XV. 變形ノ總論.

87. 伸ビ及辷リ.

應力ノ總論ニ於テ用ヰタト同樣直交座標軸ヲ設ケ之ニ對シテ物體ノ一點Pヲ其座標x, y, zニテ定メル. 次ニPヨリ任意ノ直線PQヲ引キ其方向ヲ $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ ヲ以テ表シ且此直線上ニPヨリ極メテ近キ他ノ一點P_1ヲトル. 最初 $PP_1=ds$ トスレバ物體ノ變形ト共ニdsハ變ジテ $ds(1+\varepsilon)$ トナル. εハPQノ方向ニ於ケル長サノ變化ノ割合ヲ示スモノデ所謂伸ビデアル. 簡單ナ棒ニ於ケルεノ意義ハ已ニ說明シタ通リデ此處ニ述ベルモノモ其性質ハ決シテ別物デナイ. 卽εガ正又ハ負ナルニ從テdsハ伸ビ又ハ縮ム. 本節ノ問題ハ物體中ノ任意ノ一點ニ於ケル伸ビεヲ方向餘弦ノ函數トシテ示ス事デアル.

偖物體ガ變形スレバP點ハ移動スル故x, y, zハ夫レ夫レ或ル變化ヲ生ズルコト當然デアツテ此變化卽P點ノ變位ヲu, v, wトスレバP_1ノ座標$(x+dx, y+dy, z+dz)$ハ次ノ如キ變化ヲ受ケル.

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u+\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz, \\ v_1 &= v+\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz, \\ w_1 &= w+\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

又PP_1ノ距離ノ二乘ハ變形前

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

ナリシモ變形後ニハ

$$(1+\varepsilon)^2ds^2=(dx+u_1-u)^2+(dy+v_1-v)^2+(dz+w_1-w)^2.$$

此式ニ於ケルεハ1ニ對シテ其二乘ヲ省略シテ差支ヘナク又(1)ノ各式ノ右邊ニ於ケル微分係數ヲ小ナル數ト見做シテ差支ナケレバ其二乘

ヲ省略シテ宜シイ. 從テ

$$ds^2+2\varepsilon ds^2=dx^2+dy^2+dz^2+2(u_1-u)dx+2(v_1-v)dy+2(w_1-w)dz.$$

此兩邊ヨリ前ノ ds^2 ニ對スル式ノ相當邊ヲ引キ且 $2ds^2$ ヲ以テ兩側ヲ除ス時ハ

$$\varepsilon=\frac{u_1-u}{ds}\frac{dx}{ds}+\frac{v_1-v}{ds}\frac{dy}{ds}+\frac{w_1-w}{ds}\frac{dz}{ds}.$$

此處ニ(1)式ヨリ $(u_1-u),\cdots$ ヲ導ク時ハ

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\quad \frac{dy}{ds}=\cos\beta,\quad \frac{dz}{ds}\cos\gamma$$

ナル故

$$\varepsilon=\frac{\partial u}{\partial x}\cos^2\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos^2\beta+\frac{\partial w}{\partial z}\cos^2\gamma+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos\beta\cos\gamma$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos\gamma\cos\alpha+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos\alpha\cos\beta. \qquad (2)$$

若シ上ニ假定シタ樣ニ微分係數 $\frac{\partial u}{\partial x},\cdots$ 等ガ小デナイ場合ニハ(2)ノ餘弦各項ノ係數ハ之等微分係數ノ一次ノ項ノミニテハ不充分デアツテ二次ノ項ヲ補ハネバナラヌ. 此計算ハ時トシテ必要ガアルケレドモ多クノ問題ニ於テハ上ノ通リ一次ノ項ノミデ足ル故二次ノ項ヲ入レタ計算ハ後ニ讓リテ只今ハ此程度ニ止メテ置ク.

之ニテ計算ノ目的ハ略ボ達セラレタ譯デアルガ(2)ノ右邊各項ノ係數ハ特種ノ意義ヲ有ツテ居ル故之ヲ明カニシタイ. 先ヅ上ノ式ニ順次

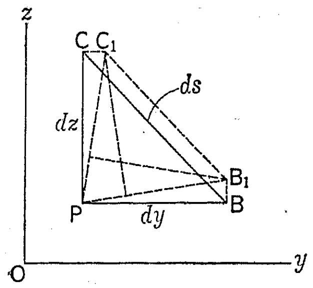
$$\alpha=0,\quad \beta=0,\quad \gamma=0$$

等ヲ置ケバ座標軸ニ平行ナル方向ノ伸ビガ求メラレル. 之等ヲ夫レ夫レ添付ノ記號x, y, zニテ區別スレバ

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}.$$

故ニεノ式ニ於ケル餘弦二乘項ノ係數ハ座標軸ニ平行ナル方向ニ起ル伸ビニ等シイ.

次ニ餘弦相乘積ノ係數ヲ論ズルタメニP點ヲ通リ變形前座標軸ニ平行ナル小直線ヲ引キ置キ之等ノ間ノ角ガ變形ト共ニ如何ニ變ズルヤヲ考ヘヤウ. 例ヘバPヲ通ルdy, dzナル二直線ハ變形ノタメ直角ヲナサヌ樣ニナリdyノ末端BハB_1ニ又dzノ末端CハC_1ニ移ル. 122圖. 曾テ定義シタ樣ニ直角ノ變化ハ辷リデアルカラ圖ニ於テ$\frac{\pi}{2}-\angle B_1PC_1$ハ辷リデアル. 又互ニ單位ノ距離ニアル平行ノ二平面ガ辷ル割合ガ辷リデアルカラPB_1ノPC_1上ニ於ケル射影ヲPB_1ニテ除シ若クハPC_1ノPB_1上ニ於ケル射影ヲPC_1ニテ除シタルモノガ辷リデアル. 而シテ之等ノ比ハ何レモ$\angle B_1PC_1$ノ餘角デアルカラ矢張リ上ト同樣ノ値ニナルコト素ヨリデアル. 偖x軸ニ直角ナル平面ニ起ル角ノ變化タル辷リヲγ_xトシテ表セバ



122 圖

$$\gamma_x=\frac{\pi}{2}-\angle B_1PC_1$$

$$=\angle BPB_1+\angle CPC_1.$$

然ルニ

$$BB_1=\frac{\partial w}{\partial y}dy,$$

$$CC_1=\frac{\partial v}{\partial z}dz$$

ナル故

$$\gamma_x=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}.$$

同樣ニシテ他ノ軸ニ直角ナル平面ヲ取リテγ_y及γ_zヲ求メルコト容易デアル. 而シテεノ式ノ餘弦相乘積ノ係數ガ之等ノ辷リニ外ナラヌコトガ判ル. 以上$\varepsilon_x,\cdots$並ニ$\gamma_x,\cdots$ヲ一括シテ表セバ下ノ如クデアル.

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x},\\
\varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y},\\
\varepsilon_z&=\frac{\partial w}{\partial z},\\
\gamma_x&=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z},\\
\gamma_y&=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},\\
\gamma_z&=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}.
\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

從テ(2)ハ次ノ樣ニ書ケル.

$$\varepsilon=\varepsilon_x\cos^2\alpha+\varepsilon_y\cos^2\beta+\varepsilon_z\cos^2\gamma$$
$$+\gamma_x\cos\beta\cos\gamma+\gamma_y\cos\gamma\cos\alpha+\gamma_z\cos\alpha\cos\beta.\qquad(4)$$

88. 變形ノ楕圓體. 主要ナル伸ビ.

物體中ノ任意ノ一點ニ於テ互ニ直交スル座標軸ヲ引キ原點ヲ中心トシテ小ナル半徑dsノ球面ヲ描ケバ球面上ノ任意ノ點ハ座標dx, dy, dzヲ以テ表サレル. 今物體ガ變形ヲ受ケル時ハ座標軸ハ一般ニ傾斜ヲナシ且dx, dy, dzハ變ジテ $dx_1=dx(1+\varepsilon_x)$, $dy_1=dy(1+\varepsilon_y)$, $dz_1=dz(1+\varepsilon_z)$ 等トナルコト前節ニ述ベタトコロヨリ明カデアル. 卽變形前ノ球面上ノ一點(dx, dy, dz)ハ變形後傾斜軸ニ對シテ上ノ座標ヲ有スル位置ニ移ル. 從テ前ニ球面ヲ表シタ方程式

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1$$

ハ變ジテ新シイ軸ニ對スル次ノ式トナル.

$$\left(\frac{dx_1}{ds(1+\varepsilon_x)}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{ds(1+\varepsilon_y)}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{ds(1+\varepsilon_z)}\right)^2=1.\qquad(5)$$

故ニ物體中ノ小球面ハ變形ノタメニ楕圓體トナリ直交軸ハ移リテ共軛

半徑ノ方向ニナル．此楕圓體ヲ稱シテ變形ノ楕圓體ト云フ．

偖(4)式ヲ前章ノ(6)式ト比較スレバ ε ガ σ ニ $\frac{\gamma}{2}$ ガ τ ニ相當シ兩式ノ右邊ハ其形相類似スルコトヲ知ル．故ニ前同樣ノ筆法ヲ應用スレバ物體中ノ任意ノ一點ニハ必ズ互ニ直角ナル三ツノ方向アリテ若シ之等ヲ座標軸トスレバ餘弦相乘積ノ諸項ガ消エルタメニ

$$\gamma_x=\gamma_y=\gamma_z=0$$

トナル筈デアル．從テ之等三軸ノ方向ハ變形後モ依然直角ヲ保ツコトガ判ル．而シテ斯ル方向ハ明カニ前ノ楕圓體ノ主軸ト一致スル故之等三方向ノ一ツハ最大ノ伸ビニ又或ル一ツハ最小ノ伸ビニ當ル．今 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ヲ以テ主軸ノ方向ノ所謂主要ナル伸ビヲ表セバ之等ノ方向ヲ座標軸トシタ場合ノ ε ハ次ノ樣ニナル．

$$\varepsilon=\varepsilon_1\cos^2\alpha+\varepsilon_2\cos^2\beta+\varepsilon_3\cos^2\gamma. \tag{6}$$

89. 主要ナル伸ビヲ見出スコト．

標題ノ伸ビヲ決定スルタメニハ(4)式ノ ε ガ極大,極小及中間ノ極限値ニ達スル條件ヲ用キテ之ニ合スル ε ヲ求メレバ宜シイ．卽斯ル ε ハ方向餘弦ノ微小ナル變化ニ對シテ其値ヲ變ジナイ故先ヅ ε ノ全變化 $\delta\varepsilon$ ヲ求メテ之ヲ零ニ等シクオキ且同時ニ條件式 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1=0$ ノ全變化ニ未知係數 λ ヲ乘ジテ前式ヨリ引キ次ノ三式ノ何レカ一ツヲ零ナラシメル樣 λ ヲ選ベバ他ノ二式モ亦零トナルベキコトヲ證シ得ル故結局下ノ方程式ガ導カレル．

$$\begin{aligned}
2(\varepsilon_x-\lambda)\cos\alpha+\gamma_z\cos\beta+\gamma_y\cos\gamma&=0,\\
\gamma_z\cos\alpha+2(\varepsilon_y-\lambda)\cos\beta+\gamma_x\cos\gamma&=0,\\
\gamma_y\cos\alpha+\gamma_x\cos\beta+2(\varepsilon_z-\lambda)\cos\gamma&=0.
\end{aligned}$$

各式ニ順次 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ ヲ乘ジテ加ヘ合セタ後(4)式ノ關係ヲ用キル時ハ

$$\varepsilon-\lambda=0 \quad 又ハ \quad \lambda=\varepsilon$$

トナル．之ヲ上ノ式ニ入レル時ハ

$$\left.\begin{aligned}
2(\varepsilon_x-\varepsilon)\cos\alpha+\gamma_z\cos\beta+\gamma_y\cos\gamma&=0,\\
\gamma_z\cos\alpha+2(\varepsilon_y-\varepsilon)\cos\beta+\gamma_x\cos\gamma&=0,\\
\gamma_y\cos\alpha+\gamma_x\cos\beta+2(\varepsilon_z-\varepsilon)\cos\gamma&=0.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

之ハ係數2ヲ除イテハ主應力ヲ求メル時ノ式(前章12)ト形ヲ等シクシテ居ル．故ニ之ヨリ餘弦ノ各項ヲ消去シテ ε ニ對スル三次方程式ヲ導キ又計算サレタ ε ヲ入レテ餘弦ヲ出ス手續ハ前ト同樣デアルカラ更ニ之ヲ繰返サヌコトニスル．

只茲ニ附加ヘテオキタイノハ σ ノ時ト同樣ニ矢張リ x, y, z 軸ノ取リ方ニ對シテ不變ノ關係卽

$$\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 \tag{8}$$

ガ存在スル事デアツテ此和ハ次ノ如キ意味ヲ有シテ居ル．初メ容積 $dx\,dy\,dz$ ヲ有スル直角六面體ヲ作リオケバ變形ノタメ容積ハ

$$dx(1+\varepsilon_x)\,dy(1+\varepsilon_y)\,dz(1+\varepsilon_z)=\sim dx\,dy\,dz(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)$$

トナル故最初ノ單位容積ニ對スル增加ハ $\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$ ニ等シイノデアツテ以下之ヲ e ト記ス．卽

$$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z. \tag{9}$$

90. 適合ノ條件及其應用ノ例．

已ニ述ベタ樣ニ六ツノ變形成分(伸ビ及辷リヲ總括シテ暫ク斯樣ニ呼バシテ下サイ)ハ變位ノ三成分 u, v, w ニテ表サレル．故ニ $\varepsilon_x, \dots, \gamma_x \dots$ ヲ互ニ獨立シタ勝手ノ函數ニ等シク取ル事ハ出來ナイ．今 $\varepsilon_x, \dots, \gamma_x \dots$ ガ u, v, w ノ一次式 3) ニテ表サレル場合ニハ

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y},$$

及

$$\frac{\partial^2\gamma_z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}.$$

故ニ最初ノ二式ヲ加ヘレバ第三式ニ等シイ. 卽

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_z}{\partial x\,\partial y}.$$

x, y, z ヲ順ニ交代サセテ他ノ類似ノ式二ツヲ導ク事ガ出來ル.

次ニ又(3)ニヨリテ

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z},\qquad \frac{\partial\gamma_x}{\partial x}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z},$$

$$\frac{\partial\gamma_y}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y},\qquad \frac{\partial\gamma_z}{\partial z}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}.$$

故ニ之ヲ組合セテ

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma_y}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_z}{\partial z}-\frac{\partial\gamma_x}{\partial x}\right).$$

x, y, z ヲ代ヘテ他ノ二ツノ式ヲ導ク事ガ出來ル. 從テ結局次ノ六ツノ式ヲ生ジ之ガ變形成分ニ對スル適合ノ條件トシテ知ラレル.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2\gamma_z}{\partial x\,\partial y},\\ \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}&=\frac{\partial^2\gamma_x}{\partial y\,\partial z},\\ \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}&=\frac{\partial^2\gamma_y}{\partial z\,\partial x}.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\,\partial z}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\gamma_y}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_z}{\partial z}-\frac{\partial\gamma_x}{\partial x}\right),\\ 2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\,\partial x}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_z}{\partial z}+\frac{\partial\gamma_x}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_y}{\partial y}\right),\\ 2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\,\partial y}&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_x}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_y}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_z}{\partial z}\right).\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

上ノ式ノ應用ヲ示ス爲斷面一樣ナル直線軸ノ梁ヲ取リテ變形前ノ梁ノ軸ノ方向ヲ x 軸トシ横斷面ノ主軸ノ方向ニ y 及 z 軸ヲ設ケル. 然ル時ハ普通 $\sigma_y=\sigma_z=\tau_x=0$ トシ殘リノ應力成分中 σ_x ハ中立軸ヨリノ距離 z ニテ示ス)ニ比例シ卽 $\sigma_x=\frac{Mz}{I}$ トナリ(M ハ曲ゲモーメント, I ハ斷面ノ慣性モーメント)又 τ_y, τ_z ハ多少自由ナル假定ノ下ニ求メラレル.

斯ル計算ノ基礎ニハ σ_x ノ爲ニ伸ビ又ハ縮ム物體ノ部分ガ之ト直角ノ方向ノ變形ニヨリテ隣接部分ニ關係ヲ及ボス事ヲ考ヘズ又剪斷應力ノタメニ當然起ルベキ横斷面ノ曲リヲ無視シテ常ニ之ヲ平面ト見做ス等ノ假定ヲ設ケテアル. 夫レ故上ノ應力成分ニ相當スル變形成分ヲ取リテ之ヲ適合ノ條件ニヨリテ吟味シヤウ. 應力ト變形トノ關係ハ次ノ章ニ至リテ詳論スルモ已ニ知ル樣ニ縱横ノ伸ビノ比ハ $-m$ ニ等シキ故

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}=\frac{Mz}{EI},\qquad \varepsilon_y=\varepsilon_z=-\frac{\sigma_x}{mE}=-\frac{Mz}{mEI},\qquad \gamma_x=0.$$

從テ(10)ノ第二式ハ當然滿足サレル. 又散布荷重ナク從テ一定ノ區間內ニ於テ M ガ x ノ一次式ナル場合ニハ γ_y 及 γ_z ガ x ニ無關係トナル故此時ニハ(10)ノ他ノ二式モ當然滿足サレル. 夫レ故斯ル場合ニハ適合ノ條件(10)ハ凡テ滿足サレル.

次ニ他ノ條件(11)ヲ見ルニ上ト同ジ場合ニ就テ其第一式ハ滿足サレ他ノ兩式ガ殘ル. 卽 $\frac{dM}{dx}=S=const.$ トシテ

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_z}{\partial z}-\frac{\partial\gamma_y}{\partial y}\right)=-\frac{2S}{mEI},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_y}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_z}{\partial z}\right)=0.$$

之等ノ式ヨリ見テ直ニ判ル事ハ曲ゲモーメントガ不變デ $S=0$ ノ場合ニハ $\gamma_y=\gamma_z=0$ トスレバ適合條件ガ滿足サレル事デアル.

次ニ上ノ兩式ヲ積分シテ

$$\frac{\partial\gamma_y}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_z}{\partial z}=\frac{2Sy}{mEI}+c.\tag{12}$$

積分常數 c ヲ定メル爲ニ辷リ成分ヲ變位ニテ表セバ上ノ左邊ハ次ノ樣ニ書ケル.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

此式ノ括弧內ヲ見ルニ之ハ前ノ 122 圖ニ於ケル二邊 BP, CP ノ廻轉角 $\angle BPB_1$, $-\angle CPC_1$ ノ和ニ等シキ故只今ノ場合ニハ梁ノ横斷面上ニ於テ

dy, dz ヲ二邊トスル小矩形ノ x 軸ノ周リノ廻轉角ノ平均値ノ二倍ニ等シイ. 從テ若シ $S=0$ ニシテ且積分常數 c ガ零デナケレバ(12)ハ廻轉角ガ距離 x ニ正比例スル事ヲ示シ卽此種ノ變位ハ捩レノ場合ニ相當スル. 依テ c ヲ零トオキ且變形成分ノ代リニ應力ヲ用キル時ハ

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y}-\frac{\partial \tau_z}{\partial z}=\frac{Sy}{(m+1)I}. \tag{13}$$

夫レ故只今ノ問題ニ於ケル二ツノ剪斷應力ハ梁ノ斷面中ニ於テ此微分方程式ヲ滿足シ且斷面ノ周邊ニ於ケル條件ヲ滿足セネバナラヌ. ds ヲ以テ周邊ノ微小部分ヲ表セバ斷面中ニ横ハル周邊ヘノ法線ノ方向餘弦ハ

$$\cos\alpha=0,\qquad \cos\beta=\frac{dz}{ds},\qquad \cos\gamma=-\frac{dy}{ds}.$$

從テ周邊ノ條件ハ

$$\tau_z\frac{dz}{ds}-\tau_y\frac{dy}{ds}=0. \tag{14}$$

此問題ヲ解ク爲ニタトヘバ次ノ樣ナ應力函數 F ヲ用キル. 卽

$$\left.\begin{aligned}\tau_y&=\frac{\partial F}{\partial y}+f,\\ \tau_z&=-\frac{\partial F}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

F, f 何レモ y, z ノ函數デアル. F ノ滿足スベキ微分方程式ヲ導ク前ニ f ニ就テ述ベヤウ. 此函數ハ勝手デハナク卽 σ_x, τ_y, τ_z ガ平衡ノ條件ヲ滿足スベキ故梁ノ容積ニ作用スル力ヲ省略スレバ x 軸ノ方向ノ平衡式ハ次ノ樣デアル,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_z}{\partial y}+\frac{\partial \tau_y}{\partial z}=0.$$

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial y}$ ト書ケル故

$$\frac{Sz}{I}+\frac{\partial f}{\partial z}=0. \tag{16}$$

f ハ此關係ヲ滿足スベキ故之ヲ積分シテ y ノ項ヲ次ノ樣ニ書ク.

$$f=\frac{S}{2(m+1)I}\left[y^2-(m+1)z^2\right].$$

然ル時ハ(15)ヨリ

$$\tau_y=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{S}{2(m+1)I}\left[y^2-(m+1)z^2\right],\qquad \tau_z=-\frac{\partial F}{\partial z}. \tag{17}$$

從テ(13)ヨリ

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=0. \tag{18}$$

之ガ F ノ微分方程式デアル.

周邊ノ條件ハ(14), (17)ヨリ

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{ds}+\frac{S}{2(m+1)I}\left[y^2-(m+1)z^2\right]\frac{dy}{ds}=0.$$

積分シテ不必要ナル積分常數ヲ省ケバ周邊ノ F ハ

$$F_1=\frac{S}{2I}\int_0^y z^2dy-\frac{Sy^3}{6(m+1)I}. \tag{19}$$

周邊ノ形ガ與ヘラレレバ周邊ノ F ヲ此式ニヨリテ計算シ其答ヲ適當ナル尺度ニテ周邊上ニ立テレバ一ツノ空間閉曲線ガ出來ル. 此曲線ヲ石鹼ノ薄膜ニテ張レバ其面ノ高サハ上ノ微分方程式(18)ト同ジ形ノ式ヲ滿足スル故此石鹼膜ハ F ヲ決定スル.[1] 斯ル實驗法ハ計算ニ困難ナル問題ノ解決ノ爲ニ用キラレル.

例ヘバ圓形ノ横斷面ヲ有ツ梁ニ於テ其斷面ノ半徑ヲ r トスレバ周邊ノ形ハ次ノ式デ表サレル.

$$y^2+z^2=r^2.$$

今周邊ノ條件ヲ見ルニ

$$\int_0^y z^2dy=\int_0^y (r^2-y^2)\,dy=r^2y-\frac{y^3}{3}$$

トナル故

1) 一方ニ壓力ヲ受ケル薄膜ノ微分方程式ヲ後ニ示ス. 368頁. 此式ニ於テ壓力ヲ零トスレバ只今ノ問題ニ合フ.

$$F_1=\frac{S}{2I}\left[r^2y-\frac{m+2}{3(m+1)}y^3\right].$$

微分方程式(18)ノ解デ此條件ニ適スル式ハ

$$F=\frac{S}{2I}\left[r^2y-\frac{m+2}{12(m+1)}(y^3+3r^2y-3yz^2)\right]. \tag{20}$$

之ヲ(17)ニ入レテ應力ヲ求メレバ

$$\left.\begin{aligned}\tau_y&=\frac{3m+2}{8(m+1)}\frac{S}{I}\left(r^2-z^2-\frac{m-2}{3m+2}y^2\right),\\ \tau_z&=-\frac{m+2}{4(m+1)}\frac{S}{I}yz.\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

剪斷應力ハ z 軸ニ對シテ對照ヲナシ斷面ノ端卽 $y=0,\ z=\pm r$ ニ於テ之等ハ消エル. 中立軸 $z=0$ ニ於テ $\tau_z=0$ トナリ τ_y ハ次ノ値ヲ取ル.

$$\tau_y=\frac{S}{8(m+1)I}[(3m+2)r^2-(m-2)y^2]. \tag{22}$$

$y=0$ ニ對シテ

$$\tau_y=\frac{3m+2}{8(m+1)}\frac{S}{I}r^2.$$

$y=\pm r$ ニ對シテ

$$\tau_y=\frac{m+2}{4(m+1)}\frac{S}{I}r^2.$$

第一ノ値ハ第二ノモノヨリ必ズ大デアル. $I=\frac{\pi}{4}r^4$ ナル故 $m=\frac{10}{3}$ トオケバ之等ノ應力ハ夫レ夫レ次ノ様ニナル.

$$\tau_y=1.38\frac{S}{\pi r^2}\quad 及\quad 1.23\frac{S}{\pi r^2}.$$

曾テ剪斷ノ章ニ於テ述ベタ様ナ簡單ナ近似計算ニ從ヘバ圓形斷面ニ起ル最大ノ剪斷應力ハ $\frac{4}{3}\frac{S}{\pi r^2}$ ニ等シク此値ハ只今求メタ値ノ中間ニアル. 而シテ此場合ニハ近似値ノ誤差小デアル.

91. 變形成分ノ一般式.

變形成分ノ式(3)ハ(1)ノ中ノ微分係數 $\frac{\partial u}{\partial x},\cdots$ ガ1ニ比ベテ小ト假定

シテ導カレタ. 從テモシ此假定ガ成立セヌ場合ニハ(3)ハ正シクナイ. 前ニ示シタ様ニ變形後ノ距離ノ二乘 $(1+\varepsilon)^2ds^2$ ヲ求メ之ヨリ $(1+\varepsilon)^2$ ヲ書ケバ

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)^2=1+2\left[\frac{u_1-u}{ds}\frac{dx}{ds}+\frac{v_1-v}{ds}\frac{dy}{ds}+\frac{w_1-w}{ds}\frac{dz}{ds}\right]\\ +\frac{(u_1-u)^2}{ds^2}+\frac{(v_1-v)^2}{ds^2}+\frac{(w_1-w)^2}{ds^2}.\end{aligned} \tag{23}$$

此式ニ(1)ヲ導キ且前ノ様ニ $\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\cdots$ ト書キ換ヘレバ次ノ式ガ得ラレル.

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)^2=1+2\,\varepsilon_x\cos^2\alpha+2\,\varepsilon_y\cos^2\beta+2\,\varepsilon_z\cos^2\gamma\\ +2\,\gamma_x\cos\beta\cos\gamma+2\,\gamma_y\cos\gamma\cos\alpha+2\,\gamma_z\cos\alpha\cos\beta,\end{aligned} \tag{24}$$

但

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right],\\ \varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right],\\ \varepsilon_z&=\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right],\\ \gamma_x&=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z},\\ \gamma_y&=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x},\\ \gamma_z&=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

(24)ノ左邊ニ於テ ε^2 ヲ ε ニ對シテ省略スレバ ε_x ハ前ト同様ニ x 軸ノ方向ニ於ケル ε ニ相當スル. 他ノ $\varepsilon_y,\ \varepsilon_z$ モ夫レ夫レ $y,\ z$ 兩軸ノ方向ノ ε デアル. 次ニ $\gamma_x,\cdots$ ノ意味ヲ說明スル爲ニハ 122 圖ニ於テ BC 間ノ距離ヲ ds トスレバ $\cos\alpha=0$ ナル故其變形後ノ距離卽 B_1C_1 ノ二乘ハ(24)ニヨリテ次ノ様ニ書ケル.

$$\overline{B_1C_1}^2=(1+\varepsilon)^2ds^2=(1+2\,\varepsilon_y\cos^2\beta+2\,\varepsilon_z\cos^2\gamma+2\,\gamma_x\cos\beta\cos\gamma)\,ds^2.$$

再ビ(24)ニヨリテ $B_1P=dy\sqrt{1+2\varepsilon}$, $C_1P=dz\sqrt{1+2\varepsilon_z}$ ナル故 $\angle B_1PC_1=\theta_x$ トスレバ $\overline{B_1C_1}^2$ ハ次ノ樣ニモ書ケル.

$$(1+\varepsilon)^2 ds^2=(1+2\varepsilon_y)dy^2+(1+2\varepsilon_z)dz^2-2\sqrt{(1+2\varepsilon_y)(1+2\varepsilon_z)}\,dydz\cos\theta_x.$$

符號ニ注意シテ例ヘバ $\cos\gamma=\dfrac{dz}{ds}$ トスレバ $\cos\beta=-\dfrac{dy}{ds}$ トナル. 故ニ上ノ兩式ノ右邊ヲ相等シクオイテ

$$\sqrt{(1+2\varepsilon_y)(1+2\varepsilon_z)}\cos\theta_x=\gamma_x.$$

若シ ε_y, ε_z ガ 1 ニ對シテ省略サレ且 $\dfrac{\pi}{2}$ ト θ_x トノ差ヲ小ト見做セバ

$$\frac{\pi}{2}-\theta_x=\gamma_x.$$

卽 γ_x ハ直角ノ變化デ之リニ當ル. γ_y, γ_z ニ就テモ同樣ノ事ガ言ヘル.