XVIII. 破損ノ法則.

104. 材料破損ノ意義.

材料ノ彈性ニ關スル計算ニヨリテ應力又ハ伸ビヲ見出スコトガ出來テモ之丈ケニテ材料ノ强サヲ論ズル譯ニ行カヌ. 材料ガ或ル應力狀態ニ於テ破損ヲ起ス憂ナキヤヲ知ルタメニハ勢ヒ材料ニ關スル實驗上ノ知識ヲ必要トスル.

上ニ破損ト云フ語ヲ用ヰタ. 其意義如何ト云フニタトヘバ簡單ナル引張試驗ニ於テモ材料ノ種類ニヨリテ性狀一樣デナク卽可鍛鐵ニアリテハ或ル應力ニ達スル迄伸ビハ應力ニ比例シ軈テ降伏點ニ達スルヤ材料ノ流レヲ生ジ更ニ進ミテ最高ノ荷重ニ達シタ後通例大ナル伸ビヲ顯シテ破壞ヲ了ルモノデアル. 然ルニ鑄鐵ニアリテハ大ニ趣ヲ異ニシ卽前者ニ於ケル樣ニ著シイ流レヲ生ゼズシテ破壞スル. 故ニ便宜上材料ヲ二ツニ區別シテ可鍛鐵ニヨリテ代表サレル如キ大ナル變形ニ堪ヘル材料ト鑄鐵ノ如キ變形ニ堪ヘ難キモノトノ二種トスル.

素ヨリ凡テノ材料ガ此等二種ニ判然ト區別サレルコトハ困難デアルカラ時トシテハ中間ノ性質ヲ有スルモノガ生ズル譯デアル. 又一見變形ニ堪ヘ難キ材料モ應力狀態ノ如何ニヨリテハ相應ニ能ク變形シウル故此區別ハ便宜上大體ノ性質ヲ示スニ止ル. サテ此意味ニ於テ所謂伸ビ易キ材料ニ對シテハ材料ノ流レ出ス時ヲ以テ破損ヲ生ジタモノト認メ又伸ビノ少イ材料ニ對シテハ破壞ヲ以テ破損トスル事ガ出來ル. 併シ材料使用ノ目的ヨリ言ヘバ降伏點ヲ過ル迄應力ヲ加ヘテ用ヰル事モアル故茲ニ謂フ破損ハ單ニ降伏及破壞ノ二種ノ現象ヲ意味スルニ止リテ降伏ヲ起ス事ガ必シモ常ニ使用上不可デアルト云フ意味デナイ事ヲ明カニシテオキタイ.

105. 應力又ハ變形ヲ標準トスル强サノ假說.

斯樣ニ破損ノ意義ガ二樣トナル上ハ破損ヲ引起ス迄ニ達スル最大ノ應力狀態卽所謂强サモ亦一樣ノ假說ヲ用ヰテ之ヲ律シウベキデナイコトハ明カデアル. 由來强サニ關スル假說ハ種々アルモ應力又ハ變形ヲ標準トスル假說ハ大要次ノ如キ種類ニ區別スルコトガ出來ル. 尙之等ノ外變形勢力ヲ標準トスルモノニ就テハ後節ニ之ヲ述ベル.

(i) 最大應力ノ假說. 材料ノ內ニ起ル最大ノ應力(負ナラバ絕對値)ヲ强サノ標準トスル假說.

(ii) 最大ノ伸ビノ假說. 最大ノ伸ビ(負ナラバ其絕對値)ヲ標準トスル假說.

(iii) 最大剪斷應力ノ假說. 最大ナル剪斷應力ヲ標準トスル假說.

(iv) 垂直,剪斷ノ兩應力ヲ用ヰル假說. 破面ニ於ケル垂直及剪斷兩應力ガ物體ノ運命ヲ支配スルト云フ假說.

i ノ假說ニ從ヘバ主要應力中正ノ應力ノ最大ナルモノガ之ニ對スル限界値ニ達スルカ又ハ負ノ應力ノ絕對値最大ナルモノガ之ニ對スル限界値ニ達スレバ破損ヲ生ズル. 又 ii ノ假說ニ從ヘバ正ノ ε ノ最大ナルモノ又ハ負ノ ε ノ絕對値最大ナルモノガ夫レ夫レノ限界値ニ達スレバ破損スル. 之等ノ假說並ニ τ ノ最大値ガ或ル限界値ニ達シタ時破損ヲ起スト云フ iii ノ假說ニ就テ一々其適否ヲ述ベルヨリモ寧ロ直ニ假說 iv ヲ研究シ其結果ニヨリテ他ノ說ヲ考ヘル方說明上便利ナル故此處デハ此方針ニ從フ.

併シ其前ニ言ヒタイ事ハ假說 iii ノ變態デアル. R. v. Mises ハ固體ノ塑性變形ニ關スル力學的研究ノ一部ニ於テ計算ノ便宜上剪斷應力ノ假說ヲ變ヘテ別ノ假說ヲ提言シタ.[1] 86節ニ述ベタ σ, τ 線圖中ノ三ツノ圓 a, b, c ノ半徑ニ相當スル剪斷應力ヲ τ_1, τ_2, τ_3 トシテ次ノ樣ニオク.

1) Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse, 1913—14, 582 頁.

$$\tau_1=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2},\quad \tau_2=\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2},\quad \tau_3=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}.$$

剪斷應力ノ假說ニ從ヘバ限界狀態ニ於テハ次ノ式ノ何レカガ成立ツ.

$$\tau_1=\pm K,\quad \tau_2=\pm K,\quad \tau_3=\pm K.$$

之等ガ凡テ同時ニ成立ツ事ハナイ. 何トナレバ定義ニヨリテ明カナル樣ニ

$$\tau_1+\tau_2+\tau_3=0.$$

而シテ此關係ハ上ノ三式ニヨリテ同時ニ滿足サレナイカラデアル. 今 τ_1, τ_2, τ_3 ヲ直交座標トスレバ前ノ三式ハ正六面體(稜ノ長サ $2K$)ヲ表シ只今ノ式ハ座標軸ノ原點ヲ通ル平面ヲ表ス. 限界狀態ハ實ニ此正六面體ト平面トノ交線デ定マル. 斯ル交線ヲ取ル代リニ便宜上少シ模樣ヲ變ヘテ正六面體ヲ半徑ガ $\sqrt{2}K$ ニ等シイ球ニテ代用スレバ

$$\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2=2K^2. \tag{1}$$

之ガ Mises ノ假說トシテ呼バレル基礎ノ式デアツテ其形ハ後ニ至リテ述ベル變形勢力ノ一假說ト同一ナルモ起原ハ別デアル. Mises ノ假說ハ變形勢力ノ假說ト共ニ屢々文獻ニ引用サレル. 併シ嚴密ニ言ヘバ Mises 自身モ此假說ヲ以テ必シモ滿足セズ. 其修正ヲ提言シタ由ガ雜誌上ニ記サレテ居ル.[1] 此假說ニ關スル之以上ノ說明ハ變形勢力ノ假說ノ說明ト重複スル故之ヲ見合セテ吾々ハ直ニ假說 iv ヲ研究シヤウ.

垂直,剪斷兩應力ヲ基礎トスル假說ハ O. Mohr ニヨリテ次ノ樣ニ述ベラレテ居ル.[2] 之ハ主ニ降伏現象ニ對スルモノデ「辷リ面ニ於ケル剪斷應力ハ極限狀態ニ於テ垂直應力及材料ノ性質ニヨリテ定マル最大値ニ達ス」. 併シ著者ハ降伏及破壞ノ兩現象ヲ含ム比較的廣イ意味ニ於テ「一般ニ兩應力ノ共同作用ガ破損ヲ支配スル」ト考ヘ材料ノ將ニ破損ヲ生ジヤウトスル極限ノ狀態ハ σ 及 τ ノ二ツニヨリテ定マルト解シテオカウ.

1) 335 頁脚註 3) F. Schleicher ノ論文中ノ註.

2) Otto Mohr, Technische Mechanik, 2 版, 1914, 192 頁.

斯樣ニ述ベル理ハ必シモ常ニ剪斷應力ノミガ破損ノ一要素トナラヌタメデアルガ一般ニ與ヘラレタ垂直應力ニ對シテ種々ノ値ノ剪斷應力ガ考ヘラレル中最モ危險ナルハ最大ノ者デアルト云フ點ニ於テ素ヨリ前ト同一デアル.

偖 Mohr ノ應力圖ニ就テ見ルニ與ヘラレタ σ ニ對スル τ ノ最大値ハ其主要圓ニヨリテ定マル. 而シテ其方程式ハ 120 圖ニ對照シ XIV 章(23)ノ第二式中 $b=0$ トスルコトニヨリテ次ノ如クデアル.

$$\tau^2+\sigma^2-\sigma(\sigma_3+\sigma_1)+\sigma_3\sigma_1=0.$$

前述ノ如ク此主要圓ハ $b=0$ ニ相當スル故 σ, τ ハ $\beta=\frac{\pi}{2}$ ナル法線ヲ有スル平面ニ作用スル. 夫レ故上ノ假說ニ從テ起ル破損面ハ中間ノ大サノ主應力ノ方向ヲ含ム筈デアル.

斯ル極限狀態ニ對シテ作ラレタ主要圓ガ種々ノ應力狀態ニ對シテ幾ツモ引カレ之等ノ圓ヲ包ム包線ヲ引ク事ガ出來レバ此包線中ノ任意ノ點ノ座標 σ, τ ガ破損ノ標準ニナル. 而シテ主要圓ハ σ 軸上ニ中心ヲ有スル故斯ル包線ハ σ 軸ノ兩側ニ存在シテ且之ニ對シテ上下對稱デアル.

然ラバ問題ハ進ミテ斯ル包線ヲ作ルコトガ出來ルヤ否ヤ. 若シ斯ル包線ヲ作リ得レバ之コソ卽限界線ト稱スベキモノデ與ヘラレタ應力狀態ヲ示ス主要圓ガ限界線ノ圈內ニアレバ物體ハ破損ヲ起ス憂ナク其處デ初メテ本假說ノ價値ガ生ズルコトニナル. 併シ此問題ハ實驗ノ結果カラ決定スベキデアルカラ玆ニ實驗ノ結果ヲ參考スル必要ガ起ル.

上ノ目的ニ對シテ先ヅ次ノ如キ單純ナル應力ノ場合ヲ取ルコトガ出來ル. 卽

(I)	棒ガ單ニ引張ヲ受ケル場合	$\sigma_1>0,$	$\sigma_2=\sigma_3=0.$
(II)	〃 壓縮 〃	$\sigma_3<0,$	$\sigma_1=\sigma_2=0.$
(III)	〃 捩リ 〃	$\sigma_1=-\sigma_3,$	$\sigma_2=0.$

又本問題ノ研究ヲ進メテ棒ガ σ, τ ノ組合應力ヲ受ケル場合並ニ圓筒

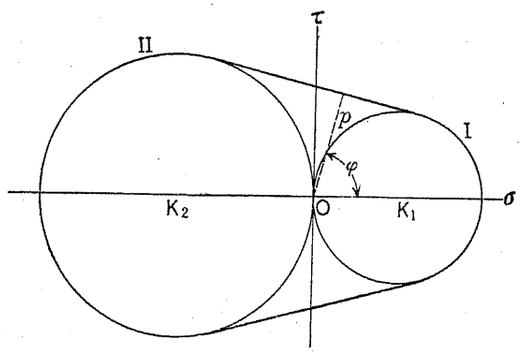
壁中ニ起ル應力ノ場合等比較的複雜ナル實驗ガ試ミラレタ. 併シ此處デハ上ノ最モ簡單ナ場合ノ結果ヲ考ヘルノガ順序デアル.

Mohrニ從ヘバ若シ或ル應力ノ狀態ガIトIIトノ間ニ在ルナラバ材料ノ限界狀態ニ於テ作ラレル之等I, II兩主要圓ヘノ切線ヲ以テ包線ト見做シ之ヲ限界線トシテ用ヰルノガ一案デアル. 斯ル限界線ノ方程式ヲ求メルタメ 130 圖ニ於テ次ノ樣ニオク.

K_1, K_2＝極限狀態ニ於ケル主要圓 I 及 II ノ直徑,

p＝原點 O ヨリ切線ヘ下セル垂線ノ長サ,

φ＝垂線ト σ 軸トノ間ノ角.



130 圖

然ル時ハ

$$\cos\varphi=\frac{K_2-K_1}{K_1+K_2},\quad \sin\varphi=\sqrt{1-\left(\frac{K_2-K_1}{K_1+K_2}\right)^2}=\frac{2\sqrt{K_1K_2}}{K_1+K_2},$$

$$p=\frac{K_1K_2}{K_1+K_2}.$$

故ニ σ 軸ノ上側ニアル切線ノ方程式ハ次ノ樣ニナル.

$$\frac{K_2-K_1}{K_1+K_2}\sigma+\frac{2\sqrt{K_1K_2}}{K_1+K_2}\tau=\frac{K_1K_2}{K_1+K_2}.$$

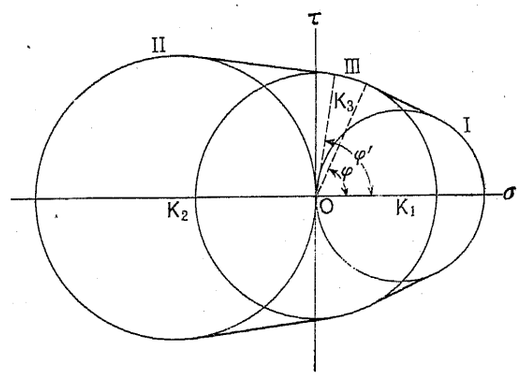
之ヲ簡單ニシ且 σ 軸ノ他ノ側ニアル對稱ノ限界線ヲモ示スタメニ τ ノ前ニ±ヲ附ケレバ

$$\pm\tau=\frac{\sqrt{K_1K_2}}{2}-\frac{K_2-K_1}{2\sqrt{K_1K_2}}\sigma \tag{2}$$

之ガ Mohr ノ假定シタ限界線ノ方程式デアル. 併シ I トIIトノ間ノ限界線ヲ只一種ノ切線ニヨリテ表セバ之リ現象以外ニ破壞現象ヲモ含メテ論ズルコトノ出來ナイ困難ヲ導ク點カラ寧ロ中間ノ應力狀態 III 卽捩リノ場合ヲ考ヘニ入レテ主要圓 I ト III トノ切線並ニIIト III トノ切線ヲ引キ之等二ツヲ取ル方ガ都合ヨイト思ハレル. 依テ先ヅ I 及 III ノ兩圓ヘノ切線ノ方程式ヲ求メル. 131 圖ニ於テ

K_3＝限界狀態ニ於ケル III ノ半徑

トスル. 然ル時ハ



131 圖

$$\cos\varphi=\frac{2K_3}{K_1}-1,\quad \sin\varphi=2\sqrt{\frac{K_3}{K_1}\left(1-\frac{K_3}{K_1}\right)}.$$

卽求メル方程式ハ

$$\left(\frac{2K_3}{K_1}-1\right)\sigma+2\sqrt{\frac{K_3}{K_1}\left(1-\frac{K_3}{K_1}\right)}\,\tau=K_3.$$

之ヲ書キ改メ且之ト對稱ナル他ノ一線ニ對スルモノヲ併セ記ス時ハ

$$\pm\tau=\frac{K_3}{2\sqrt{\frac{K_3}{K_1}\left(1-\frac{K_3}{K_1}\right)}}-\frac{\frac{2K_3}{K_1}-1}{2\sqrt{\frac{K_3}{K_1}\left(1-\frac{K_3}{K_1}\right)}}\sigma. \tag{3}$$

次ニII及 III ノ兩圓ヘノ切線ヲ引ケバ

$$\cos\varphi' = 1-\frac{2K_3}{K_2},\quad \sin\varphi' = 2\sqrt{\frac{K_3}{K_2}\left(1-\frac{K_3}{K_2}\right)}.$$

從テ

$$\pm\tau = \frac{K_3}{2\sqrt{\frac{K_3}{K_2}\left(1-\frac{K_3}{K_2}\right)}} - \frac{1-\frac{2K_3}{K_2}}{2\sqrt{\frac{K_3}{K_2}\left(1-\frac{K_3}{K_2}\right)}}\sigma. \tag{4}$$

今飜テ從來ノ實驗ノ結果ヲ調べ上ノ假說ヲ肯定スル樣ナ二三ノ場合ヲ引用スレバ先ヅ粘性ニ富ム材料ニ對シテ Bauschinger ガベセマー鋼ニ就テ行ツタ實驗結果ヲ擧ゲルコトガ出來ル. 卽 I, II, III ノ各狀態ニ於テ降伏ヲ起スベキ應力ノ限界値ヲ見ルニ略ボ

$$K_1 : K_2 : K_3 = 1:1:0.5.$$

此時ニハ上ノ限界線ガ何レモ σ 軸ニ平行ナル直線トナリ必シモ(2)ノ代リニ(3)及(4)ヲ用ヰル必要ガナイ. 而シテ I, II 兩圓ノ間ニ在ル任意ノ應力狀態ニ向テ只 τ ノ大サヲ定メレバ σ ニハ無關係ニ材料ノ運命ヲトスルコトガ出來ル. 卽假說 iv ガ其特別ノ場合トシテ假說 iii ト一致スルノデアル.

粘質材料ニ對スル實驗ノ結果ハ多ク上ノ如クデアツテ例ヘバ J. J. Guest[1] ハ鋼並ニ銅ノ圓筒形試驗片ヲ取リ引張,捩リ及內壓等ヲ二ツ宛組合セテ實驗シタ. 其結果ハ大體ニ於テ假說 iii ニ合フ. Guest 以來尙種々ノ實驗家ハ本題ヲ研究シテ略ボ同樣ノ結論ヲ導キ剪斷應力ガ材料ノ破損ヲ司ルコトヲ唱ヘテ居ル. 尤モ之ハ大體ノ話デ細ク詮議スレバ此假說ノミデナク Mohr ノ假說自身ニモ從ハヌ結果ガアル. 其事ハ尙後ニ述ベル積リデアル.

次ニ脆イ材料ニアリテハ如何カト云フニ例ヘバ鑄鐵ノ破壞試驗ノ結果ヲ見ルニ $K_2 > K_1$. 而シテ K_3 ハ到底 Mohr ノ提言シタ限界線(2)ヲ滿足スル如キ値ヲ取ラヌ. 依テ限界線ニ對シテ少クモ二樣ノ區別ヲ要シ

1) Phil. Mag., L, 1900, 69 頁. 尙 H. J. Gough 及 H. V. Pollard 兩氏論文 (248 頁脚註 Proc. Inst. Mech. Engineers) ノ討議參照.

一ツハ應力狀態ガ I ト III トノ間ニアル場合デ他ハ II ト III トノ間ニアル場合デアル. 夫レ故(2)ノ代リニ(3)及(4)ヲ用ヰル方ヨリ良イ譯デアルガ先ヅ後ノ場合ニ就テ考ヘルニ II, III 兩圓ヘ切線ヲ引クコトヲ不可能トスル場合ハナイト考ヘラレル故大體ニ於テ上ノ假說ガ成立ツ者ト言ツテ宜シイ.

夫レデハ應力狀態ガ I ト III トノ間ニアル場合ハ如何カト云フニ之ニ答ヘルタメニハ K_1, K_3 ノ兩ツガ正確ニ定メラレネバナラヌ. 殊ニ K_3 ハ試驗片斷面ノ形ニヨリテ著シク變ゼラレルコトヲ注意スベキデアツテ斯ル實例ハ例ヘバ C. Bach ノ著書ニ揭ゲラレタ鑄鐵試驗ニ見ルコトガ出來ル. 其一例ニヨレバ圓筒形ノ試片ヲ捩リタル場合ノ捩リノ强サハ引張ノ强サノ 0.82 ニ相當スルモ圓柱體ニアリテハ其比ガ 1.02 トナツテ居ル.[1] 此相違ノ起ル一ツノ原因ハ捩リ應力ノ計算ニ用ヰタ式ガ正比例ノ限界內ニ於テノミ正シイニ拘ラズ鑄鐵ハ此規則ニ從ハヌ. 殊ニ其限界狀態ニ於テハ到底此假定ヲ許サヌ故斯ル計算ノ結果タル應力ガ眞ノ應力ニアラザル爲デアル. 故ニ限界狀態ニ於ケル應力ヲ正シク計算スルコトガ必要デアル(37 節參照).

若シ上ノ圓筒形試驗片ノ樣ニ $\frac{K_3}{K_1}<1$ トナル時ハ I 及 III ノ兩圓ヘ切線ヲ引クコトガ出來テ之ヲ限界線ト見做シテ宜シイ. 又著者ガ行ツタ鑄鐵ノ組合應力試驗ニ於テハ $\frac{K_3}{K_1}$ ガ 1 ヨリ大トナル傾ヲ示シタルモ近似的ニ之ヲ 1 ト見レバ切線ガ只 σ 軸上ノ一點ニ歸シ卽最大應力ガ標準トナルノデアル.[2]

上ニ述ベタコトカラ知ルコトハ破損ノ定義ガ一樣デナイ樣ニ破損ノ規則モ亦簡單デナイ事柄デアル. 併シ總括スレバ粘質材料ガ流レ出スノハ辷リノタメナル故大體ニ於テ剪斷應力ノ假說ガ正シイ. 次ニ脆イ材料ノ破壞現象ハ更ニ之ヲ二樣ニ區別スルコトガ出來ル. 一ツハ材料

1) C. Bach, Elastizität und Festigkeit, 6 版, 1911, 324 頁; 9 版 (Baumann 共著), 367 頁.
2) 九州帝國大學工科大學紀要, I, 3, 1917, 195 頁.

ノ破面ヲ境トスル兩部ガ引キ離サレル破壞デ例ヘバ鑄鐵ヲ引張ル場合ニ見ル現象デアル. 又他ノ一ツハ材料ガ辷リノ爲メニ生ズル破壞デ鑄鐵ヲ壓縮シタ場合ニ起ル事柄デアル. 而シテ引張ニ際シテ辷リノ起ラヌハ辷リニ對スル抵抗ガ引キ離シニ對スル抵抗ヨリモ大ナルタメデアルト說明スルコトガ出來ル. 從テ破壞ガ材料ノ開離ニヨルナラバ最大應力ノ假說ガ眞ニ近ク又辷リノタメナラバ剪斷應力ガ主ナル原因トナル筈デアル. 併シ破損ガ必シモ之等二ツノ假說ニヨリテ完全ニ表サレヌ故破損ノ法則ヲ研究スルタメニハ之等ノ兩假說ヲ含ム假說 iv ヲ取ルヲ一層可トスル所以デアル. 現ニ鑄鐵ノ破壞ニ於テ最大壓縮應力ガ最大捩リ應力ノ 3—4 倍又ハ夫レ以上ニ達スル事柄ハ言フ迄モナク剪斷應力ノ假說ニヨリテ說明シ得ザル點ノ一ツデアル.

以上述ベタ所デハ未ダ最大ノ伸ビヲ基礎トスル假說 ii ノ適否ガ不明デアル. 此假說ハ i 及 iii ノ中間ニ位シテ一見穩當ナ結果ヲ與ヘル場合ガアルケレドモ(109 節參照)タトヘバ次ノ實驗ハ此假說ガ適當デナイ事ヲ示ス者ト見做サレテ居ル. 卽 A. Föppl[1] ハセメント,石等ノ立方體試驗片ヲトリ其相對スル二面ヲ殘シテ他ノ四面ヲ何レモ壓縮シテ破壞ニ至ラシメ

$$\sigma_1 = 0, \qquad \sigma_2 = \sigma_3 < 0$$

ナル狀態ノ下ニ得タ成績ヲ普通ノ壓縮試驗 ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0,\ \sigma_3 < 0$) ノ場合ト比較シテ之等兩試驗ニ於ケル最大應力ガ大差ナキコトヲ確メタ. 此結果ハ三ツノ主應力ノ中間ノモノ(只今ノ σ_2)ガ材料ノ破損ニ効力ノナイ事ヲ示スモノデアル. 卽三ツノ主應力ニ關係スル最大ノ伸ビヲ標準トスル假說ハ破壞ノ場合ニ當テ嵌ラヌ. 次ニ P. W. Bridgman ニ依レバ高イ水壓 ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) ニヨリテ材料ガ降伏セザル事ヲ知ル故[2] 降伏ノ場合ニモ伸ビヲ標準トスル事ハ出來ナイ.

1) Mitteilungen aus dem mech.-techn. Laboratorium d. T. H., München, XXVII, 1900.
2) Verhandlungen des 2. Internationalen Kongresses für Technische Mechanik, Zürich 1926, 53 頁.

破壞ニ對シテハ中間ノ主應力ガ殆ンド影響ヲ與ヘザル例ヲ擧ゲタ. 併シ降伏現象ニ對シテハ中間ノ主應力ノ影響ガ唱ヘラレテ居ル. 從テ擴張サレタ Mohr ノ假說モ破損ノ標準トシテ常ニ充分正確デアルトハ言ヘナイガ兎ニ角實際上屢々用ヰラレル最大應力ノ假說又ハ最大剪斷應力ノ假說ヲ特別ノ場合トシテ含ム點ニ於テ一般性ヲモツト言ヘル.

尙玆ニ述ベタ假說ハ何レモ材料中ノ一點ニ於テ生ズル破損ノ標準デアツテモシ材料ガ一樣ノ應力狀態ニアレバ此標準ニ依リテ全體ノ破損ヲ引起スデアラウ. 併シモシ應力ガ一樣デナイ時ハ之ニヨリテ必シモ全體ノ破損ヲ生ジナイ. 只此時モ局部的ノ降伏ハ單純ナル應力ノ實驗ヨリ見テ一樣ナル應力ノ時ト格別標準ノ區別ヲ要シナイ樣デアル.

106. 破損面ノ位置.

材料破損ニ關スル研究ノ一法トシテ流レ出シタ材料ノ表面ニ顯レル模樣ニヨリ又ハ破壞シタ材料ノ破面ニヨリテ如何ナル應力ガ破損ニ與リシカヲ推定スルハ興味アル事柄デアル. 今 XIV 章 86 節ニ述ベタ所ニヨレバ主要圓上ノ一點 (σ, τ) ニ相當スル平面ヘノ法線ガ x 軸トナス角ノ餘弦ノ二乘ハ

$$\cos^2\alpha = \alpha = \frac{\sigma - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}.$$

而シテ α ハ結局 (σ, τ) ナル點ヲ主要圓ノ中心ト結ビテ之ガ σ 軸トナス角ノ二分ノ一ニ等シイコトガ證明サレテ居ル. 故ニ破損ガ主要圓ノ限界線ニ接スル點ノ應力ニヨリテ引起サレルモノトスレバ其破損面ノ位置ハ直ニ定マル. 尙今少シ詳シク考ヘルニ主要圓上ノ各點ハ何レモ中間ノ主要應力 σ_2 ヲ含ム平面ニ對スルモノデアルカラ其位置ヲ定メル爲ニ必シモ法線ヲ用ヰズシテ平面自身ガ σ_1 及 σ_3 ノ方向トナス角ヲ用ヰル事ガ出來ル. 此表シ方ニ從ヘバ平面ト σ_3 トノ間ノ角ガ上ノ α ニ等シク又 σ_1 トノ間ノ角ハ $\frac{\pi}{2} - \alpha$ トナル.

偖前節ニ假定シタ樣ニ各主要圓ニ切スベキ限界線ヲ直線ト見做ス時ハ其直線ノ有効ナル範圍ニ於テ α ハ常數デアルカラ破面ガ主要應力ニ對シテ一定ノ位置ヲ保ツベキ筈デアル. 例ヘバ(3)ヲ以テ限界線ト見做セバ

$$\cos\varphi = \frac{2K_3}{K_1} - 1.$$

粘質材料ニ於テ $2K_3 = \sim K_1$ ナラバ $\cos\varphi = 0$ 卽 $\varphi = 90.^\circ$ 從テ α ハ 45° トナル. 又脆イ材料ニ於テ $K_3 = \sim K_1$ ナラバ $\cos\varphi = 1$ 卽 $\varphi = 0$. 從テ α モ 0 デアル.

軟鋼ノ試驗片ヲ引ク時其研磨面上ニ生ズル材料ノ流レヲ示ス線ヲ見ルニ α ガ 45° ニ近ク上ノ結果ト稍似タ有樣ヲ示ス. 併シ精密ニ言ヘバ α ハ一般ニ 45° ヨリ多少小デアル. 卽力ノ方向ニ對スル辷リ面ノ傾斜ハ 45° ヨリ大デアル. 之ハ軟鋼ノ場合ニ於テモ剪斷應力ノ假說ガ全ク眞デハナイコトヲ示スモノデ實際 $2K_3$ ハ K_1 ヨリ多少大デアル.

鑄鐵ノ試驗片ヲ引ク場合ニアリテモ斯ル模樣ヲ呈スルコトガアルケレドモ其有樣ハ前ト違ツテ居ル. 又破壞面ハ普通試驗片ノ横斷面ト一致スル故 α ガ零ニ相當スル. 尙斯ル變形性ニ乏シイ材料ヲ壓シテ破壞セシメル時ニ起ル破面ノ位置ハ辷リノタメニ破壞ガ起ルコトヲ示スモノデアル.[1] 之ハ鑄鐵,セメント等ノ壓縮試驗ニ見ルコトガ出來ル現象デアルガ此時ニモ剪斷應力ノ最大ナル 45° ノ面ニ沿ヒテ辷リガ起ラズシテ之ヨリモ勾配ガ多少急デアル. 卽辷リニヨル破壞モ純粹ニ剪斷應力ノミニ起因スルモノデナイ事ガ判ル. 鑄鐵ノ壓縮試驗片ニ於テ屢々縱ト横トヲ同ジ寸法ニスルケレドモ 45° ヨリ急ナル辷リノ傾斜面ハ試驗片兩端ノ壓縮面ヲ過ギテ自由ナル辷リヲ妨ゲルモノデアル.

普通ノ試驗方法デハ大ナル變形ヲ起サズシテ破壞サレル材料モ其周圍ニ高イ壓力ヲ加ヘル時ハ能ク變形ニ堪ヘル事ハ注意ス可キ現象デアル. Kármán[1] ハ大理石及砂岩ノ試驗片ヲトリ之ヲ薄イ眞鍮板ニテ被ヒタル後試驗片ノ周圍ニ液壓ヲ加ヘ別ニ軸ノ方向ニ壓力ヲ與ヘテ $\sigma_3 < \sigma_2 = \sigma_1 \leqq 0$ ナル應力狀態ヲ作リテ材料ノ流レヲ觀測シテ其結果ヨリ應力圖ヲ作リタルニ σ ノ負軸ニ於テハ美事ニ Mohr ノ限界線ヲ引キウルコトヲ確メ得タノミナラズ試驗片ノ表面ニ辷リヲ露ス美シイ線ガ生ジタノハ面白イ事ト言ツテヨイ.

1) 著者「鑄物ノ强サ」84 頁.

107. 材料內部ニ起ル破損現象.

材料ノ構造ガ如何ナルモノデアルカニハ頓着ナシニ破損ノ法則ヲ見出スタメニ先ヅ 105 節ニ於テ Mohr ノ應力圖ヲ用ヰテ限界線ヲ作リタル結果最大ノ垂直應力ニヨリテ材料ノ引裂カレル場合ト最大ノ剪斷應力ノタメニ辷リ出ス場合トガ破損ノ代表ト見ラレルコトヲ述ベ次ニ前節ニ於テハ材料破損面ノ模樣ヲ論ジテ大體ニ於テ斯ル二種ノ壞レ方ガアル事ヲ示シタ. 降伏點以上ノ變形並ニ破壞ニ伴フ結晶粒子ノ狀態變化ヲ顯微鏡的ニ觀察スル事ガ屢々行ハレテ居ル. 斯ル實驗ニ依レバ粘質金屬ニ於テ起ル流レノ現象ハ曾テ 8 節ニモ述ベタ樣ニ結晶粒子內ニ生ズル辷リニ歸スベキモノデアツテ能ク研磨シタ金屬ノ表面ヲ見ナガラ之ヲ引張レバ粒子面上ニ發生スル辷リノ線ヲ認メルコトガ出來ル.

辷リノ破損ニ對スル他ノ破損卽破壞ハ粒子內ニ起ルモノト粒子間ニ起ルモノトノ二種ニ區別サレル. 而シテ後者ハ粒子結合ノ弱イ物質又ハ結合ノ弱クナツタ場合ニ起ル.

多クノ工業用金屬材料ハ純粹ナル物質デナクシテ幾種カノ物質ノ集合シテ形成スルモノデアルカラ斯ル材料內部ノ破損ハ簡單デナイ. 例ヘバ鑄鐵ガ引張應力ノタメニ生ズル裂傷ヲ見ルニ鑄鐵ノ種類ニ依テ甚趣ヲ異ニスル點ガアル. 今小ナル鑄鐵試驗片ヲ顯微鏡下ニ曲ゲテ遂ニ破壞ニ至ラシメル時ハ裂傷ガ主トシテ引張應力ノ方向ニ直角ヲナス黑

1) Zeitschrift des V. D. I., 1911, 1749 頁又ハ Mitteilungen über Forschungsarbeiten, 118, 1912

鉛脈ノ尖端ヨリ起ルノヲ見ル事ガ出來ル. 殊ニ場面中ノ硬クシテ脆イ部分ナルセメンタイトハ龜裂ヲ生ジ易イ故黑鉛脈ニ發スル裂傷ガセメンタイトヲ貫通シ荷重ト共ニパーライト中ヲ進行シテ遂ニ全組織ヲ破壞スルニ至ルノデアル. 此時場面ノ材質ガ硬ケレバ黑鉛及セメンタイトノ裂傷ヲ連絡スルパーライト中ノ溝ガ大ナル變形ヲ伴ハザルニ反シテ材質ガ軟イ時ハパーライト及フアーライト中ニ辷リヲ生ジ場面ノ變形ヲ起スノデアル. 鑄鐵ノ粘リ氣ノ多少ハ斯ル性質ノ差異ニ依リテ說明サレル.

108. 變形勢力ノ假說.

變形勢力ガ破損殊ニ降伏現象ノ標準ニ取ラレル事ハ前ニ述ベタ. 物體ノ單位容積ガ破損ナシニ吸收シ得ル變形勢力ニハ自ヲ限度ガアリ此限度ニ達スレバ降伏ガ起ルト見做ス. XVII 章ノ記號ヲ用ヰレバ單位容積ニ對スル變形勢力ノ密度ハ $\frac{dA}{dv}$ ニ等シイ故破損ノ限界狀態ニ於テハ此値ガ材料ノ性質ニ依リテ定マル常數ニ等シイ. 卽

$$\frac{dA}{dv}=\text{const.}$$

今主應力ヲ以テ A ヲ表セバ剪斷應力ノ項ハ消エル故此式ハ次ノ樣ニ書ケル.

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\frac{2}{m}(\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1+\sigma_1\sigma_2)=\text{const.} \tag{5}$$

此假說ニ從ヘバ $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ ニテ表サレル應力狀態ニ於テ應力ヲ相當ニ高メレバ限界狀態ニ達スル譯デアルガ前ニ紹介シタ Bridgman ノ水壓試驗ニ依レバ斯ル應力狀態ニテハ降伏ヲ起サザル故此點ニ於テ實際ニ適合セザル缺點ガアル. 然ルニ與ヘラレタ應力成分ヲ二組ニ分ケテ水壓ニ等シイ應力 $p, p, p\left(p=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}\right)$ ト之ヲ引キ去リタル殘リノ應力 $(\sigma_1-p), (\sigma_2-p), (\sigma_3-p)$ トニスレバ全變形勢力ハ之等二組ニ對スル變形勢力ノ和ニ等シキ事ガ證明サレル. 而シテ第一ノ水壓應力ニ對スル變形

勢力ヲ省イテ第二ノモノノミニ就テ限界狀態ヲ定メル. 斯樣ニスレバ第一ノ應力成分ニヨリテ與ヘラレタ應力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ト同ジ大サノ容積變化ヲ生ズルモ第二ノ應力成分ニヨリテハ少シモ容積變化ヲ生ジナイ. 何トナレバ $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3-3p=0$ トナリテ容積變化ノ割合ヲ示ス e ノ値ガ零トナル故デアル. 卽第二ノ應力成分ハ單ニ物體ノ形ヲ變ズルニ止ル. 依テ此應力成分ノミニ就テ單位容積ニ對スル變形勢力ヲ計算スレバ次ノ樣デアル.

$$\frac{1}{2E}\left[(\sigma_1-p)^2+(\sigma_2-p)^2+(\sigma_3-p)^2-\frac{2}{m}\Big((\sigma_2-p)(\sigma_3-p)+(\sigma_3-p)(\sigma_1-p)+(\sigma_1-p)(\sigma_2-p)\Big)\right]$$

$$=\frac{1}{3E}\left(1+\frac{1}{m}\right)\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_3\sigma_1\right]$$

$$=\frac{1}{6E}\left(1+\frac{1}{m}\right)\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right].$$

故ニタトヘバ引張リノ降伏點ヲ取リテ $\sigma_1=K_1$, $\sigma_2=\sigma_3=0$ トスレバ

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2=2K_1^2. \tag{6}$$

之ハ 105 節ニ示シタ(1)式ト同ジ事ヲ示ス.[1]

近來行ハレタ組合應力ノ實驗ニ依レバ中間ノ主應力ガ破損ニ影響ヲ有シ上ノ假說ガ Mohr ノ假說ヨリモ一層ヨク實驗ノ結果ニ適合スル樣デアル.[2][3] 併シ此假說モ決シテ完全デハナイ. 元來破損ハ前ニ述ベタ樣ニ或ル方向ノ面ニ起ル. 然ルニ變形勢力ハ方向ニ無關係デ此方向性ヲ說明スル事ガ出來ナイ. 只破損ノ假說ハ或ル程度正確デアリ又計算ガ簡單ニ出來レバ夫レヲ實用ニ供スル事ハ敢テ差支ナイ.

尙(5)式ヲ不變トスル代リニ之ヲ p ニヨリテ變ル或ル數量ニ等シト見做ス假說ガ F. Schleicher[4] ニヨリテ提言サレタ. 又剪斷應力ノ假說ニ(6)

1) H. Hencky, Proc. of the 1st. International Congress for Applied Mechanics, Delft, 1924, 312 頁.
2) W. Lode, Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 303, 1928.
3) M. Ros & A. Eichinger, Verhandlungen d. 2. Internationalen Kongresses f. Technische Mechanik, Zürich, 1926, 315 頁.
4) F. Schleicher, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 6, 1926, 199 頁.

式ノ變形勢力ヲ加味シタ假說ガ之等ノ何レヨリモ一層ヨク實驗ノ結果ニ合フ事ガ松村鶴藏博士ニヨリテ報告サレタ.[1] 併シ之等ノ詳細ハ凡テ文獻ニ讓ル.

109. 垂直及剪斷ノ組合應力.

前ニ眞直ナル棒ガ標題ノ如キ組合應力ヲ受ケル場合ニ生ズル主應力並ニ伸ビヲ計算シテオイタガ(VI章42節, XIV章85節)斯ル場合ニ於ケル棒ノ强サヲ論ズルタメニ先ヅ Mohr ノ假說ヲ應用シヤウ. 横斷面ニ働ク垂直應力ヲσ_xトシ剪斷應力ヲτトスレバ兩極端ノ主應力ハ次ノ式ニヨリテ與ヘラレル.

$$\sigma_1=\frac{\sigma_x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2+4\tau^2},$$

$$\sigma_3=\frac{\sigma_x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2+4\tau^2}.$$

從テ斯ル應力狀態ヲ示ス主要圓ノ中心ハ原點ヨリ $\frac{\sigma_x}{2}$ ナル距離ニアリテ又其半徑ハ $\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2+4\tau^2}$ デアル. 故ニσ_xガ正ナルカ又ハ負ナルカニ從テ主要圓ガ I ト III トノ間又ハ II ト III トノ間ニアル事ガ明カデアル. 今前ノ場合ノミヲ考ヘ卽 $\sigma_x>0$ ト假定シヤウ. 何トナレバ此場合ニ安全ナラバ限界線ノ形カラ考ヘテ正ノσ_xト等大ノ負値ニ對スル安全ノ條件ハ當然滿足サレル筈デアルカラ. 依テ限界線トシテ(3)ヲ用ヰ上ノ主要圓ガ限界線ヲ突破シナイ條件ヲ書ケバ

$$K_3-\left(\frac{2K_3}{K_1}-1\right)\frac{\sigma_x}{2}\geqq\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2+4\tau^2}.$$

又ハ書キ換ヘテ

$$\left.\begin{aligned}K_3&\geqq\left(\frac{2K_3}{K_1}-1\right)\frac{\sigma_x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2+4\tau^2},\\ K_1&\geqq\left(1-\frac{K_1}{2K_3}\right)\sigma_x+\frac{K_1}{2K_3}\sqrt{\sigma_x^2+4\tau^2}.\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

1) 機械學會誌, 33, 1930, 181 頁.

特別ノ場合トシテモシ $K_1=K_3$ トオケバ

$$K_1\geqq\frac{\sigma_x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2+4\tau^2}.\qquad(8)$$

之ハ最大應力ノ假說ヨリ來ル條件デ鑄鐵ノ如キ伸ビノ少イ材料ガ破壞スル時ニ略ボ當テ嵌ル式デアル.

次ニ又 $K_1=2K_3$ トオケバ

$$K_3\geqq\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2+4\tau^2},$$

$$K_1\geqq\quad\sqrt{\sigma_x^2+4\tau^2}.\qquad(9)$$

之ハ剪斷應力ノ假說ヨリ來ル條件デ軟鋼ノ如キ伸ビ易イ材料ノ降伏スル時ニ當テ嵌ルモノト見テ大差ナイ.

最後ニ $\frac{K_1}{K_3}=\frac{m+1}{m}$ トオケバ

$$K_1\geqq\frac{m-1}{2m}\sigma_x+\frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma_x^2+4\tau^2}.\qquad(10)$$

之ハ最大ノ伸ビノ假說ヨリ來ル條件ト同一デアル.

上ニ述ベタ事柄ハ何レモ材料ガ靜カナ力ヲ受ケル場合ノ結果ニ基イテ導カレタモノデアツテ力ガ其作用ヲ反覆スル場合ノ强サニ就テハ實驗ノ結果甚寂寥ノ感ガアル. 從テ應力ガ繰返シ作用スル時ニ材料ノ破損ガ如何ナル法則ニ支配セラレルカヲ充分ニ述ベルコトハ只今デハ困難デアル. 例ヘバ曲ゲ及捩リヲ受ケル軸ハ絕エズ變化ヲ反覆スル應力ノ作用ヲ受ケルカラ斯ル物體ニ(7)ヲ直ニ應用スルコトハ出來ヌ. 併シ設計上强テ上ノ式ヲ用ヰルナラバ左側Kノ代リニ少クモ或ル大ナル繰返數ニ堪ヘルベキ應力ノ限界値以下ノ適當ナル數値ヲ入レ且又σ及τノ繰返ノ範圍ガ相違スルタメ兩應力ノ許容限度ノ比ガ $\frac{K_1}{K_3}$ ニ等シカラザル點ニ備ヘルタメ補正係數αヲ入レテ次ノ樣ニ記スコトガ出來ル.

$$k_1\geqq\left(1-\frac{K_1}{2K_3}\right)\sigma+\frac{K_1}{2K_3}\sqrt{\sigma^2+4(\alpha\tau)^2},\qquad(11)$$

但

$$\alpha=\frac{k_1}{\frac{K_1}{K_3}\times k_3}\quad (k_3=\tau\ \text{ノ許容限度}).$$

何トナレバ $\tau=0$ ナル特別ノ場合ニ上ノ式ガ $k_1\geqq\sigma$ トナル計リデナク又 $\sigma=0$ ナル特別ノ場合ニ於テ $k_3\geqq\tau$ トナリテ之等兩極端ノ場合ニ對スル安全ノ條件ニ適スル故デアル.

次ニ變形勢力ノ假說ヲ σ_x 及 τ ノ組合應力ノ問題ニ應用シヤウ. 然ル時ハ容易ニ下ノ式ヲ導ク事ガ出來ル.

$$K_1\geqq\sqrt{\sigma_x^2+3\tau^2}. \tag{12}$$

之ヲタトヘバ剪斷應力ノ假說ヨリ導カレル(9)式ト比較スル爲 $\sigma_x=0$ トオケバ靜止ノ限界狀態ニ於テ後ノ式ヨリ $\tau=0.5K_1$ トナル. 之ニ對シテ(12)ヨリハ $\tau=\frac{K_1}{\sqrt{3}}=0.58K_1$ トナル. 尙(12)ヨリ繰返應力ノ場合ノ設計ニ用ヰル式ヲ導ケバ前ニ述ベタ樣ナ方法ニヨリテ次ノ式ガ書ケル.

$$k_1\geqq\sqrt{\sigma_x^2+3(\alpha\tau)^2},\quad \alpha=\frac{k_1}{\sqrt{3}\,k_3}. \tag{13}$$

材料破損ノ法則ニ關スル吾々ノ知識ヲ繰返組合應力ノ場合ニ擴張スル事ハ容易ナ問題デナイ丈ケニ此方面ノ研究ハ餘リ進ンデ居ラヌ. 併シ之迄發表サレタ論文ノ二三ヲ擧ゲレバ先ヅ計算方面デハ P. Roth,[1] R. W. Bailey[2] 等ノ研究ガアリ又實驗方面デハ L. B. Turner,[3] W. Mason[4] ノ著ガ參考ニ資スベキ外 T. E. Stanton 及 R. G. Batson[5] ノ業蹟ガアル. 又著者[6] ハ77節ニ述ベタ樣ニ廻轉スル試驗片ノ或ル一定ノ長サノ間一樣ナル曲ゲモーメントヲ加ヘル樣ニ設計サレタ繰返曲ゲ試驗機ヲ用ヰテ等大ノ正負兩限値ノ間ニ變化スル曲ゲ應力及靜ナ振リ應力ヲ受ケル鋼ニ就テ實驗ヲ試ミ或ル程度迄ハ斯ル振リノ聯立作用ガ强サニ影響ヲ及

1) Paul Roth, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 48. Band, 1903, 285 頁.
2) R. W. Bailey, Engineering, CIV 1917, 81 頁.
3) 248 頁脚註論文, 247 頁. 垂直應力及剪斷應力ヲ夫レ夫レ繰返セバ其結果カラ破損ノ法則ニ關スル資料ヲ蒐メルコトガ出來ル. 此點カラ見テ此論文並ニ次ノ4)ガ只今ノ問題ニ參考トナル.
4) 248 頁脚註論文, 211 頁.
5) 6) 248 頁參照.

ボサナイカ或ハ寧ロ材料ノ壽命ヲ長クスル事ヲ經驗シタ. 此結果ハ F. C. Lea[1] ノ同樣ナル實驗ニヨリテ確メラレタ. 夫レ故振リガ週期的ニ變化シナイ廻轉軸ノ設計ニ於テ若シ相當ニ大ナル曲ゲ作用アレバ之ヲ考ヘルコトガ材料ノ壽命ヲ保ツ上ニ於テ極必要ナル事トナル.

成ルベク一樣ナル應力狀態ヲ目標トシテ薄肉圓筒ノ試驗片ヲ用ヰ之ニ引張壓縮及振リヲ組合セテ作用セシメル樣設計シタ試驗機ガ作ラレタ. 而シテ靜止ノ引張及繰返振リヲ作用セシメタ時ノ實驗結果ガ報告サレテ居ル(ゲツチンゲン).[2]

最近繰返曲ゲト繰返振リトノ組合應力ヲ以テ行ツタ實驗ガ英國 N.P.L. ノ H. J. Gough 及 H. V. Pollard[3] ニヨリテ報告サレタ.

例題. 一分間ノ廻轉數 250 デ15馬力ヲ傳ヘルベキ鋼製ノ軸ニ作用スル曲ゲモーメントガ9000 *kgcm* ナリト假定スレバ軸ノ太サ幾何ナルヲ要スルカ. 但垂直應力及剪斷應力ノ許容限度ヲ 400 *kg/cm*² ニ取リ剪斷應力ノ假說ニ從テ計算スルコト.

先ヅ振リモーメントノ値ヲ知ルヲ要スル故

$$75\times15=\frac{M_t}{100}\,\frac{\pi250}{30}$$

ヨリ M_t ヲ求メレバ

$$M_t=\sim4300\,kgcm.$$

次ニ假定ニヨリテ $\frac{K_1}{K_3}=2$ ナル故(11)ニ於テ

$$\alpha=\frac{400}{2\times400}=\frac{1}{2}.$$

從テ

$$d^3\geqq\frac{32}{400\pi}\sqrt{9000^2+\frac{1}{4}4300^2}=\sim236,$$

1) 3) 248 頁脚註.
2) E. Lehr u. W. Prager, Forschung, 4, 1933, 209 頁. K. Hohenemser u. W. Prager, Metallwirtschaft, 12, 1933, 342 頁.

$$d \geqq 6.2\,cm.$$

軸ガ楔道ニテ弱メラレル故之ヨリ直徑ヲ多少大ニ定メルヲ可トスル.
此問題ニ於テ若シV章ノ例題1ニ示セル計算式ヲ用ヰルナラバ

$$d = 14.42\sqrt[3]{\frac{15}{250}} = 5.7\,cm.$$

即上ノ計算ノ結果ヨリ小デアル.

又動力ガKWニテ與ヘラレル時ノ計算モ同樣ニシテ行ハレル故改メテ玆ニ例ヲ示ス迄モナイデアラウ.