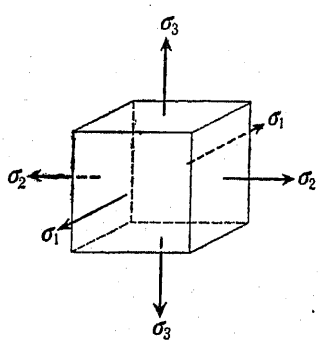
XVI. 應力ト變形.

92. 垂直應力ト伸ビ.

前章ニ於テ述ベタ事柄ハ變形ノ幾何學デアツテ物體ノ性質ニハ說キ及ボシテ居ナイ. 又XIV章デ論ジタ事ハ力ノ平衡論ノ應用ニ過ギヌ. 而シテ變形ト力トノ間ノ關係ヲ用ヰルコトニヨリテ初メテ之等兩ツノ研究ガ結ビ付ケラレルノデアル. 本節デハ物體ガ正比例ノ法則ニ從フ完全ナ彈性體ナルノミデナク次ニ說明スル樣ニ二方又ハ三方ニ應力ヲ組合セタ場合ニモ上述セル如キ應力及變形間ノ關係ガ差支ヘナク適用サレルモノト見テ計算ヲ行ヒ應力成分 $\sigma_x, \cdots$ 並ニ $\tau_x, \cdots$ ヲ彈性變位 u, v, w ニテ示ス式ヲ導ク可ク試ミヤウ.

物體中ニ 123 圖ノ如キ直角六面體ヲ考ヘ其表面ニ應力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ガ一組宛互ニ直角ヲナシテ作用スルトセバ應力ト伸ビトノ間ノ關係ハ如何デアルカ. 先ヅ最初ニ σ_1 ノミガ働キ此方向ニ伸ビ ε_x ヲ生ズルモノトスレバ兩者ノ關係ハ $\sigma_1 = E\varepsilon_x$ デ表サレ且之ト直角ノ方向ニ伸ビ $-\frac{\varepsilon_x}{m}$ ヲ起ス.



123 圖

次ニ σ_1 ガ働カズシテ σ_2 ノミガ働ク時此方向ノ伸ビヲ ε_y トスレバ之ニ直角ノ方向ノ伸ビハ $-\frac{\varepsilon_y}{m}$ ニ等シク又單ニ σ_3 ノミガ作用スル時此方向ノ伸ビヲ ε_z トスレバ之ニ直角ノ方向ノ伸ビハ $-\frac{\varepsilon_z}{m}$ トナル. 而シテ若シ材料ノ性質ガ各方向ニ於テ一樣ナラバ前ト同ジ係數 E ヲ以テ σ_2 及 σ_3 ヲ除スコトニヨリテ夫レ夫レ ε_y 及 ε_z ガ求メラレル.

偖之等ノ應力ガ皆同時ニ六面體上ニ作用スレバ玆ニ立體的ノ或ル應力狀態ガ出來ル. 而シテ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ハ明カニ主應力デアル. 此時主軸ニ

沿フ伸ビ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ノ値ハ若シ上ノ如キ部分的ノ伸ビヲ組合セテ宜シイナラバ次ノ樣ニナル.

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_y+\varepsilon_z}{m},\\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_y - \frac{\varepsilon_z+\varepsilon_x}{m},\\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_z - \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{m}.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

此組合セガ合理的ナルカ否ヤハ此假定ニ基イテ導カレタ計算ノ結果ガ實際ニ合フカ否ヤニヨリテ決セラレル可キデアルガ從來ノ經驗上之ガ差支ヘナイモノトシテ宜シイ.

次ニ(1)ノ右邊中ニ於ケル $\varepsilon_x, \cdots$ ノ代リニ $\sigma_1, \cdots$ ノ項ヲ用ヰレバ

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{m}\right),\\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \frac{\sigma_3+\sigma_1}{m}\right),\\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{m}\right).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

之等ノ式ヨリ見レバ或ル軸ノ方向ニ於ケル伸ビハ正ノ側面應力ノタメニ單軸應力ノ場合ヨリモ小トナリ負ノ側面應力ノタメニ此場合ヨリモ大トナル.

(2)ノ各式ノ兩邊ヲ夫レ夫レ加ヘ合セレバ

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left(1-\frac{2}{m}\right)(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3).$$

然ルニ $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = e$ ナル故

$$e = \frac{m-2}{m}\,\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{E},$$

又ハ

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 = \frac{m}{m-2}Ee. \tag{3}$$

偖(2)ノ第一式ヨリ

$$m\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3 = mE\varepsilon_1.$$

之ヲ(3)ニ加ヘレバ

$$\sigma_1(m+1) = mE\left(\varepsilon_1+\frac{e}{m-2}\right),$$

又ハ

$$\sigma_1 = \frac{m}{m+1}E\left(\varepsilon_1+\frac{e}{m-2}\right).$$

同樣ナル形ノ式ガ σ_2 及 σ_3 ニ對シテモ書ケル. 此處デ上ノ右邊括弧外ノ常數ヲ次ノ樣ニ置ク

$$\frac{m}{m+1}E = 2G. \tag{4}$$

然ル時ハ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{m}{m+1}E\left(\varepsilon_1+\frac{e}{m-2}\right) = 2G\left(\varepsilon_1+\frac{e}{m-2}\right),\\ \sigma_2 &= \frac{m}{m+1}E\left(\varepsilon_2+\frac{e}{m-2}\right) = 2G\left(\varepsilon_2+\frac{e}{m-2}\right),\\ \sigma_3 &= \frac{m}{m+1}E\left(\varepsilon_3+\frac{e}{m-2}\right) = 2G\left(\varepsilon_3+\frac{e}{m-2}\right).\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

之等ノ式ハ主軸ノ方向ニ於ケル應力ト伸ビトノ間ノ關係ヲ表スモノデアルガ任意ノ軸ニ就テモ同樣ナル關係ガ存在スルコトヲ次ニ示シタイト思フ. 之ガタメ主軸ノ方向ニ座標軸ヲ取リXIV章(10)式即

$$\sigma = \sigma_1\cos^2\alpha+\sigma_2\cos^2\beta+\sigma_3\cos^2\gamma$$

ノ右邊ニ上ノ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ヲ導ク時ハ

$$\sigma = 2G\left(\varepsilon_1\cos^2\alpha+\varepsilon_2\cos^2\beta+\varepsilon_3\cos^2\gamma+\frac{e}{m-2}\right).$$

然ルニ前章(6)ニヨリテ

$$\varepsilon = \varepsilon_1\cos^2\alpha+\varepsilon_2\cos^2\beta+\varepsilon_3\cos^2\gamma$$

ナレバ

$$\sigma = 2G\left(\varepsilon+\frac{e}{m-2}\right). \tag{6}$$

此結果ハ任意ノ方向ニ於ケル σ 及 ε ニ對シテ眞デアルカラ互ニ直角ヲナス任意ノ三軸ニ對シテモ亦眞デアラネバナラヌ. 故ニ此意味デ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= 2G\left(\varepsilon_x+\frac{e}{m-2}\right),\\ \sigma_y &= 2G\left(\varepsilon_y+\frac{e}{m-2}\right),\\ \sigma_z &= 2G\left(\varepsilon_z+\frac{e}{m-2}\right),\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

但 $e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z.$

(7)ノ三式ヲ加ヘレバ(3)ト同樣ニ

$$\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=2G\frac{m+1}{m-2}e=\frac{m}{m-2}Ee.$$

元來 $\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$ 及 $\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$ ハ共ニ座標軸ノ取リ方ニ無關係デアルカラ無論(3)カラ直ニ此式ガ書ケル. 又此式ヨリ(7)ノ第二,第三兩式ニ $\frac{m+1}{m}$ ヲ乘ジタモノヲ引ケバ次ノ第一式ガ得ラレル. 而シテ x, y, z ヲ順次交代サセテ他ノ二式ヲ得ル.

$$\left.\begin{aligned}E\varepsilon_x &= \sigma_x-\frac{\sigma_y+\sigma_z}{m},\\ E\varepsilon_y &= \sigma_y-\frac{\sigma_z+\sigma_x}{m},\\ E\varepsilon_z &= \sigma_z-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{m}.\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

93. 剪斷應力ト辷リ.

玆ニ常數 G ノ意義ヲ明カニシテ置キタイ. 上ノ計算ニ於テハ(4)ニ示ス樣ニ G ヲ單ニ彈性係數 E 及縱橫ノ伸ビノ比 m ノ二ツニヨリテ定マル數卽 $G=\frac{m}{m+1}\frac{E}{2}$ ト定義シタノデアルガ之ハ曾テ IV 章ニ說明シタ樣ニ辷リト剪斷應力トヲ結ビ付ケル係數ナノデ其由來ハ次ノ樣デアル.

今(6)式ノ右邊 ε ノ代リニ前章カラ任意ノ直交座標軸ニ對スル式(4)ヲ導ク時ハ

$$\sigma=2G\Big(\varepsilon_x\cos^2\alpha+\varepsilon_y\cos^2\beta+\varepsilon_z\cos^2\gamma$$
$$+\gamma_x\cos\beta\cos\gamma+\gamma_y\cos\gamma\cos\alpha+\gamma_z\cos\alpha\cos\beta+\frac{e}{m-2}\Big).$$

次ニ又XIV章(6)ニ上ノ(7)ヲ入レル時ハ

$$\sigma=2G\left(\varepsilon_x\cos^2\alpha+\varepsilon_y\cos^2\beta+\varepsilon_z\cos^2\gamma+\frac{e}{m-2}\right)$$
$$+2\left(\tau_x\cos\beta\cos\gamma+\tau_y\cos\gamma\cos\alpha+\tau_z\cos\alpha\cos\beta\right).$$

之等兩式ノ右邊ヲ相等シクオイテ兩方ニ共通ノ諸項ヲ消シ去レバ

$$G\left(\gamma_x\cos\beta\cos\gamma+\gamma_y\cos\gamma\cos\alpha+\gamma_z\cos\alpha\cos\beta\right)$$
$$=\tau_x\cos\beta\cos\gamma+\tau_y\cos\gamma\cos\alpha+\tau_z\cos\alpha\cos\beta.$$

コノ等式ガ常ニ成立スルタメニハ

$$\left.\begin{aligned}\tau_x &= G\gamma_x,\\ \tau_y &= G\gamma_y,\\ \tau_z &= G\gamma_z.\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

夫レ故問題ノ G ハ之ヲ辷リ γ ニ乘ズル時之ニ相當スル應力 τ ヲ與ヘル如キ彈性係數デアル. 而シテ彈性常數 E, G, m ノ間ニハ(4)ノ關係ガ存在スル故其中ノ二ツヲ與ヘレバ他ノ一ツハ從テ定マルコトガ判ル.

94. 應力ト變位. 彈性體ノ一般方程式.

上述シタ樣ニ材料ガ各方向ニ一樣ノ彈性ヲ有シ且應力及伸ビノ關係ガ組合セノ法則ニ從フトスレバ任意ノ直交座標軸ニ對シテ(7)及(9)ノ如キ關係式ガ成立ツノデアツテ之等各式ノ右邊中ニアル伸ビ及辷リハ已ニ前章ニ於テ示シタヤウニ彈性變位 u, v, w ノ微分係數ニヨリテ表サレル故結局六ツノ應力成分ガ皆 u, v, w ノ微分係數ヲ用ヰテ表サレウルコトニナル.

玆ニ於テ未知數ガ之等三ツニ歸着スル譯デアル. 卽變形成分ニ對シテ微分係數ノ一次式卽前章ノ(3)ヲ用ヰレバ

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{e}{m-2}\right),\\
\sigma_y &= 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{e}{m-2}\right),\\
\sigma_z &= 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{e}{m-2}\right),\\
\tau_x &= G\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right),\\
\tau_y &= G\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\\
\tau_z &= G\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right),\\
\text{但}\quad & \\
e &= \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

今之等ノ式ヲ直角六面體ノ平衡論ニ立脚シタ方程式卽XIV章ノ(3)ノ中ニ入レル時ハ

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x}+\frac{X}{G}&=0,\\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial y}+\frac{Y}{G}&=0,\\
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial z}+\frac{Z}{G}&=0.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

之等ガ彈性學理論ノ基礎トナル一般方程式デ問題ニ應ジテ與ヘラレタ條件ニ適スル樣之ヲ解クノガ數學的彈性論ノ仕事デアル.

(11)ノ各式ニ於ケル最初ノ三項ハ次ノ樣ナ記號ヲ以テ表スノガ便利デアル. 卽

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

然ル時ハ

$$\Delta u+\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x}+\frac{X}{G}=0,$$

$$\left.\begin{aligned}
\Delta v+\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial y}+\frac{Y}{G}&=0,\\
\Delta w+\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial z}+\frac{Z}{G}&=0.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

次ニ之等各式ヲ夫レ夫レ x, y, z ニ對シテ微分シタ後加ヘル時ハ

$$\frac{m-1}{m-2}\Delta e+\frac{1}{2G}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=0. \tag{13}$$

モシ此方程式ノ第二項ガ零トナレバ

$$\Delta e=0. \tag{14}$$

尙 e ガ單ニ x 及 y ノミノ函數ナルカ又ハ $\frac{\partial^2 e}{\partial z^2}=0$ ナラバ(14)ハ次ノ樣ニナル.

$$\Delta e=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)e=0. \tag{15}$$

例題 1. 任意ノ形ノ物體ノ表面ニ液壓 p' ヲ加ヘテ生ズル變形ノ有樣ハ如何.

此時ノ應力狀態ハXIV章ノ例題4ニヨリテ次ノ如クデアル.

$$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=-p',$$

$$\tau_x=\tau_y=\tau_z=0.$$

故ニ(10)ニヨリテ

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{p'}{2G}-\frac{e}{m-2},$$

並ニ

$$\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

卽伸ビハ物體內ノ任意ノ點ニ於テ各方向共ニ相等シク又角ノ變化ハ全クナイ. 最初ノ三式ヨリ加法ニヨリテ

$$\frac{m+1}{m-2}e=-\frac{3p'}{2G},$$

又ハ

$$e=-\frac{m-2}{m+1}\frac{3p'}{2G}.$$

此式ニ於テ $k=\frac{2}{3}\frac{m+1}{m-2}G$ トオケバ單位容積變化ノ絕對値ハ $-e=\frac{p'}{k}$ トナリ從テ

$$k=-\frac{p'}{e}.$$

k ハ液壓ノ密度ヲ e ノ絕對値デ除シタモノニ等シク從テ之ハ單位ノ容積變化ヲ生ズル壓力デアル. 之ヲ壓縮ノ係數ト呼ブ. 尙角ノ變化ナク u, v, w ハ明カニ夫レ夫レ x, y, z ノミノ函數デアルカラ(此事ノ數理的證明ハ玆ニ略ス)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{p'}{3k}$$

ヨリ積分ニ依テ次ノ式ガ導カレル.

$$\frac{u}{x}=\frac{v}{y}=\frac{w}{z}=-\frac{p'}{3k}.$$

例題 2. 一ツノ垂直分應力ガ直線狀ニ變ジ其他ノ應力ハ皆零ナル時ノ變形ヲ求メル事.

應力 σ_x ガ z ニ比例シ卽 $\frac{Ez}{\rho}$ ト書ケルモノトシヤウ. 但 E 及 ρ ハ共ニ常數デアル. 之ハ x 軸ヲ軸トスル一樣ナル斷面ノ棒ガ一樣ノ曲ゲモーメント $\frac{EI}{\rho}$ ヲ受ケル場合デアツテ (III章) XIV章ノ平衡式(3)カラ判ル樣ニ棒ノ容積ニ作用スル力 X, Y, Z ハ零デ又同章ノ(4)カラ見ラレル樣ニ其側面ニモ力ノ作用ガナイ筈デアル.

偖(10)ニ於テ假定ニ從ヒ $\sigma_x=\frac{Ez}{\rho}$, $\sigma_y=\sigma_z=0$ トオケバ途中ノ計算ノ後

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z}{\rho},\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{z}{m\rho}.$$

之等ヲ積分スレバ

$$u=\frac{xz}{\rho}+f(y,z),\quad v=-\frac{yz}{m\rho}+g(z,x),\quad w=-\frac{z^2}{2m\rho}+h(x,y).$$

次ニ假定ニヨリテ(10)ノ後ノ三式カラ

$$\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

之等ノ中ニ上ノ u, v, w ノ値ヲ入レル時ハ

$$\frac{\partial g}{\partial z}+\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{y}{m\rho}=0,\quad \frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{x}{\rho}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial x}=0.$$

第一第二兩式カラ h ノ項ヲ消去シテ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial z}.$$

之ト第三式トヲ結ビ付ケレバ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial z}=0.$$

又上ノ三式 $\frac{\partial g}{\partial z}+\cdots=0$, …カラ容易ニ知ル事ハ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}=0.$$

夫レ故 f 及 g ハ夫レ夫レ y, z 並ニ x, z ニ對シテ一次迄ノ式デアル. 併シ座標軸ガ變形ノ際棒ニ固定サレテ之ト行動ヲ共ニスルタメニハ原點ノ彈性變位ハ零デアツテ卽 f 及 g ハ不變數ヲ含マズ且剛性體トシテノ小廻轉ヲ意味スル其一次ノ項モ零デアル事ヲ要スル. 從テ

$$f=g=0.$$

次ニ再ビ上ノ三式ヨリ

$$\frac{\partial h}{\partial x}=-\frac{x}{\rho},\quad \frac{\partial h}{\partial y}=\frac{y}{m\rho}.$$

故ニ積分ニ際シテ前ト同樣ノ注意ヲ以テ

$$h=\frac{y^2}{2m\rho}-\frac{x^2}{2\rho}.$$

上ノ結果ヲ一括スレバ

$$u=\frac{xz}{\rho},$$

$$v=-\frac{yz}{m\rho},$$

$$w=-\frac{1}{2\rho}\left(x^2-\frac{y^2-z^2}{m}\right).$$

棒ノ軸ノ上ニ於テハ $y=z=0$ ナル故

$$w=-\frac{x^2}{2\rho}.$$

之ガ彈性線ノ方程式デアツテ卽棒ノ軸ガ殆ンド圓弧トナリ其半徑ハ ρ ニ等シイ. 次ニ棒ノ任意ノ橫斷面ガ如何ニ變形スルカヲ知ルタメニハ $x=c$ (常數)ト置カウ. 然ル時ハ

$$u=\frac{c}{\rho}z,\quad w=-\frac{1}{2\rho}\left(c^2-\frac{y^2-z^2}{m}\right).$$

斯樣ニ x ノ方向ノ變位ハ z ニ比例スル. 此時 w ノ項ノ爲ニ生ズル多少ノ誤差ヲ省略スレバ近似的ニ橫斷面ガ平面デアルト言ヘル. 又此平面ガ彈性線ニ對シテ直角ナル事モ明カデアル. 卽曲ゲノ理論ニ於テ假定サレタ事ガ剪斷應力ヲ伴ハナイ只今ノ場合ニハ殆ンド眞デアル. 尙 v 及 w ガ一橫斷面上ニ於テ y, z ト共ニ變ズルノハ x ノ方向ニ起ル伸ビニ伴ヒテ生ズル橫ノ方向ノ縮ミカラ來ルモノデ之ハ簡單ナ曲ゲノ計算ニ於テ考ヘナカツタ事デアル. 從テ橫斷面ノ輪廓ガ或ル有樣ニ變形スル. 例ヘバ矩形斷面ノ場合ニ此計算ヲ試ミル事ヲ勸メタイ.