ノ曲リヨリ來ル變位トノ代數和トシテ次ノ樣ニ書ク.

$$w=w_0-\xi\frac{du}{dz}.$$

然ル時ハ

$$\sigma_t=\frac{2G}{m-1}\left(m\frac{u}{r}+\frac{dw_0}{dz}-\xi\frac{d^2u}{dz^2}\right),$$

$$\sigma_z=\frac{2G}{m-1}\left(\frac{u}{r}+m\frac{dw_0}{dz}-m\xi\frac{d^2u}{dz^2}\right).$$

サテ圓筒軸ノ方向ニ沿ヒテ其一端ニ作用スル壓縮力ノ大サヲ P トスレバ近似的ニ $\rho=r$ トシテ

$$2\pi rZ=2\pi r\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\sigma_z d\xi=-P.$$

此式ニ上ノ σ_z ノ式ヲ入レル時ハ

$$\frac{4\pi G}{m-1}\left[\left(u+mr\frac{dw_0}{dz}\right)\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}d\xi-mr\frac{d^2u}{dz^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\xi d\xi\right]=-P,$$

又ハ

$$\frac{4\pi G}{m-1}\left[uh+mrh\frac{dw_0}{dz}\right]=-P.$$

之ヨリ

$$\frac{dw_0}{dz}=-\frac{u}{mr}-\frac{m-1}{4\pi mG}\frac{P}{rh}.$$

横斷面積 $2\pi rh=f$ トオキ此式ヲ σ_t, σ_z ノ兩式ニ代入スレバ

$$\sigma_t=\frac{2G}{m-1}\left(\frac{m^2-1}{m}\frac{u}{r}-\xi\frac{d^2u}{dz^2}\right)-\frac{P}{mf},$$

$$\sigma_z=-\frac{2Gm}{m-1}\xi\frac{d^2u}{dz^2}-\frac{P}{f}.$$

G ノ代リニ E ヲ用ヰレバ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_t&=E\left(\frac{u}{r}-\frac{m}{m^2-1}\xi\frac{d^2u}{dz^2}\right)-\frac{P}{mf},\\ \sigma_z&=-E\frac{m^2}{m^2-1}\xi\frac{d^2u}{dz^2}-\frac{P}{f}.\end{aligned}\right\}\tag{57}$$

(57) ヲ (51) ノ第一及第四式ニ入レル時ハ

$$\left.\begin{aligned}T&=E\frac{uh}{r}-\frac{Ph}{mf},\\ M&=-\frac{m^2E}{m^2-1}\frac{h^3}{12}\frac{d^2u}{dz^2}.\end{aligned}\right\}\tag{58}$$

而シテ $$Z=-\frac{Ph}{f}.$$

之等ノ式ヲ(55)ニ入レ $\rho=r$ ト記セバ

$$\frac{d^4u}{dz^4}+\frac{6}{\pi}\frac{m^2-1}{m^2E}\frac{P}{h^3r}\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{m^2-1}{m^2}\frac{12}{h^2r^2}\left(u-\frac{P}{2\pi mhE}-\frac{pr^2}{Eh}\right)=0.\tag{59}$$

此式ニ於テ次ノ樣ニオク.

$$u-\frac{P}{2\pi mhE}-\frac{pr^2}{Eh}=\alpha.\tag{60}$$

α ハ變位 u ヨリ P 及 p ノ爲ニ生ズル常數ノ部分ヲ引キ去リタル殘リヲ示ス. 而シテ(59)ハ

$$\frac{d^4\alpha}{dz^4}+\frac{6}{\pi}\frac{m^2-1}{m^2E}\frac{P}{h^3r}\frac{d^2\alpha}{dz^2}+\frac{m^2-1}{m^2}\frac{12}{h^2r^2}\alpha=0.$$

簡單ノ爲ニ次ノ樣ニ書ク.

$$D=\frac{m^2}{m^2-1}\frac{Eh^3}{12},\quad \beta=\frac{Eh}{r^2},\quad P_1=\frac{P}{2\pi r}.$$

然ル時ハ

$$\frac{d^4\alpha}{dz^4}+\frac{P_1}{D}\frac{d^2\alpha}{dz^2}+\frac{\beta}{D}\alpha=0.\tag{61}$$

此式ノ一般解ハ e^{gz} ノ形ニ表サレ g ハ次ノ四次方程式ノ根デアル.

$$g^4+\frac{P_1}{D}g^2+\frac{\beta}{D}=0.$$

之ヨリ g^2 ヲ求メレバ

$$g^2=-\frac{P_1}{2D}\pm\sqrt{\frac{P_1^2}{4D^2}-\frac{\beta}{D}}.$$

若シ此式ノ右邊第二項ガ零トナレバ g ハ虛數トナリテ α ハ正弦波ヲ表ス. 此時ニハ

$$g=\pm i\sqrt{\frac{P_1}{2D}}=\pm i\gamma,$$

但 $$i=\sqrt{-1},\quad \gamma=\sqrt{\frac{P_1}{2D}}.$$

而シテ

$$\begin{aligned}\alpha&=(c_1+c_2z)e^{i\gamma z}+(c_3+c_4z)e^{-i\gamma z}\\ &=C_1\cos\gamma z+C_2\sin\gamma z+z(C_3\cos\gamma z+C_4\sin\gamma z).\end{aligned}\tag{62}$$

$z=0$ 及 $z=l$ ニ對シテ $\alpha=\frac{d^2\alpha}{dz^2}=0$ トオケバ $C_1=C_3=C_4=0,\ \gamma l=n\pi.$

從テ $\alpha=B\sin\frac{n\pi z}{l}$ トナリ此式ニ於テ $\frac{l}{n}$ ハ正弦波ノ半波長ニ等シク卽波長ヲ λ トスレバ $\frac{l}{n}=\frac{\lambda}{2}$.

薄肉圓筒ガ軸方向ニ壓サレテ筒壁ニ不減衰正弦波ノ曲リヲ生ズル條件トシテハ上ニ述ベタ樣ニg^2ノ式ノ第二項ガ消エルヲ要スル故

$$P_1=2\sqrt{\beta D}=\frac{Eh^2}{r}\sqrt{\frac{m^2}{3(m^2-1)}}. \tag{63}$$

而シテ$\frac{l}{n}=\frac{\pi}{\gamma}$ナル故半波長ハ

$$\frac{\lambda}{2}=\pi\sqrt[4]{\frac{D}{\beta}}=\pi\sqrt[4]{\frac{m^2}{12(m^2-1)}}\sqrt{hr}. \tag{64}$$

若シ最初ヨリ微分方程式ノ一ツノ特解トシテ $\alpha=B\sin\frac{n\pi z}{l}$ ヲ取レバ之ヲ(61)ニ入レテ正弦ノ係數ヲ零トオク. 卽

$$\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4-\frac{P_1}{D}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2+\frac{\beta}{D}=0.$$

之ヨリ

$$P_1=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2D+\beta\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2.$$

半波長ノ倍數ヲ示スnハ整數ナルモ假リニ $\frac{n\pi}{l}=x$ トオキxヲ連續ト見テP_1ノ極小條件ヲ求メレバ $x^4=\frac{\beta}{D}$ トナリ之ヲP_1ノ式ニ入レテ(63)ト同樣ニ次ノ結果ヲ得ル.

$$P_1=2\sqrt{\beta D}.$$

上ノ限界荷重ノ計算ニ於テハ素ヨリ變形ヲ純粹ニ彈性的ト見做シタケレドモ之ハ$\frac{h}{r}$ガ非常ニ小ナル場合ニ限ラレル. 又嚴密ニ言ヘバ兩端ノ條件モ實際ニ適シナイデアラウ. 從テ正確ニ上ニ述ベタ樣ナ有樣ニ變形スル事ハ實現シ難イ. 尙圓筒ノ壓縮ニ就テハ軸ニ對稱ナラザル變形ヲ起シ圓周ニ沿ヒテ波ヲ生ズル場合ヲ考ヘル必要ガアル.[1]

次ニ上ノ計算ノ應用ヲ示ス他ノ例トシテ極長イ圓筒ガ其周壁ノ一部ニノミ外壓ヲ受ケル場合ヲ考ヘヤウ. 外壓ノ作用スル部分ノ長サヲ$2l$トシ其中央ヲ通ル横斷面中ニ座標軸ノ原點ヲ設ケル. 筒軸ノ方向ニ力ノ作用ナキモノト見テ$P_1=0$トオキ又pノ符號ヲ變ヘル. 圓筒ノ變形

1) H. Geiger und K. Scheel, Handbuch der Physik. VI, 298 頁.
S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, 453 頁.

ハ原點ヲ境トシテzノ正負ノ値ニ對シテ對稱ヲナス故簡單ノ爲ニ正ノzノミヲ考ヘル. 然ル時ハ $z=l$ 迄ト之以上トノ二ツノ部分ニ對シテ變位uヲ別々ニ書ク必要ガアル. 卽(60)ヨリ

$$z<l,\qquad u_1=\alpha-\frac{pr^2}{Eh}.$$

$$z>l,\qquad u_2=\alpha.$$

之等ノ式ニ於ケルαハ共ニ(61)ノ一般解 Σce^{gz} ヨリ導カレル. 而シテαノ式ニ於ケル指數gハ次ノ方程式ノ根デアル.

$$g^4+\frac{\beta}{D}=0.$$

之ヲ解ケバu_1及u_2ニ對シテ

$$g=\sqrt[4]{-\frac{\beta}{D}}=(1\pm i)\alpha \text{ 及 } (-1\pm i)\alpha,$$

但

$$\alpha=\sqrt[4]{\frac{\beta}{4D}}=\sqrt[4]{\frac{3(m^2-1)}{m^2r^2h^2}}.$$

故ニ

$$\begin{aligned}\alpha&=c_1e^{(1+i)\alpha z}+c_2e^{(1-i)\alpha z}+c_3e^{-(1-i)\alpha z}+c_4e^{-(1+i)\alpha z}\\&=e^{\alpha z}(C_1\cos\alpha z+C_2\sin\alpha z)+e^{-\alpha z}(C_3\cos\alpha z+C_4\sin\alpha z).\end{aligned}$$

$z<l$ノ部分ニ對シテハ原點ニ對スル對稱ノ理ニヨリテ$C_1=C_3$及$C_2=-C_4$. 卽αヲ書キ換ヘテu_1ヲ次ノ形ニ書ク.

$$u_1=A\cosh\alpha z\cos\alpha z+B\sinh\alpha z\sin\alpha z-\frac{pr^2}{Eh}. \tag{65}$$

又$z>l$ノ部分ニ對シテハzノ非常ニ大ナル値ニ對シテ$u_2=0$トナルヲ要スル故$e^{\alpha z}$ノ項ヲ省イテ

$$u_2=e^{-\alpha z}(C\cos\alpha z+D\sin\alpha z). \tag{66}$$

此式ニ於ケル常數Dハ勿論曲ゲノ剛性ヲ示ス同名ノ文字トハ別デアル. 偖常數A, B, C, Dヲ定メル爲ニハ $z=l$ノ點ニ於テ次ニ示ス樣ナ連續性ノ條件ニヨル.

$$u_1=u_2,\ \frac{du_1}{dz}=\frac{du_2}{dz},\ \frac{d^2u_1}{dz^2}=\frac{d^2u_2}{dz^2},\ \frac{d^3u_1}{dz^3}=\frac{d^3u_2}{dz^3}.$$

之等ノ條件中第一及第二ハ明カデアルガ第三第四ノ條件ハM及Sノ連續ヨリ來ル. Sハ(54)ヨリ判ル樣ニMヨリ更ニ一段高イ微分係數ヲ含ム. 斯ル條件ガ成立スル爲ニハ

(i) $A\cosh al\cos al+B\sinh al\sin al-\dfrac{pr^2}{Eh}=e^{-al}(C\cos al+D\sin al)$,

(ii) $(A+B)\sinh al\cos al-(A-B)\cosh al\sin al=-e^{-al}[(C-D)\cos al+(C+D)\sin al]$,

(iii) $B\cosh al\cos al-A\sinh al\sin al=-e^{-al}(D\cos al-C\sin al)$,

(iv) $(B-A)\sinh al\cos al-(A+B)\cosh al\sin al=e^{-al}[(C+D)\cos al-(C-D)\sin al]$.

(i), (ii), (iii) ヲ加ヘテC及Dヲ消去スレバ

$$A(\cosh al+\sinh al)(\cos al-\sin al)+B(\cosh al+\sinh al)(\cos al+\sin al)=\frac{pr^2}{Eh}.$$

又(ii), (iv)ノ和ニ(iii)ノ兩邊ヲ二倍シテ加ヘレバ結局

$$A\sin al=B\cos al.$$

夫レ故之等兩式ヨリ

$$A=\frac{pr^2}{Eh}e^{-al}\cos al,\qquad B=\frac{pr^2}{Eh}e^{-al}\sin al. \tag{67}$$

之等ノ結果ヲ(i)ニ入レテ

$$C\cos al+D\sin al=-\frac{pr^2}{Eh}(\cosh al\sin^2 al+\sinh al\cos^2 al).$$

又(iii)ヨリ

$$C\sin al-D\cos al=\frac{pr^2}{Eh}(\cosh al-\sinh al)\sin al\cos al.$$

之等兩式ヨリ

$$\left.\begin{aligned}C&=-\frac{pr^2}{Eh}\sinh al\cos al,\\ D&=-\frac{pr^2}{Eh}\cosh al\sin al.\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

斯樣ニシテ常數ガ決定サレ從テ變位u_1及u_2ハ次ノ式デ與ヘラレル.

$$\left.\begin{aligned}u_1&=\frac{pr^2}{Eh}\left[e^{-al}(\cos al\cosh az\cos az+\sin al\sinh az\sin az)-1\right],\\ u_2&=-\frac{pr^2}{Eh}e^{-az}(\sinh al\cos al\cos az+\cosh al\sin al\sin az).\end{aligned}\right\} \tag{69}$$

$z=0$ ニ於テu_1ハ明カニ負トナリ且$\dfrac{du_1}{dz}$ハ零デアル. zガ增セバu_1ハ漸テ增シ始メルデアラウガ $z=l$ ニ於ケル値ヲ見ルニ夫レハ

$$u_1=u_2=-\frac{pr^2}{2Eh}(1-e^{-2al}\cos 2al). \tag{70}$$

此式ノ示ス樣ニ此處デハ尙負デアル. 更ニzヲ增セバu_2ハ零トナリ又正トナル. 而シテ筒壁ハ波形ニ變形スル. 併シzガ大トナルニ連レテ波ノ高サハ小トナリテ遂ニ消エル.

上ニ述ベタ一般ノ解法ヲ應用シテ薄肉圓筒ノ端ニ於ケル變形及應力ノ計算ヲ行フ事ガ出來ル. 此種ノ計算ヲ曾テ內燃機ノ氣筒壁ニ就テ行ッタ. 當時用ヰタ微分方程式ハ只今ノト少シ異ル故結果ハ多少違フケレドモ大體ノ方法ヲ示スニ足ルデアラウ.[1]

例題 1. 內徑 30 cm デ 200 氣壓ノ水壓ニ堪ヘル可キ鑄鋼製ノ圓筒ニ於テ若シ簡單ニ最大應力ノ限度ヲ 1000 kg/cm^2 トスレバ肉ノ厚サヲ幾何ニスベキヤ.

(17)ニ於テ σ_{max} ノ代リニ與ヘラレタ許容應力kヲ置イテ

$$k=p\frac{r_2^2+r_1^2}{r_2^2-r_1^2}.$$

之ヨリ

$$\frac{r_2}{r_1}=\sqrt{\frac{\dfrac{k}{p}+1}{\dfrac{k}{p}-1}}.$$

此式ニ於テ $k=1000,\ p=200$ 卽 $\dfrac{k}{p}=5$ トオケバ

$$\frac{r_2}{r_1}=\sqrt{1.5}=1.225.$$

然ルニ $r_1=15\,cm$ ナル故

$$r_2=1.225\times 15=18.4\,cm.$$

故ニ壁ノ厚サハ少クモ 3.4 cm ヲ要スル譯デアル.

---

1) 機械學會誌, 21, 1918, 21 頁.

例題 2. 二ツノ圓筒ヲ燒嵌メシテ接觸面ノ壓力ガ $p_1 kg/cm^2$ トナルタメニハ兩圓筒ノ最初ノ寸法ヲ如何ニ定ムベキヤ.

組合セタ後ノ內外兩筒ノ內半徑及外半徑ヲ夫レ夫レ r_0, r_1 及 r_1, r_2 トスル. 燒嵌メノタメ內筒ハ外筒ノタメニ p_1 ナル外力ヲ受ケ又外筒ハ p_1 ナル內壓ヲ受ケル故內筒ノ內外兩面ニ於ケル圓周ニ切線ノ方向ノ伸ビヲ計算スルタメ先ヅ(20)ニ依リテ

$$E\varepsilon_t = -\frac{p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}\left(\frac{m+1}{m}\frac{r_0^2}{r^2} + \frac{m-1}{m}\right).$$

此式ニ於テ $r = r_0$ トオキ此時ノ ε_t ヲ α_0 トスレバ

$$E\alpha_0 = -\frac{2p_1}{1-\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2}.$$

又 $r = r_1$ トオキ之ニ對スル ε_t ヲ α_1 ニテ表セバ

$$E\alpha_1 = -\frac{p_1}{1-\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2}\left(\frac{m+1}{m}\frac{r_0^2}{r_1^2} + \frac{m-1}{m}\right).$$

次ニ外筒ニ對シテハ(16)ヨリ

$$E\varepsilon_t = \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(\frac{m+1}{m}\frac{r_2^2}{r^2} + \frac{m-1}{m}\right).$$

此式ニ於テ $r = r_1$ トオキ之ニ對スル ε_t ヲ β_1 トスレバ

$$E\beta_1 = \frac{p_1}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1}\left(\frac{m+1}{m}\frac{r_2^2}{r_1^2} + \frac{m-1}{m}\right).$$

又 $r = r_2$ トオキ ε_t ヲ β_2 ニテ示セバ

$$E\beta_2 = \frac{2p_1}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1}.$$

例ヘバ $\frac{r_0}{r_1} = \frac{2}{3}$, $\frac{r_2}{r_1} = \frac{4}{3}$, $m = \frac{10}{3}$ トスレバ

$$E\alpha_0 = -3.60p_1,$$

$$E\alpha_1 = -2.30p_1.$$

$$E\beta_1 = 3.87p_1,$$

$$E\beta_2 = 2.57p_1.$$

斯樣ニシテ α_0, α_1 及 β_1, β_2 ガ定マレバ組合セル前ノ內外兩圓筒ノ寸法 a_0, a_1 及 b_1, b_2 ハ次ノ計算ニヨリテ求メラレル.

$$r_0 = a_0(1+\alpha_0),$$

$$r_1 = a_1(1+\alpha_1) = b_1(1+\beta_1),$$

$$r_2 = b_2(1+\beta_2).$$

又ハ近似的ニ

$$a_0 = r_0(1-\alpha_0),$$

$$a_1 = r_1(1-\alpha_1),$$

$$b_1 = r_1(1-\beta_1),$$

$$b_2 = r_2(1-\beta_2).$$

例題 3. 前題ノ樣ニ二ツノ圓筒ヲ組合セオキテ之ニ內壓 p ヲ加ヘル時內外兩圓筒ノ內壁ノ應力ヲ見出スコト.

內筒(半徑 r_0, r_1) ガ p_1 ナル外壓ノ作用ノ爲其內壁ニ生ズル圓周方向ノ應力ハ(21)ニヨリテ $-2p_1\Big/\left[1-\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2\right]$ ニ等シク又外筒(半徑 r_1, r_2) ガ p_1 ナル內壓ヲ受ケル爲其內壁ニ生ズル圓周方向ノ應力ハ(17)ニヨリテ $p_1\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2+1\right]\Big/\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2-1\right]$ デアル. 而シテ此組合セ圓筒ノ內部ニ新ニ p ナル壓力ヲ作用セシメテ生ズル應力ヲ一個ノ圓筒ノ場合ト見做シテ計算シ之ヲ最初カラ存在スル上ノ應力ニ加ヘテ合成應力ヲ求メレバ結局兩圓筒內面ニ於ケル圓周方向ノ應力ハ夫レ夫レ次ノ樣ニナル.

內筒ノ內面. $$\sigma_0 = -\frac{2p_1}{1-\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2} + p\frac{\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^2+1}{\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^2-1}.$$

外筒ノ內面. $\sigma_1 = p_1 \dfrac{\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2+1}{\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2-1} + p \dfrac{\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2+1}{\left(\dfrac{r_2}{r_0}\right)^2-1}.$

最初ヨリ應力ノ作用ナケレバ最モ高イ應力ヲ生ズベキ內筒ノ內面ハσ_0ノ式ノ右邊第一項ノタメニ小トナリ其代リ外筒ノ內面ハσ_1ノ式ノ第一項丈ケ大ナル應力ヲ受ケル.

特ニ若シ$\sigma_0 = \sigma_1$ナルヲ望ムナラバ上式ノ右邊ヲ相等シクオイテ

$$p \frac{\left(\dfrac{r_2}{r_0}\right)^2 - \left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2}{\left(\dfrac{r_2}{r_0}\right)^2-1} = p_1 \left[\frac{\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2+1}{\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2-1} + \frac{2}{1-\left(\dfrac{r_0}{r_1}\right)^2} \right].$$

例ヘバ $\dfrac{r_0}{r_1}, \dfrac{r_2}{r_1}$ ニ前例同樣ノ數ヲ與ヘテpトp_1トノ關係ヲ求メレバ

$$p_1 = 0.103p.$$

尙兩圓筒壁ノ各點ニ於ケル應力ヲ計算シテ之ヲ圖示スレバ應力配布ノ狀態ヲ明カニスル事ガ出來ル.