XIX. 柱體ノ捩リ.

110. 捩リノ理論.

彈性學ノ理論ヲ應用シテ茲ニ柱體ノ捩リヲ論ズルハ甚興味アル事デアル. 今棒ノ軸ニ沿ヒテ x 軸ヲトル時ハ斷面ニ働ク剪斷應力ハ τ_y 及 τ_z ナル故之等以外ノ應力ヲ皆零トスレバ

$$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_x=0.$$

XVI章(10)式ニヨリテ

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{e}{m-2}=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{e}{m-2}=\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{e}{m-2}=0.$$

夫レ故之等三式ヨリ $e=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$ ガ零トナリ從テ $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ ガ夫レ夫レ零トナル. 尙此外 $\tau_x=0$ ナル故

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}=0,\\&\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

(1)ノタメニXVI章ノ一般方程式(11)ハ餘程簡單トナリ若シ X, Y, Z ヲ零トスレバ其形ハ先ヅ次ノ樣ニナル.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0.$$

然ルニ(1)ノ最後ノ關係ニヨリテ

$$\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial y}.$$

之ヲ z 及 y ニ對シテ微分シ微分ノ順序ヲ變ヘレバ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0, \\ \text{及}\quad &\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

夫レ故上ノ三微分方程式ノ第二第三ノ兩式ヨリ次ノ關係ヲ書クコトガ出來ル.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \\ &\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

以上述ベタ中先ヅ(1)ヨリ判ルコトハ u, v, w ナル函數ガ夫レ夫レ x, y, z ヲ含マズシテ他ノ二變數ノミヨリ出來テ居ル點デアル. 此中 u 自身ハ後ニ讓リ v 及 w ニ就テ考ヘルニ(2),(3)ノ兩式ヨリ判ル樣ニ v ハ x 叉ハ z ニ就テ一次ノ式デアリ同樣ニ w ハ x 叉ハ y ニ就テ一次デアル. 卽

$$\left.\begin{aligned} v &= \alpha_0 + \alpha_1 x + z(\alpha_2 + \alpha_3 x), \\ w &= \beta_0 + \beta_1 x + y(\beta_2 + \beta_3 x). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

式中 $\alpha_0, \cdots$ 及 $\beta_0, \cdots$ ハ變數 x, y, z ヲ含マヌ係數デアル.

偖(4)ノ v 及 w ハ(1)ノ最後ノ式ヲ滿足スベキ故

$$\alpha_2 + \alpha_3 x + \beta_2 + \beta_3 x = 0,$$

又ハ

$$\alpha_2 + \beta_2 + (\alpha_3 + \beta_3)x = 0.$$

此關係ガ常ニ成立スルタメニハ

$$\text{並ニ}\quad \left.\begin{aligned} \alpha_2 + \beta_2 &= 0, \\ \alpha_3 + \beta_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

次ニ係數ニ關スル他ノ條件ヲ導クタメ座標軸ノ取リ方ヲ考ヘルニ先ヅ原點ヲ棒ノ軸中ニアル一點ニ取レバ此點ニ於ケル彈性移動ハ零ナル故 $x = y = z = 0$ ニ對シテ $u = v = w = 0$ ナルヲ要シ從テ(4)ヨリ

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0.$$

又 x 軸ハ變形前棒ノ軸ニ一致スル樣ニ取ラレテ居ルガ變形後モ原點ニ充分接近シタ點デハ之ニ一致スル樣ニ定メル. 此假定ニ從ヘバ原點

$(x = y = z = 0)$ ニ於テ $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0$ トナル事ヲ要スル. 故ニ(4)ヨリ

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0.$$

尙 y 軸ハ $x = 0$ ノ橫斷面中ニアリテ原點及之ニ充分接近シタ他ノ一點ヲ常ニ通ル樣ニ選ブモノトスル. 斯樣ニシテ座標軸ノ位置ガ棒ノ中ニ確定スルノデアル. 故ニ原點ニ近キ y 軸ノ一點ハ z ノ方向ニ移動セヌ. 卽 $\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0$ ナルタメ

$$\beta_2 = 0.$$

故ニ又(5)ヨリ

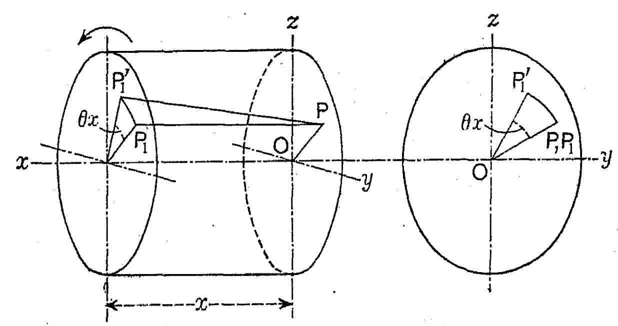
$$\alpha_2 = 0.$$

斯ク係數ノ値簡單トナリ殘ルハ $\alpha_3 = -\beta_3$ ノミナル故之等ヲ下ノ樣ニオク.

$$-\alpha_3 = \beta_3 = \theta. \tag{6}$$

從テ(4)ヨリ

$$\left.\begin{aligned} v &= -\theta x z, \\ w &= \theta x y. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$



132 圖

今 θ ノ意味ヲ說明スルタメ 132 圖ニ捩リヲ受ケル柱體ノ一部ヲ示ス. 卽座標面 yz ヨリ x ナル距離ニアル任意ノ平面ガ矢ノ樣ニ廻リ y, z ニ關シテ最初 P ト同位置ニアリシ P_1 ガ P_1' ニ來ル故上ノ v 及 w ハ $\widehat{P_1P_1'}$ ノ y, z 軸ノ方向ニ於ケル射影デアル. 卽

$$\sqrt{v^2 + w^2} = P_1P_1'.$$

然ルニ(7)ヨリ符號ニ關セズ

$$\sqrt{v^2+w^2}=\theta x\sqrt{y^2+z^2}.$$

故ニ圖ニ於テ

$$\theta=\frac{1}{x}\frac{P_1P_1'}{\sqrt{y^2+z^2}}=\frac{\angle P_1OP_1'}{x}.$$

θ ハ常數ナル故斷面上ノ何レノ點ニ於テモ同ジ角丈ケ相對的ニ廻轉スル. 此變形ノ結果斷面ノ形ハ不變デアル. 斯樣ニ θ ハ互ニ單位ノ距離ニアル二斷面間ニ起ル廻轉ノ角ニ等シク從テ棒ノ受ケル捩レノ程度ヲ示ス數ニナル. 之ハ1ニ比ベテ遙ニ小ト假定シヤウ. 斯樣ニシテ函數 v 及 w ハ係數 θ ヲ除ケバ其形明カトナツタ譯デアル. 而シテ θ 自身ハ與ヘラレタ斷面ノ形ニ就テ次ニ述ベル如キ問題ヲ解イテ後初メテ決定サレル.

前ニ函數 u ニ就テハ y 及 z ノミヲ含ムモノデアル事ヲ述ベテ置イタ. 數式ニテ記セバ $u(y,z)$ デアツテ且 u ハ簡單ニサレタ基礎ノ微分方程式ヲ滿足セネバナラヌ. 卽

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{8}$$

一般ニ u ガ零デナイ時ニハ棒ノ橫斷面ハ捩リト共ニ平面デナクナリ卽 $x=0$ ノ斷面ハ $x=u(y,z)$ ナル曲面トナル. 其他ノ斷面モ皆之ニ倣フ.

偖方程式(8)ノ解ハ與ヘラレタ橫斷面ノ周圍ノ各點ニ於ケル應力ガ其境界線ニ對シテ切線ノ方向ヲトルト云フ條件ニ適ハナケレバナラヌ. 何トナレバ若シ之ニ反シテ周圍ノ曲線ニ垂直ナル應力成分ヲ有ツナラバ柱體ノ表面ニ於テ此成分ニ直交スル他ノ等シイ應力ヲ伴ハネバナラヌ道理デアルガ表面ニ斯樣ナ力ノ存在ヲ假定シテ居ナイ以上前ノ應力成分モ亦存在シ得ナイ譯デアル. 夫レ故境界線上ノ各點ニ於テ應力ノ合力ハ切線ノ方向ニ一致スルヲ要シ卽 $\frac{\tau_y}{\tau_z}$ ガ $\frac{dz}{dy}$ ト相等シクナケレバナラヌ. 然ルニ XVI 章ノ(10)式ニヨリテ

$$\left.\begin{aligned}\tau_y&=G\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\\ \tau_z&=G\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right).\end{aligned}\right\}$$

之ニ(7)ヲ導ケバ

$$\left.\begin{aligned}\tau_y&=G\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\theta y\right),\\ \tau_z&=G\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\theta z\right).\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

從テ條件式ハ

$$\frac{\tau_y}{\tau_z}=\frac{\frac{\partial u}{\partial z}+\theta y}{\frac{\partial u}{\partial y}-\theta z}=\frac{dz}{dy}. \tag{10}$$

(9)式ノ括弧內ノ微分係數 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial y}$ ハ何レモ斷面ガ平面ヨリ曲面ニ變形スル爲ニ生ズル影響ヲ示スモノデ特別ニ斷面ガ平面トシテ止ル時ハ之等ノ項ハ零トナル.

捩リ問題ノ序論ハ大要上ノ如クデアル. 要スルニ微分方程式(8)ノ解デ條件式(10)ヲ滿ス樣ナ函數 $u(y,z)$ ガ見出サレル時ハ問題ノ大半ハ解ケタノデアツテ次ノ仕事ハ θ ノ決定デアルガ之ハ捩リ偶力ノモーメント M ニヨリテ定マル. 卽柱軸ノ周リニ生ズル應力ノ偶力ハ M ニ等シイ故斷面上ノ微小面積ヲ df トシ又 132 圖ノ矢ノ方向ニ廻轉ヲ生ズル M ヲ正トスレバ

$$M=\int(\tau_y y-\tau_z z)\,df. \tag{11}$$

此式及下ノ M 式ニ於テ右邊積分ノ範圍ハ斷面ノ全體ニ及ブベキデアル. (11)ニ(9)ヲ導ケバ

$$M=G\left[\int\left(y\frac{\partial u}{\partial z}-z\frac{\partial u}{\partial y}\right)df+\theta\int(y^2+z^2)\,df\right]. \tag{12}$$

括弧內ノ第二項ノ積分ハ斷面ノ中心ヲ貫キ之ニ直角ナル軸ノ周リノ斷面ノ慣性モーメントデアル.

境界線上ノ條件ヲ滿足スル微分方程式ノ解 u ヲ得レバ上ノ(11)又ハ(12)ヨリ唯一ツノ未知數 θ ハ容易ニ決定サレ從テ應力 τ_y 及 τ_z ノ値モ(9)ニヨリテ計算サレル.

111. 簡單ナル例.

前節ニ述ベタ捩リノ理論ヲ會得スルタメニ一二ノ簡單ナ例ヲ附加ヘテ置キタイト思フ. 元來與ヘラレタ斷面ニ對スル u ノ解ヲ見出スノガ正則デアルガ其例ハ次ノ節ニ於テ論ズル矩形斷面ノ場合ニ讓リ此處ニ例トシテ示ス場合ハ寧ロ反對ニ解ヲ與ヘテ之ニ應ズル斷面ノ形ヲ定メル方法デアル. 卽函數 $u(y,z)$ ヲ適當ニ定メテ之ガ如何ナル形ニ對スルモノデアルカヲ見ヤウト思フ.

例 1. $u=0$.

本例題ニ假定シタ樣ナ $u=0$ ノ場合ニノミ平面ハ依然平面デアツテ且各斷面ハ舊ノ斷面ト同平面中ニアル.

偖 $u=0$ ガ方程式(8)ヲ滿足スルコトハ無論デアルガ次ニ之ガ如何ナル形ニ適合スル解デアルカヲ知ルタメニ條件式(10)ヲ見ルニ此場合ニハ

$$\frac{dz}{dy}=-\frac{y}{z}$$

デアルカラ

$$y\,dy+z\,dz=0.$$

之ヲ積分スレバ

$$y^2+z^2=r^2.$$

r^2 ハ常數デアル. 卽解 $u=0$ ハ斷面ノ境界線ガ圓形ノ時ノ答デアルコトガ判ル.

此時捩レ θ ヲ見出スタメ(12)ヲ用キル時ハ

$$M=G\theta\int(y^2+z^2)df.$$

圓(直徑 $2r=d$) ノ極慣性モーメントハ

$$\int(y^2+z^2)df=\frac{\pi}{2}r^4.$$

故ニ

$$\theta=\frac{2}{\pi}\frac{M}{r^4}\frac{1}{G}=\frac{32}{\pi}\frac{M}{d^4}\frac{1}{G}. \tag{13}$$

從テ

$$\tau_{max}=G\theta r=\frac{2}{\pi}\frac{M}{r^3}=\frac{16}{\pi}\frac{M}{d^3}. \tag{14}$$

外徑 $2r=d$ デ內徑 $2r_0=d_0$ ナル圓筒形ノ棒ニ於テハ

$$\int(y^2+z^2)df=\frac{\pi}{2}(r^4-r_0^4).$$

故ニ

$$\theta=\frac{2}{\pi}\frac{M}{r^4-r_0^4}\frac{1}{G}=\frac{32}{\pi}\frac{M}{d^4-d_0^4}\frac{1}{G}. \tag{15}$$

從テ

$$\begin{aligned}\tau_{max}&=G\theta r\\&=\frac{2}{\pi}\frac{Mr}{r^4-r_0^4}=\frac{16}{\pi}\frac{Md}{d^4-d_0^4}.\end{aligned} \tag{16}$$

之等ノ結果ハV章36節ニ於テ簡單ナ方法デ導イタ τ_1 及 θ ニ對スル式ト一致シ又前ニ用キタ假定ハ只今ノ解 $u=0$ ト合フ.

例 2. $u=cyz$.

此式ガ方程式(8)ヲ滿足スルコトハ明カナルガ之ガ如何ナル形ノ斷面ニ適應スルカハ周邊ノ條件式ニヨリテ定マル. 卽(10)ニヨリテ

$$\frac{(c+\theta)y}{(c-\theta)z}=\frac{dz}{dy},$$

又ハ書キ換ヘテ

$$(c+\theta)y\,dy-(c-\theta)z\,dz=0.$$

之ヲ積分スレバ

$$(\theta+c)y^2+(\theta-c)z^2=k.$$

k ハ常數デアル.

若シ $\theta>c$ ナラバ之ハ楕圓ヲ表シ其 y, z 兩軸ノ方向ニ於ケル半徑ヲ夫レ夫レ a, b トスレバ

$$a=\sqrt{\frac{k}{\theta+c}},\quad b=\sqrt{\frac{k}{\theta-c}}.$$

之等ヨリ k ヲ消去スレバ

$$a^2(\theta+c)=b^2(\theta-c),$$

卽

$$c(a^2+b^2)=\theta(b^2-a^2),$$

從テ

$$c=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\theta.$$

偖(9)ニヨリテ

$$\tau_y=G(c+\theta)y,$$

$$\tau_z=G(c-\theta)z.$$

上ノ c ヲ代入スレバ

$$\tau_y=\frac{2b^2}{a^2+b^2}G\theta y,$$

$$\tau_z=-\frac{2a^2}{a^2+b^2}G\theta z.$$

之等ヲ(11)ニ入レテ

$$M=\frac{2G\theta}{a^2+b^2}\iint(b^2y^2+a^2z^2)\,dy\,dz.$$

此積分ハ全面ニ及ブベキデアツテ答ハ次ノ通リデアル.

$$\iint y^2\,dy\,dz=\frac{\pi}{4}a^3b,$$

$$\iint z^2\,dy\,dz=\frac{\pi}{4}ab^3.$$

從テ

$$M=\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}\pi G\theta,$$

卽

$$\theta=\frac{a^2+b^2}{a^3b^3}\frac{M}{\pi G}. \tag{17}$$

之ヲ上ノ τ_y 及 τ_z ノ兩式中ニオケバ

$$\left.\begin{aligned}\tau_y&=\frac{2}{\pi}\frac{M}{a^3b}y,\\ \tau_z&=-\frac{2}{\pi}\frac{M}{ab^3}z.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

斷面上ノ任意ノ一點 (y,z) ニ於ケル應力 τ ハ之等ノ應力成分ヲ組合セテ計算サレル. 卽

$$\tau=\sqrt{\tau_y^2+\tau_z^2}$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{M}{ab}\sqrt{\frac{y^2}{a^4}+\frac{z^2}{b^4}}.$$

然ルニ

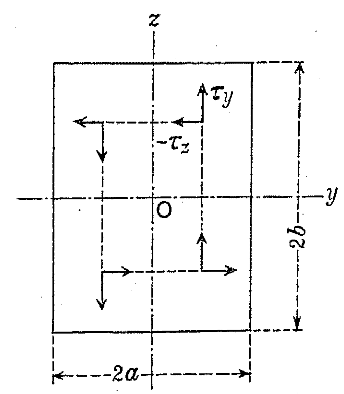
$$\frac{y^2}{a^4}+\frac{z^2}{b^4}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\frac{z^2}{b^2}\right).$$

モシ $a<b$ ト假定スレバ此括弧内ノ式ハ楕圓ノ周邊上 $y=\pm a,\ z=0$ ナル點ニ於テ1トナリ其値最大デアル. 故ニ最大ナル τ ハ短軸ノ兩端ニ起リ次ノ値ヲトル.

$$\tau_{max}=\frac{2}{\pi}\frac{M}{a^2b}. \tag{19}$$

112. 矩形斷面.

上ノ二例デハ u ノ解ヲ與ヘテ斷面周邊ノ形ヲ求メタノデアルガ本節ニ於テハ斷面ガ矩形ノ場合ニ就キ u ノ式ヲ出シテ捩リ問題ヲ解カウトスルノデアル. (9)ニ示シタ τ_y 及 τ_z ガ y, z ノ如何ナル函數デアルカヲ考ヘルニ 133 圖ヨリ見ル如ク τ_y ハ y ノ符號ヲ變ヘレバ夫レ自身ノ符號ヲ變ヘルケレドモ z ノ正負ニヨリテハ變ラナイ. 又 τ_z ハ y ノ符號ニヨリテハ變ラナイケレドモ z ノタメニハ變ル. 今 τ_y 及 τ_z ニ就テ述ベタ事柄ガ(9)ニヨリテ夫レ夫レ $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ 及 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ニ於テモ成立タネバナラヌ故結局 u ガ y 及 z ノ奇函數デアルヲ要スル. 此條件ニ適フ解ノ見本トシテ先ヅ次ノ式ヲトル.



133 圖

$$u=\theta yz+k'\sin\alpha y(e^{\alpha z}-e^{-\alpha z})=\theta yz+k\sin\alpha y\sinh\alpha z. \tag{20}$$

之等ノ式ノ第一項yzハ楕圓ノ場合ノ解ト同ジ形デアリ又第二項ガ基礎方程式(8)ヲ滿足スルコトハ容易ニ確メラレル故不變數α, kヲ適當ニ鹽梅シテ斷面周邊ノ條件ヲ滿ス樣ニ工夫シヤウ.

先ヅ兩邊 $y=\pm a$ ニ對シテ $\dfrac{dz}{dy}=\infty$ ナル故(10)ヨリ $\dfrac{\partial u}{\partial y}-\theta z=0.$ 然ルニ(20)ニヨリテ

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\theta z=k\alpha\cos\alpha y\sinh\alpha z.$$

從テ $\cos\alpha a=0$ ナルヲ要ス. 即μヲ奇數トシテ

$$\alpha a=\frac{\mu\pi}{2}\quad 又ハ\quad \alpha=\frac{\mu\pi}{2a}.$$

次ニ他ノ周邊 $z=\pm b$ ニ對シテ $\dfrac{\partial u}{\partial z}+\theta y=0$ ナル條件ヲ滿足スルタメニハ上ノ函數u丈ケデハ明カニ不充分ナル故(20)中係數kヲ含ム項ヲ無數ニ書キ並ベテ次ノ樣ニ書ク.

$$u=\theta yz+\sum_{\mu}k\sin\alpha y\sinh\alpha z=\theta\Big(yz+\sum_{\mu}c_{\mu}\sin\alpha y\sinh\alpha z\Big). \tag{21}$$

此式ハ基礎ノ微分方程式(8)ヲ滿足シ且周邊$y=\pm a$ニ對スル條件ニ適フ事明カデアルカラ式中ノ不變數c_{μ}ヲ適當ニ選ビテ $z=\pm b$ ニ對スル所要ノ條件ニ適フ樣ニスル事ガ出來レバ宜シイ譯デアル.

偖

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\theta y=\theta\Big(2y+\sum_{\mu}c_{\mu}\alpha\sin\alpha y\cosh\alpha z\Big).$$

右邊中ニ$z=\pm b$ヲオキ全體ヲ零ニ等シクオケバ

$$-2y=\sum_{\mu}c_{\mu}\alpha\sin\alpha y\cosh\alpha b=\frac{\pi}{2a}\sum_{\mu}c_{\mu}\mu\sin\frac{\mu\pi y}{2a}\cosh\frac{\mu\pi b}{2a}.$$

今yヲ$y=\pm a$ノ範圍デ $\sin\dfrac{\mu\pi y}{2a}$ ノ無限級數ニ表スタメニ下ノ樣ニ書ク.

$$y=\sum_{\mu=1}^{\infty}A_{\mu}\sin\frac{\mu\pi y}{2a},\qquad \mu=1,3,5,\cdots.$$

又ハ $x=\dfrac{\pi y}{2a}$ トスレバ $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$ ノ範圍デ

$$x=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin mx,\qquad m=1,3,5,\cdots.$$

此式ノ兩邊ニ $\sin nx\,dx(n=1,3,5,\cdots)$ ヲ乘ジxガ0ヨリ$\dfrac{\pi}{2}$ニ至ル間ニ積分スル. 元來

$$\int\sin mx\sin nx\,dx=\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}-\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+C,$$

$$\int\sin^2 mx\,dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4m}\sin 2mx+C$$

ナレバxノ兩限値ヲオイテ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin mx\sin nx\,dx=0,\qquad (m\neq n)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 mx\,dx=\frac{\pi}{4}.\qquad (m=n)$$

故ニ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin mx\,dx=\frac{\pi}{4}A_m,$$

即

$$A_m=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin mx\,dx.$$

一般ニ

$$\int x\sin mx\,dx=-\frac{1}{m}\int x\,d(\cos mx)$$

$$=\frac{1}{m^2}\Big[\sin mx-mx\cos mx\Big].$$

故ニ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin mx\,dx=\frac{1}{m^2}\sin\frac{m\pi}{2}.$$

從テ

$$A_m=\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2}.$$

此係數ヲ用キテxヲxノ奇數倍ノ正弦級數ニ展開スル事ガ出來ル.

此式ハヨク書物ニ出テ居ル次ノ Fourier 級數ノ前半ト同ジデアル. 即

$$\frac{\pi}{2}>x>0,\qquad f(x)=x,$$

$$\pi>x>\frac{\pi}{2},\qquad f(x)=\pi-x$$

トスレバ

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2}\sin mx,\qquad m=1,3,5,\cdots.$$

倍$y=\frac{2a}{\pi}x$ナル故xノ式ノ兩邊ニ$\frac{2a}{\pi}$ヲ乘ジ且mノ代リニμヲ書イテ

$$A_\mu=\frac{8a}{\pi^2}\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^2}.$$

故ニ

$$y=\frac{8a}{\pi^2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^2}\sin\frac{\mu\pi y}{2a},\qquad \mu=1,3,5,\cdots.$$

之ヲ前ニ條件式ヨリ導イタ$-2y$ノ無限級數ト比較スルニ係數c_μガ次ノ値ヲトレバ要求ニ合フコトガ判ル.

$$c_\mu=-\frac{32a^2}{\pi^3}\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^3\cosh\frac{\mu\pi b}{2a}}.$$

之ヲuノ式(21)ノ中ニオク時ハ$\mu=1,3,5,\cdots$ト取リテ

$$u=\theta\left[yz-\frac{32a^2}{\pi^3}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^3}\frac{\sin\frac{\mu\pi y}{2a}\sinh\frac{\mu\pi z}{2a}}{\cosh\frac{\mu\pi b}{2a}}\right]. \tag{22}$$

又uハ次ノ形ニモ書ケル.

$$u=-\theta\left[yz-\frac{32b^2}{\pi^3}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^3}\frac{\sin\frac{\mu\pi z}{2b}\sinh\frac{\mu\pi y}{2b}}{\cosh\frac{\mu\pi a}{2b}}\right]. \tag{23}$$

此式ハ初メ(20)ノ代リニ

$$u=-\theta yz+k'\sin\beta z\sinh\beta y \tag{24}$$

トオキ先ヅ $z=\pm b$ ニ對シテ滿足サレルベキ條件即 $\frac{\partial u}{\partial z}+\theta y=0$ ヨリ $\beta=\frac{\mu\pi}{2b}$ ナルヲ知リ次ニ $y=\pm a$ ニ對スル條件即 $\frac{\partial u}{\partial y}-\theta z=0$ ヨリ無限級數

$$u=-\theta\left(yz+\sum_{\mu=1}^{\infty}c_\mu'\sin\beta z\sinh\beta y\right)$$

ノ未知係數ノ値ヲ求メルタメ前同樣ノ方針デ計算ヲ行ヘバ結局yトz, aトbト互ニ位置ヲ交換シ且θノ符號ヲ異ニスル式ガ得ラレル. 下ノ計算ニ於テ一々之ヲ繰返ス事ヲ省略スルケレドモμハ常ニ奇數デアル.

(22)及(23)ガ求メルuノ式デアッテ次ニ之等ノ何レカヲM式中ニ入レル. (12)ニ於テ

$$\int_0^b\int_0^a y\frac{\partial u}{\partial z}dy\,dz=\int_0^a(u_1-u_0)y\,dy.$$

u_1及u_0ハz軸ニ平行ナル直線ガ矩形ノ一邊 $z=b$ 並ニy軸ヲ切ル兩點ニ於ケルuノ値ヲ示ス. 而シテ(22)ニヨレバ

$$u_0=0,$$

$$u_1=\theta\left[by-\frac{32a^2}{\pi^3}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^3}\sin\frac{\mu\pi y}{2a}\tanh\frac{\mu\pi b}{2a}\right].$$

然ルニ

$$\int_0^a y\sin\frac{\mu\pi y}{2a}dy=\left(\frac{2a}{\mu\pi}\right)^2\sin\frac{\mu\pi}{2}=\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^2}$$

ナルコト已ニ述ベタ通リデアルカラ

$$\int_0^a u_1y\,dy=\theta\left[\frac{a^3b}{3}-\frac{128a^4}{\pi^5}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^5}\tanh\frac{\mu\pi b}{2a}\right].$$

上ト同樣ニシテ

$$\int_0^b\int_0^a z\frac{\partial u}{\partial y}dy\,dz=\int_0^b(u_1'-u_0')z\,dz.$$

u_1' 及 u_0' ハ y 軸ニ平行ナル直線ガ矩形ノ一邊 $y=a$ 及 z 軸ヲ切ル兩點ニ於ケルuノ値デアル. サテ

$$u_0'=0,$$

$$u_1'=\theta\left[az-\frac{32a^2}{\pi^3}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{\sinh\frac{\mu\pi z}{2a}}{\mu^3\cosh\frac{\mu\pi b}{2a}}\right].$$

然ルニ

$$\int z\sinh\alpha z\,dz=\frac{1}{\alpha^2}\left[\alpha z\cosh\alpha z-\int\cosh\alpha z\,d(\alpha z)\right]$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}\left[\alpha z\cosh\alpha z-\sinh\alpha z\right].$$

從テ

$$\int_0^b zu_1'\,dz=\theta\left[\frac{ab^3}{3}-\frac{32a^2}{\pi^3}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^3}\left(\frac{2ab}{\mu\pi}-\left(\frac{2a}{\mu\pi}\right)^2\tanh\frac{\mu\pi b}{2a}\right)\right]$$

$$=\theta\left[\frac{ab^3}{3}-\frac{64a^3b}{\pi^4}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^4}+\frac{128a^4}{\pi^5}\sum\frac{1}{\mu^5}\tanh\frac{\mu\pi b}{2a}\right].$$

然ルニ

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^4}=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96}.$$

故ニ

$$\int_0^b zu_1'\,dz=\theta\left[\frac{ab^3}{3}-\frac{2}{3}a^3b+\frac{128a^4}{\pi^5}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^5}\tanh\frac{\mu\pi b}{2a}\right].$$

上ノ結果ヲ綜合シテ積分ヲ矩形ノ全面ニ行フ時ハ

$$G\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a}\left(y\frac{\partial u}{\partial z}-z\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy\,dz$$

$$=4G\theta\left[a^3b-\frac{ab^3}{3}-\frac{256a^4}{\pi^5}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^5}\tanh\frac{\mu\pi b}{2a}\right].$$

尙全面ニ取ラレタ積分

$$G\theta\int(y^2+z^2)df=4G\theta\int_0^b\int_0^a(y^2+z^2)dy\,dz=\frac{4}{3}G\theta(a^3b+ab^3)$$

ナル故全體トシテ

$$M=\frac{16}{3}G\theta a^3b\left[1-\frac{192}{\pi^5\frac{b}{a}}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^5}\tanh\frac{\mu\pi b}{2a}\right].$$

又ハ簡單ニ

$$M=G\theta a^3bf_1\left(\frac{b}{a}\right),$$

但

$$f_1\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{16}{3}\left[1-\frac{192}{\pi^5\frac{b}{a}}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^5}\tanh\frac{\mu\pi b}{2a}\right],\qquad \mu=1,3,5,\cdots. \tag{25}$$

故ニ與ヘラレタ寸法ノ棒ノ振レハ

$$\theta=\frac{M}{Ga^3bf_1\left(\frac{b}{a}\right)}. \tag{26}$$

次ニ應力 τ_y,τ_z ヲ求メルタメ(9)ト(22)トニヨリテ

$$\begin{aligned}\tau_y&=G\theta\left[2y-\frac{16a}{\pi^2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^2}\frac{\sin\frac{\mu\pi y}{2a}\cosh\frac{\mu\pi z}{2a}}{\cosh\frac{\mu\pi b}{2a}}\right],\\ \tau_z&=-G\theta\frac{16a}{\pi^2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^2}\frac{\cos\frac{\mu\pi y}{2a}\sinh\frac{\mu\pi z}{2a}}{\cosh\frac{\mu\pi b}{2a}}.\end{aligned} \tag{27}$$

若シ(22)ノ代リニ(23)ヲ用キレバ

$$\begin{aligned}\tau_y&=G\theta\frac{16b}{\pi^2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^2}\frac{\cos\frac{\mu\pi z}{2b}\sinh\frac{\mu\pi y}{2b}}{\cosh\frac{\mu\pi a}{2b}},\\ \tau_z&=-G\theta\left[2z-\frac{16b}{\pi^2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^2}\frac{\sin\frac{\mu\pi z}{2b}\cosh\frac{\mu\pi y}{2b}}{\cosh\frac{\mu\pi a}{2b}}\right].\end{aligned} \tag{28}$$

應力ノ最大値ガ矩形ノ周邊ニ起ルモノト假定シテ其値ヲ見出スタメニ先ヅ $y=\pm a$ ニ對シテ(28)ノ第一式ヨリ

$$\tau_y = \pm G\theta \frac{16b}{\pi^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^2} \cos\frac{\mu\pi z}{2b} \tanh\frac{\mu\pi a}{2b}.$$

又 $z = \pm b$ ニ對シテ(27)ノ第二式ヨリ

$$\tau_z = \mp G\theta \frac{16a}{\pi^2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^2} \cos\frac{\mu\pi y}{2a} \tanh\frac{\mu\pi b}{2a}.$$

今之等應力ノ絶對値ガ極大トナル時ノ條件ヲ求メルニ微分係數ヲ零トスル z 及 y ノ値ハ明カニ零ナル故周邊ノ中點ニ於テ極大ノ應力ガ生ズル. 然ラバ $\tau_{y\,max}$ ト $\tau_{z\,max}$ ト何レガ大デアルカ. 兩應力ノ絶對値ハ

$$(\pm\tau_y)_{max} = G\theta \frac{16b}{\pi^2}\left[\tanh\frac{\pi a}{2b} - \frac{1}{3^2}\tanh\frac{3\pi a}{2b} + \cdots\right],$$

及

$$(\pm\tau_z)_{max} = G\theta \frac{16a}{\pi^2}\left[\tanh\frac{\pi b}{2a} - \frac{1}{3^2}\tanh\frac{3\pi b}{2a} + \cdots\right].$$

之等ノ兩式ヲ比較スルニ若シ $\frac{b}{a} = 1$ ナル時ハ共ニ同一ノ結果ヲ示シ即正方形ノ四邊ハ等シイ大サノ最大應力ヲ受ケル. 若シ $\frac{b}{a} > 1$ ナル時ハ第一式ガ第二式ヨリモ大ナル應力ヲ與ヘル. 何トナレバ比較的小ナル兩式ノ第二項以下ヲ省略シテ其比ヲ作レバ

$$\frac{(\pm\tau_y)_{max}}{(\pm\tau_z)_{max}} = \frac{b}{a}\frac{\tanh\frac{\pi a}{2b}}{\tanh\frac{\pi b}{2a}}.$$

此式ハ $\frac{b}{a} = 1$ ノ時 1 トナリ且又其微分係數ニ $\frac{b}{a} = 1$ トオケバ $1 - \frac{2\pi}{\sinh\pi} = 0.456 > 0$ トナル故 $\frac{b}{a}$ ガ 1 ヨリ増セバ上ノ比モ亦 1 ヨリ増スコトガ判ル. 從テ少クモ 1 ノ附近ニテ分子ガ分母ヨリモ大デアルト言ヘル.

故ニ矩形ノ長邊ノ中點ニ最大應力ガ働キ丁度楕圓ノ場合ニ似テ居ル. 以上最大値ニ關シテ述ベタトコロハ甚嚴密ヲ缺ク嫌ガアルケレドモ尙後ニ述ベル實驗的根據カラ見テモ此事ノ正シイ事ハ判ル. 而シテ最大値ハ上ノ形ノ $(\pm\tau_y)_{max}$ 又ハ次ノ形ノソレニヨリテ與ヘラレル.

$$(\pm\tau_y)_{max} = 2G\theta a\left[1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2\cosh\frac{\mu\pi b}{2a}}\right].$$

故ニ $\mu = 1, 3, 5, \cdots$ トシテ

$$\left.\begin{aligned} f\left(\frac{b}{a}\right) &= 2\left[1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2\cosh\frac{\mu\pi b}{2a}}\right] \\ &= \frac{16}{\pi^2}\frac{b}{a}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu^2}\tanh\frac{\mu\pi a}{2b} \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

トオケバ斷面中ノ最大應力ハ

$$\tau_{max} = G\theta a f\left(\frac{b}{a}\right). \tag{30}$$

此式ニ θ ノ式(26)ヲ入レル時ハ

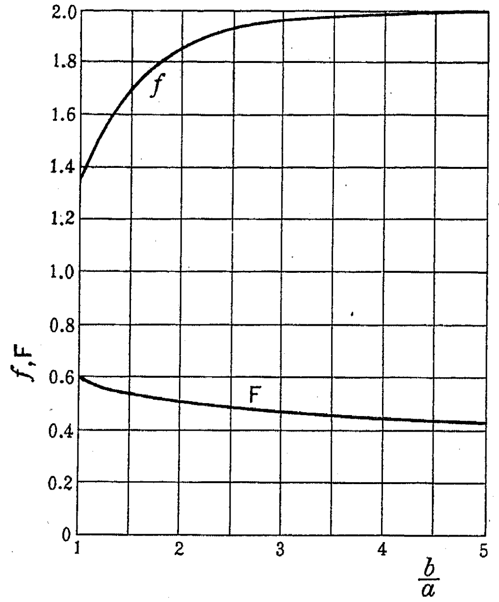
$$\tau_{max} = \frac{M}{a^2 b}\frac{f\left(\frac{b}{a}\right)}{f_1\left(\frac{b}{a}\right)} = F\frac{M}{a^2 b}. \tag{31}$$

種々ノ $\frac{b}{a}$ ニ對スル f, f_1 及 F ノ値ハ之ヲ次ノ表ニ示ス. 尙 f 及 F ヲ線圖トシテ表セバ次ノ頁ニ示ス 134 圖ノ樣デアル.

$\frac{b}{a}$	$f\left(\frac{b}{a}\right)$	$f_1\left(\frac{b}{a}\right)$	$F = \frac{f\left(\frac{b}{a}\right)}{f_1\left(\frac{b}{a}\right)}$	$\frac{b}{a}$	$f\left(\frac{b}{a}\right)$	$f_1\left(\frac{b}{a}\right)$	$F = \frac{f\left(\frac{b}{a}\right)}{f_1\left(\frac{b}{a}\right)}$
1.0	1.35	2.25	0.60	2.5	1.94	3.99	0.49
1.25	1.55	2.75	0.56	3.0	1.97	4.21	0.47
1.5	1.70	3.13	0.54	4.0	1.99	4.49	0.44
1.75	1.79	3.43	0.52	5.0	2.00	4.66	0.43
2.0	1.86	3.66	0.51				

一般ニ捩リ問題ノ解決ハ有名ナル Saint-Venant[1] ノ研究ニ負フ所ガ頗ル大デアツテ本節ノ場合モ亦無論左樣デアル.

1) Mémoire, L'Académie des Sciences, Paris, XIV, 1856, 233 頁.



134 圖

終リニ附記ス可キ事ハMニ對スル本章ノ(25)式ト曾テ梁ノ安定問題ヲ論ズル時ニ述ベタ實驗式トノ比較デアル. 先ヅ50節ノ記號ヲ用キテ

$$M=G\theta J$$

ト記セバ(25)カラ

$$J=a^3bf_1\left(\frac{b}{a}\right).$$

今50節ノ實驗式(54)卽 $J=\dfrac{f^4}{40I_p}$ ニ於テ矩形ニ對スル面積f及極慣性モーメントI_pノ値卽

$$f=4ab,\quad I_p=\frac{4}{3}ab(a^2+b^2)$$

ヲ導ケバ

$$J=4.8\frac{a^3b^3}{a^2+l^2}=\frac{4.8a^3b}{\dfrac{a^2}{b^2}+1}.$$

之ニ依テ見レバ $f_1\left(\dfrac{b}{a}\right)$ ニ相當スル者ハ $\dfrac{4.8}{\dfrac{a^2}{b^2}+1}$ デアツテ其値ガ前表f_1ノ値ニ稍近イケレドモ充分滿足シ得ル程度ニ一致シナイノハ實驗式

トシテ已ムヲ得ヌ所デアル.

113. 矩形斷面ニ對スル解ノ應用.

例ヘバ山形鋼其他ノ型鋼ノ如キ厚サ一樣ナルカ又ハ殆ンド一樣ト見做シ得ル斷面形ニ對シテ近似的ニ矩形斷面ノ解ヲ應用スル事ガ出來ル. 元來與ヘラレタ此種斷面形ノ捩リ剛性ヲ正確ニ求メル事ハ可ナリ六カ敷イ問題デアルガ斷面ヲ幾ツカノ細長イ矩形ニ分ケテ其各部ニ對シテ $\dfrac{b}{a}=\infty$ ノ場合ノ矩形ノ解ヲ當テ嵌メレバ一ツノ近似解ガ得ラレル. 此際各矩形ノ接續スル所ノ影響ノ爲多少實際トハ相違スル譯デアルガ斷面ノ形ガ薄クシテ$\dfrac{b}{a}$ガ無限大ニ等シイトオキウル位ナラバ此影響ハ省略サレル. 併シ斯ル近似解ヲ用キタ計算ノ結果ハ成ル可ク實驗ノ結果ト比較シテ補正スル事ガ望マシイ. 偖 $\dfrac{b}{a}=\infty$ トスレバ $f_1=\dfrac{16}{3}$ トナル故任意ノ矩形ノ幅ヲdトシ長サヲlトスレバ此面積ノ負擔スル捩リモーメントハ $\dfrac{1}{3}G\theta d^3l$ ニ等シク從テ幾ツカノ矩形ヨリ成ル斷面全體ノモーメントハ次ノ樣ニナル.

$$M=\frac{1}{3}G\theta\Sigma d^3l. \tag{32}$$

應力ニ對シテモ矢張リ矩形ノ場合ノ計算ヲ應用スレバ$f=2$トナル故

$$\tau_{max}=G\theta\, d_{max}=\frac{3Md_{max}}{\Sigma d^3l}. \tag{33}$$

併シ此應力ハ邊ノ中央ニ起ルモノデ實ハ凹角ノ隅ニ生ズル應力ガ大トナリ易キ故之ニ就テ考ヘル事ガ必要トナル. 之ニ關スル論ハ玆ニ省略シテ文獻ニ讓ル.[1][2][3][4] 併シ若シ適當ナ計算ノ根據ナキ時ハ 118 節ニ述ベル樣ナ實驗法ニ依リテ應力ノ決定ヲナス事ガ出來ル.

圓弧斷面ノ場合ニモ上ト同樣ノ考デ變形及應力ヲ計算シテヨイカ.

1) A. u. L. Föppl, Drang und Zwang, II, 70 頁.
2) S. Timoshenko, Theory of Elasticity, 257 頁.
3) E. Trefftz, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 2, 1922, 263 頁.
4) Lehigh Univ. Publication, the Inst. of Research, Circular No. 113, 1935.

此點ニ就テハ後ニ扇形斷面ノ解ヲ導イテ正確ナル解法ノ與ヘル結果ト比較シヤウ. 夫レ迄之ハ疑問ノ儘殘ス事トシタイ.

114. 複素函數.

振リノ理論ニ於テ時トシテ複素數ノ函數ヲ用キルヲ便トスル故茲ニ先ヅ函數論ノ基本事項ヲ簡單ニ述ベテ本論ヘノ應用ヲ示ス事ニシヤウ. 今一般ニ複素數 $z=x+iy$ ノ函數 $w(z)$ ガ z 平面ノ或ル領域內ニ於テ次ノ式ノ示ス様ニ實數及虛數ノ二部ヨリ成ルト假定スル.

$$w(z)=\xi(x,y)+i\eta(x,y).$$

此式ニ於テ $\xi(x,y)$ 及 $\eta(x,y)$ (以下略シテ ξ,η ト書ク)ハ共ニ實數デ又 $i=\sqrt{-1}$ トスル.

只之丈ケデハ $w(z)$ ノ性質ガ判然シナイケレドモ若シ之ガ一ツノ解析函數ナラバ z ノ領域ノ各點ニ於テ dz ノ取リ方如何ニ拘ラズ一定セル微分係數 $\frac{dw(z)}{dz}$ ガ存在スル. 夫レ故二ツノ特別ノ方向卽 x 及 y 軸ノ方向ニ微分シテ得ル微分係數ヲ等シクオケバ

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{i\partial y}.$$

此最後ノ等式ヲ書キ換ヘテ

$$\frac{\partial}{\partial x}(\xi+i\eta)=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}(\xi+i\eta).$$

兩邊ノ實部及虛部ヲ等シクオイテ

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y},\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}=-\frac{\partial\eta}{\partial x}. \tag{34}$$

之ハ Cauchy-Riemann ノ方程式ト呼ビ其成立ニヨリテ x,y ノ二函數ノ和 $\xi+i\eta$ ガ複素數 $z=x+iy$ ノ解析函數ヲ成ス事ヲ知ル. 尙(34)ヨリ判ル様ニ x,y 平面上ニ於テ $\xi=\text{const.}$ 及 $\eta=\text{const.}$ ノ二曲線ヲ作レバ之等ハ互ニ直交スル.

函數 ξ 及 η ノ x 及 y ニ對スル微分ガ順序ニ無關係デアルトスレバ(34)ヨリ容易ニ次ノ微分方程式ヲ導ク事ガ出來ル.

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=0. \tag{35}$$

卽 ξ 及 η ハ Laplace ノ微分方程式ヲ滿足スル. 而シテ簡單ノタメ(35)ヲ $\Delta\xi=0$, $\Delta\eta=0$ ト記ス.

斯様ニ w ヲ $z=x+iy$ ノ解析函數トスレバ z 平面上ノ一點ハ w 平面上ノ一點ト相對應シ尙一方ノ平面上ノ線又ハ面積ガ他ノ平面上ノ線又ハ面積ト對應スル. 斯様ニシテ z 平面ハ w 平面ニ寫像セラレ $\frac{dw(z)}{dz}=0$ トナル點ヲ除ケバ兩平面上ノ對應曲線間ノ角ハ互ニ相等シイ. 之ガ所謂等角寫像デアル.

次ニ複素數 $w=\xi+i\eta$ ノ函數 $\varphi+i\psi$ ヲ作レバ φ,ψ ハ ξ,η ノ函數トシテ Cauchy-Riemann 並ニ Laplace ノ方程式ヲ滿足スルコトハ勿論デアルガ又 $\varphi+i\psi$ ハ z ノ函數ト見ル事モ出來ル故

$$\varphi+i\psi=F(z).$$

從テ φ,ψ ハ z 平面ニ於ケル Laplace ノ方程式ヲ滿足スル. 夫レ故 w 平面上ニ於テタトヘバ方程式 $\Delta\psi=0$ ノ解ヲ作レバ之ハ z 平面上ノ方程式 $\Delta\psi=0$ ヲ滿足スル. 只此時 z 平面上ノ對應周邊ニ於ケル條件ガ丁度都合ヨク滿タサレネバナラヌ.[1]

偖上ニ述ベタ函數論ノ事項ヲ振リ問題ニ應用スル爲ニ先ヅ次ノ様ニ書ク. 卽前ノ座標 x,y ノ代リニ y,z ヲ用キテ

$$u(y,z)=\theta\varphi(y,z).$$

然ル時ハ y,z 平面ニ於テ $\Delta\varphi=0$. $\varphi(y,z)$ ト共ニ Cauchy-Riemann 方程式ヲ滿足スル $\psi(y,z)$ ヲ導ク. 卽

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{\partial\psi}{\partial y}. \tag{36}$$

ψ モ方程式 $\Delta\psi=0$ ヲ滿足スル. 又 ψ ヲ用キテ周邊ノ條件ヲ書キ直セバ(10)ヨリ

1) 等角寫像ニ依ル特別ノ研究ガ E. Trefftz ニヨリテナサレタ. Math. Ann., 82, 1921, 97 頁. Frank-v. Mises, Differentialgleichungen der Physik, II, 2 版, 1935, 283 頁.

$$\frac{y-\dfrac{\partial\psi}{\partial y}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial z}-z}=\frac{dz}{dy},$$

又ハ

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial z}dz=y\,dy+z\,dz.$$

之ヲ積分シテ

$$\psi=\frac{1}{2}(y^2+z^2)+c. \tag{37}$$

ψ ヲ用キテ應力成分ヲ記セバ(9)ヨリ

$$\left.\begin{aligned}\tau_y&=G\theta\Big(y-\frac{\partial\psi}{\partial y}\Big),\\ \tau_z&=G\theta\Big(\frac{\partial\psi}{\partial z}-z\Big).\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

夫レ故 φ ノ代リニ ψ ヲ用キテ捩リノ計算ガ出來ル.

タトヘバ周邊ガ楕圓形ノ場合ニハ前ニ述ベタ處ヨリ

$$\varphi=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}yz.$$

之ニ對シテ

$$\psi=\frac{b^2-a^2}{2(a^2+b^2)}(z^2-y^2).$$

之ハ方程式 $\Delta\psi=0$ ヲ滿足シ又周邊ノ條件(37)ヲ滿ス事明カデアル. 而シテ $\varphi=\mathrm{const.}$ ガ y 及 z 軸ヲ漸近線トスル双曲線ヲ表スニ對シテ(例題1) $\psi=\mathrm{const.}$ ハ原點ヲ通リ座標軸ニ對シテ45°ノ傾キヲ有ツ二直線ヲ漸近線トスル双曲線ヲ表シ之等ノ二組ノ曲線ハ互ニ直交スル.

115. 捩リノ應力函數.

前節ニ述ベタ ψ ノ代リニ更ニ次ノ函數ヲ導ク.

$$\Psi=G\theta\Big(\psi-\frac{1}{2}(y^2+z^2)\Big). \tag{39}$$

然ル時ハ應力成分ハ次ノ樣ニ表サレル.

$$\tau_y=-\frac{\partial\Psi}{\partial y},\qquad \tau_z=\frac{\partial\Psi}{\partial z}. \tag{40}$$

而シテ合成應力ハ

$$\sqrt{\tau_y^2+\tau_z^2}=\sqrt{\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big)^2}. \tag{41}$$

$\Psi=\mathrm{const.}$ ノ曲線ヲ引ケバ此曲線ニ沿ヒテハ $d\Psi=0$ ナル故(40)ヨリ

$$\tau_z dz-\tau_y dy=0,$$

又ハ

$$\frac{dz}{dy}=\frac{\tau_y}{\tau_z}.$$

夫レ故應力ハ曲線ニ沿ヒテ作用シ之ニ直角ノ方向ニハ成分ヲ有タヌ. 斷面ノ周邊ニ於テハ丁度此條件ガ必要デアッテ周邊モ斯ル曲線ノ一ツデアル.

次ニ函數 Ψ ノ滿足スベキ微分方程式ヲ求メヤウ. 前節ニ述ベタ函數 ψ ハ方程式 $\Delta\psi=0$ ヲ滿足スル故 $\Delta\Psi$ ヲ作レバ

$$\Delta\Psi=-2G\theta;$$

又ハ

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=-2G\theta. \tag{42}$$

周邊ニ於テ條件

$$d\Psi=0 \tag{43}$$

ヲ滿足スル樣ナ方程式(42)ノ解ヲ求メレバ應力ハ直ニ(40)ヨリ定マル. 此函數 Ψ ヲ捩リノ應力函數ト呼ブ.

偖横斷面上ノ各點ニ於テ Ψ ノ値ヲ示ス垂直線ヲ立テテ其末端ノ描キ出ス一ツノ曲面ヲ考ヘヤウ. 此局面ハ應力曲面ト稱スベキモノデ横斷面ノ形ニヨリテ異リタル丘陵ノ樣ナ形ヲナスデアラウ. 依テ基本ノ水平面カラ或ル距離ヲ有スル幾ツカノ平行平面ヲ以テ之ヲ切リ所謂等高線ヲ作レバ此等高線ニ直角ノ方向ニ於テ丘面ヘ引イタ切線ガ水平面即 yz 平面トナス角ノ正切ハ $\sqrt{\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big)^2}$ ニ等シイコトガ證明サレル.

而シテ又此式ハ$\sqrt{\tau_y^2+\tau_z^2}$ ニ等シイ故之ハ剪斷應力自身デアル．從テ前ノ切線ノ傾斜角ノ正切ハ剪斷應力ヲ表ストモ言ヘル．夫レ故應力丘ノ等高線ヲyz平面ニ射影スレバ此曲線ニ沿ヒテ應力ガ作用シ又其疎密ニヨリテ丘面ノ勾配從テ應力ノ大小ヲ明カニスルコトガ出來ル．

尙應力丘ト振リノモーメントMトノ關係ヲ述ベヤウ．(11)ニヨリテ

$$M=\iint(\tau_y y-\tau_z z)\,dy\,dz.$$

(40)ヲ入レテ

$$M=-\iint\left(y\frac{\partial\Psi}{\partial y}+z\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)dy\,dz.$$

此式ニ於テ

$$\iint y\frac{\partial\Psi}{\partial y}\,dy\,dz=\iint\frac{\partial}{\partial y}(y\Psi)\,dy\,dz-\iint\Psi\,dy\,dz$$

$$=\int(y_2\Psi_2-y_1\Psi_1)\,dz-\iint\Psi\,dy\,dz.$$

但Ψ_1, Ψ_2ハ任意ノ z ニ對スル y ノ兩端ノ値y_1, y_2ニ對スルΨノ値デアル．

然ルニ周邊ノ條件ニヨリテ Ψ_1, Ψ_2 ハ常數デアツテ此常數ヲ如何ニ選ブトモ(40)ニヨリテ計算サレル應力ノ値ニ影響ナキ故之ヲ零トオケバ

$$\iint y\frac{\partial\Psi}{\partial y}\,dy\,dz=-\iint\Psi\,dy\,dz.$$

同様ニシテ

$$\iint z\frac{\partial\Psi}{\partial z}\,dy\,dz=-\iint\Psi\,dy\,dz.$$

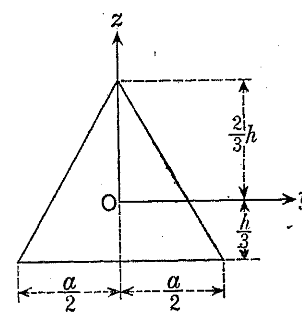
故ニ

$$M=2\iint\Psi\,dy\,dz=2\int\Psi\,df. \tag{44}$$

此右邊ノ積分ハ斷面ノ全部ニ及ブ．從テ其値ハ應力丘ノ容積ニ等シイ．卽モーメントハ此容積ニ比例スル．尙斷面ガ中空ナル場合ニ於ケル計算ハ後ニ之ヲ示ス．

116. 正三角形ノ場合．

應力函數ヲ用キル計算法ノ例トシテ横斷面ガ正三角形ノ場合ヲ考ヘヤウ．周邊ノ形ヲ示ス方程式ヲ$f(y,z)=0$トスレバ二度微分シテ得ラレル $\varDelta f$ ハ下ニ示ス様ニ常數トナル故Ψハ直ニ f ニ比例スル．正三角ノ各邊ノ長サヲaトシ高サヲhトスレバ $h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$．斷面ノ中心Oヲ原點トシ一邊ニ平行ニ y 軸ヲ引キ又頂點ヲ通ル様ニ z 軸ヲ引ク．135 圖．然ル時ハ三邊ノ方程式ハ次ノ如クデアル．



135 圖

$$z=-\frac{h}{3},\quad z+\sqrt{3}\,y=\frac{2}{3}h,\quad z-\sqrt{3}\,y=\frac{2}{3}h.$$

故ニ周邊上ニ於テ

$$f=\left(z+\frac{h}{3}\right)\left(z+\sqrt{3}\,y-\frac{2}{3}h\right)\left(z-\sqrt{3}\,y-\frac{2}{3}h\right)=0,$$

又ハ
$$f=z^3-hz^2-3y^2z-hy^2+\frac{4}{27}h^3=0.$$

上ノ如キ $f(y,z)$ ヲ取リテ $\varDelta f$ ヲ作レバ $\varDelta f=-4h$ トナル故應力函數ヲ次ノ様ニ選ブ．

$$\Psi=\frac{G\theta}{2h}f=\frac{G\theta}{2h}\left(z^3-hz^2-3y^2z-hy^2+\frac{4}{27}h^3\right). \tag{45}$$

此Ψハ方程式(42)ヲ滿足シ且周邊ニ於テ消エル故只今ノ問題ニ對シテ適當ナル解デアル．應力成分ハ(40)ニヨリテ

$$\left.\begin{aligned}\tau_y&=G\theta\frac{y}{h}(h+3z),\\ \tau_z&=\frac{G\theta}{2h}(3z^2-2hz-3y^2).\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

最大ノ應力ハ各邊ノ中點ニ起リ其値ハ次ノ様デアル．

$$\tau_{max}=\frac{G\theta h}{2}. \tag{47}$$

捩リモーメントMハ

$$M=2\iint \Psi\, dy\, dz$$

$$=\frac{G\theta}{h}\iint\left(z^3-hz^2-3y^2z-hy^2+\frac{4}{27}h^3\right)dy\,dz=\frac{G\theta\, a\, h^3}{30}.$$

從テ

$$\theta=\frac{30M}{ah^3G}=\frac{80}{\sqrt{3}}\frac{M}{a^4G}. \tag{48}$$

又

$$\tau_{max}=\frac{15M}{ah^2}=\frac{20M}{a^3}. \tag{49}$$

117. 流體力學トノ對比.

捩リ問題ハ上ニ述ベタ樣ニ $\Delta\varphi=0$ 又ハ $\Delta\Psi=\mathrm{const.}$ ノ何レカノ型ニ屬スル方程式ヲ基トシテ計算ガ進メラレル. 然ルニ第一ノ式ハ非壓縮性ノ摩擦ナキ理想的流體ガ二次元ノポテンシヤル流レヲナス場合ノ方程式ト同ジデアルカラ適當ナ境界條件ヲ有ツ水ノ運動ニ比ベテ捩リ問題ヲ考ヘル事ガ出來ル. 又第二ノ式モ或ハ理想的流體ノ運動ニ或ハ粘性流體ノ流レニ其對比ヲ見出ス故此方面ニ於テモ流體ノ運動ニ關スル知識ヲ應用シテ捩リ問題ヲ解ク事ガ出來ル. 之等種々ノ場合ヲ說明スル事ハ之ヲ他ノ文獻[1] ニ讓リ玆ニハ只一ツノ場合ニ就テ說明シヤウ.

今棒ノ橫斷面ト同ジ形ノ周壁ヲ有ツ容器ニ理想的ノ流體ヲ入レ容器ヲ靜止シテ內ノ流體ガ廻轉性ノ運動ヲナス場合ヲ考ヘ其廻轉ノ速サヲ表ス式$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)$ヲ不變ト假定スル. v_y, v_z ハ y 及 z 軸ノ方向ノ速サデアツテ函數Ψヨリ次ノ樣ニ微分シテ求メラレル.

1) Love, Mathematical Theory of Elasticity, 4 版, 314 頁. 應用ノ例ハ J. P. Den Hartog and J. G. Mc Given, Journal of Applied Mechanics, Vol. 2, No. 2, 1935, A-46 頁. 津村利光, 機械學會誌, 38, 1935, 550 頁.

$$v_y=\frac{\partial\Psi}{\partial z},\qquad v_z=-\frac{\partial\Psi}{\partial y}.$$

之ハ明カニ連續ノ條件

$$\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

ヲ滿足シ且假定ニヨリテ

$$\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}=-\Delta\Psi=\mathrm{const.}$$

卽捩リノ應力函數ニ對スル微分方程式ト同樣デアル.

又流レノ方向ニ沿ヒテハ

$$\frac{v_z}{v_y}=\frac{dz}{dy}.$$

此式ノ左邊ニ流レノ函數ヲ導イテ之ヲ書キ直セバ

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Psi}{\partial z}dz=0,$$

又ハ

$$d\Psi=0.$$

周邊ハ流レノ方向ニ一致スル故此處デモ亦此條件ガ成立シ之ハ捩リノ應力函數ガ滿足スベキ條件ト同樣デアル.

夫レ故靜止セル容器中ノ流レニ依リテ捩リ問題ヲ說明スル事ガ出來ル譯デアツテ捩リノ應力ハ此場合ノ流速ニ相當スル. 例ヘバ棒ノ軸ニ平行ニ小サイ圓形ノ孔ガ縱走スル時ハ棒ノ斷面ニ於ケル孔ノ附近ノ流レハ近似的ニ無限ノ平面內ニ於テ圓柱體ヲ過ギテ流レル流體ノ運動ニ依リテ知ル事ガ出來ル. 而シテ圓柱ノ兩側ニ於テ流速ハ遠方ノ場所ニ比ベテ二倍トナル事ヲ知ル故棒ノ受ケル應力ハ孔ノ無イ場合ニ比ベテ略ボ二倍トナル. 又棒ノ斷面周邊ニ於テ內方ニ向フ銳イ切缺アル場合ニハ其尖端ニ當ル場所ノ流速非常ニ大トナル故之ニ對スル應力モ亦降伏點ノ範圍內ニ於テ大トナル.

118. Prandtl ノ實驗法.

前節ノ見方トハ全ク別ノ方面ニ於テ實驗的ニ捩リ問題ヲ解ク爲方程式 $\Delta\Psi=\text{const.}$ ガ成立シ且周邊ノ條件モ丁度捩リト同樣ナル他ノ問題ヲ求メレバ其一ツハ一樣ナル密度ノ壓力ヲ受ケテ膨レル彈性膜デアル. 今平面板ニ孔ヲ開ケテ之ヲ一樣ナル張力 T デ引張ラレタ薄イ彈性膜デ蔽ヒテ穴ノ周圍ニ止メル. 而シテ其一方ニ壓力ヲ加ヘレバ膜ハ脹リ出ス. 最初膜面ヲ yz 平面ニ平行トシ壓力ニヨリテ動ク各點ノ距離ヲ w トスレバ次ノ方程式ガアル.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{p}{T}=0. \tag{50}$$

此式ニ對シテ簡單ナ說明ヲ加ヘヤウ. 初メ膜ノ任意ノ場所ニ微小ナル矩形面積 $dy\,dz$ ヲ作リオケバ之ハ壓力 p ノ作用ノタメニ張リ出ス. 此時 $p\,dy\,dz$ ナル力ニ抵抗スルモノハ矩形ノ四邊ニ作用スル張力ノ yz 平面ニ垂直ノ分力ノ和デアル. 然ルニ一方ノ dz 邊ニ作用スル力 $T\,dz$ ノ垂直分力ハ $T\,dz\frac{\partial w}{\partial y}$ デ他ノ dz 邊ニ作用スル力ハ T ヲ不變ト考ヘルケレドモ膜ノ傾斜ガ異ルタメニ $T\,dz\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dy\right)$ ナル垂直分力ヲ有スル. 而シテ之ハ前ト反向スル故兩者ノ和ハ $T\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dy\,dz$ トナル. 同樣ニシテ二ツノ dy 邊ニ働ク力ノ和ハ $T\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\,dy\,dz$ トナル. 之等ト $p\,dy\,dz$ トノ總和ガ零ニ等シイカラ結局(50)ヲ得ル.

斯樣ニ彈性膜ハ其微分方程式ガ捩リノ應力函數ノ式ト同樣デアツテ且周圍ノ條件ハ w ガ常數ナルベキ故膜ヲ與ヘラレタ形ノ孔ニ張リ之ヲ膨ラスコトニヨリテ應力丘ガ作ラレル譯デアル. 從テ適當ナル實驗裝置ヲ考案スレバ計算上六カ敷イ形ノ斷面ニ對スル捩リ問題ヲ實驗的ニ解ク事ガ出來ル.

例ヘバ 112 節ニ述ベタ矩形斷面ノ場合ニ對スル應力丘ヲ想像スレバ長邊ノ中點カラ丘ノ頂上ヲ指シテ登ル路ガ最モ險シク且其勾配ハ登リ

口ニ於テ最モ急デアル事ガ想像サレルデアラウ. 此點カラ見テモ最大ノ應力ガ長邊ノ中點ニ起ル事ヲ推知スル事ガ出來ル.

本論ノ實驗法ハ Prandtl ノ創意ニ負フ所デアツテ石鹼膜ヲ用ヰテ此種ノ實驗ヲスル事ガ出來ル.[1] 又此方法ヲ變ヘテ比重ヲ等シクスル二種ノ液體ノ界面ヲ用ヰル方法ガ考案サレタ.[2]

尙石鹼膜ノ實驗ニ關スル理論ヨリ次ノ定理ガ簡單ニ導カレル. 今膜ヲ或ル任意ノ高サノ水平面ニテ切レバ切口ハ一ツノ等高線デアル. 此切リ去ラレタ部分全體トシテノ力ノ平衡ヲ考ヘルニ膜面ニ作用スル壓力 p ノ垂直方向ノ合力ハ膜ノ射影面積 F ニ p ヲ乘ジタ積ニ等シイ. 又切口ノ微小ノ長サ ds 上ニ作用スル張力 T ノ垂直方向ノ成分ヲ取レバ之ハ $T\frac{\partial w}{\partial n}ds$ ニ等シキ故 $\left(\frac{\partial w}{\partial n}\text{ハ此點ニ於ケル膜面ノ勾配}\right)$ 切口全體ニ之ヲ積分シタモノハ pF ニ等シイ筈デアル. 即

$$\oint T\frac{\partial w}{\partial n}ds=pF.$$

然ルニ石鹼膜ト應力丘トノ比較ヨリ明カナル樣ニ

$$\frac{\partial w}{\partial n}=\frac{\tau}{2G\theta}\frac{p}{T}.$$

從テ

$$\oint \tau\,ds=2G\theta F. \tag{51}$$

但積分ハ等高線ニ沿ヒテ一周スル.

此處デハ斷面ガ中空デナイト假定シタ. 併シ(51)式ハ中空ノ場合ニモ正シイ. 其證明ハ之ヲ 123 節ニ讓ル.

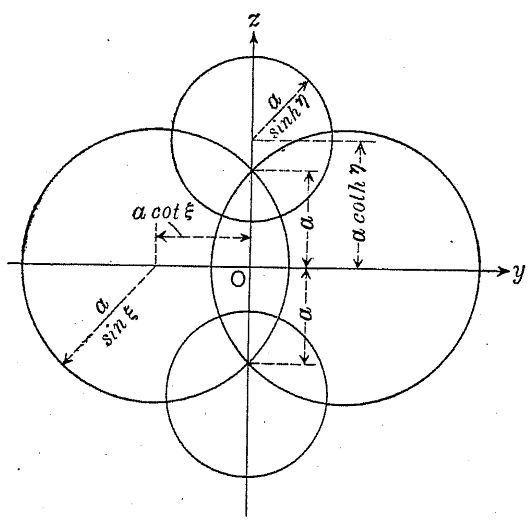
最後ニ附加ヘルベキ事ハ應力函數ノ代リニ φ ヲ用ヰル實驗法デアル. 即 Ψ ヲ二ツノ部分ニ分ケテ $G\theta\varphi$ 及 $-\frac{1}{2}G\theta(y^2+z^2)$ トシ φ ニ對シテ石鹼膜ノ實驗ヲ行フ. 此方法ニ依レバ $\Delta\varphi=0$ トナル故壓力ノ作用ヲ受ケ

1) A. A. Griffith and G. I. Taylor, Proc. Inst. Mech. Engineers, 1917, 755 頁.
2) A. Piccard et L. Baes, Verhandlungen d. 2. Internationalen Kongresses f. Techn. Mechanik, Zürich, 1926, 195 頁. 砂谷智導外二氏, 機械學會論文集, 2 卷, 1936, 423 頁.

ザル膜ヲ適當ナル高サヲ有ツ周邊ノ曲線上ニ張レバ宜シイ．此高サハ前ニ導イタ式(37)ニ依リテ定マル.[3)]

119. 双極座標.

$t=y+iz$ トスレバ t ノ函數 $\xi+i\eta$ ヲ適當ニ選ビテ捩リ問題ヲ解ク事ヲ前ニ述ベタ．今 y,z 平面上ニ於ケル斷面ノ形ヲ ξ,η 平面上ニ寫像シテ周邊ガ直線 $\xi=$const., $\eta=$const. トナレバ y,z 平面上ノ周邊ハ ξ,η ヲ常數トスル或ル方程式デ表サレル．斯ル寫像ノ例トシテ次ノモノヲ擧ゲヤウ．136圖.



136 圖

$$i\rho=\log\frac{ia-t}{ia+t},\qquad \rho=\xi+i\eta. \tag{52}$$

之ヲ書キ換ヘテ

$$e^{i\rho}=\frac{ia-t}{ia+t},$$

又ハ

3) L. Föppl, Zeitschrift f. angewandte Mathematik und Mechanik 15, 1935, 37 頁.

$$t=-ia\frac{e^{i\rho}-1}{e^{i\rho}+1}=a\tan\frac{\rho}{2}.$$

即

$$y+iz=a\tan\frac{1}{2}(\xi+i\eta),$$

又此式ヨリ

$$y-iz=a\tan\frac{1}{2}(\xi-i\eta). \tag{53}$$

サテ

$$\tan\xi=\tan\frac{1}{2}(\xi+i\eta+\xi-i\eta),$$

$$\tan i\eta=\tan\frac{1}{2}(\xi+i\eta-\overline{\xi-i\eta}).$$

故ニ兩式ノ右邊ヲ展開シテ(53)ノ關係ヲ入レル時ハ

$$\tan\xi=\frac{2ay}{a^2-y^2-z^2},\quad \tan i\eta=\frac{2iaz}{a^2+y^2+z^2}.$$

$\tan i\eta=i\tanh\eta$ ナル故

$$y^2+z^2+2ay\cot\xi-a^2=0, \tag{54}$$

$$y^2+z^2-2az\coth\eta+a^2=0. \tag{55}$$

$\xi=$const. トスレバ第一式(54)ハ y 軸上ニ於テ原點ヨリ $-a\cot\xi$ ニ等シイ距離ニ中心ヲ有ツ圓ヲ表ス．其中心ノ位置及半徑ハ ξ ニヨリテ變ズルモ凡テノ圓ハ必ズ z 軸上ニ於ケル二點 $z=\pm a$ ヲ通ル．又 $\eta=$const. トスレバ第二式(55)ハ z 軸上ニ中心ヲ有チ前ノ圓ト直交スル他ノ圓ヲ表ス．其位置及大サハ η ニヨリテ變ル．即(52)ハ斯ル等角寫像ヲ與ヘル t ノ函數デアル．圖ハ(54),(55)ノ與ヘル全圓周ヲ示スモ實ハ之等圓周ノ一部分ノミガ必要デアル．夫レヲ説明スル爲ニ(53)ヨリ

$$y+iz=a\frac{\sin\frac{1}{2}(\xi+i\eta)\cos\frac{1}{2}(\xi-i\eta)}{\cos\frac{1}{2}(\xi+i\eta)\cos\frac{1}{2}(\xi-i\eta)}=a\frac{\sin\xi+\sin i\eta}{\cos\xi+\cos i\eta}$$

然ルニ $\sin i\eta=i\sinh\eta$, $\cos i\eta=\cosh\eta$ ナル故

$$y+iz=a\frac{\sin\xi+i\sinh\eta}{\cos\xi+\cosh\eta}.$$

從テ

$$y=\frac{a\sin\xi}{\cos\xi+\cosh\eta},\quad z=\frac{a\sinh\eta}{\cos\xi+\cosh\eta}. \tag{56}$$

之等ノ式ノ分母ハ負トナル事ナキ故 $\pi>\xi>0$ ノ間ハ y ハ正デアル. 從テ y 軸ノ正ノ側ニアル圓弧ノミガ用ヰラレル. 特ニ $\xi=0$ ノ時ハ $y=0$ トナリテ圓弧ハ直線トナリ且此時 $z=\frac{a\sinh\eta}{\cosh\eta+1}=a\tanh\frac{\eta}{2}$ トナリテ z ノ絕對値ハ a ヨリ大ナラザル故 $\xi=0$ ノ線ハ圖ノ z 軸中 $z=\pm a$ ノ間ノ直線部分ニ相當スル. 又 ξ ガ $\xi=0$ ヨリ $\xi=\frac{\pi}{2}$ ニ至ル迄ハ圓ノ中心ハ y 軸ノ負ノ側ニアルモ $\xi=\frac{\pi}{2}$ トナレバ之ハ原點ニ一致シ半徑ハ a ニ等シイ. 更ニ ξ ガ增セバ中心ハ y 軸ノ正ノ側ニ來リ $\xi=\pi$ トナレバ再ビ $y=0$ トナル. 併シ此時 $z=\frac{a\sinh\eta}{\cosh\eta-1}=a\coth\frac{\eta}{2}$ トナリテ z ノ絕對値ハ a ヨリ小ナラザル故 z 軸ノ中 $z=\pm a$ ノ間ヲ除イタ殘リノ部分ガ凡テ此場合ノ線ヲ示ス. 斯樣ニ ξ ノ値ヲ適當ニ選ベバ之ニヨリテ種々ノ圓弧ヲ生ズル故適當ナル ξ ノ値二ツヲ選ベバ二個ノ圓弧ニテ圍マレル月形(或ハ弓形トモ言ヘル)ノ面積ヲ作ル事ガ出來ル.

次ニ η ハ $\pm\infty$ ノ間ニ變化シ $\eta=0$ ノ時ハ $z=0$ トナリテ(55)ノ圓ハ y 軸自身トナル. 又 $\eta=\infty$ ニ於テ $y=0, z=a$ トナリ圓ハ z 軸ノ一點 $z=a$ トナル. 一般ニ $\infty>\eta>0$ ノ範圍ニ於テ圓ハ此點ヲ包ムモ $z>0$ ナル故 y 軸ヲ切ル事ハナイ. 又 $\eta=-\infty$ ニ於テ $y=0, z=-a$ トナリ圓ハ上記ノ點ト對稱ノ位置ニアル z 軸ノ他ノ一點 $z=-a$ トナリ $0>\eta>-\infty$ ノ間ハ此點ヲ包ミ z 軸ノ負ノ側ニアル. 卽 η ノ値ヲ二ツ適當ニ選ベバ偏心圓二個ヲ得ル.

此處ニ述ベタ座標ヲ双極座標[1] ト云ヒ η ヲ常數トスル偏心中空圓ノ場合[2] 並ニ ξ ヲ常數トスル弓形斷面ノ場合ノ振リ問題ガ夫レ夫レ計算サレテ居ル.[3]

1) Bipolar coordinates.
2) Love, Elasticity, 4 版, 319 頁.
3) 石橋正, 機械學會誌, 36, 1933, 188 頁.

120. 扇形斷面.

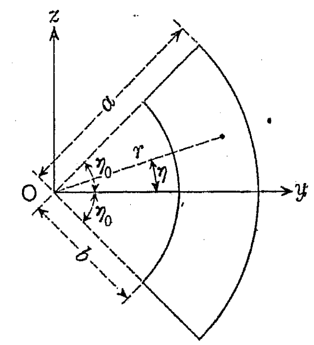
等角寫像ノ他ノ例トシテ次ノ樣ニオク

$$\xi+i\eta=\log\frac{y+iz}{c},$$

又ハ

$$y+iz=ce^{\xi+i\eta}. \tag{57}$$

極座標ヲ用ヰテ $y=r\cos\eta$, $z=r\sin\eta$ トスレバ $r=ce^{\xi}$. 夫レ故 $\xi=\mathrm{const.}$ トスレバ $r=\mathrm{const.}$ トナリテ圓弧ヲ得又 $\eta=\mathrm{const.}$ トスレバ原點ヲ通ル直線ヲ得ル. 從テ 137 圖ノ樣ナ扇形斷面ノ計算[1] ニハ ξ,η ヲ用ヰテモヨク又 r,η ヲ用ヰテモヨイ譯デアル.



137 圖

モシ ξ,η ヲ用ヰ ξ ハ $-\xi_0$ ヨリ $+\xi_0$ ノ間ニ又 η ハ $-\eta_0$ ヨリ $+\eta_0$ ノ間ニ變ズルトスレバ與ヘラレタ扇形ノ大小兩半徑ハ夫レ夫レ $a=ce^{\xi_0}$, $b=ce^{-\xi_0}$ ト書ケ又 $2\eta_0$ ハ扇形ノ直線境界ヲナス兩半徑間ノ角ヲ表ス. サテ斯ル扇形ノ周邊ニ於テ

$$\phi=\frac{1}{2}r^2 \quad \text{又ハ} \quad \phi=\frac{c^2}{2}e^{2\xi} \tag{58}$$

トナル樣ナ解ヲ求メル爲 ϕ ヲ次ノ形ニ表ス.

$$\phi=Ae^{2\xi}\cos2\eta+\Sigma\cos\alpha\eta[B_n\cosh\alpha\xi+C_n\sinh\alpha\xi]. \tag{59}$$

之ガ微分方程式 $\Delta\phi=0$ ヲ滿足スル事ハ明カデアルガ周邊 $\eta=\pm\eta_0$ ニ對スル條件ヨリ A 及 α ヲ次ノ樣ニ定メル.

$$A=\frac{c^2}{2}\frac{1}{\cos2\eta_0},\quad \alpha\eta_0=\frac{n\pi}{2},\quad (n=1,3,5,\cdots).$$

次ニ殘リノ二邊卽 $\xi=\xi_0$, $\xi=-\xi_0$ ニ對スル條件ヲ滿足スル樣 B_n, C_n ガ

1) Saint-Venant, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, 87, 1878, 849 頁, 893 頁. A. E. H. Love, Elasticity, 4 版, 319 頁. 津村利光, 機械學會誌, 34, 1931, 1268 頁.

定メラレル. 卽之等ノ邊ニ於テハ

$$\frac{c^2}{2}e^{2\xi_0}\frac{\cos 2\eta}{\cos 2\eta_0}+\Sigma\cos\alpha\eta[B_n\cosh\alpha\xi_0+C_n\sinh\alpha\xi_0]=\frac{c^2}{2}e^{2\xi_0},$$

$$\frac{c^2}{2}e^{-2\xi_0}\frac{\cos 2\eta}{\cos 2\eta_0}+\Sigma\cos\alpha\eta[B_n\cosh\alpha\xi_0-C_n\sinh\alpha\xi_0]=\frac{c^2}{2}e^{-2\xi_0}.$$

之等兩式ヨリ

$$\Sigma B_n\cosh\alpha\xi_0\cos\alpha\eta=\frac{c^2}{2}\cosh 2\xi_0\left(1-\frac{\cos 2\eta}{\cos 2\eta_0}\right),$$

$$\Sigma C_n\sinh\alpha\xi_0\cos\alpha\eta=\frac{c^2}{2}\sinh 2\xi_0\left(1-\frac{\cos 2\eta}{\cos 2\eta_0}\right).$$

此條件ヲ滿足スル樣ニ B_n, C_n ヲ定メル爲右邊 $\left(1-\frac{\cos 2\eta}{\cos 2\eta_0}\right)$ ヲ Fourier 級數ニ展開スル時ハ

$$1-\frac{\cos 2\eta}{\cos 2\eta_0}=-\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\alpha\eta}{n(\alpha^2-4)},\quad (n=1,3,5,\cdots).$$

但 α ノ中ニ n ガ含マレテ居ル. 此式ヲ上ノ條件式ニ入レテ係數ヲ求メレバ

$$B_n=-\frac{8c^2}{\pi}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n(\alpha^2-4)}\frac{\cosh 2\xi_0}{\cosh\alpha\xi_0},$$

$$C_n=-\frac{8c^2}{\pi}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n(\alpha^2-4)}\frac{\sinh 2\xi_0}{\sinh\alpha\xi_0}.$$

從テ求メル函數ハ $(n=1,3,5,\cdots)$

$$\psi=\frac{c^2}{2}e^{2\xi}\frac{\cos 2\eta}{\cos 2\eta_0}-\frac{8c^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n(\alpha^2-4)}\cos\alpha\eta\left[\cosh 2\xi_0\frac{\cosh\alpha\xi}{\cosh\alpha\xi_0}+\sinh 2\xi_0\frac{\sinh\alpha\xi}{\sinh\alpha\xi_0}\right]. \tag{60}$$

之ヨリ $\Psi=G\theta\left(\psi-\frac{1}{2}r^2\right)$ ヲ作レバ積分式(44)ヲ用ヰテ M ヲ計算シ又40)ニ示ス Ψ ノ微分係數ヨリ應力ヲ求メル事ガ出來ル.

斯樣ニシテ作ラレタ M ノ式ヲ書ケバ $(n=1,3,5,\cdots)$

$$M=G\theta\frac{a^4-b^4}{4}\left[\tan 2\eta_0-2\eta_0-\frac{128}{\pi\sinh 4\xi_0}\right.$$
$$\left.\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\alpha(\alpha^2-4)\sinh 2\alpha\xi_0}\left(\frac{1}{\alpha+2}\sinh^2(\alpha+2)\xi_0+\frac{1}{\alpha-2}\sinh^2(\alpha-2)\xi_0\right)\right]. \tag{61}$$

次ニ極座標 r, η ヲ取レバ(59)ノ代リニ別ノ A, B_n, C_n ヲ用ヰテ

$$\psi=Ar^2\cos 2\eta+\Sigma\cos\alpha\eta(B_nr^\alpha+C_nr^{-\alpha}). \tag{62}$$

周邊ノ條件中 $\eta=\pm\eta_0$ ニ對スル條件ヨリ A 及 α_n ヲ定メル事前ノ場合ト同樣デアル. 卽

$$A=\frac{1}{2\cos 2\eta_0},\qquad \alpha=\frac{n\pi}{2\eta_0},\quad (n=1,3,5\cdots).$$

又他ノ二邊 $r=a,\ r=b$ ニ對スル條件ヨリ

$$\Sigma\cos\alpha\eta(B_na^\alpha+C_na^{-\alpha})=\frac{a^2}{2}\left(1-\frac{\cos 2\eta}{\cos 2\eta_0}\right),$$

$$\Sigma\cos\alpha\eta(B_nb^\alpha+C_nb^{-\alpha})=\frac{b^2}{2}\left(1-\frac{\cos 2\eta}{\cos 2\eta_0}\right).$$

前ノ樣ニ $\left(1-\frac{\cos 2\eta}{\cos 2\eta_0}\right)$ ヲ Fourier 級數ニ展開スレバ之等兩式ヨリ

$$\Sigma\cos\alpha\eta(B_na^\alpha+C_na^{-\alpha})=-\frac{8}{\pi}a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\alpha\eta}{n(\alpha^2-4)},$$

$$\Sigma\cos\alpha\eta(B_nb^\alpha+C_nb^{-\alpha})=-\frac{8}{\pi}b^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\alpha\eta}{n(\alpha^2-4)}.$$

兩邊ニ於ケル $\cos\alpha\eta$ ノ係數ヲ比ベテ

$$B_na^{\alpha-2}+C_na^{-(\alpha+2)}=-\frac{8}{\pi}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n(\alpha^2-4)},$$

$$B_nb^{\alpha-2}+C_nb^{-(\alpha+2)}=-\frac{8}{\pi}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n(\alpha^2-4)}.$$

B_n, C_n ヲ求メレバ

$$B_n=-\frac{8}{\pi}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n(\alpha^2-4)}\frac{a^{\alpha+2}-b^{\alpha+2}}{a^{2\alpha}-b^{2\alpha}},$$

$$C_n=-\frac{8}{\pi}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n(\alpha^2-4)}\frac{(ab)^{\alpha+2}(a^{\alpha-2}-b^{\alpha-2})}{a^{2\alpha}-b^{2\alpha}}.$$

ψ ガ定マリタル故之ヨリ Ψ ヲ作レバ $(n=1,3,5,\cdots)$

$$\Psi=G\theta\left[\frac{r^2}{2}\left(\frac{\cos 2\eta}{\cos 2\eta_0}-1\right)\right.$$
$$\left.-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n(\alpha^2-4)}\frac{\cos\alpha\eta}{a^{2\alpha}-b^{2\alpha}}\left((a^{\alpha+2}-b^{\alpha+2})r^\alpha+(ab)^{\alpha+2}(a^{\alpha-2}-b^{\alpha-2})r^{-\alpha}\right)\right]. \tag{63}$$

從テ(44)ヨリ $(n=1,3,5,\cdots)$

$$M=2\iint \Psi r\,dr\,d\eta$$

$$=G\theta\left\{\frac{a^4-b^4}{4}(\tan 2\eta_0-2\eta_0)-\frac{32a^4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\alpha(\alpha^2-4)\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{2\alpha}\right)}\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{\alpha+2}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha+2}\right)^2+\frac{1}{\alpha-2}\left(\frac{b}{a}\right)^4\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha-2}\right)^2\right]\right\}. \tag{64}$$

無論此式ハ(61)ト同ジ事ヲ表ス. 特別ニ $b=0$ トスレバ(64)ヨリ

$$M=G\theta\left\{\frac{a^4}{4}(\tan 2\eta_0-2\eta_0)-\frac{32}{\pi}a^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\alpha(\alpha^2-4)(\alpha+2)}\right\}$$

$$=G\theta\frac{a^4}{2}\eta_0\left\{\frac{\tan 2\eta_0}{2\eta_0}-1-\frac{32\times 4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(\alpha^2-4)(\alpha+2)}\right\}. \tag{65}$$

Saint-Venant[1] ハ本題ノ計算ヲナスタメニ x 軸ノ方向ニ於ケル變位 u ヲ取リテ計算シ次ニ應力ノ式ヲ取リテ M ノ計算ヲナシテ居ル. 其結果ハ一見上ノ式ト異リ居ルモ同ジ値ヲ與ベル筈デアル. 此證明ヲ $b=0$ ノ場合ニ就テ試ミヤウ. Saint-Venant ニ從ヘバ

$$M=G\theta\frac{a^4}{2}\eta_0\left\{1-\frac{\tan 2\eta_0}{2\eta_0}+\frac{32}{\pi\eta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\alpha^2-4)(\alpha+2)}\right\}. \tag{66}$$

此式中ノ n 及 α ハ矢張リ前ト同ジ意味ヲ表ス. (65)ト(66)トガ同ジ値ヲ與ヘル事ヲ假定シテ兩式ノ括弧內ノ式ヲ相等シクオケバ簡單ナル計算ノ後 $(n=1,3,5,\cdots)$

$$\frac{\tan 2\eta_0}{2\eta_0}-1=\frac{16}{\pi^2\eta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi+4\eta_0}{n^2(\alpha^2-4)(\alpha+2)}=\frac{32}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(\alpha^2-4)}.$$

倍 $\dfrac{1}{n^2(\alpha^2-4)}=\dfrac{\alpha^2}{4n^2(\alpha^2-4)}-\dfrac{1}{4n^2}$ ナル故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\left(\frac{n^2\pi^2}{4\eta_0^2}-4\right)}=\frac{\pi^2}{16\eta_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{n^2\pi^2}{4\eta_0^2}-4}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$=\frac{\pi^2}{64\eta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\eta_0}{\frac{n^2\pi^2}{4}-4\eta_0^2}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$=\frac{\pi^2}{64\eta_0}\tan 2\eta_0-\frac{\pi^2}{32}.$$

1) 373 頁脚註.

此最後ノ結果ヨリ上ニ假定シタ等式ガ成立スル事ヲ知ル. 此處ニ二ツノ無限級數ノ總和ヲ書イタ. 其中第二ノ者即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}$ $(n=1,3,5,\cdots)$ ハ容易ニ證明サレルガ第一ノモノニ對スル證明ハ左程簡單デハナイ. 之ハ數學ノ書籍ニ依テ明カニスル事ヲ希望スル.[1]

$\eta_0=\pi$ トスレバ $\alpha=\frac{n}{2}$. 之ニ對スル數値ノ計算ヲナセバ(65)ニヨリテ $M=0.878\ G\theta a^4$ トナル. 之ハ中心ニ達スル細イ切缺ヲ有ツ圓形斷面ノ剛性ヲ示ス. モシ切缺ノナイ完全ナル圓形斷面ノ場合ニハ $M=\frac{\pi}{2}G\theta a^4$. 之ニ依テ見レバ切缺ノ爲剛性ガ 4 割強減少スル事ガ判ル.

又前ニ 113 節ニ於テ矩形斷面ニ對スル解ノ應用ヲ論ジタ中ニ圓弧ノ例ヲ擧ゲタ. 此近似計算ヲ只今ノ扇形ノ場合ノ解ト比較スル事ハ面白イ事柄デアルカラ次ニ之ニ就テ述ベヤウ. 內外兩半徑ガ b 及 a ニ等シイ扇形圓弧ヲ長サ $\eta_0(a+b)$ ニ等シク幅 $(a-b)$ ニ等シイ矩形ト考ヘテ捩リモーメントノ式ヲ書ケバ(25)ヨリ

$$M'=\frac{16}{3}G\theta\left(\frac{a-b}{2}\right)^3\frac{a+b}{2}\eta_0=\frac{1}{3}G\theta a^4\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{b}{a}\right)^3\eta_0. \tag{67}$$

M ノ式(61), (64)モ亦 $G\theta a^4$ ニ $\frac{b}{a}$ 及 η_0 ノ或ル函數ヲ乘ジタ形ニ表セル故之等ノ數値ヲ與ヘテ係數ノ計算ヲ行ヒ其結果ヲ(67)ノ係數ト比較スレバ近似計算ガ何程迄正シイカヲ知ル事ガ出來ル. $\frac{a}{b}=1.1$ 及 1.2, $2\eta_0=\pi$ 及 2π ニ對スル係數ヲ次表ニ示ス. 尙 $\frac{a}{b}\sim 1$ ノ時兩計算ハ全ク一致スル.

$\frac{a}{b}$	$2\eta_0$	$M/G\theta a^4$ 級數ニヨル計算	$M'/G\theta a^4$ 近似計算
1.1	2π	0.00149	0.00150
1.1	π	0.000738	0.000751
1.2	2π	0.00872	0.00889
1.2	π	0.00428	0.00444

1) 例ヘバ竹內端三,函數論(改訂版)上卷, 355 頁.

121. Ritz ノ近似計算.

彈性問題ノ近似計算法ノ一ツトシテ前ニ Ritz ノ方法ヲ擧ゲタ. 之ヲ捩リ問題ニ應用スル爲便宜上應力函數 Ψ ヲ用ヰル. 之ハ先ヅ周邊ノ條件ヲ滿足スルトシヤウ. 而シテ

$$A=\frac{1}{2G}\iint\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right]dy\,dz,$$

及

$$M=2\iint\Psi\,dy\,dz.$$

積分ハ何レモ全斷面ニ取ラレル. 夫レ故 $(A-M\theta)$ ヲ極小ニスル筈デアルガモシ θ ヲ不變トスレバ M ハ與ヘラレタモーメントナル故 $M\theta$ 不變トナリ卽 A ヲ極小ニスレバ宜シイ.

タトヘバ一邊ノ長サ $2a$ ヲ有ツ正方形斷面ヲ取リ其中心ヲ原點トシテ Ψ ニ對シテ次ノ式ヲトル.[1] 之ハ $y=\pm a$, $z=\pm a$ ニ於テ消エル故周邊ノ條件ヲ滿足スル.

$$\Psi=G\theta(a^2-y^2)(a^2-z^2)[\alpha a^2+\beta(y^2+z^2)]. \qquad (63)$$

α 及 β ハ極小ノ條件ヲ滿足スル樣ニ定メラレルベキ常數トスル. 此式ハ Ψ ノ微分方程式ヲ滿足セザル故素ヨリ正確トハ言ヘナイガ併シ α,β ヲ適當ニ選ベバ相當ニヨイ近似解ガ得ラレル. 偖

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}=2G\theta y[(\beta-\alpha)a^2-2\beta y^2-\beta z^2](a^2-z^2).$$

之ヲ用ヰテ次ノ積分ヲ行フ.

$$\iint\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2dy\,dz=\frac{128\,G^2\theta^2a^{12}}{45\times105}[105\alpha^2+72\alpha\beta+44\beta^2].$$

$\frac{\partial\psi}{\partial z}$ ニ對スル計算モ之ト同樣ノ結果ヲ與ヘル故結局

$$A=\frac{128\,G\theta^2a^{12}}{45\times105}[105\alpha^2+72\alpha\beta+44\beta^2].$$

次ニ

$$M=\frac{32}{45}G\theta a^8(5\alpha+2\beta).$$

1) 此例ハ E. Trefftz ノ論文ニ依ル. 379 頁脚註.

夫レ故此括弧內ノ式ヲ不變トシテ A ヲ極小ニスル樣ニ α,β ヲ定メレバ宜シイ. 卽

$$(105\alpha+36\beta)d\alpha+(36\alpha+44\beta)d\beta=0, \qquad 5d\alpha+2d\beta=0.$$

此第二式ヨリ $d\beta$ ヲ第一式ニ代入シテ得ル式ガ零ニ等シカラザル任意ノ $d\alpha$ ニ對シテ成立スル爲ニハ

$$15\alpha=74\beta.$$

之ヨリ α 及 β ノ式ハ次ノ樣ニナル.

$$\alpha=\frac{9\times74}{32\times80}\frac{M}{G\theta a^8}, \qquad \beta=\frac{9\times15}{32\times80}\frac{M}{G\theta a^8}.$$

從テ又變形勢力ハ

$$A=\frac{9\times277}{32\times350}\frac{M^2}{Ga^4}=0.2226\frac{M^2}{Ga^4}.$$

然ルニ $A=\frac{1}{2}M\theta$. 故ニ

$$\theta=0.445\frac{M}{Ga^4}.$$

又最大應力ノ絕對値ハ

$$\tau_{max}=2G\theta a^5(\alpha+\beta)=0.626\frac{M}{a^3}.$$

此結果ハ正確ナル解ニ殆ンド一致スルモ精密ニ言ヘバ少シ大デアル. 之ハ假定サレタ應力狀態ガ眞ノ狀態ヨリ多少異ル爲上ノ極小勢力ガ眞ノ極小値ヨリモ少シ大ナル爲デアル. 尙此節ノ近似計算ニ對シテ次ノ節ヲ比ベレバ興味ガアル.

122. Trefftz ノ近似計算.

Ritz ノ近似計算法ハ實際ヨリ多少大ナル變形勢力ヲ與ヘル故之ニ對シテ實際ヨリ多少小ナル變形勢力ヲ知ル事ガ出來レバ上限及下限ガ判リテ正確ナル値ノ推定ニ便デアル. 又モシ精度ガ充分デアレバ必シモ Ritz ノ方法ト並用セズトモ斯ル近似計算法ヲ獨立ニ用ヰル事モ出來ル. 斯ル目的ヲ有スル計算法トシテ E. Trefftz[1] ノ硏究ガアル. 此計算ニ於

1) Verhandlungen des 2. Internationalen Kongresses für Technische Mechanik, Zürich, 1926, 131 頁.

テハ一般ニ微分方程式ヲ滿足スルモ周邊ノ條件ヲ完全ニ滿足セザル近似解ヲ取扱フ.

先ヅ應力ノ式(38)ヲ用キテ單位ノ長サノ柱體ニ對スル勢力$(A-\Sigma\mathfrak{P}\mathfrak{s})$ノ式ヲ書ケバ次ノ樣デアル. 但積分ハ全面積ニ及ブ.

$$\frac{1}{2G}\iint(\tau_y^2+\tau_z^2)\,dy\,dz-M\theta=\frac{G\theta^2}{2}\iint\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}-y\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}-z\right)^2\right]dy\,dz$$
$$+G\theta^2\iint\left[y\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}-y\right)+z\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}-z\right)\right]dy\,dz$$
$$=\frac{G\theta^2}{2}\left\{\iint\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]dy\,dz-\iint(y^2+z^2)\,dy\,dz\right\}. \tag{69}$$

θヲ一定トスレバ右邊ノ第一積分ガ極小トナル時極小勢力ノ條件ニ適フ. 而シテϕハ前ニ述ベタ樣ニ $\Delta\phi=0$ ノ解デ斷面ノ周邊ニ於テハ(37)ニヨリテ $\phi=\frac{1}{2}(y^2+z^2)+c$.

今一ツノ近似解ヲ取リテ之ヲχトスル. 之ハ矢張リ $\Delta\chi=0$ ノ解デアルガ周邊ノ條件ヲ滿足セザル點ニ於テ正確デナイトシヤウ. 然ラバ周邊ニ於テ如何ナル條件ヲ滿足スレバ次善ノ解トナルカ. 之ニ答ヘル爲次ノ樣ニオク.

$$\phi=\chi-f. \tag{70}$$

fハ矢張リ方程式$\Delta f=0$ヲ滿足スル. 此式ヲ(69)ノ第一積分ニ入レテ

$$\iint\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]dy\,dz=\iint\left[\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)^2\right]dy\,dz$$
$$+\iint\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]dy\,dz-2\iint\left[\frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}\right]dy\,dz. \tag{71}$$

此最後ノ式ヲ積分スル爲先ヅ其括弧内ノ第一項ヲ取リテ

$$\iint\frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}dy\,dz=\int dz\left[\left(f\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)_2-\left(f\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)_1-\int f\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}dy\right].$$

$\left(f\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)_2$ 及 $\left(f\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)_1$ ハ任意ノzヲ不變ニ保チテyニ對スル積分ヲナス際yノ上限及下限ニ於ケル此函數ノ數値ヲ表ス. 此處ニハ周邊ノ形ガ簡單デ$z=$const. ノ直線ガ只二點ニ於テノミ周邊ヲ切ルト假定シタ. 併シ此計算ヲ複雜ナル斷面形ノ場合ニ擴張スル事ハ容易デアル. 次ニ上

ノ式ヲzニ對シテ積分シテ $\int\left(f\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)_2dz$ 及 $-\int\left(f\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)_1dz$ ガ考ヘツツアル面積ヲ左側ニ見ナガラ周邊sノ上ヲ進ム者ト見レバ次ノ樣ニ書キ直ス事ガ出來ル.

$$\iint\frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}dy\,dz=\int_s f\frac{\partial\gamma}{\partial y}dz-\iint f\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}dy\,dz.$$

同樣ニシテ他ノ殘サレタ項ニ移リ最初yヲ不變トシテzニ對スル積分ヲナシ次ニyニ對シテ積分スル. 此時 $\int\left(f\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)_2dy$ 及 $-\int\left(f\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)_1dy$ ハ前ト反對ニ面積ヲ右ニ見ル方向ヲ有スル故周邊上ヲ前ト同ジ方向ニ進ム爲ニハ符號ヲ變ヘル必要ガアル. 即

$$\iint\frac{\partial\chi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}dy\,dz=-\int_s f\frac{\partial\chi}{\partial z}dy-\iint f\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}dy\,dz.$$

從テ上ノ兩式ヨリ

$$\iint\left[\frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}\right]dy\,dz=\int_s f\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}dz-\frac{\partial\chi}{\partial z}dy\right)-\iint f\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right)dy\,dz.$$

假定ニヨリテ $\Delta\chi=0$ ナル故右邊第二ノ積分式ハ零トナル. 又周邊sノ任意ノ點ニ於テ外方ニ向フ法線ヲ引キ之ヲνニテ示セバ

$$dy=-ds\cos(\nu z),\qquad dz=ds\cos(\nu y).$$

而シテ

$$\cos(\nu y)=\frac{\partial y}{\partial\nu},\qquad\cos(\nu z)=\frac{\partial z}{\partial\nu}.$$

故ニ上ノ式ハ次ノ樣ニ書ケル.

$$\iint\left[\frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}\right]dy\,dz=\oint f\frac{\partial\chi}{\partial\nu}ds. \tag{72}$$

此結果ヲ用キテ(71)式ヲ書キ直セバ

$$\iint\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]dy\,dz=\iint\left[\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)^2\right]dy\,dz$$
$$+\iint\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]dy\,dz-2\oint f\frac{\partial\chi}{\partial\nu}ds. \tag{73}$$

夫レデ周邊ノ條件トシテ若シ此右邊ニ於ケル最後ノ項ヲ零トスレバ

$$\iint\left[\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)^2\right]dy\,dz$$

$$=\iint\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]dy\,dz-\iint\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]dy\,dz$$

$$<\iint\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]dy\,dz. \tag{74}$$

之ニ依テ見レバχニ對スル變形勢力ハϕニ對スル夫レヨリ小デアル．而シテfノ積分式ヲ極小ニスレバ此差モ從テ極小トナル，fノ積分ヲ考ヘル爲ニχヲ次ノ樣ニ表ス．

$$\chi=\sum_{h=1}^{n}c_h p_h(y,z). \tag{75}$$

但函數p_hハ微分方程式$\Delta p_h=0$ノ解デ其係數c_hニ對シテ$f=\chi-\phi$ヲ微分スレバ

$$\frac{\partial f}{\partial c_h}=\frac{\partial\chi}{\partial c_h}=p_h.$$

故ニ

$$\frac{\partial}{\partial c_h}\iint\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]dy\,dz=2\iint\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial p_h}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial p_h}{\partial z}\right)dy\,dz$$

$$=2\int_s f\left(\frac{\partial p_h}{\partial y}dz-\frac{\partial p_h}{\partial z}dy\right)-2\iint f\Delta p_h\,dy\,dz$$

$$=2\oint f\frac{\partial p_h}{\partial\nu}ds.$$

周邊ノ條件トシテ若シ此積分式ヲ零トスル樣ニスレバ $\oint f\frac{\partial\chi}{\partial\nu}ds=\sum_{h=1}^{n}c_h\oint f\frac{\partial p_h}{\partial\nu}ds=0$ トナリテ上ニ導イタ不等式(74)モ成立スル．今ϕニ對スル周邊ノ條件中常數ノ項ヲ零トシテ $\phi=\frac{1}{2}(y^2+z^2)=\frac{r^2}{2}$ トスレバ周邊ニ於テハ $f=\chi-\frac{r^2}{2}$ トナル故求メル條件ハ次ノ樣ニ表サレル．

$$\oint\left(\chi-\frac{r^2}{2}\right)\frac{\partial p_h}{\partial\nu}ds=0. \tag{76}$$

之ハ任意ノ係數c_hニ就テ導カレタ結果デ凡テノ係數ニ就テ同樣ノ式ガ導カレル故全體デn個ノ一次方程式ガ出來テ之ヨリc_hノ値ガ凡テ定マル．斯樣ニシテ得ラレル解ハ正解ヨリモ小ナル變形勢力ヲ與ヘル．然ルニRitzノ方法ハ正解ヨリモ大ナル値ヲ與ヘル故正解ハ之等二ツノ近似解ノ間ニ挾マレル．

一例トシテ玆ニ正方形斷面(一邊ノ長サ$2a$)ニ對スル次ノ近似解ヲ取ル．

$$\chi=c\,p(y,z)=\frac{c}{2a^2}(y^4-6y^2z^2+z^4).$$

之ヲ上ノ條件式ニ入レテcヲ計算スレバ　$c=-\frac{7}{36}$.

從テ

$$\chi=-\frac{7}{72a^2}(y^4-6y^2z^2+z^4).$$

之ヲ用キテMヲ計算スレバ

$$M=-G\theta\iint\left(y\frac{\partial\chi}{\partial y}+z\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)dy\,dz+G\theta\iint(y^2+z^2)dy\,dz$$

$$=\frac{304}{135}G\theta a^4,$$

又ハ

$$\theta=0.4441\frac{M}{Ga^4}. \tag{77}$$

變形勢力ハ次ノ樣ニナル．

$$A=\frac{1}{2}M\theta=0.2220\frac{M^2}{Ga^4}$$

此値ハRitzノ方法ニヨリテ計算サレタ前節ノ値ヨリモ僅ニ小デ其差ハ0.3%ニ滿タザル程度デアル．

123. 中空斷面.

此場合ニ於ケル周邊ノ條件ニ就テ考ヘルニ外周ノミデナク內周上ニ於テモ應力ノ方向ガ周邊ニ切線ノ方向ヲ取ルヲ要スル故從テ只今迄外周ニ就テ述ベタ條件ガ內周ニ就テモ成立セネバナラヌ．併シ應力函數Ψニ就テ言ヘバ外周ニ於テ之ヲ零トオキ內周ニ於テ勝手ニ再ビ之ヲ零トスル事ハ出來ナイ．故ニ今斷面中ニ孔ガ只一ツ存在スル時ヲ取リ外周ニ於テハ$\Psi=0$トシ內周ニ於テハ$\Psi=C$トスル．先ヅMノ式ヲ導ク爲周邊上ノ點ニ於ケルyノ値ヲy_1, y_2, y_3, y_4トシヤウ．簡單ノ爲ニ之等ノ點ノミデ足ルトスレバ

$$\iint y\frac{\partial\Psi}{\partial y}dy\,dz=\int(y_4\Psi_4-y_3\Psi_3+y_2\Psi_2-y_1\Psi_1)dz-\iint\Psi\,dy\,dz.$$

外周上ニ於テハ$\Psi_1=\Psi_4=0$又內周上ニ於テハ$\Psi_2=\Psi_3=C$ナル故此積分

ハ次ノ樣ニナル.

$$-C\int(y_3-y_2)\,dz-\iint\Psi\,dy\,dz.$$

第一項ノ積分ハ孔ノ面積ニ等シク之ヲF_0トスレバ

$$\iint y\frac{\partial\Psi}{\partial y}dy\,dz=-CF_0-\iint\Psi\,dy\,dz.$$

同樣ニシテ

$$\iint z\frac{\partial\Psi}{\partial z}dy\,dz=-CF_0-\iint\Psi\,dy\,dz.$$

然ルニ

$$M=-\iint\left(y\frac{\partial\Psi}{\partial y}+z\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)dy\,dz.$$

故ニ

$$M=2\iint\Psi\,dy\,dz+2\,CF_0. \tag{78}$$

此式ノ右邊ニ於ケル積分式ハ內外兩周間ノ應力丘ノ容積デ又CF_0ハ平面積F_0, 高サCヲ有スル柱體ノ容積ニ等シイ. 夫レ故捩リモーメントハ應力丘及內部ノ柱體ノ二ツヨリ成ル全容積ニ比例スル.

中空斷面ヲ有ツ棒ヲ捩ル場合ニ若シ斷面內周ノ曲線ガ孔ノ無イ場合ノ應力丘ノ或ル等高線ノ射影ト丁度一致スレバ孔ノ無イ場合ノ丘ノ頂上ヲ平ニ切リ僅ノ工作ニヨリテ中空斷面ニ對スル解ヲ導ク事ガ出來ル. 其最モ簡單ナ例ハ圓形斷面ノ場合デアル. 此處デハ同心圓デアル限リ何レノ內周ヲ取ルモ夫レハ孔ノ無イ場合ノ等高線ノ射影ト見ラレル.

若シ內周ノ曲線ガ孔ノ無イ場合ノ等高線ノ射影ト一致セザル時ハ夫レニ對スル應力丘ノ決定又ハ其他ノ方法ヲ改メテ行フ必要ガアル. 卽問題ハ比較的六ケ敷ナル. 併シ特別ノ場合トシテ肉ノ薄イ中空斷面ヲトレバ甚ダ簡單ニ應力及捩レノ近似値ヲ見出ス事ガ出來ル. 前ノ樣ニ外周ニ沿フ丘ノ高サヲ零トシ內周ニ沿フ高サヲCトシテ此兩周邊間ニ於ケル應力丘又ハ石鹼膜ノ勾配ハ兩周邊間ノ距離近キ故壁ノ厚サニ沿ヒテ殆ンド一樣ト見做シ內外ノ應力差ヲ省略シヤウ. 然ル時ハ剪斷應

力ハ近似的ニ

$$\tau=\frac{C}{h}. \tag{79}$$

偖肉ノ厚サヲhトシ之ヲ二等分スル曲線ノ周圍ノ長サヲsトシ又其圍ム面積ヲ F_m トスレバ(78)ニヨリテ

$$M=Chs+2\,CF_0=2\,CF_m. \tag{80}$$

從テ(79)ヨリ

$$\tau=\frac{M}{2hF_m}. \tag{81}$$

夫レ故厚サhノ最小ナル處ニ最大ノ應力ガ起ル. 之ハ斷面ノ周邊中ニ急激ナル方向ノ變化ナキ場合カ又ハモシアレバ凹角ノ隅ニ生ズベキ大ナル應力ヲ除外シタ場合ノ事デアル.

次ニ捩レノ角θヲ求メル爲(51)ト同ジ形ノ式ヲ用キル. 此式ハ當時述ベタ樣ニ中空ナラザル場合ニ對シテ導カレタケレドモ今之ヲ中空ノ場合ニ擴張シテ差支ノナイ事ハ次ノ樣ニシテ證明サレル. 先ヅ(51)ヲ導イタ時ト同樣ノ方法ヲ用キル爲ニハ斷面ノ孔ニ相當スル石鹼膜ノ一部ヲ重サノナイ平面板デ置キ換ヘテ之ガ常ニ水平ノ位置ヲ保チナガラ正シク垂直ニ上下スル樣ナ實驗法ヲ想像スレバ之ヲ用キテ前ト同ジ方法デ證明ヲ行フ事ガ出來ル. 併シ斯ル方法ニ依ラズトモτヲ(9)ノ τ_y, τ_z ヲ用キテ書キ直シ之ヲ積分シテ容易ニ一般ノ場合ニ對スル證明ヲナス事ガ出來ル.

斷面上ノ任意ノ一點ニ於テ應力ノ方向ニ沿ヒテ微小ナル長サdsヲ取リτトτ_y, τ_zトノ關係ヲ書ケバ

$$\tau\,ds=[\tau_y\cos(s,z)+\tau_z\cos(s,y)]\,ds.$$

然ルニ

$$\cos(s,y)=\frac{dy}{ds},\qquad \cos(s,z)=\frac{dz}{ds}.$$

故ニ

$$\tau\,ds = \tau_z dy + \tau_y dz.$$

(9)ヨリ τ_y, τ_z ヲ代入スレバ

$$\tau\,ds = G\left(\frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right) + G\theta(y\,dz - z\,dy).$$

常ニ應力ノ方向ニ一致スル樣ナ閉曲線ヲ積分ノ道トシテ之ヲ一周スル迄上ノ等式ノ兩邊ヲ積分スル. 此時右邊第一項ノ積分ハ明カニ零トナリ又第二項ノ積分ハ此積分ノ道デ圍マレタ面積ノ二倍ヲ表ス事ガ容易ニ證明サレル. 從テ曲線內ノ面積ヲ F トスレバ

$$\oint \tau\,ds = 2G\theta F. \tag{82}$$

之ハ(51)ト同ジ形デアル. 只今ノ中空斷面ノ場合ニ之ヲ應用スル爲積分ノ道ヲ周壁ノ厚サノ中心線ニ取リテ $F = F_m$ トシ且 τ ニ(81)ヲ代入シテ

$$\frac{M}{2F_m}\oint\frac{ds}{h} = 2G\theta F_m.$$

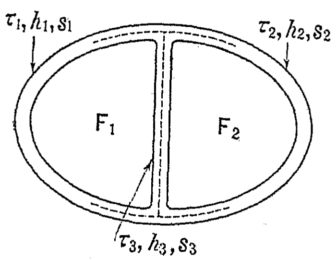
之ヨリ

$$\theta = \frac{M}{4GF_m^2}\oint\frac{ds}{h}. \tag{83}$$

特別ノ場合トシテ $h = \mathrm{const.}$ ナラバ $\oint ds = s$ ト書イテ

$$\theta = \frac{Ms}{4GF_m^2 h}. \tag{84}$$

斷面中ノ穴ガ二ツ又ハ夫レ以上ノ時ハ更ニ考慮ヲ要スル. 此時ニモ $\oint \tau\,ds$ ハ無論 $2G\theta F$ ニ等シイ. 併シ積分ノ道ニ種々ノ取リ方ガアル.



138 圖

今壁ノ厚サガ薄イト假定スレバ前ニ示シタ樣ニ(79)ガ成立スル故

$$\tau h = C.$$

只此式中ノ常數 C ガ周壁ノ一ツノ部分ニ於テノミ通用スル事ヲ注意シナケレバナラヌ. 例ヘバ 138 圖ニ示ス如キ斷面ノ場合ニハ內部ノ壁ノ存在ノ爲外壁ガ二ツノ部分ニ別レル故內壁ト合セテ三ツノ部分ガ存在シ其各ニ對シテ一ツ宛ノ常數ガアル. 併シ之等ノ三ツノ常數ハ一ツノ關係ヲモツ. 卽內部ノ壁ニ對スル常數ハ其兩側ノ應力丘ノ高サノ差ニ等シイ故

$$C_1 = C_2 + C_3,$$

又ハ

$$\tau_1 h_1 = \tau_2 h_2 + \tau_3 h_3. \tag{85}$$

只今ノ斷面ニ(82)ヲ應用スレバ二ツノ獨立セル式ヲ書ク事ガ出來ル. 例ヘバ積分ノ道ヲ左側ノ外壁(1)及中央ノ內壁(3)ヲ通ルモノト並ニ右側ノ外壁(2)及內壁(3)ヲ通ルモノトニ分ケレバ內壁ニ於ケル道ハ之等二ツノ場合ニ對シテ方向反對ナル故符號ニ注意シテ

$$\left.\begin{aligned} C_1\int_{(1)}\frac{ds}{h_1} + C_3\int_{(3)}\frac{ds}{h_3} &= 2G\theta F_1,\\ C_2\int_{(2)}\frac{ds}{h_2} - C_3\int_{(3)}\frac{ds}{h_3} &= 2G\theta F_2.\end{aligned}\right\} \tag{86}$$

F_1, F_2 ハ(1)及(2)ノ外壁ノ厚サノ二等分線ガ內壁ノ二等分線トノ間ニ圍ム面積ヲ示ス. 外壁(1)及(2)ヲ通ルモノハ(86)ノ兩式ヲ加ヘテ得ラレル. 壁ノ厚サヲ各部內ニ就テ夫レ夫レ一樣ト見做シ壁ノ長サヲ s_1, s_2, s_3 トスレバ85)ノ第一式ヲ代入シテ

$$\left.\begin{aligned} C_1\left(\frac{s_1}{h_1}+\frac{s_3}{h_3}\right) - C_2\frac{s_3}{h_3} &= 2G\theta F_1,\\ -C_1\frac{s_3}{h_3} + C_2\left(\frac{s_2}{h_2}+\frac{s_3}{h_3}\right) &= 2G\theta F_2.\end{aligned}\right\} \tag{87}$$

次ニ捩リモーメントニ對シテハ

$$M = 2(C_1F_1 + C_2F_2). \tag{88}$$

之等ノ三式ヨリ C_1, C_2 及 θ ヲ見出ス事ガ出來ル.

$$\varDelta = \frac{s_1 s_2}{h_1 h_2} + \left(\frac{s_1}{h_1}+\frac{s_2}{h_2}\right)\frac{s_3}{h_3}$$

トスレバ先ヅ(87)ヨリ

$$C_1 = \frac{2G\theta}{\varDelta}\left[F_1\left(\frac{s_2}{h_2}+\frac{s_3}{h_3}\right) + F_2\frac{s_3}{h_3}\right],$$

$$C_2=\frac{2G\theta}{\varDelta}\left[F_1\frac{s_3}{h_3}+F_2\left(\frac{s_1}{h_1}+\frac{s_3}{h_3}\right)\right].$$

從テ(88)ヨリ

$$M=\frac{4G\theta}{\varDelta}\left[F_1^2\left(\frac{s_2}{h_2}+\frac{s_3}{h_3}\right)+2F_1F_2\frac{s_3}{h_3}+F_2^2\left(\frac{s_1}{h_1}+\frac{s_3}{h_3}\right)\right]. \tag{89}$$

之ニヨリテ θ ガ計算サレル. 又

$$\left.\begin{aligned} C_1&=\frac{M}{2}\frac{F_1\left(\frac{s_2}{h_2}+\frac{s_3}{h_3}\right)+F_2\frac{s_3}{h_3}}{F_1^2\left(\frac{s_2}{h_2}+\frac{s_3}{h_3}\right)+2F_1F_2\frac{s_3}{h_3}+F_2^2\left(\frac{s_1}{h_1}+\frac{s_3}{h_3}\right)},\\ C_2&=\frac{M}{2}\frac{F_1\frac{s_3}{h_3}+F_2\left(\frac{s_1}{h_1}+\frac{s_3}{h_3}\right)}{F_1^2\left(\frac{s_2}{h_2}+\frac{s_3}{h_3}\right)+2F_1F_2\frac{s_3}{h_3}+F_2^2\left(\frac{s_1}{h_1}+\frac{s_3}{h_3}\right)}.\end{aligned}\right\} \tag{90}$$

之等ノ式ニヨリテ C_1, C_2 ガ定マリ從テ C_3 ハ(85)ヨリ計算サレル. 從テ應力ハ $\tau_1=\frac{C_1}{h_1}$, $\tau_2=\frac{C_2}{h_2}$, $\tau_3=\frac{C_3}{h_3}$ トシテ見出サレル. 尚薄肉中空體ノ捩リニ關シテハ井口常雄博士ノ研究ガアル.[1]

124. 捩リニ伴フ副應力.

捩リニ伴フ一種ノ副應力ハ長サノ方向ノ變形ガ自由ナラザル爲ニ起ル. 上ノ計算デハ始メヨリ捩リノ角ヲ小ト假定シ從テ中心軸ノ方向ニ於ケル長サハ捩リヲ受ケテモ殆ンド不變ト見做シタ. 併シ θ ガ相當ニ大トナレバ中心軸ヨリノ距離 ρ ヲ有ツ點ノ動ク距離ノ二乘卽 $\rho^2\theta^2$ ハ 1 ニ比ベテ省略出來ヌ樣ニナル. 從テ 1 及 $\rho\theta=\gamma$ ヲ二邊トスル直角三角形ノ斜邊ノ長サヲ計算シテ伸ビ ε_z ヲ求メレバ之ハ次ノ樣ニナル.

$$\varepsilon_z=\sqrt{1+\gamma^2}-1=\frac{1}{2}\gamma^2.$$

例ヘバ細長イ矩形斷面ニ於テ長邊 $2b$ ノ方向ニ測リタル中心ヨリノ距離ヲ z トスレバ近似的ニ $\rho=z$ ト書イテ

$$\varepsilon_z=\frac{1}{2}\theta^2z^2.$$

1) 東京帝國大學航空研究所彙報, 89, 1932, 1 頁.

ε_z ハ z ト共ニ大トナル故斷面ノ中心ニ近イ處ト遠イ處トノ間ニ牽制作用ガ起リ此爲ニ副作用トシテ伸ビ又ハ縮ミヲ伴フ. 之ヲ ε_0 トスレバ合成變形ハ $\varepsilon=\varepsilon_0+\varepsilon_z$ トナリ之ニ對スル應力ヲ σ トスレバ

$$\sigma=E\varepsilon_0+\frac{E}{2}\theta^2z^2. \tag{91}$$

矩形斷面ノ板ヲ捩ル際板全體トシテハ其兩端ヲ引張リ又ハ壓ス力ガ作用セザル限リ全斷面ニ取ラレル次ノ積分ハ消エル.

$$\int_{-b}^{+b}\sigma\,dz=0. \tag{92}$$

之ニ σ ノ式ヲ入レテ計算スレバ

$$2\varepsilon_0b+\frac{1}{3}\theta^2b^3=0,$$

卽

$$\varepsilon_0=-\frac{1}{6}\theta^2b^2.$$

從テ長サノ方向ノ應力ハ次ノ樣ニナル.

$$\sigma=\frac{1}{2}E\theta^2\left(z^2-\frac{b^2}{3}\right). \tag{93}$$

此式ヨリ $z=b,\quad \sigma=\frac{1}{3}E\theta^2b^2.$

$z=0,\quad \sigma=-\frac{1}{6}E\theta^2b^2.$

斷面ノ兩邊ノ比 $\frac{b}{a}$ ヲ非常ニ大ト見テ近似的ニ $\frac{b}{a}=\infty$ トスレバ $\tau_{max}=2G\theta a$ ナル故次ノ樣ニモ書ケル.

$$\left.\begin{aligned}&\text{最大引張應力}\quad \sigma=\frac{E}{12}\frac{\tau^2_{max}}{G^2}\frac{b^2}{a^2}=\frac{m+1}{6m}\frac{\tau^2_{max}}{G}\frac{b^2}{a^2},\\ &\text{最大壓縮應力}\quad \sigma=-\frac{E}{24}\frac{\tau^2_{max}}{G^2}\frac{b^2}{a^2}=-\frac{m+1}{12m}\frac{\tau^2_{max}}{G}\frac{b^2}{a^2}.\end{aligned}\right\} \tag{94}$$

σ ハ $\frac{b}{a}$ ノ比ニヨリテ相當ニ大トナル事ガ判ル. 尚 σ ハ變形セル板ノ長サノ方向ニ沿ヒテ作用シ詳シク言ヘバ中心軸ニ對シテ角 θz ノ傾キヲ有ツ故次ノ偶力ヲ生ズル.

$$\int_{-b}^{+b}2\sigma a\theta z^2dz=E\theta^3a\int_{-b}^{+b}\left(z^4-\frac{b^2}{3}z^2\right)dz=\frac{8}{45}E\theta^3ab^5.$$

σ ノ作用ヲ考ヘザル時ノ振リモーメントハ $\frac{16}{3}G\theta a^3 b$ ニ等シキ故此作用ヲ入レテモーメントヲ求メレバ

$$M=\frac{16}{3}G\theta a^3 b\left(1+\frac{1}{30}\frac{E}{G}\frac{b^4}{a^2}\theta^2\right). \tag{95}$$

振リノ程度小ナル時ハ括弧內ノ第二項ノ影響小ナル故 M ト θ トノ關係ハ略ボ直線的ナルモ振リガ進ムニ從テ直線ヲ離レテ M ガ早ク增ス. 殊ニ薄イ板 $\left(\frac{b}{a}\text{大}\right)$ ヲ大ニ振ル時ハ上式ノ右邊括弧內ノ第二項ガ重要トナル故著シク直線ヲ離レル. 斯樣ニシテ與ヘラレタ M ニ對シテ生ズル θ ハ副應力ノ爲ニ多少小トナル. 此事ハ直線關係ノ時ヨリモ剪斷應力小トナリ其代リニ垂直應力ノ起ル事ヲ意味スル.

次ニ他ノ性質ノ副應力ニ就テ述ベヤウ. 元來本章ニ於テ述ベテ來タ樣ナ普通ノ振リ問題ニ於テハ棒又ハ板ノ長サノ方向ニ沿ヒテ一樣ナル變形及應力ヲ假定シテ居ルケレドモ兩端ノ狀況ガ或ル特別ノ場合デナケレバ其處ノ應力ガ丁度振リノ理論ニ一致スル樣ナ狀態ニアル事ハ望マレナイ. 若シ棒又ハ板ノ長サ大ナレバ兩端ヲ去ル事相當ニ遠イ場所ニ於テハ普通ノ振リノ計算ガ正シイ結果ヲ與ヘルケレドモ兩端及其附近ニ於テハ普通ノ計算ニ依リテハ求メラレザル應力ガ發生スル. 例ヘバ薄イ板ガ其兩端ニ於テ自由ニ支ヘラレル或ル特別ノ場合ニハ端カラ端迄板ハ一樣ナル振リヲ受ケル事平面板ノ曲ゲトシテ後章ニ述ベル積リデアルガ之ニ對シテ薄イ板ガ兩端ニ於テ完全ニ固定サレナガラ振ラレル時ハ其處ニ著シイ曲ゲ應力ガ起ル.[1]

上ニ兩端ノ影響ガ深ク內部ニ及バナイ事ヲ述ベタガ一般ニ構造物ノ境界ニ於ケル應力ガ正シク計算ト一致セズトモ應力ノ生ズル力ノ靜力學的作用ガ同ジナラバ境界附近ヲ除ク構造物內部ニ於ケル應力配布ニ變リハナイ. 之ハ Saint-Venant ノ原理トシテ知ラレ振リノミナラズ其他凡テノ問題例ヘバ梁ノ問題ニ於テモ缺クベカラザル役目ヲ有シ之ニ依

1) 小野正敏, 機械學會誌, 36, 1933, 694 頁.

リテ計算ガ非常ニ簡單トナル. 併シ力ノ作用スル局所ニ於ケル應力ガ屢々重要ナル事ハ注意スベキ點デ今便宜上副應力ト云フ題ノ下ニ之ヲ述ベルケレドモ之ガ爲ニ其重要性ヲ害シナイ樣ニシタイ.

125. 直徑一樣ナラザル圓形斷面.

標題ノ樣ニ斷面ノ大サガ場所ニヨリテ一樣デナイ棒ノ振リノ計算ヲ行フ爲矢張リ前ノ樣ニ棒ノ軸ノ方向ヲ x 軸トシテ $X=Y=Z=0$ ノ外次ノ假定ヲオク.

$$u=0,\quad v=-fz,\quad w=fy. \tag{96}$$

$u=0$ ナル故變形後モ斷面ハ平面トシテ止ル. 又 v, w ノ式ニ依レバ斷面上ノ變位ハ半徑ノ方向ニ直角デアル. 併シ之等兩式中ノ f ハ常數デハナク x 及 $r=\sqrt{y^2+z^2}$ ノ函數デアル. (96)ヲ用キテ彈性體ノ基礎方程式ヲ簡單ニ書キ直ス爲先ヅ v, w ヲ y, z ニ對シテ夫レ夫レ微分スレバ

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{yz}{r}\frac{\partial f}{\partial r},\quad \frac{\partial w}{\partial z}=\frac{yz}{r}\frac{\partial f}{\partial r}.$$

從テ $e=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$. 夫レ故 XVI 章(12)ノ第一式ハ $u=0$ ニヨリテ滿足サレ他ノ兩式ハ次ノ樣ニナル.

$$\Delta v=0,\quad \Delta w=0. \tag{97}$$

偖上ニ定義シタ f ハ半徑 r ノ圓周上ノ點ニ於ケル廻轉角ヲ表シ之ハ x 及 r ニヨリテ其値ヲ變ズル. f ノ滿足スベキ微分方程式ヲ導ク爲(96)ノ v, w ヲ(97)ノ兩式ニ入レル時ハ何レモ次ノ樣ニナル.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}=0. \tag{98}$$

次ニ應力成分ニ關シテハ $u=0$ ナル故

$$\tau_y=G\frac{\partial w}{\partial x},\quad \tau_z=G\frac{\partial v}{\partial x}.$$

之等ニ(96)ノ v, w ヲ入レル時ハ

$$\tau_y = Gy\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \tau_z = -Gz\frac{\partial f}{\partial x}. \tag{99}$$

兩成分ノ合成ヲτトスレバτノ方向ハ明カニ半徑rニ直角デアルカラ棒ノ横斷面内ニ於ケル應力線ハ同心圓デ周邊モ亦應力線ノ一ツニ過ギナイ. τノ大サハxノ函數ナルハ勿論rニ對シテモ直線的デハナイ. 又τハ常ニ對ヲナシテ作用スル故之ハ棒ノ縦斷面内ニ於テ軸ノ方向ニ作用スル成分ヲモ示スモノデアル.

尙殘サレタ剪斷應力τ_xハ

$$\tau_x = G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = G\frac{y^2 - z^2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}. \tag{100}$$

垂直應力σ_xハ $u=e=0$ ナル故消エル. 卽各横斷面ニ垂直應力ガ作用シナイ.

次ニ他ノ垂直應力ヲ考ヘルニ $e=0$ ナル故

$$\sigma_y = 2G\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_z = 2G\frac{\partial w}{\partial z}.$$

之等ノ式ニ於ケル $\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial w}{\partial z}$ ヲ(96)ヨリ代入スレバ次ノ樣ニナル.

$$\sigma_y = -2G\frac{yz}{r}\frac{\partial f}{\partial r}, \quad \sigma_z = 2G\frac{yz}{r}\frac{\partial f}{\partial r}. \tag{101}$$

例ヘバ $y=0$ ト置ケバzx平面ニ對シテ $\sigma_y=0$. 故ニ縦斷面ニ垂直ナル應力ハ作用シナイ. 又同ジク $y=0$ ニ對シテ $\sigma_z=0$. 卽半徑方向ニモ垂直應力ハ作用シナイ. 結局τ及τ_xヲ考ヘレバ充分デアル.

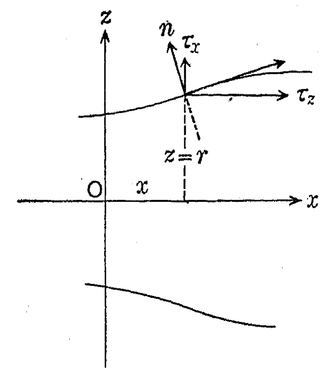
棒ノ表面ニハ外力ノ作用ナキ故之ニ對スル周邊ノ條件ヲ導ク爲XIV章ノ(4)ニ於テ $p=0$ トオク. 而シテ便宜上 $y=0$ ニ對スル表面上ノ點ヲ考ヘレバ斯ル點ニ於テ棒ノ表面ヘ引イタ垂直線ハ無論zx平面中ニアルベキ故其方向餘弦中 $\cos\beta=0$ トナリ從テ上ノ(4)ノ第一第三兩式ハ共ニ $\tau_y=0$ トナル. 然ルニ(99)ニ從ヘバ $y=0$ ニ對シテ實際τ_yハ消エル故此事ハ丁度滿足サレル. 而シテ殘ル第二式ヨリ次ノ式ガ書ケル.

$$\tau_z\cos\alpha + \tau_x\cos\gamma = 0.$$

今zx平面ニ於テ棒ノ縦斷面ノ周邊ニ切線ヲ引キ(139 圖)其x軸トナス角ノ正切 $\dfrac{dr}{dx}$ ヲトレバ之ハ次ノ關係ヲ滿ス.

$$\frac{dr}{dx} = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = \frac{\tau_x}{\tau_z}.$$

而シテ $y=0$ ナル故(99), (100) ノ兩式ニ於テ一般ニ $z=r$ ト書イテ



139 圖

$$\tau_x = -Gr\frac{\partial f}{\partial r}, \quad \tau_z = -Gr\frac{\partial f}{\partial x}. \tag{102}$$

從テ周邊ノ條件ハ次ノ樣ニ表サレル.

$$\frac{dr}{dx} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial r}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}. \tag{103}$$

斯樣ニ縦斷面ノ一ツzx平面内ニ於テハ其周邊ノ微小部分ハ $\tau_z=\tau_{yx}$, $\tau_x=\tau_{yz}$ ヲ二成分トスル應力ノ方向ニ一致シ又rヲ周邊上ニアラザル任意ノ點ノ半徑方向ノ距離ヲモ表ストスレバ同平面内ノ他ノ應力線モ亦一般ニ(103)ト同ジ形ノ微分方程式デ表サレル.

次ニ周邊又ハ周邊以外ノ應力線上ニ於ケル任意ノ點ニ於テ之ニ直角ノ方向ヲ有スル直線nニ沿ヒテ $\dfrac{dr}{dx}$ ヲ作レバ之ハ曲線ニ沿ヒテ取リタル $\dfrac{dr}{dx}$ (103)ノ逆數ノ符號ヲ變ヘタモノニ等シキ故

$$\frac{dr}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial r}},$$

又ハ

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial r}dr = 0.$$

從テ

$$df = 0.$$

卽應力線ニ直角ノ方向ニ於テハ f ノ變化ナキ故斯ル方向ヲ辿ル曲線上ニ於ケル點ハ凡テ一樣ナル角丈ケ廻轉スル.

f ノ微分方程式ノ特別ナル解トシテ次ノ樣ニオク.

$$f=\frac{C}{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{104}$$

之ガ(98)ヲ滿足スル事ハ計算ニヨリテ明カデアルガ如何ナル形ノ周邊ニ對スル解デアルカヲ見ルニ

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial r}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}=\frac{r}{x}.$$

從テ(103)ニヨレバ

$$\frac{dr}{dx}=\frac{r}{x}.$$

之ハ原點ヲ通ル任意ノ直線ノ方程式ナル故(104)ノ示ス f ハ圓錐體ニ對スル式デアル.

應力ハ縱斷面內ノ二成分ヲ求メレバ事足ル故縱斷面トシテ zx 平面ヲ取レバ(102)ヨリ

$$\left.\begin{aligned}\tau_z=\tau_{yx}&=G\frac{3Crx}{(x^2+r^2)^{\frac{5}{2}}},\\ \tau_x=\tau_{yz}&=G\frac{3Cr^2}{(x^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}.\end{aligned}\right\} \tag{105}$$

捩リモーメントヲ M トシ任意ノ橫斷面ノ半徑ヲ r_1 トスレバ橫斷面中ノ合成應力 τ ハ上ノ τ_z ニ等シキ故

$$M=\int_0^{r_1}2\pi r^2\tau\,dr=6\pi GCx\int_0^{r_1}\frac{r^3}{(x^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}dr.$$

此積分ノ爲便宜上次ノ樣ニオク.

$$r=x\tan\alpha.$$

α ハ 0 ト $\alpha_1=\tan^{-1}\frac{r_1}{x}$ トノ間ニ變ル數デ $2\alpha_1$ ハ圓錐體ノ頂角ニ等シイ. 然ル時ハ

$$\int_0^{r_1}\frac{r^3dr}{(x^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}\cos^3\alpha_1-\cos\alpha_1+\frac{2}{3}\right).$$

之ヲ用キテ

$$M=2\pi GC(\cos^3\alpha_1-3\cos\alpha_1+2),$$

又ハ

$$C=\frac{M}{2\pi G(\cos^3\alpha_1-3\cos\alpha_1+2)}.$$

此 C ヲ(105)ニ入レテ τ_z 及 τ_x ノ計算ガ完了シ又 f 自身ハ(104)ヨリ次ノ樣ニ書ケル.

$$f=\frac{M}{2\pi G(\cos^3\alpha_1-3\cos\alpha_1+2)(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{106}$$

終リニ zx 平面內ノ應力成分ニ關スル流體力學トノ對比ヲ附加ヘヤウ. 卽(102)ノ應力成分 τ_{yx} 及 τ_{yz} ニ夫レ夫レ r^2 ヲ乘ジテ次ノ樣ニ置ク.

$$\left.\begin{aligned}r^2\tau_{yx}&=-Gr^3\frac{\partial f}{\partial x}=v_x,\\ r^2\tau_{yz}&=-Gr^3\frac{\partial f}{\partial r}=v_r.\end{aligned}\right\} \tag{107}$$

然ル時ハ(98)ニ依リテ

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_r}{\partial r}=0.$$

故ニ v_x, v_r ヲ夫レ夫レ x 軸及半徑方向ノ流レノ速サト見レバ二次元ノ流レニ於ケル連續ノ條件ヲ滿足スル. 而シテ 103), (107) ニヨリテ

$$\frac{v_r}{v_x}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial r}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}=\frac{dr}{dx}.$$

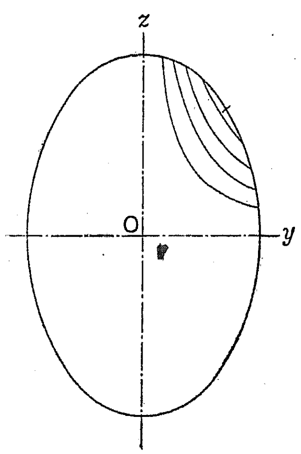
故ニ流レハ周邊及其他ノ應力線ニ沿フ. 斯ル對比ヲ用キテ應力配布ヲ考ヘルニ例ヘバ棒ノ周圍ニ溝ヲ繞ラス場合若クハ半徑ノ異ル二ツノ部分ガ段ヲナシテ連ル場合等ニ於テ縱斷面內ノ流レヲ想像シテ斯ル溝又ハ段ノ爲ニ大ナル應力ノ發生スル事ガ首肯サレル. 夫レ故棒ノ斷面ヲ急ニ變化スル事ヲ避ケテ成ルベク大ナル丸味ヲモタセル事ガ實際上望マシイ.

例題 1. 斷面楕圓形ノ柱體ヲ捩ル時斷面ノ變形スル有樣ハ如何.

柱體ノ橫斷面上ノ各點ハ柱軸ニ平行ナル變位ヲナシ次ノ式ノ與ヘル曲面トナルコト曾テ述ベタ如クデアル.

$$u=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\theta yz.$$

今初メノ平面ニ平行ナル平面ヲ以テ此曲面ヲ切ル時ハ其交線ハ $yz=k$ (常數)デアル. 故ニ交線ヲ凡テ舊ノ斷面ニ射影スル時ハ yz 兩軸ヲ漸近線トスル雙曲線ナルコトヲ知ル. 140 圖.



140 圖

尙橫斷面ノ周邊上ノ各點ガ如何ニ動クカヲ知ルタメニハ楕圓ノ方程式 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ ト前ノ u ノ式トヨリ y, z ノ何レカヲ消去スル. 例ヘバ z ヲ消去シテ

$$u=\pm Ay\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}},$$

但

$$A=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\theta b.$$

y ニアル値ヲ與ヘレバ之ニ對シテ z ニ正負二樣ノ値アリ從テ u ニ二樣ノ値ガ出ル. 偖 u ハ當然極大極小ノ點ヲ有スル故之ヲ定メルタメニ $\frac{du}{dy}=0$ トスレバ簡單ナル計算ノ後

$$\frac{2y^2}{a^2}=1.$$

此式ヲ滿足スル y ノ値ハ

$$y=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

又之ニ對スル z ハ

$$z=\pm\frac{b}{\sqrt{2}}.$$

符號ノ組合セニヨリテ四點ヲウル譯デ之等ガ周邊上ノ最高點並ニ最低點デアル.

例題 2. 橫斷面矩形 ($b\times h$ ニシテ $h>b$) ノ針金ニテ作レル螺旋狀スプリングノ計算.

V 章例題 2 ニ於ケル丸イ針金ニテ作レルスプリングノ計算ト同ジ程度ノ精密サデ計算シヤウ. P, r, k_t 及其他前ト類似ノ記號ヲ用ヰ先ヅ應力ノ計算ニ對シテハ本章ノ(31)ヨリ

$$Pr=\frac{k_t b^2 h}{8F}.$$

次ニ變形ノ式ヲ導クタメニハ(26)ニヨリ $\theta=\frac{16Pr}{Gb^3hf_1}$ ヲ用ヰテ次ノ樣ニ書クコトガ出來ル.

$$y=2\pi n\theta r^2$$

$$=\frac{32\pi n}{G}\frac{Pr^3}{b^3hf_1}.$$

上ノ計算ハ簡單ナル假定ニ基ク故計算ノ結果ハ大體ノ近似値ヲ與ヘルニ過ギナイ.

例題 3. 矩形斷面ノ針金ヲ用ヰタ圓錐形スプリングノ計算.

應力ニ對シテハ V 章ノ例題 3 ニ於ケル樣ニ旋條ノ最大半徑 r_2 ヲトリテ(31)ヨリ

$$Pr_2=\frac{k_t b^2 h}{8F}.$$

次ニ半徑 r ガ 125 頁ト同樣ノ規則ニ從テ r_1 ヨリ r_2 ニ變ズル者トスレバ變形ハ

$$y=\frac{32\pi nP}{Gb^3hf_1(r_2-r_1)}\int_{r_1}^{r_2}r^3\,dr$$

$$=\frac{8\pi n}{G}\frac{P(r_1+r_2)(r_1^2+r_2^2)}{b^3hf_1}.$$

若シ $r_1=0,\ r_2=r$ トオケバ

$$y=\frac{8\pi n}{G}\frac{Pr^3}{b^3hf_1}.$$

終リニ例題 2 ニ於ケルト同樣ノ注意ヲ附加ヘテオク.