XVII. 變形ノ仕事.

95. 變形ノ仕事.

彈性體ノ中ニ稜ノ長サ dx, dy, dz ニ等シキ直角六面體ヲ考ヘル事曾テ力ノ平衡ヲ論ジタ場合ト同樣トシ最初ノ或ル狀態ヨリ變形ヲ起シテ與ヘラレタ應力狀態ニ達スル時ハ六面體ノ表面ニ働ク力ハ之ガタメニ彈性移動ヲ伴ヒテ仕事ヲナシ此仕事ハ六面體ノ變形ノ勢力トシテ蓄ヘラレル.

最モ簡單ナ場合ノ一ツトシテ棒ヲ引張ル際變形ニ要セラレル仕事ヲ計算スルコトハ已ニ述ベタ通リデアル. 卽荷ガ大ニ過ギズシテ材料ガ完全ニ彈性的デアルト假定シウル範圍ニ於テ σ 及 ε ガ直線的ノ關係デ結ビ付ケラレルナラバ單位容積ニ對スル仕事ハ

$$\int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon .$$

偖只今論ジツツアル一般ノ直角六面體ノ場合ニハ其表面ニ働ク應力ガ垂直及剪斷ノ二種アル故之等ニ對シテ一々仕事ヲ計算ス可キデアル. 先ヅ例ヘバ x 軸ニ直角ノ平面ニ作用スル力 $\sigma_x dy dz$ ニ對シテ起ル長サ dx ノ變化ハ $\varepsilon_x dx$ デアルカラ此變形ヲナス迄ニナサレル仕事ハ $dv \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x$ トナル. 但 $dv = dx\, dy\, dz$. 次ニ y 軸ニ直角ノ平面ニ於テ z 軸ニ平行ニ働ク力 $\tau_{yz} dx\, dz$ ニ就テ考ヘテモ又ハ z 軸ニ直角ノ平面ニ於テ y 軸ニ平行ニ働ク力 $\tau_{zy} dx\, dy$ ニ就テ見ルモ同樣ニ仕事ハ $dv \int_0^{\gamma_x} \tau_x d\gamma_x$ デアル. 從テ考ヘツツアル六面體ニ作用スル應力ニヨル變形ノ仕事ノ全量ハ次ノ式ノ通リデアル.

$$dA = dv \int (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_x d\gamma_x + \tau_y d\gamma_y + \tau_z d\gamma_z). \qquad (1)$$

積分ノ範圍ハ變形ガ零ヨリ $\varepsilon_x, \cdots, \gamma_x \cdots$ ニ至ル迄ヲトル. 而シテ左邊ノ dA ハ小六面體ノ微容積 dv ニ對スル仕事ヲ示スモノデ上式ヲ物體ノ總

容積ニ積分シタ者ヲ A トシヤウ.

若シ物體ガ各部各方向ニ等質デアツテ且正比例ノ法則ニ從フモノトスレバ伸ビ及辷リト之ニ伴フ應力トノ間ニXVI章ニ述ベタ關係ガアル. 即

$$\sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{e}{m-2}\right), \cdots$$

$$\tau_x = G\gamma_x, \cdots$$

等ノ應力ヲ上ノ(1)式ノ中ニ代入シ $d\varepsilon_x + d\varepsilon_y + d\varepsilon_z = de$ ト書キ換ヘル時ハ積分式ハ次ノ樣ニナル.

$$2G\int\left(\varepsilon_x d\varepsilon_x + \varepsilon_y d\varepsilon_y + \varepsilon_z d\varepsilon_z + \frac{e}{m-2}de\right) + G\int(\gamma_x d\gamma_x + \gamma_y d\gamma_y + \gamma_z d\gamma_z)$$

$$= G\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{e^2}{m-2} + \frac{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2}{2}\right).$$

故ニ物體ノ全容積ニ對スル變形ノ仕事 A ハ次ノ形ニ表サレル.

$$A = G\int\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{e^2}{m-2} + \frac{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2}{2}\right)dv. \tag{2}$$

A ノ式ニ於ケル伸ビ及辷リノ代リニ應力ヲ用ヰルタメニハ

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\right), \cdots$$

$$\gamma_x = \frac{\tau_x}{G}, \cdots$$

等ノ關係ニヨリテ(1)ヨリ容易ニ次ノ結果ヲ導クコトガ出來ル.

$$A = \frac{1}{2E}\int\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{2}{m}(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y)\right)dv$$

$$+ \frac{1}{2G}\int(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)\,dv. \tag{3}$$

更ニ若シ(2)ニ於テ $\varepsilon_x^2, \cdots$ ノ代リニ夫レ夫レ $\frac{\varepsilon_x}{E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\right), \cdots$ ト書キ且 $e^2 = \frac{m-2}{m}\frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E}$ ト書キ直セバ

$$\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{e^2}{m-2} = \frac{\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z}{E}\,\frac{m+1}{m}$$

$$= \frac{\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z}{2G}.$$

此外尙 $\gamma_x^2, \cdots$ ノ代リニ $\frac{\tau_x\gamma_x}{G}, \cdots$ ト書ク時ハ(2)ハ次ノ形ニナル.

$$A = \frac{1}{2}\int(\sigma_x\varepsilon + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_x\gamma_x + \tau_y\gamma_y + \tau_z\gamma_z)\,d. \tag{4}$$

簡單ナ場合ノ一例トシテ眞直ナル棒ノ曲ゲノ場合ニ於ケル仕事ヲ計算シヤウ. 棒ノ軸ヲ x 軸トシ σ_x ノ代リニ略シテ σ ト書ケバ(3)ニヨリテ

$$A = \frac{1}{2E}\int\sigma^2 dv.$$

但横斷面ニ垂直ナル應力ノ外剪斷應力ヲ伴フノガ一般デアルカラ A 式中尙 τ ノ項ヲ書キ加ヘナケレバ正確デナイ. 併シ彎曲彈性ノ計算ガ屢々剪斷應力ヲ省略シテ行ハレル故茲ニモ近似法トシテ此項ヲ省イタ譯デアル. 尙梁ノ撓ミニ對スル剪力ノ影響ニ就テハ本章ノ終リノ例題1ヲ參照シテ頂キタイ.

偖棒ニ作用スル外力ノ平面ガ丁度斷面ノ一ツノ主軸ヲ含ム場合ニハ

$$\sigma = \frac{M\eta}{I}.$$

之ヲ上ノ式ニ入レ且 $dv = df\,dx$ ト書ケバ

$$A = \frac{1}{2E}\int\frac{M^2}{I^2}\int\eta^2 df\,dx$$

$$= \frac{1}{2E}\int\frac{M^2}{I}dx = \frac{E}{2}\int I\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx. \tag{5}$$

此積分ハ棒ノ全長ニ及ブ.

96. 假想移動ノ原理. 外力ノ仕事.

曾テ緒論中ニ於テ一般物體ニ對スル假想移動ノ仕事ヲ考ヘテ次ノ式ヲ導イタ.

$$\Sigma\mathfrak{P}\,\delta\mathfrak{s} + \Sigma\mathfrak{J}\,\delta\mathfrak{s} = 0.$$

本節ニ於テハ此原理ヲ彈性體ニ適用シ先ヅ第二項內力ノ仕事ヲ應力及之ニ伴フ變形ヲ以テ表サントスルノデアル.

先ヅ平衡狀態ニアル物體中ノ小六面體ニ對シテ上ノ式ヲ適用スレバ應力ノ力ガ外力トナル故任意ノ可能ナル小移動ニヨリテ小六面體內部ノ力ノナス仕事ハ應力ノ仕事ト絕對値ヲ等シクシ符號ハ正反對デアル. 此事ヲ尙精シク考ヘルニ容積ニ作用スル力ヲ外力トシテ計算ニ入レル必要ハナイカト云フ疑問ガ起ル. 之ヲ明カニスルタメ小六面體ノ彈性移動ノ成分ノ一ツヲ u トシテ x 軸ノ方向ニ於ケル表面ノ力ノナス仕事ヲ計算スレバ $dv=dx\,dy\,dz$ トシ又一段下ノ微小ナル量ヲ省イテ次ノ樣ニ書ケル.

$$\left(\sigma_x\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\tau_z\frac{\partial\delta u}{\partial y}+\tau_y\frac{\partial\delta u}{\partial z}\right)dv+\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_z}{\partial y}+\frac{\partial\tau_y}{\partial z}\right)\delta u\,dv.$$

又容積ニ作用スル力ノ中 x 軸ノ方向ノ成分ノナス仕事ハ

$$X\delta u\,dv.$$

之等ヲ加ヘテ小六面體ノ平衡ノ方程式ヲ用ヰレバ仕事ノ式ハ明カニ次ノ樣ニナル.

$$\left(\sigma_x\frac{\delta\partial u}{\partial x}+\tau_z\frac{\delta\partial u}{\partial y}+\tau_y\frac{\delta\partial u}{\partial z}\right)dv.$$

同樣ニシテ他ノ二方向ニ於ケル力ノナス仕事ヲ計算シテ加ヘ且彈性移動ノ微分係數ノ代リニ變形成分ヲ用ヰレバ其結果ハ明カニ

$$(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\sigma_z\delta\varepsilon_z+\tau_x\delta\gamma_x+\tau_y\delta\gamma_y+\tau_z\delta\gamma_z)\,dv.$$

之ガ小六面體ノ內力ノ仕事ト絕對値ニ於テ相等シイ. 故ニ移動ヲ連續的ノモノト假定シテ全物體ニ積分スレバ全內力ノ仕事ヲ求メルコトガ出來ル. 卽

$$-\Sigma\mathfrak{F}\delta\mathfrak{s}=\int(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\sigma_z\delta\varepsilon_z+\tau_x\delta\gamma_x+\tau_y\delta\gamma_y+\tau_z\delta\gamma_z)\,dv.$$

此式ノ右邊ヲ前節ノ(1)ト比較スルニ前ニハ積分ガ變形ノ終始兩極限狀態ノ間ニ取ラレタノニ對シテ今度ノ積分ハ全容積ニ及ブ可キ者デアル. 而シテ(2)カラ A ノ變化ヲ求メテ之ヲ δA トスレバ

$$2G\left(\varepsilon_x+\frac{e}{m-2}\right)=\sigma_x,\ \cdots,\ G\gamma_x=\tau_x,\ \cdots$$

等ノ關係ヲ用ヰテ容易ニ δA ガ上ノ式ノ右邊ト等シイ事ガ判ル. 勿論(2)ノ代リニ(3)ヲ用ヰテモ矢張リ同樣ノ事ガ容易ニ證明サレル. 夫レ故

$$-\Sigma\mathfrak{F}\delta\mathfrak{s}=\delta A.$$

從テ

$$\Sigma\mathfrak{P}\delta\mathfrak{s}=\delta A. \tag{6}$$

之ヲ言葉デ述ベレバ平衡狀態ニアル物體ガ彈性的ノ小移動ヲスル際ニ外力ノナス仕事ハ變形ノ仕事ノ小變化ニ等シイ. 上ニ假定シタ樣ニ若シ移動ガ假想的ナラバ之ヲ假想移動ノ原理ト云フ.

序ニ實際的ノ移動ヲ考ヘルニ此時ニハ小移動ノ間不變ト見タ力ハ素ヨリ一般ニ變數デアツテ此意味ニ於テ上ノ(6)式ヲ書換ヘテ便宜上外力 P ノ方向ノ移動ヲ y トスレバ

$$\Sigma P\,dy=dA. \tag{7}$$

之ヲ與ヘラレタ兩極限値ノ間ニ積分スレバ外力及應力ガ常ニ平衡ヲ保チナガラ之等二狀態間ノ變形ヲ生ズル際ニナサレル仕事 A ノ式ヲ書ク事ガ出來ル.

$$\Sigma\int P\,dy=A. \tag{8}$$

卽外力ノナス仕事ハ之ニ等シイ變形勢力トシテ彈性體中ニ蓄ヘラレル.

97. 極小勢力ノ定理.

前節ニ導イタ(6)式ニ於テ外力 $\mathfrak{P}$ ガ與ヘラレル處デハ之ヲ不變ト見做シウル故 $\mathfrak{P}\delta\mathfrak{s}$ ノ代リニ $\delta(\mathfrak{P}\mathfrak{s})$ ト書ケル. 又 $\mathfrak{s}$ ノ與ヘラレル處デハ $\delta\mathfrak{s}=0$ トナル可キ故 $\mathfrak{P}\delta\mathfrak{s}$ ハ消エル. 從テ $\mathfrak{P}$ 又ハ $\mathfrak{s}$ ノ何レカガ與ヘラレル處全體ヲ通ジテ左邊 $\Sigma\mathfrak{P}\delta\mathfrak{s}$ ノ代リニ $\delta\Sigma\mathfrak{P}\mathfrak{s}$ ト書ケル故同式ヲ次ノ樣ニ書キ換ヘル事ガ出來ル.

$$\delta(A-\Sigma\mathfrak{P}\mathfrak{s})=0. \tag{9}$$

而シテ此括弧內ノ式ヲポテンシアルエナージート云フ. 平衡狀態ニ於ケル此勢力(以下屢々略シテ斯樣ニ呼ブ)ハ常ニ極小値ヲトルモノデアツ

テ上ノ式ハ其一ツノ條件ヲ表シテ居ル. 併シ果シテ極小ナルカヲ決定スル爲ニハAヲ表ス式(2)ノ $\varepsilon_x, \cdots, \gamma_x, \cdots$ 等ニ假想的ノ小變化ヲ與ヘテ之等ノ代リニ $\varepsilon_x+\delta\varepsilon_x, \cdots, \gamma_x+\delta\gamma_x, \cdots$ 等ト書イタ後應力ト伸ビ及應力ト辷リノ關係ヲ用ヰテ一部ノ書換ヘヲ行ヒ又Aノ代リニ$A+\delta A$ト書ケバ方程式ノ兩邊ヨリ相等シキ部分ヲ引去リタル殘リハ次ノ樣ニナル.

$$\delta A=\int(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\sigma_z\delta\varepsilon_z+\tau_x\delta\gamma_x+\tau_y\delta\gamma_y+\tau_z\delta\gamma_z)dv+\varDelta. \tag{10}$$

此式ニ於テ$\varDelta$ハ $\varepsilon_x, \cdots, \gamma_x, \cdots$ ノ代リニ夫レ夫レ $\delta\varepsilon_x, \cdots, \delta\gamma_x, \cdots$ ヲ入レタAノ式ニ相當スル者デ之ハ卽微小ナル變形ノ勢力ヲ表ス故無論正デアル. 上ノ式ハ又$\delta A+\Sigma\mathfrak{F}\delta\mathfrak{s}=\varDelta$トモ書ケル故二次ノ項迄ヲ取リテ假想移動ノ原理ヲ表セバ(9)ノ代リニ

$$\delta(A-\Sigma\mathfrak{P}\mathfrak{s})=\varDelta. \tag{11}$$

從テ假想移動ニヨリテ生ズルポテンシアルエナージーノ變化ハ正デアツテ卽平衡狀態ニ於ケル此勢力ハ極小デアル.

尙附加ヘタイ事ハ(6)ニ於ケル$\Sigma\mathfrak{P}\delta\mathfrak{s}=0$ノ場合デアル. 卽若シ外力ガ少シモ仕事ヲナサヌ樣ニ假想移動ヲ行ヘバ(9)ノ代リニ次ノ式ガ書ケル.

$$\delta A=0. \tag{12}$$

之ハ(11)式ニヨリテ明カナル樣ニ變形勢力ノ極小ヲ示スモノデアル.

上ノ計算デハ假想移動ノ原理ヲ基トシテ小六面體ニ於ケル內力ノ仕事ガ應力ノ仕事ト等大デ異符號ナル事ヲ證明シテ然ル後勢力ノ極小ニ關スル定理ヲ導イタ. 併シ變形勢力ノ變化δAノ式(10)ノ積分式ニ於テ其中ニ含マレル $\varepsilon_x, \cdots, \gamma_x, \cdots$ ヲ彈性移動u, v, wノ項デ表シタ後之ニGaussノ定理ヲ應用シテ彈性體ノ表面ノ積分及容積ノ積分ノ二組ニ分ケ且應力ノ平衡式ヲ導ケバ問題ノ積分式ハ$\Sigma\mathfrak{P}\delta\mathfrak{s}$ニ等シイ事ガ證明サレル. 從テ$\mathfrak{P}, \mathfrak{s}$ニ就テ本節ノ最初ニ述ベタト同樣ニシテ之ヲ$\delta\Sigma\mathfrak{P}\mathfrak{s}$ト書ケル故結局數理的ニ(11)式ヲ導ク事ガ出來ル.

尙變形ノ仕事ヲ用ヰテ二組ノ解ガ普通同時ニ成立シナイ事卽彈性ノ解ノ單一性ヲ證明スル筈ナルモ之ヲ略シテ直ニ應用ヲ述ベヤウ.

98. 荷重ヲ急ニ加ヘ又ハ其方向ヲ急ニ變ズル場合.

若シ荷重Pガ靜ニ零ヨリ或ル大サP_1ニ增加シテ之ニ伴フ變形ガ丁度荷重ニ匹敵スルナラバ變形ノ間常ニ平衡狀態ガ保タレルカラ與ヘラレタ荷重ノ全量ヲ材料ニ托シタ最後ノ狀態ニ於ケル移動モ亦之ニ對應シタ平衡狀態ニアル筈デアル. 併シ荷重ガ急ニ加ヘラレル時ハ上ノ如キ靜的ノ作用ニヨリテ達セラレル最後ノ平衡狀態ヲ中心トシテ其前後ニ振動ヲ起ス事曾テ衝擊ノ章中ニ述ベタ如クデアル. 此事ヲ尙下ニ繰返シテオカウ.

今正比例ノ法則ニ從フ材料ノ變形yガ荷重Pト一次的關係デ結バレルト假定シテ$y=cP$トスレバ

$$\int_0^{y_1}P\,dy=\frac{P_1y_1}{2}$$

トナル事ハ明カデアル. 併シ之ニ反シテ若シ荷重P_1ガ急ニ加ヘラレ變形ノ間P_1ガ不變ニ作用スレバ變形y_1ヲ生ズル迄ノP_1ノ仕事ハP_1y_1デアルカラ$\frac{1}{2}P_1y_1$丈ケノ仕事ガ過剩トナリ其結果運動ヲ生ジテ新シイ平衡狀態ヲ突破スルノデアル. 而シテ此運動ノ勢力ガ失ハレテ變形ノ仕事トナルノハ更ニy_1丈ケノ變形ヲ起シタ後デアル事ガ外力及變形ノ仕事ヨリ容易ニ證明サレルカラ結局變形$2y_1$ヲ生ズル譯デアル. 然ルニ變形$2y_1$ハ平衡狀態ニアラザル故此狀態ニ止ルコトハ出來ヌ. 從テ次ノ瞬間ニ材料ノ收縮ガ起リ玆ニ振動ヲ生ズル. 卽急ニ荷重ヲ加ヘタ場合ノ變形及應力ハ靜ニ之ヲ加ヘタ場合ノ二倍ニ等シイ. 此結果ハ已ニ73節ニ於テ說明シタトコロデアル.

次ニ荷重P_1ノ作用スル方向ヲ急變シタ場合ヲ考ヘルニ此時ニハ最初ノ變形ヲ例ヘバ負號ノy_1トスレバP_1ノ方向ガ變リテ最後ニ達スベキ新シイ平衡狀態ハ正號ノ變形y_1デ示サレルベキ者デアツテ此狀態ヲ中心トシテ生ズル振動ハ中心ノ前後ニ$2y_1$宛ノ幅ヲ畫クコトニナル. 此事モ上ニ述ベタノト同樣ニシテ證明スルコトガ出來ヤウ. 卽變形零ノ狀態ヲ基トスレバ$3y_1$ノ變形ヲ生ズル譯デアル. 故ニ方向ヲ急變シタ場

合ノ變形及應力ハ靜ニ荷重ヲ加ヘタ時ノ三倍ニ當ル. 然ルニ此狀態ヲ持續スル事ハ出來ヌ故玆ニ振動ヲ起ス. 此事モ已ニXII章ノ例題ニ之ヲ述ベタ.

99. Maxwell ノ定理.

一ツノ物體ニP_1及P_2ナル二ツノ荷重ガ作用スル時物體ノ支點ハ少シモ移動セズシテ之等荷重ノ作用スル點ガ或ル移動ヲ受ケルモノト假定シ其移動ノP_1及P_2ノ方向ノ射影ヲy_1及y_2トスル. 今y_1及y_2ガ夫レ夫レdy_1及dy_2ナル變化ヲ生ジタモノト考ヘレバ外力ノナス仕事ハ

$$\Sigma P\,dy = P_1\,dy_1 + P_2\,dy_2.$$

然ルニy_1及y_2ハ共ニP_1及P_2ノタメノ移動ナル故之等外力ノ函數ナルハ當然デ且材料ガ正比例ノ法則ニ從フ範圍ニ於テ移動ガ荷重ニ比例スル者ト假定シ且二ツ以上ノ荷重ガ同時ニ作用スル時或ル一點ノ全移動ガ各荷重ニヨリテ生ゼラレル分移動ノ總和ニ等シイ事モ亦經驗上差支ナイ事實トシテ玆ニ承認シヤウ. 然ル時ハy_1及y_2ハ夫レ夫レ次ノ如キ式デ表サレル.

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}P_1 + a_{12}P_2, \\ y_2 &= a_{21}P_1 + a_{22}P_2. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

之等ノ式ニ於テ係數aハ凡テPニ無關係ノ數デ例ヘバa_{11}ハ$P_1=1$ナル荷重ノミニヨリテ起ルy_1ノ値ニ相當シ又a_{12}ハ$P_2=1$ナル荷重ノミニヨルy_1ニ等シイ.

偖P_1及P_2ニ小ナル變化ヲ與ヘタト考ヘレバ

$$dy_1 = a_{11}\,dP_1 + a_{12}\,dP_2,$$

$$dy_2 = a_{21}\,dP_1 + a_{22}\,dP_2.$$

夫レ故求メル外力ノ仕事ハ次ノ樣ニナル.

$$\begin{aligned} \Sigma P\,dy &= P_1(a_{11}\,dP_1 + a_{12}\,dP_2) + P_2(a_{21}\,dP_1 + a_{22}\,dP_2) \\ &= (a_{11}P_1 + a_{21}P_2)\,dP_1 + (a_{12}P_1 + a_{22}P_2)\,dP_2. \end{aligned}$$

此際ナサレル應力ノ仕事AハP_1及P_2ノ函數ナル故

$$dA = \frac{\partial A}{\partial P_1}dP_1 + \frac{\partial A}{\partial P_2}dP_2.$$

然ルニ(7)ニヨリテ之等兩式ハ相等シキ故上ノ二式ニ於ケルdP_1及dP_2ノ係數ヲ相等シク置イテ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial P_1} &= a_{11}P_1 + a_{21}P_2, \\ \frac{\partial A}{\partial P_2} &= a_{12}P_1 + a_{22}P_2. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

函數Aノ微分係數ヲ作ルニハ微分ノ順序ヲ換ヘウル故

$$\frac{\partial^2 A}{\partial P_1 \partial P_2} = \frac{\partial^2 A}{\partial P_2 \partial P_1}.$$

夫レ故

$$a_{12} = a_{21}. \tag{15}$$

此結果ヲ言葉デ表セバ荷重$P_2=1$ガP_1ノ作用スル點ニ於テ引起ス移動ノP_1ノ方向ノ射影ハ荷重$P_1=1$ガP_2ノ作用スル點ニ於テ引起ス移動ノP_2ノ方向ノ射影ニ相等シク結局移動ハ御互樣ト云フ事ニナル. 之ヲ Maxwell ノ定理ト呼ンデ居ル.

100. Castigliano ノ定理.

已ニ(15)ノ結果ヲ知ル以上ハ直ニ次ノ定理ヲ導ク事ガ出來ル. 卽(14)ヲ次ノ樣ニ書ク.

$$\frac{\partial A}{\partial P_1} = a_{11}P_1 + a_{12}P_2,$$

$$\frac{\partial A}{\partial P_2} = a_{21}P_1 + a_{22}P_2.$$

故ニ(13)ヨリ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial P_1} &= y_1, \\ \frac{\partial A}{\partial P_2} &= y_2. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

此結果ハ P_1, P_2 ノ二ツノ場合ニ證明シタニ過ギヌケレドモ荷ガ幾ツアリテモ同樣ノ筆法デ上ト同ジ結果ヲ導ク事ガ出來ル. 卽一般ニ

$$\frac{\partial A}{\partial P_k}=y_k. \tag{17}$$

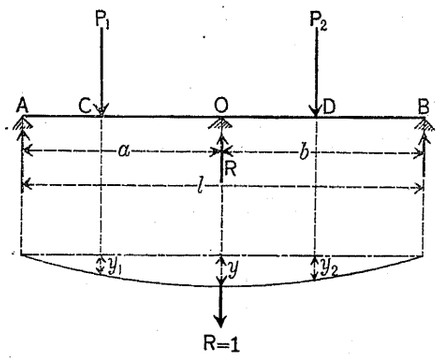
之ヲ Castigliano ノ定理ト云フ.

偖若シ P_k ノ作用スル點ガ少シモ移動ヲ生ゼザル場合ニハ

$$\frac{\partial A}{\partial P_k}=0. \tag{18}$$

101. 兩定理應用ノ例.

124 圖ニ示ス樣ナ眞直ノ梁ガ三點 A, O, B デ支ヘラレナガラ C, D ノ諸點ニ P_1, P_2 等ノ荷重ヲ負フ場合ヲ取リテ考ヘヤウ. 此時 A, O, B ノ支力ハ剛體力學ノ範圍デ見出ス事ガ出來ナイノハ已ニ屢々述ベタ通リデアル. 夫レデ此問題ヲ解クーツノ方法トシテ丁度 III 章ノ例題 5 ニ於ケル樣ニ梁ガ A, B 兩點デ支ヘラレ P_1, P_2 ノ外ニ尙 O 點ノ未知ノ支力 R ガ恰モ荷トシテ作用スルモノト見ルコトガ出來ル. 而シテ R ガ決定サレレバ他ノ支力ハ容易ニ計算サレル譯デアル. 偖 AB 上ニ於テ單ニ P_1 丈ケガ作用スルナラバ AB ガ如何ニ變形スルカハ已知ノコトニ屬スルモノデアル. 從テ荷重 P_1 ガ O ニ於テ引起ス移動 P_1y_1 ハ判ル. 但 y_1 ハ $P_1=1$ ニ對スル同點ノ移動デアル. 同樣ニシテ P_2 ガ O ニ於テ生ズル移動 P_2y_2 モ知ラレル. 又 $R=1$ ヲ下向ニ作用セシメタ時ノ O ノ移動 y モ判ル故 R 自身ノタメノ移動ハ $-Ry$ トナル. 但負號ハ R ノ方向ガ上ニ向フコトヲ意味スル. 夫レ故若シ變形ニ際シテ支點 O ガ依然直線 AB 上ニアルナラバ以上移動ノ和ハ零ナルベキ故



124 圖

$$P_1y_1+P_2y_2-Ry=0.$$

P_1, P_2 ガ幾ツアルモ同樣ナル故

$$Ry-\Sigma P_ky_k=0.$$

此式カラ R ガ求メラレル.

一般ニ若シ支點ノ數ヲ $n\geqq 3$ トスレバ n 個ノ中ノ任意ノ二ツヲ支點トシテ他ノ $(n-2)$ 個ノ支點ノ支力ヲ前ノ R ト同ジ樣ニ未知ノ荷重トシテ取扱ヒ實際ノ荷重ト之等 $(n-2)$ 個ノ支力トニ對シテ梁ノ變形ヲ考ヘテ各支點デ如何ナル移動ヲ惹起スベキカヲ調ベ前ノ場合ト同樣ニ若シ支點ガ常ニ一直線上ニアルナラバ玆ニ移動ノ和ガ零ナリト云フ條件ヲ式ニ表スコトガ出來ル. 斯クシテ $(n-2)$ 個ノ未知數ヲ含ム一次ノ聯立方程式ガ矢張リ $(n-2)$ 個出來テ夫レデ支力ノ計算ガ可能トナル譯デアル. 今簡單ノタメニ三點ノ場合ヲ取ルケレドモ其他ノ場合モ之ト同ジ方針デ解決サレル.

以上未ダ別ニ兩定理ノ何レヲモ應用シテハ居ラヌガ玆ニ Maxwell ノ定理ヲ用ヰレバ事柄ガ甚ダ簡便トナル. 卽 124 圖ニ於テ C, D, O ノ諸點ニ單位ノ荷重ヲ働カセテ梁ノ彈性線ガ如何ナル形ヲ取ルカヲ一々調ベテ O 點ノ移動ヲ見出スノハ實際上甚ダ面倒デアル. 然ルニ上ニ述ベタ定理ヲ應用スレバ O 點ニ單位ノ荷重ヲ作用セシメタ場合ノ彈性線丈ケヲ考ヘレバ足ルノデアル. 何トナレバ之ニ依テ y ヲ知ル計リデナク C, D 兩點ノ移動カラ y_1 及 y_2 ヲ見出ス事ガ出來ルカラデアル. 卽圖デ說明スレバ $R=1$ ニ對シテ一條ノ彈性線丈ケヲ作レバ此圖カラ凡テノ y ヲ計ルコトガ出來ルノデアル. 若シ一般ニ $(n-2)$ 個ノ未知量アラバ其數丈ケノ曲線ヲ作レバ宜シイ譯デアル. 例ヘバ數多ノ軸承ニ支ヘラレタクランク軸ノ問題ノ如キモ之ガタメニ手數ガ餘程省略サレルノデアル. 殊ニ該軸ノ樣ニ橫斷面ノ一樣ナラザル場合ニ於テハ III 章 27 節ニ述ベ

タ彈性線ノ作圖法ヲ應用スレバ計算ガ甚ダ便利トナル.[1]

上ニ述ベタ樣ナ梁ノ問題ニ於テ Castigliano ノ定理ヲ應用シテ計算スルコトモ出來ル. 卽與ヘラレタ荷重(集中又ハ散布)及未知ノ支力 R ガ梁 AB 上ニ作用シタ時ノ變形ノ仕事 A ヲ計算シ次ニ支點 O ノ移動ヲ零ト假定シテ $\frac{\partial A}{\partial R}=0$ ヲ作レバ R ニ對スル方程式ヲ得ル故容易ニ之ヲ求メルコトガ出來ル. 此計算ハ本章末尾ニ添ヘル例題ニ於テ說明スル積リデアル.

尙玆ニ附加ヘテ置キタイト思フノハ同ジ定理ヲ應用シテ一構造物中ノ未知ノ力ヲ計算スル方法デアル. 卽一物體ガ二ツノ部分カラ出來テ居ルモノト見做シ各部分ニ對スル變形ノ仕事 A_1 及 A_2 ヲ計算シ次ニ兩者ノ間ニ作用スル未知ノ力 P ニ對シテ之等ヲ微分シテ $\frac{\partial A_1}{\partial P}$ 及 $\frac{\partial A_2}{\partial P}$ ヲ作レバ此偏微分係數ハ(16)又ハ(17)ニヨリテ P ノ方向ノ移動ヲ與ヘル. 偖兩部ガ互ニ結合シテ一物體ヲ形成スル以上ハ移動ガ同一方向ニアリテ等大ナルベキコト無論デアル. 然ルニ兩部ニ對シテ P ハ等大ナルモ反向スル故次ノ方程式ガ成立スル.

$$\frac{\partial A_1}{\partial P}=-\frac{\partial A_2}{\partial P},$$

又ハ

$$\frac{\partial(A_1+A_2)}{\partial P}=0.$$

依テ

$$A_1+A_2=A$$

ト書ケバ

$$\frac{\partial A}{\partial P}=0. \tag{19}$$

此計算法ハ例ヘバ補强材ニテ固メラレタ梁ノ計算ニ應用サレル. 其例モ矢張リ例題トシテ添ヘル積リデアル.

1) C. Bach, Die Maschinenelemente, 10 版, 573 頁; 13 版, 2 卷, 93 頁.
著者, 京都帝國大學理工科大學紀要, V, 9, 1913, 367 頁.

102. Ritz ノ近似計算.

外力ヲ受ケテ變形シナガラ平衡狀態ヲ保ツ彈性體ニ於テハ前ニ述ベタ樣ニ勢力 $(A-\Sigma\mathfrak{P}\mathfrak{s})$ ガ極小デアル. 卽實際生ズル變形狀態ヲ知レバ此狀態ニ假想移動ヲ與ヘテ得ラレル勢力ノ變化ハ殆ンド零ニ近ク精密ニ言ヘバ或ル正ノ量デアル. 正確ニ變形狀態ヲ知リ得ザル場合ニ若シ多少之ニ近似スル狀態ヲ想像スレバ其狀態ノ上記勢力ハ幾分カ正確ナル値ヨリ大デアルガ其差ハ小デアラウ. 夫レ故一ツノ近似計算法ハ境界ノ條件ヲ滿足スル隨意ノ變形狀態ヲ假定シテ之ニ對スル勢力 $(A-\Sigma\mathfrak{P}\mathfrak{s})$ ヲ成ルベク小ニスル事デアル. 例ヘバ彈性移動ヲ次ノ樣ニ取ル.

$$\left.\begin{aligned} u&=\sum_1^n a_k U_k,\\ v&=\sum_1^n b_k V_k,\\ w&=\sum_1^n c_k W_k. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

U_k, V_k, W_k ハ x, y, z ノ函數デ夫レ夫レ彈性體ノ境界條件ヲ滿足スル樣ニ選バレル. 又 a_k, b_k, c_k ハ次ノ條件ニヨリテ定メラレル係數デアル. 簡單ノタメニ $\Sigma\mathfrak{P}\mathfrak{s}=L$ トオイテ A 及 L ニ上ノ u, v, w ノ式ヲ導イテ計算スレバ A ハ明カニ a_k, b_k, c_k ニ就テ二次デアリ又 L ハ普通一次デアル. 而シテ $(A-L)$ ハ極小ナルベキ故

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial a_k}-\frac{\partial L}{\partial a_k}&=0,\\ \frac{\partial A}{\partial b_k}-\frac{\partial L}{\partial b_k}&=0,\\ \frac{\partial A}{\partial c_k}-\frac{\partial L}{\partial c_k}&=0. \end{aligned}\right\} k=1, 2, \cdots n. \tag{21}$$

之ハ a_k, b_k, c_k ノ一次聯立方程式デ其數ハ丁度未知係數ノ數 $3n$ ニ等シイ. 夫レ故之ヲ解ケバ係數ガ定マリテ變形狀態ガ判ル. 上ノ計算法ハ主意甚ダ簡明ナルモ實際ノ演算ハ未知係數ノ數ニ應ジテ相當面倒デアル. 夫レ故 u, v, w 中ノ項數ハ自ラ制限サレル.

此計算法ヲ53節ニ述ベタ棒ノ自由横振動ノ場合ニ應用シヤウ. 其目的デ(7)式ヲ見ルニ只今ノ外力ハ慣性ノ力 $-m_1\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dx$ (m_1 ハ棒ノ單位ノ長サノ質量)ニ等シキ故撓ミ $dy=\frac{\partial y}{\partial t}dt$ ヲ引起ス際ノ仕事ハ $-dt\int_0^l m_1\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{dy}{dt}dx=-dt\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l m_1\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2dx$. 之ヲ變形勢力ノ小變化 $dA=dt\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l EI\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2dx$ ニ等シクオケバ53節ノ(20)ヲ得又 x ノミノ函數 X ヲ用ヰテ $y=X\cos kt$ トスレバ前ニ示シタ樣ニ次ノ式ガ書ケル.

$$\int_0^l EI\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2dx=k^2\int_0^l m_1X^2dx.$$

前ニ一端ヲ固定シ他端自由ナル一樣斷面ノ棒ニ就テ其自由振動ノ速サヲ Rayleigh ノ方法ニヨリテ求メタガ本節ノ方法ニ依レバ一層精密ナル値ヲ得ル. 今 L ノ式ニ於テ $\cos kt$ 以外ノ部分ハ上ノ方程式ノ右邊ニテ表サレル. 夫レデ $\xi=\frac{x}{l}$ トシテ兩端ノ條件ヲ滿足スル次ノ式ヲ取ル.

$$X=a_1X_1+a_2X_2,$$

但 $$X_1=\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^3}{3}+\frac{\xi^4}{12},\qquad X_2=\xi^3-\xi^4+\frac{3}{10}\xi^5.$$

極小勢力ノ定理ニ於テ L ヲ不變トスレバ $\delta A=0$. 卽 $\int_0^1 X^2d\xi=1$ ヲ條件トシテ $\int_0^1\left(\frac{d^2X}{d\xi^2}\right)^2d\xi=\min.$ トナル樣 a_1, a_2 ヲ調節スル. L モ a_1, a_2 ニ就テ二次ナル點普通ノ場合ト違フ. 偖不定乘數 λ ヲ入レテ極小條件ヲ書ケバ

$$\int_0^1\left(a_1\frac{d^2X_1}{d\xi^2}+a_2\frac{d^2X_2}{d\xi^2}\right)\frac{d^2X_1}{d\xi^2}d\xi=\lambda\int_0^1(a_1X_1+a_2X_2)X_1d\xi,$$

$$\int_0^1\left(a_1\frac{d^2X_1}{d\xi^2}+a_2\frac{d^2X_2}{d\xi^2}\right)\frac{d^2X_2}{d\xi^2}d\xi=\lambda\int_0^1(a_1X_1+a_2X_2)X_2d\xi.$$

之等ノ式ニ夫レ夫レ a_1, a_2 ヲ乘ジテ加ヘレバ

$$\int_0^1\left(\frac{d^2X}{d\xi^2}\right)^2d\xi=\lambda\int_0^1X^2d\xi.$$

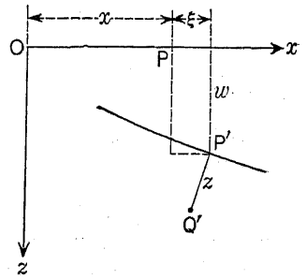
之ヲエナージーノ式ニ比ベレバ $\lambda=k^2\frac{m_1l^4}{EI}$. 上ノ二ツノ聯立方程式ハ a_1, a_2 ニ就テ同次デアル. 之等ガ零デナイトシテ消去スレバ λ ノ二次方程式ガ得ラレル. 之ヨリ λ ヲ求メレバ計算ノ結果 $\lambda=12.3625$ トナリ從テ

$k=\frac{3.516}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m_1}}$. 此式ノ係數ハ示サレタ限リ正確ナル數値ト同ジデアル.

尙最後ニ附加ヘタイ事ハ Rayleigh, Ritz ノ方法ガ速サノ上限ヲ與ヘルニ對シテ別ノ方法デ下限ヲ求メ得ラレル點デアル.[1]

103. 變形成分ノ二次項ヲ必要トスル梁ノ問題.

梁ノ問題ハ已ニ屢々之ヲ述ベタ. 併シ茲ニ再ビ之ヲ論ズルハ假想移動ノ原理ニヨリテ梁ノ長サノ方向ノ變形ヲ計算スル事ガ良イ應用ノ例ト思ハレル故デアル. 一個ノ梁ガ或ル有樣ニ支ヘラレ外力ノ作用ニヨリテ曲ル. 普通梁ノ計算デ行ハレル樣ニ横斷面ガ平面デ且彈性線ニ直角ニ止ルト假定スルモ併シ軸方向ノ變位ヲ考ヘル點ニ於テ本節ノ問題ハ前ノ計算ヨリモ一層精密デアル. 斯ル計算ハ特ニ軸方向ノ變位ヲ必要トスル場合若クハ彈性線ノ傾キガ大ナル場合ニ起ル問題デ此時ハ彈性線ノ傾キニ就テハ其二乘ヲ省略セズニ計算スル事ガ必要デアル. 夫レ故變形成分ニハ XV 章(25)式ヲ用ヰル. 梁ノ軸方向ヲ x 軸トシ撓ミヲ w ニテ表ス. 125 圖. w ハ一斷面中ニテハ各點共通トシ卽中立軸ヨリノ距離 z ニ無關係トシヤウ. 然ル時ハ軸方向ノ變位ハ彈性線上ノ點ノ變位 ξ ト斷面ノ傾キ $\frac{dw}{dx}$ ノタメニ生ズル變位トノ和ニ等シキ故



125 圖

$$u=\xi-z\frac{dw}{dx}. \tag{22}$$

此式ヲ ε_x ノ式ニ入レテ $\frac{\partial u}{\partial x}$ ノ二乘ハ之ヲ省略スル. 然ル時ハ

$$\varepsilon_x=\frac{d\xi}{dx}-z\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2. \tag{23}$$

之ハ彈性線上ノ微小距離 ds ノ受ケル伸ビ $\frac{d\xi}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2$ ト曲ゲノタメ

1) 機械學會誌, XXVIII, 1925, 429 頁.

ノ伸ビ $-z\dfrac{d^2w}{dx^2}$ トノ和ト考ヘテヨイ.

偖剪斷應力ヲ省略シテ變形勢力ノ變化ヲ書ケバ

$$\delta A = E\iint \varepsilon_x \delta \varepsilon_x \, df\, dx.$$

E ハ彈性係數, df ハ中立軸ニ平行ナル微小面積. 又積分ハ全斷面並ニ x ノ一定ノ長サニ對シテ之ヲ行フ. 此式ニ上ノ ε_x ヲ入レテ

$$\delta A = E\iint\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2-z\frac{d^2w}{dx^2}\right)\left(\frac{d\delta\xi}{dx}+\frac{dw}{dx}\frac{d\delta w}{dx}-z\frac{d^2\delta w}{dx^2}\right)df\,dx.$$

偖 $\int z\,df=0$ 又 $\int z^2\,df = I = fi^2$ (斷面ノ慣性モーメント,全長一樣ト見做ス). 故ニ上ノ積分式中 z ノ一次ノ項ハ消エテ

$$\delta A = Ef\left[\int_0^l\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{d\delta\xi}{dx}+\frac{dw}{dx}\frac{d\delta w}{dx}\right)dx + i^2\int_0^l\frac{d^2w}{dx^2}\frac{d^2\delta w}{dx^2}\,dx\right]. \quad (24)$$

假想移動ニ際シテ集中荷重及支力(モーメントヲ含ム)ノ仕事ヲ零トスル樣ニスレバ外力ノ仕事ハ散布荷重(密度 p)ニ就テノミ計算スレバ宜シイ故

$$\delta A = \int_0^l p\,\delta w\,dx. \quad (25)$$

偖(24)ノ右邊ヲ積分シテ之ヲ(25)ノ右邊ニ等シクオケバ

$$Ef\left[\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right)\left(\delta\xi+\frac{dw}{dx}\delta w\right)+i^2\frac{d^2w}{dx^2}\frac{d\delta w}{dx}\right]_0^l$$

$$-Ef\int_0^l\left[\left(\frac{d^2\xi}{dx^2}+\frac{dw}{dx}\frac{d^2w}{dx^2}\right)\left(\delta\xi+\frac{dw}{dx}\delta w\right)+\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right)\frac{d^2w}{dx^2}\delta w\right.$$

$$\left.+i^2\frac{d^3w}{dx^3}\frac{d\delta w}{dx}\right]dx = \int_0^l p\,\delta w\,dx.$$

假定シタ樣ニ支點ノ力及モーメントノ仕事ヲ零トセル故 $x=0$ 及 $x=l$ ニ對シテ $\delta\xi=\delta w=0$ 並ニ $\delta\left(\dfrac{dw}{dx}\right)=0$ トオク. 然ル時ハ左邊ノ第一項ハ消エル. 又第二項ノ積分式中ノ末項ハ更ニ一度積分シテ只今述ベタ兩端ノ條件ヲ入レル時ハ

$$\int_0^l\frac{d^3w}{dx^3}\frac{d\delta w}{dx}dx = -\int_0^l\frac{d^4w}{dx^4}\delta w\,dx.$$

從テ左右兩邊ノ積分式ヲ通ジテ $\delta\xi$ 及 δw ヲ含ム兩項ニ區別スレバ次ノ二ツノ方程式ヲ得ル.

$$\frac{d^2\xi}{dx^2}+\frac{dw}{dx}\frac{d^2w}{dx^2}=0,$$

$$i^2\frac{d^4w}{dx^4}-\left[\frac{d\xi}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]\frac{d^2w}{dx^2}-\left[\frac{d^2\xi}{dx^2}+\frac{dw}{dx}\frac{d^2w}{dx^2}\right]\frac{dw}{dx}-\frac{p}{Ef}=0.$$

若シ支力及モーメントガ仕事ヲスレバ之ニ應ジテ仕事ノ項ヲ書キ加ヘテ之ヨリ兩端ノ條件ヲ導ク事ガ出來ル. 併シ之ハ今必要デナイ. 偖上ノ第一ノ微分方程式ヨリ積分ニヨリテ

$$\frac{d\xi}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2=c. \quad (26)$$

卽彈性線上ノ伸ビハ一樣デアル. 又第二ノ方程式ハ第一ノ爲ニ簡單トナリテ

$$i^2\frac{d^4w}{dx^4}-c\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{p}{Ef}. \quad (27)$$

此微分方程式ハ普通ノ曲ゲ彈性ノ方程式ヨリ容易ニ書ケル. 卽

$$-EI\frac{d^2w}{dx^2}=M.$$

曲ゲモーメント M ト横ノ荷重 p 及縱ノ力 Q トノ間ニハ次ノ關係ガアル.

$$\frac{d^2M}{dx^2}=-p-Q\frac{d^2w}{dx^2}.$$

此式ノ右邊第二項ハ III 章28節ノ計算ヲ Q ノ存在スル場合ニ擴張シテ考ヘレバ直ニ明カデアル. 從テ上ノモーメントノ方程式ヲ二度微分シテ此式ヲ入レル時ハ

$$\frac{d^4w}{dx^4}-\frac{Q}{EI}\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{p}{EI}.$$

$\dfrac{Q}{EI}=\dfrac{Q}{Efi^2}=\dfrac{c}{i^2}$, $\dfrac{p}{EI}=\dfrac{p}{Efi^2}$ トオケバ之ハ(27)ト全ク同ジ形ニナル. 要スルニ(26)及(27)ノ兩方程式ヲ以テ只今ノ問題ノ基礎ガ出來タ. 之ヲ兩端ノ條件ニ合フ樣ニ積分スレバ宜シイ.

假想移動ノ原理ヲ述ベタ時先ヅ彈性體ニ於ケル內力ノ仕事ヲ計算シテ夫レヨリ變形成分ヲ以テ表サレタ勢力 A ノ假想變分 δA ヲ導イタ.

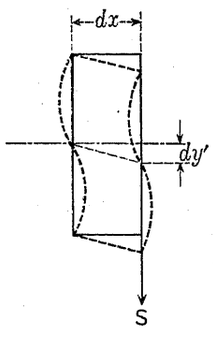
併シ應力成分ヲ以テ表サレタAヨリ應力ノ假想變化ニヨリテ生ズル別ノ意味ノδAヲ導ク事モ出來ル. 尤モ只今ノ場合ニ於テハ簡單ニ

$$\delta A=\int\int\varepsilon_x\delta\sigma_x df\,dx$$

トナリσ_xヲ$E\varepsilon_x$トスレバ前ニ述ベタ變形ノ假想變化ト全ク同ジ形トナル. 併シ外力ヲ用ヰテσ_xヲ表シ外力ノ變化ニヨル上式ノ右邊ニ於ケル積分式中ノ$\delta\sigma_x$ヲ計算スルト共ニ他方又左邊ノδAヲ直接外力ノ項ヲ以テ表セバ茲ニ變形勢力ノ外力ニ對スル微分係數ノ式ヲ得ル. 而シテ其結果ハ變形成分ニ二次項ヲ必要トシタ關係上所謂Castiglianoノ定理ト當然一致シナイ. 兎ニ角斯ル計算ニ依リテ前ニ述ベタ方法ト道ヲ異ニシテ同ジ結果ニ達スル. 斯ル變分方程式ノ計算及梁ノ一層具體的ノ計算ニ就テハ之ヲ別ノ場所ニ讓ル.[1]

例題 1. 曲ゲニ對スル剪力ノ影響.

曾テ III 章19節ニ述ベタ梁ノ彈性線ハ單ニ曲ゲモーメントヨリ生ズル軸ノ變形ヲ示スモノデアツテ普通ノ計算ニハ之デ充分デアルガ精密ニ言ヘバ剪力ノ影響ヲ考ヘネバナラヌ. 126圖ニ示ス如ク長サdxナル梁ノ一小部分ヲ取リ其兩斷面ガSナル剪力ノタメ互ニ辷ル有樣ヲ見ルニ斷面ガ全體トシテノ移動ハdy'トシテ示ス如クナルモ斷面中ノ各點ニ於ケル角ノ變化ハ素ヨリ一樣デハナク中心軸上ニ於テ最大デ上下兩側ニ向テ漸減シテ遂ニ零トナル. 卽中心軸上ニ於テハ斷面ノ傾斜最モ甚シキニ反シテ上下兩端ニ於ケル角ハ依然直角トシテ止ル. 其有樣ハ點線ヲ以テ表ス如クデアル.



126 圖

本題ハ此dy'ノ大サヲ見出シ之ヲ梁ノ一定ノ長サニ對シテ積分シテ剪力Sノ生ズル撓ミヲ計算シヤウトスルノデアル. 之ガタメニSガdy'丈ケ移動スル事ニヨリテナサレル仕事ガ應力τノ仕事ニ等シイト云フ

1) 九州帝國大學工學部紀要, III, 1923–1925, 87頁.

仕事ノ原理ヲ用ヰテ先ヅ次ノ式ヲ書ク.

$$\frac{1}{2}S\,dy'=dx\int\frac{\tau^2}{2G}df.$$

但dfハ應力τノ働ク微小面積デアツテ積分ハ全面積ニトラレル. 而シテτハ已ニ IV 章34節ニ述ベタ樣ニシテ其斷面上ニ於ケル配布ガ判ル故此右邊ヲ與ヘラレタ斷面ニ對シテ計算スルコトガ出來ル. 從テSガ判リ居レバ上式ヲ梁ノ一定ノ長サノ間ニ積分シテ次ノ計算ヲスルコトガ出來ル. Gヲ常數ト見做シテ

$$y'=\frac{1}{G}\int\frac{dx}{S}\int\tau^2 df.$$

例ヘバ梁ノ橫斷面ガ幅bデ高サhニ等シイ矩形ナル時ハ中心軸ヨリηナル距離ニ於テ

$$\tau=\frac{3}{2}\frac{S}{bh}\left[1-\left(\frac{2\eta}{h}\right)^2\right].$$

此式並ニ$df=b\,d\eta$ヲ用ヰテ

$$\int\tau^2 df=\frac{9}{4}\frac{S^2}{bh^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\left[1-\left(\frac{2\eta}{h}\right)^2\right]^2 d\eta$$

$$=\frac{6}{5}\frac{S^2}{bh}.$$

從テ

$$y'=\frac{6}{5G}\int\frac{S}{bh}dx.$$

若シ梁ノ斷面ガ各部一樣ナル時ハbhヲ積分記號ノ外ニ置キウ可ク尙又梁ガ兩端ニ於テ支ヘラレ其中點ニ於テ荷重Pヲ負フ場合ニ上式ヲ適用スレバ梁ノ長サlノ二分ノ一ニ對シテSハ常數デ其値$\frac{P}{2}$ニ等シキ故中點ノ撓ミハ

$$y'=\frac{0.3}{G}\frac{P}{bh}l.$$

斯ル梁ガ曲ゲモーメントノタメニ生ズル中心ノ撓ミハ III 章(50)ニヨリテ$\frac{Pl^3}{4Ebh^3}$ナル故結局全體ノ撓ミヲyトスレバ

$$y=\frac{Pl^3}{4Ebh^3}+\frac{0.3}{G}\frac{P}{bh}l.$$

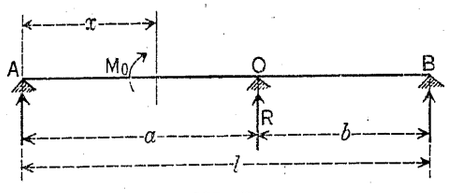
偖 G ト E トノ間ニハ $G=\frac{m}{2(m+1)}E$ ナル關係アル故

$$y=\frac{Pl}{Ebh}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{l}{h}\right)^2+\frac{0.6(m+1)}{m}\right].$$

$\frac{l}{h}$ ガ大ナル時ハ右邊括弧内ノ第二項ハ第一項ニ對シテ之ヲ省略シテ差支ヘナイ. 卽單ニ曲ゲヨリ生ズル撓ミヲ計算スレバ宜シイ事ガ判ル. 併シ $\frac{l}{h}$ ガ大ナラザル時ニハ剪斷力ノ影響ヲ顧慮セネバナラヌ. 曲ゲ試驗ニヨリテ彈性係數ヲ求メル場合ニハ例ヘバ支點ノ摩擦ヨリ生ズル曲ゲモーメントノ誤差ヲ必要ニ應ジテ別ニ計算スルトシテ上ノ式ヨリ E ヲ見出スコトガ出來ル.

例題 2. 一個ノ眞直ナル梁 AB アリテ其兩端 A, B 並ニ中間ノ一點 O ニ於テ支ヘラレナガラ或ル荷重ヲ負フ場合.

127 圖ニ於テ $AB=l$, $AO=a$, $BO=b$ トシテ與ヘラレタ荷重ニ對スル



127 圖

O 點ノ支力 R ヲ見出スタメニ Castigliano ノ定理ヲ應用シヤウ. 先ヅ梁 AB ガ兩端ノミデ支ヘラレナガラ與ヘラレタ荷重丈ケヲ受ケル場合ノ曲ゲモーメントハ力ノ平衡ニ關スル靜力學ノ定理カラ容易ニ計算スルコトガ出來ル故此處デハ任意ノ點ニ於ケル前述ノモーメントヲ單ニ M_0 トシテ表ス. 然ル時ハ AO 間ニ於テ A ヨリ x ナル距離ノ曲ゲモーメントハ

$$M=M_0-\frac{Rb}{l}x.$$

又 OB 間ニ於テハ

$$M=M_0-\frac{Ra}{l}(l-x).$$

故ニ E 及 I ヲ常數トシテ(5)カラ變形ノ仕事ヲ求メレバ

$$A=\frac{1}{2EI}\left[\int_0^a\left(M_0-\frac{Rb}{l}x\right)^2dx+\int_a^l\left(M_0-\frac{Ra}{l}(l-x)\right)^2dx\right].$$

偖支點 O ノ移動ヲ零ト假定シテ上式ヲ R ニ對シテ微分シ且零ニ等シクオケバ

$$\int_0^a\left(M_0-\frac{Rb}{l}x\right)bx\,dx+\int_a^l\left(M_0-\frac{Ra}{l}(l-x)\right)a(l-x)dx=0,$$

卽

$$\frac{R}{3}a^2b^2=b\int_0^a M_0x\,dx+a\int_a^l M_0(l-x)dx.$$

此式ノ右邊ハ M_0 ガ x ノ函數トシテ判レバ計算サレル故之ニ依テ未知量 R ガ定マル.

例ヘバ一樣ニ配布サレタ密度 p ノ荷重ニ對シテハ

$$M_0=\frac{pl}{2}x-\frac{px^2}{2}.$$

故ニ

$$\int_a^l M_0\,dx=\frac{pl}{4}(l^2-a^2)-\frac{p}{6}(l^3-a^3)$$

$$=\frac{pl^3}{12}-\frac{pla^2}{4}+\frac{pa^3}{6},$$

$$\int_0^a M_0x\,dx=\frac{pla^3}{6}-\frac{pa^4}{8},$$

$$-\int_a^l M_0x\,dx=-\frac{pl}{6}(l^3-a^3)+\frac{p}{8}(l^4-a^4)$$

$$=-\frac{pl^4}{24}+\frac{pla^3}{6}-\frac{pa^4}{8}.$$

從テ

$$\frac{R}{3}a^2b^2=p\left(-\frac{l^2a^3}{12}+\frac{la^4}{24}+\frac{al^4}{24}\right),$$

又ハ

$$Rab^2=\frac{pl}{8}(l^3-2a^2l+a^3).$$

ヲ更ニ簡單ニスレバ

$$R=\frac{pl(a^2+3ab+b^2)}{8ab}.$$

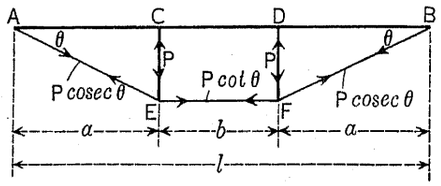
R ガ見出サレル時ハ他ノ支力ハ

$$A=\frac{pl}{2}-\frac{Rb}{l},$$

$$B=\frac{pl}{2}-\frac{Ra}{l}$$

トシテ直ニ求メラレ應力ノ計算ハ茲ニ述ベル迄モナク容易ニ之ヲナスコトガ出來ル.

例題 3. 兩端 A 及 B ニ於テ支ヘラレタ長サ $l=2a+b$ ニ等シイ梁ニ 128



128 圖

圖ノ如ク AE, EF, FB, CE, DF ナル五本ノ棒ヲ取付ケテ之ヲ强メル. 但 $AC=BD=a$ 並ニ $CE=DF=a\tan\theta$ トスル. 此時 AB 上ニ或ル荷重ヲ與ヘレバ梁ニ對シテ棒ハ如何ナル力ヲ及ボスベキカ.

此問題ニ於テ $A, B, C, \cdots$ 等ノ諸點ニ於ケル連接ハ緩ミノナイ併シ滑カナピンヲ以テシ從テ棒ノ各部ハ悉ク引キ又ハ壓シノミヲ受ケルモノト假定シヤウ.

今全構造ヲ梁ト棒トノ二ツニ分ケテ其代リニ $A, B, C, \cdots$ ノ諸點デ方向ノミ知ラレテ大サノ未知ナル外力ガ作用シテ居ルモノト考ヘル. 先ヅ CE 及 DF ヲ壓ス力ヲ夫レ夫レ P ニテ表セバ平衡ノ條件ニヨリテ AE, BF ハ $P\operatorname{cosec}\theta$ ニ等シイ力ニテ又 EF ハ $P\cot\theta$ ニテ共ニ引カレルコトガ明カデアル. 而シテ P ガ CE 及 DF ヲ壓スト同時ニ AB 上ニ等大ノ荷

ガ下カラ上ニ向テ作用スルノハ當然デアル. 尙 AB 上ノ與ヘラレタ荷重ノ任意ノ點ニ於ケル曲ゲノモーメントヲ一般ニ M_0 デ示ス. 其値ハ荷重ガ定マレバ容易ニ計算サレル.

101 節ノ末段ニ述ベタ方法ヲ用ヰテ本題ヲ解クタメニ梁ト棒トノ變形ノ仕事 A_1 及 A_2 ヲ書カネバナラヌ. A_1 ハ AB ニ働ク荷重ガ與ヘラレレバ P ヲ含ム式トシテ計算サレル. 卽 A_1 中ニハ AB ヲ曲ゲル偶力ノタメノ仕事並ニ其軸ノ方向ニ壓ス力 $P\cot\theta$ ノタメノ仕事トアツテ偶力ノ方ニハ與ヘラレタ荷重カラ來ル M_0 ト P ノ函數トシテ顯レ來ルモノトノ兩ツガ含マレテ居ル.

偖 A 點ヨリノ距離 x ニ等シイ任意ノ一點ニ於テ未知荷重 P, P ヨリ來ルモーメントヲ求メルニ先ヅ AC 上ニ於テハ

$$M_1=-Px.$$

又 CD 上ニ於テハ

$$M_1=-Px+P(x-a)=-Pa.$$

之等ノモーメントニ M_0 ヲ加ヘレバ AC 上ニ於テハ

$$M=M_0-Px.$$

又 CD 上ニ於テハ

$$M=M_0-Pa$$

トナル. 故ニ梁ノ變形ノ仕事ハ E 及 I ガ不變ナリトノ假定ノ下ニ次ノ樣ニナル.

$$A_1=\frac{1}{EI}\int_0^a(M_0-Px)^2dx+\frac{1}{2EI}\int_a^{a+b}(M_0-Pa)^2dx+\frac{1}{2}P^2\cos^2\theta\frac{2a+b}{Ef}.$$

$I=fi^2$ トオケバ

$$A_1=\frac{1}{2Ef}\left[\frac{1}{i^2}\left(2\int_0^a(M_0-Px)^2dx+\int_a^{a+b}(M_0-Pa)^2dx\right)+P^2\cot^2\theta(2a+b)\right].$$

以上ノ計算ニ於テ梁ヲ縱ニ壓ス力 $P\cot\theta$ ノタメノ仕事トシテ單ニ壓縮ノミヲ考ヘ彈性線ノ撓ミノタメニ生ズル彎曲ハ度外視シタノデアル. 之ハ彎曲ノ小ナル多クノ場合ニ當然許サレルベキ假定デアル.

次ニ棒ニ對シテハ AE, BF ニ作用スル力ガ $P\operatorname{cosec}\theta$ デ EF ニ作用スル力ガ $P\cot\theta$ デアルカラ之等ノ部分ニ對シテ記號 E_1, f_1 ヲ用ヰ又 P ノ作用ヲ受ケル CE, DF ニ對シテ E_2, f_2 ヲ用ヰル時ハ次ノ式ヲ得ル.

$$A_2 = P^2\operatorname{cosec}^2\theta\,\frac{a\sec\theta}{E_1f_1} + P^2\cot^2\theta\,\frac{b}{2E_1f_1} + P^2\frac{a\tan\theta}{E_2f_2}.$$

故ニ全構造ニ對シテ

$$A = A_1 + A_2$$

$$= \frac{1}{2Ef}\left[\frac{1}{i^2}\left(2\int_0^a (M_0-Px)^2dx + \int_a^{a+b}(M_0-Pa)^2dx\right) + P^2\cot^2\theta(2a+b)\right]$$

$$+P^2\left[\frac{1}{E_1f_1}\left(a\sec\theta\operatorname{cosec}^2\theta + \frac{b}{2}\cot^2\theta\right) + \frac{a}{E_2f_2}\tan\theta\right].$$

而シテ(19)ニヨリテ $\dfrac{\partial A}{\partial P}=0$ ナル故

$$\frac{1}{2Ef}\left[\frac{1}{i^2}\left(4\int_0^a (Px-M_0)x\,dx + 2\int_a^{a+b}(Pa-M_0)a\,dx\right) + 2P\cot^2\theta(2a+b)\right]$$

$$+2P\left[\frac{1}{E_1f_1}\left(a\sec\theta\operatorname{cosec}^2\theta + \frac{b}{2}\cot^2\theta\right) + \frac{a}{E_2f_2}\tan\theta\right] = 0.$$

即

$$P\left[\frac{a^3}{3Efi^2} + \frac{a^2b}{2Efi^2} + \frac{(2a+b)}{2Ef}\cot^2\theta + \frac{1}{E_1f_1}\left(a\sec\theta\operatorname{cosec}^2\theta + \frac{b}{2}\cot^2\theta\right) + \frac{a}{E_2f_2}\tan\theta\right]$$

$$= \frac{1}{Efi^2}\int_0^a M_0x\,dx + \frac{a}{2Efi^2}\int_a^{a+b} M_0\,dx.$$

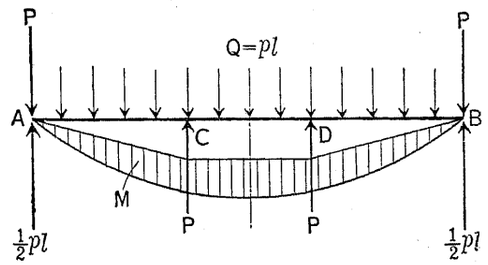
從テ

$$P = \frac{3}{n}\,\frac{2\int_0^a M_0x\,dx + a\int_a^{a+b} M_0\,dx}{a^2(2a+3b)},$$

但 $n = 1 + 3\dfrac{2a+b}{2a+3b}\dfrac{i^2}{a^2}\cot^2\theta$

$$+\frac{3Ef}{E_1f_1}\frac{i^2}{a(2a+3b)}\left(2\sec\theta\operatorname{cosec}^2\theta + \frac{b}{a}\cot^2\theta + \frac{2E_1f_1}{E_2f_2}\tan\theta\right).$$

此問題ノ一例トシテ與ヘラレタ荷重ガ一樣ニ配布サレタ力 $Q=pl$ ナル場合ヲトル. 129圖. 然ル時ハ



129 圖

$$M_0 = \frac{Qx}{2} - \frac{px^2}{2}.$$

即

$$\int_0^a M_0x\,dx = \int_0^a\left(\frac{Qx^2}{2} - \frac{px^3}{2}\right)dx = \frac{Qa^3}{6} - \frac{pa^4}{8},$$

$$\int_a^{a+b} M_0\,dx = \frac{1}{2}\int_a^{a+b}(Qx - px^2)dx$$

$$= \frac{Q}{4}(2ab+b^2) - \frac{p}{6}(3a^2b+3ab^2+b^3).$$

故ニ

$$2\int_0^a M_0x\,dx + a\int_a^{a+b} M_0\,dx$$

$$= \frac{Q}{12}(4a^3+6a^2b+3ab^2) - \frac{p}{12}(3a^4+6a^3b+6a^2b^2+2ab^3).$$

然ルニ $Q=pl=p(2a+b)$ ナル故上ノ式ハ下ノ樣ニナル.

$$\frac{pa}{12}\left[(2a+b)(4a^2+6ab+3b^2) - (3a^3+6a^2b+6ab^2+2b^3)\right]$$

$$= \frac{pa}{12}(5a^3+10a^2b+6ab^2+b^3).$$

從テ

$$P = \frac{p(5a^3+10a^2b+6ab^2+b^3)}{4na(2a+3b)}.$$

數値ノ計算ヲ示スタメニ次ノ樣ナ場合ヲ取ル.

$$a = 265\,cm,$$

$$b = 380\,cm,$$

$$l = 2\times 265 + 380 = 910\,cm.$$

梁ヲ木材トシ其横斷面ヲ矩形(幅 27 cm, 高 54 cm) トシテ

$$E = 100\,000\,kg/cm^2,$$

$$f = 27\times 54 = 1458\,cm^2,$$

$$I = fi^2 = \frac{1}{12}\times 27\times 54^3 = 354\,000\,cm^4.$$

又棒ヲ軟鋼トシテ

$$E_1 = 2\,100\,000\,kg/cm^2, \qquad E_2 = E_1,$$

$$f_1 = \frac{\pi}{4}2.54^2 = 5.07\,cm^2, \qquad f_2 = f_1.$$

尙 $\theta = 15^0$ トスレバ

$$\cot\theta = 3.732, \qquad \tan\theta = 0.268,$$

$$\sec\theta = \frac{1}{0.966}, \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{0.259}.$$

之等ノ數ヲ用ヰテ計算スレバ

$$n = 2.238, \qquad P = 162.7p.$$

曲ゲモーメントハ AC ニ於テ

$$M = \frac{p}{2}(lx - x^2) - Px = \left(292.3x - \frac{x^2}{2}\right)p.$$

又 CD 上ニ於テハ

$$M = \frac{p}{2}(lx - x^2) - Pa$$

$$= \left(-162.7\times 265 + 455x - \frac{x^2}{2}\right)p.$$

即 129 圖ニ於テ縱ノ罫線ヲ以テ區別シタ M 線圖ノ示ス樣ニ梁ノ中央ニ於テ最大ノ曲ゲモーメントガ起リ其値ハ

$$M_{max} = 60\,413p.$$

之ガタメニ生ズル應力ハ

$$\sigma_1 = \pm\frac{Me}{I} = \pm\frac{60\,413\times 27}{354\,000}p = \pm 4.6p,$$

又梁ノ軸ニ平行ナル力ハ

$$P\cot\theta = 162.7\times 3.732p = 607p.$$

之ガタメニ生ズル應力ハ

$$\sigma_2 = -\frac{607}{1458}p = -0.42p.$$

從テ梁ノ受ケル應力ハ

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = +4.2p \text{ 及 } -5.0p.$$

次ニ軟鋼棒ニ起ル應力ヲ計算スルニ先ヅ AE 及 BF ニ對シテハ

$P\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{162.7}{0.259}p = 628\,p$ ナル故

引張 $\sigma = \dfrac{628}{5.07}p = 124.0p,$

EF ニ對シテハ

引張 $\sigma = \dfrac{607}{5.07}p = 119.7p,$

又 CE 及 DF ニ對シテハ

壓縮 $\sigma = \dfrac{162.7}{5.07}p = 32.1p.$

例ヘバ p ヲ 1 cm ニ付 8 kg トスレバ木材中ノ最大應力ハ壓縮ノ 40 kg/cm^2 デ又鋼材中ノ最大應力ハ AE 及 BF ニ對スル引張ノ 992 kg/cm^2 デアル.