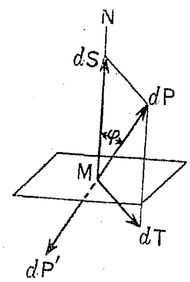
XIV. 應力ノ總論.

80. 小六面體ニ働クカノ平衡.

眞直ナ棒ガ荷重ヲ負擔スル狀態ニ四樣ノ別アルト共ニ其横斷面ニ生ズル應力ガ之ニ垂直及平行ノ二種ニ歸着スルコトハ已ニ知ツテ居ル.

一般ニ物體内ノ一點Mヲ通リ與ヘラレタ方向ニ或ル小平面ヲ考ヘル時ハ荷重ノタメ此小平面ヲ境トスル兩側ノ部分ガ互ニ或ル力ヲ作用シ合フ. 116 圖. 之等ノ力ヲ dP 及 dP' トスレバ其大サハ相等シク方向ハ丁度正反對デアル. 偖之等ノ平衡セル二力 dP, dP' ガ夫レ夫レ此小平面ノ何レノ部分ニ働クカヲ區別スルタメニ此平面デ限ラレタ物體ノ一方ガ他方ニ作用スル力ヲ前者ト同側ノ矢デ表サウ. 例ヘバ垂線 MN ノ側ノ部分ガ反對側ノ部分ニ働キカケル力ガ dP デアル. 從テ dP' ノ意義モ明カニナル.



116 圖

今此平面ハ微小ナル面積ヲ有スルモノト假定スレバ dP(及 dP') ハ其面積 df 上ニ一樣ニ配布サレルモノト見ルコトガ出來ル. 即 $\dfrac{dP}{df}=p$ ナル應力ハ平面内ノ何レノ點ニ於テモ同樣ト考ヘテ宜シイ. 而シテ此應力ニ對シテモ dP 同樣ニ MN ナル垂線ノ方向ニアル物體ノ部分ガ他ノ側ニ及ボス應力ト定メテオク.

次ニ p ヲ平面ニ垂直ト平行トノ二成分ニ分ケル. 然ル時ハ

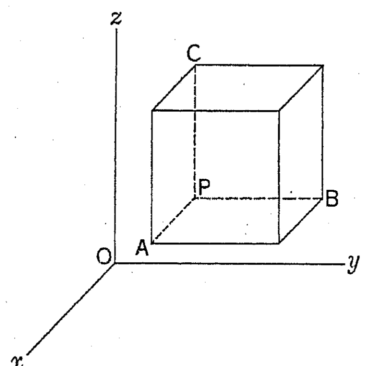
$$p\cos\varphi=\frac{dS}{df},\quad p\sin\varphi=\frac{dT}{df}$$

ガ夫レ夫レ垂直並ニ剪斷應力ニナル. 而シテ後者ハ必要ニ應ジテ更ニ平面内ノ二成分ニ分ケルコトガ出來ル.

曾テ緒言ニ於テ述ベタ樣ニ通例物體ヲ質點ノ集團ト考ヘ之ニ對シテ力ノ平衡論ガ導カレルニ拘ラズ材料ノ力學デハ多ク物體ヲ連續的ノ物

質カラ出來テ居ル樣ニ見做シテ居ル. 此事ハ本書ノ始メカラ終リ迄常ニ同樣デアルガ玆ニ應力ノ總論ヲ導クニ當リテ其區別ヲ明カニシテ置キタイト思フ. 夫レデハ連續的ト考ヘタ物體ニ平衡論ヲ應用シテモ差支ナイカト云フ疑問ガ起ルガ之ニ對シテハ先ヅ物體中ニ想定スル微容積ガ質點間ノ距離ニ比ベテ相當ニ大ナラバ微容積ガ質點ノ集リト見做サレル故差支ナイ譯デアルガ微容積ヲ斯樣ニ限定スル事ハ一見穩當デナイ. 併シ吾々ノ取扱フ物體ノ大サニ比ベテ質點間ノ距離ハ非常ニ小ナル故此限定ハ必シモ無理ト言ヘナイ. 夫レ故物體中ニ想定サレタ大小任意ノ容積ニ對シテ平衡論ヲ應用スル事ノ可否ハ之ヲ可トシタ場合ノ結果ガ實際ノ經驗ニ照シテ矛盾ヲ生ジナイカ如何カニヨリテ決セラレルベキ事柄デアル. 而シテ現ニ吾々ノ遭遇スル問題ノ範圍内ニ於テ之ハ差支ナイノデアル.

依テ本節ニ於テハ物體内ニ想定サレタ微小六面體ノ各面ニ前述ノ樣ナ二種ノ應力ガ作用スル一般ノ場合ヲ考ヘ之ニ平衡ノ原理ヲ應用シテ各應力間ノ關係ヲ導カウ. 即 117 圖ニ於テ物體内ノ任意ノ一點 O ヲ原點トシ附近ノ他ノアル一點ヲトリ O ヨリ之ヲ通ル直線ヲ引イテ x 軸トシ次ニ x 軸以外ノ近接シタ點ヲ選ビ此點ヲ含ム樣ニ xy 平面ヲ作リ更ニ z 軸ヲ此面ニ直角ニ立テルコトニヨリテ物體中ニ x, y, z ノ直交座標軸ヲ設ケルコト圖ノ如クスル. 斯ル座標軸ニ對シ物體ノ一點 P ノ位置ヲ其座標 x, y, z ニテ表ス. 偖 P ヲ過ギテ各軸ニ平行線 PA, PB, PC ヲ引キ其長サヲ dx, dy, dz トスル. 斯樣ニシテ小六面體ノ背後ノ三面 BPC, CPA, APB ヲ作リ更ニ進ミテ A, B, C ノ三點ヲ過ギル他ノ三平面ヲ作リ玆ニ小サイ直角六面體ヲ完成スル.



117 圖

斯ル物體中ノ一小部分ニ對シテ周圍ノ部分ガ如何ナル力ヲ及ボスヤヲ考ヘルタメ σ, τ ノ符號ニ就テ下ノ樣ナ約束ヲ設ケル. 即六面體ノ某平面ニ就キ外方ニ向フ法線ヲ引ク時之ハ必ズ座標軸ニ平行デアルガ若シ其方向ガ同軸ノ正ノ方向ニアルナラバ σ モ τ モ共ニ座標軸ノ正ノ方向ニアルモノヲ正トスル. 法線ノ方向ガ逆ナラバ σ モ τ モ正値ノ方向逆トナル. 斯樣ナ規定ヲ設ケタ後先ヅ平面 BPC ニ就テ之ヲ境トスル外ノ部分ガ内部ニ働キカケル應力ヲ詳ニシタイト思フ. 即本節ノ最初ニ述ベタ應力ノ分析法ヲ平面 BPC ニ適用シ垂直ノ方向ニアルモノヲ σ_x ニテ表シ平行ノ成分ハ更ニ之ヲ y 及 z 軸ニ沿ヒタルニ成分 τ_{xy} 及 τ_{xz} ニ分ケル. 而シテ $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ ノ符號ニ關シテハ前ノ約束ニ示ス樣ニ外方ニ向フ平面ヘノ法線ガ座標軸ノ負ノ方向ニアルカラ從テ應力モ亦 x, y, z 各軸ノ負ノ方向ニ向フ時正ト定メル. 尙又上ノ $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ ノ各記號ニ添ヘタ x, y, z ノ意味ヲ説明スレバ x ハ何レモ平面 BPC ガ x 軸ニ直角ナルコトヲ示シ從テ σ_x ハ x 軸ニ平行ナル垂直應力ヲ表ス. 次ニ τ ノ末尾ナル y 及 z ハ其方向ガ夫レ夫レ y 及 z 軸ニ平行ナルコトヲ意味スルデアル.

同樣ノ分析法ヲ他ノ二面 CPA 及 APB ニ施シ記號モ前例ニ倣フトスレバ結局次ノ表ノ樣ナ九ツノ應力ガ出來ル.

平面	面積	應力ノ方向		
		$-x$	$-y$	$-z$
BPC	$dy\ dz$	σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}
CPA	$dz\ dx$	τ_{yx}	σ_y	τ_{yz}
APB	$dx\ dy$	τ_{zx}	τ_{zy}	σ_z

表中ノ平面ハ BPC ノミデナク CPA 及 APB 兩ツナガラ外方ニ向フ法線ガ座標軸ノ負ノ方向ニ向フ故應力ハ何レモ皆負軸ノ方向ニ向フ時正デアル.

次ニ之等ノ三平面ニ平行ナル他ノ三平面ヲ考ヘルニ法線ハ何レモ正軸ノ方向ニアリテ卽應力ガ此方向ニ向フ時正ニ取ラル可キデアル. 偖三平面中ノ代表者トシテ BPC ニ平行ナル卽 x 軸ニ直角ノ面ヲ取リ之ニ働ク應力ヲ見ルニ其値ハ前ノ値ニ比ベテ僅少ノ差ヲ有ツ. 詳シク言ヘバ兩平面ハ單ニ x 軸ニ平行ニ dx ナル距離ヲ有スルモ y 及 z ニ關シテハ同位置ニアル故前ノ σ_x ハ增シテ $\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx$ トナリ τ_{xy} 及 τ_{xz} ハ夫レ夫レ $\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx$, $\tau_{xz}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx$ トナル. 此計算ヲ他ノ二平面ニモ行フ時ハ結局次ノ表ノ應力ガ得ラレル.

面 積	應力ノ方向		
	x	y	z
$dy\ dz$	$\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx$	$\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx$	$\tau_{xz}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx$
$dz\ dx$	$\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy$	$\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy$	$\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy$
$dx\ dy$	$\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz$	$\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz$	$\sigma_z+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz$

之等ノ $9\times2=18$ 個ノ應力ガ小六面體ノ境界面ニ作用スル應力デアルガ其作用スル面積ハ皆微小ナルモノト假定セル故之等ノ應力ノ生ズル力ヲ計算シ平衡ノ方程式中ニ導ク際各面ニ應力ガ一樣ニ配布セラレルモノト見テ差支ヘガナイ. 夫レ故之等ノ應力ニ夫レ夫レノ面積ヲ乘ジテ生ズル x, y, z 三軸ノ方向ノ力ヲ別々ニ一纏メトスル. 但前記二表ノ應力ガ生ズル力ノ方向ハ丁度正反對デアルカラ正負ノ符號ヲ以テ區別セネバナラヌ. 斯クテ各方向ノ力ヲ加ヘル時微分係數ヲ含ム項ノミガ殘リテ他ハ皆消エ去ル譯デアル. 尙小六面體ノ表面ニ働ク力ノ外其質量ニ作用スル力ガ存在スルコトヲ忘レテハナラヌ. 例ヘバ重力ハ此種ニ屬スルノデアツテ一般ニ斯ル力ノ x, y, z ノ方向ノ成分ヲ夫レ夫レ

$$X\,dx\,dy\,dz,\qquad Y\,dx\,dy\,dz,\qquad Z\,dx\,dy\,dz$$

トスレバ以上 $18+3=21$ ノ力ガ平衡ヲナスカラ三軸ノ方向ニ於ケル成

分ノ總和ヲ合セテ零ニ等シク置キ且各方程式ノ兩邊ヲ $dx\,dy\,dz$ ニテ除ス時ハ結局次ノ式ガ得ラレル.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0,\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+Y=0,\\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

之ガ9個ノ應力ヲ結ビ付ケル平衡ノ基礎方程式デアルガ次ノ理論ニヨリテ尙簡單トナル. 卽平衡ノ他ノ條件ニヨリテ任意ノ點ノ周リニ廻轉ノ起ラヌコトヲ要スル. 此事ハ該點ヲ通ル三個ノ軸ノ周リノモーメントガ夫レ夫レ零デアレバヨイノデ例ヘバ小六面體ノ中心ヲ通リ座標軸ニ平行ナル三本ノ直線ヲ引イテ之等ノ周リノモーメントノ式ヲ作ル. 此計算ハ改メテ玆ニ說明スル迄モナク已ニ IV 章 33 節ノ定理ニ述ベタ事ト同一デアル. 只前ニ δ_1, δ_2 ヲ用キタ代リニ今ハ微分係數ノ項ヲ用キル如キ記號上ノ別アルニ過ギヌ. 夫レ故前ノ定理ノ結果ヲ直ニ應用シ先ヅ τ_{yz} 及 τ_{zy} ガ直交スル二平面ニ於テ交線ニ垂直ナル方向ニ働ク故ヲ以テ互ニ相等シクオカレル. 卽

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}.$$

同樣ニシテ

$$\tau_{zx}=\tau_{xz},\qquad \tau_{xy}=\tau_{yx}.$$

此結果ヲ記スニ當リ始メテ本節ノ理論ヲ研究スル讀者ガ小六面體ニ作用スル諸力ヲ圖示シテ實際モーメントノ方程式ヲ作ル勞ヲ厭ハヌ樣希望シテオク. 偖此重要ナ定理ノ結果トシテ六ツノ剪斷應力ガ減ジテ三ツトナル故

$$\left.\begin{aligned}\tau_{yz}=\tau_{zy}=\tau_x,\\ \tau_{zx}=\tau_{xz}=\tau_y,\\ \tau_{xy}=\tau_{yx}=\tau_z\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

トオケバ(1)式ハ次ノ如ク書キ換ヘラレル.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_z}{\partial y}+\frac{\partial \tau_y}{\partial z}+X=0,\\
\frac{\partial \tau_z}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_x}{\partial z}+Y=0,\\
\frac{\partial \tau_y}{\partial x}+\frac{\partial \tau_x}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z=0.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

之等ノ式ノ六ツノ應力ガ應力狀態ヲ表ス要素ト見ラレル.

81. 運動體中ノ應力.

之迄述ベタ事柄ハ靜止セル物體ニ就テデアルガ運動體中ニ於ケル應力ノ計算モ亦屢々起ル問題デアル. 一般ニ運動スル物體ノ各點ハ或ル加速度ヲ有スルモノデアツテ運動ノ法則ニ從ヘバ質點ノ加速度ニ質量ヲ乘ジタ積ガ該點ニ加ヘラレタ力ニ等シイ. 今質量及加速度ノ相乘積ト等大デ加速度ノ方向ト相反セル力ヲ考ヘテ之ヲ慣性ノ力ト命名スレバ加速度ヲ與ヘル力ハ慣性ノ力ト平衡スル. 而シテ吾々ノ取扱フ物體ヲ質點ノ集リト見做セバ其運動ニ際シテハ各點ガ他ノ內力,外力ノ外ニ尙上ノ慣性ノ力ヲ受ケテ之等ノ凡テノ力ガ平衡狀態ニアルモノト考ヘルコトガ出來ル. 夫レ故緒言ニ述ベタ靜力學ノ原理中外力$\mathfrak{P}$ノ代リニ$\mathfrak{P}$ト慣性ノ力トノ和ヲ用キレバ運動體ノ力學ヲ宛モ靜力學ノ問題トシテ取扱ヒ得ルノデアル.

例ヘバ前節ニ述ベタ直角六面體ニ働ク力ノ平衡ニ關スル理論ノ如キモ之ヲ運動體ノ場合ニ應用スルタメニハ六面體ノ單位容積ニ作用スル力X, Y, Zノ代リニ $X-m\alpha_x$, $Y-m\alpha_y$, $Z-m\alpha_z$ ヲ用キ之丈ケノ變化デ(1)又ハ(3)ヲ用キルコトガ出來ル. 但mハ物體單位容積ノ質量デ又 α_x, α_y, α_z ハ小六面體ノ位置スル點ニ於ケルx, y, z軸ノ方向ノ加速度デアル.

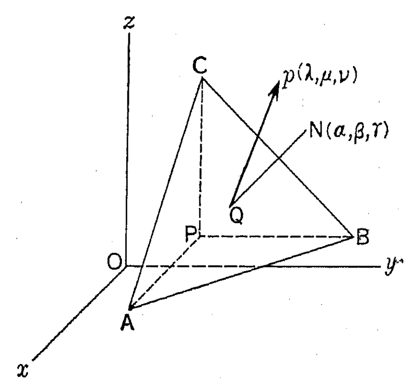
斯樣ニ慣性ノ力ヲ一種ノ外力ト見做シテ運動體ヲ靜止ノ場合ニ引キ直セバ計算ハ簡單デアル. 此種ノ問題ハ已ニVI章ノ終リ(例題1)及VIII章

ニ示シテオイタガ尙後章ニ述ベル廻轉體ノ計算モ此原理ノ應用デアル.

茲ニ附加ヘタイ事ハ物體ノ等速並進運動ガ應力ヲ生ズル原因トナラヌ點デアル. 此時ニハ各點ノ加速度ガ零デアルカラ斯ル運動ハ靜止ト同樣デアツテ例ヘバ船車等ガ一定ノ方向ニ等速運動ヲナス時其上ニアル構造物ハ慣性ノ力ヲ受ケナイ. 併シ或ル加速度ヲ有スル運動體(例ヘバ機械ノ連接棒)ハ定置ノ機關ナルト又ハ船車ノ機關ナルトニ論ナク慣性ノ力ヲ受ケ殊ニ高速度ノ機關ニアリテハ其作用大トナル.

82. 小四面體上ノ力ノ平衡.

物體中ノ任意ノ一點ニ於ケル六個ノ應力ト同點ニ於テ引カレタ任意ノ平面上ニ作用スル應力トノ間ノ關係ヲ求メルタメニP點ニ一角ヲ有シ之ヲ通ル三ツノ稜ガ dx, dy, dz ナル如キ小四面體 $PABC$ ヲ考ヘ(118圖)其斜面ABC上ノ一點Qニ於テ外方ニ向フ法線QNヲ立テ其直交座標軸x, y, zトナス角ヲ(α, β, γ)トスル. 又Q點ニ於テABC面上ニ作用スル應力pノ方向ヲ示ス角ヲλ, μ, νトシ且ABC面ノ面積ヲfニテ表ス.



118 圖

然ル時ハpガABC面ニ働イテ生ズル力ノ三ツノ座標軸ノ方向ノ成分ハ夫レ夫レ $pf\cos\lambda$, $pf\cos\mu$, $pf\cos\nu$ トナル.

次ニ四面體ノ他ノ三面上ニ働ク力ヲ求メルニ先ヅ其面積ハ次ノ式ノ樣ニナル.

$$\begin{aligned}
&\text{面積}\quad BPC=f\cos\alpha,\\
&\text{面積}\quad CPA=f\cos\beta,\\
&\text{面積}\quad APB=f\cos\gamma.
\end{aligned}$$

從テ之等ノ三平面上ノ力ハ次ノ表ニ示ス如クデアル.

平面	力ノ方向		
	$-x$	$-y$	$-z$
BPC	$\sigma_x f\cos\alpha$	$\tau_z f\cos\alpha$	$\tau_y f\cos\alpha$
CPA	$\tau_z f\cos\beta$	$\sigma_y f\cos\beta$	$\tau_x f\cos\beta$
APB	$\tau_y f\cos\gamma$	$\tau_x f\cos\gamma$	$\sigma_z f\cos\gamma$

之等九ツノ力ノ正値ハ皆座標軸ノ負ノ方向ニアリテ前ノ三ツノ力ト向キヲ反對ニシテ居ル. 而シテ此外尙質量ニ作用スル力ガ存在スルケレドモ上ノ力ニ比シテ一段下ノ小ナル量トナルタメ下ノ平衡式中ニ記載スル必要ガナイ. 以上諸力ノ作用ヲ受ケナガラ四面體ガ三ツノ軸ノ方向ニ平衡ヲ保ツコトヲ式ニテ表セバ

$$\left.\begin{aligned} p\cos\lambda &= \sigma_x\cos\alpha+\tau_z\cos\beta+\tau_y\cos\gamma, \\ p\cos\mu &= \tau_z\cos\alpha+\sigma_y\cos\beta+\tau_x\cos\gamma, \\ p\cos\nu &= \tau_y\cos\alpha+\tau_x\cos\beta+\sigma_z\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

但 λ, μ, ν ノ間ニハ次ノ關係ガアル.

$$\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1.$$

故ニ $\sigma_x,\cdots,\tau_x,\cdots$ 等六ツノ應力ガ知ラレル時ハ任意ノ方向 (α,β,γ) ヲ法線トスル平面ニ就テ之ニ働ク應力ノ大サ及方向ヲ示ス p, λ, μ, ν 等ノ四ツノ量ヲ計算シ得可キ筈デアル. 而シテ小四面體ヲ微小ト考ヘル時ハ其斜面ハ如何程ニテモ P ニ接近スル故上ノ方法ヲ以テ求メタ p ハ P 點ニ於ケル斜面上ノ應力ト見做シテ差支ヘガナイ.

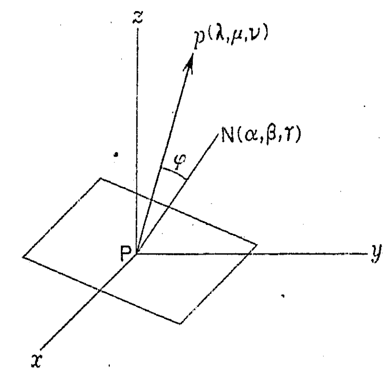
83. 主應力. 應力ノ楕圓體.

物體中ノ任意ノ一點 P ニ於テ一ツノ平面ヲ取リ其位置ヲ示ス爲平面ヘ引ケル法線ノ方向ヲ角 α, β, γ ニテ表シ又平面上ニ作用スル應力 p ノ

方向ヲ角 λ, μ, ν ニテ示ス. 119 圖. p ノ平面ヘノ垂直成分ヲ σ トシ p ト法線 PN トノ間ノ角ヲ φ トスレバ

$$\cos\varphi=\cos\lambda\cos\alpha+\cos\mu\cos\beta+\cos\nu\cos\gamma.$$

故ニ



119 圖

$$\sigma=p\cos\varphi=p\cos\lambda\cos\alpha+p\cos\mu\cos\beta+p\cos\nu\cos\gamma. \tag{5}$$

此式ニ(4)ヲ導ク時ハ

$$\sigma=\sigma_x\cos^2\alpha+\sigma_y\cos^2\beta+\sigma_z\cos^2\gamma+2(\tau_x\cos\beta\cos\gamma+\tau_y\cos\gamma\cos\alpha+\tau_z\cos\alpha\cos\beta). \tag{6}$$

今 P ニ於テ平面ヘ引イタ法線ノ長サヲ σ ノ絕對値ノ平方根ノ逆數ヲ表ス樣ニトル. 然ル時ハ此ベクトルノ末端ハ次ノ座標ヲ有ツ.

$$x=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\pm\sigma}}, \quad y=\frac{\cos\beta}{\sqrt{\pm\sigma}}, \quad z=\frac{\cos\gamma}{\sqrt{\pm\sigma}}.$$

上ノ(6)式ノ右邊ニ之等ノ式ヲ代用スル時ハ

$$\pm 1=\sigma_x x^2+\sigma_y y^2+\sigma_z z^2+2(\tau_x yz+\tau_y zx+\tau_z xy). \tag{7}$$

之ハ原點ヲ中心トスル二次曲面ノ方程式デアルガ斯ル面ノ特性トシテモシ其三主軸ノ方向ヲ座標軸トスル時ハ x, y, z 二ツ宛ノ相乘積ノ項ハ消エル. 故ニ之等直角ノ方向ニ於ケル三ツノ垂直應力ハ τ_x, τ_y, τ_z ヲ伴ハヌ. 換言スレバ σ ガ直ニ p トナル. 之等ノ σ ヲ稱シテ主應力ト云ヒ以下表スニ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ヲ以テスル. 主應力中ノ一ツハ P 點ニ於ケル最大ノ應力デ又或ル一ツハ最小値ニ當ル事ヲ下ニ述ベヤウ.

併シ其前ニ主應力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ノ方向ヲ座標軸トスレバ應力ニ關スル式ガ甚ダ簡單トナル事ヲ示シタイ. (4)ニ

$$\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$$

トオケバ

$$\left.\begin{aligned} p\cos\lambda &= \sigma_1\cos\alpha, \\ p\cos\mu &= \sigma_2\cos\beta, \\ p\cos\nu &= \sigma_3\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

之等ノ各式ヲ二乘シテ加ヘレバ

$$p^2 = \sigma_1^2\cos^2\alpha + \sigma_2^2\cos^2\beta + \sigma_3^2\cos^2\gamma. \tag{9}$$

又(6)ハ

$$\sigma = \sigma_1\cos^2\alpha + \sigma_2\cos^2\beta + \sigma_3\cos^2\gamma. \tag{10}$$

偖第 119 圖ノ平面ノ位置ヲ種々ニ變ヘテ P 點ニ於ケル應力 p ノ變化スル有樣ヲ見ル爲ノ一方法トシテベクトル p ノ末端ノ座標ヲ x, y, z トシテ之等ノ間ニ存在スル關係ヲ明カニシヤウ. 卽

$$x = p\cos\lambda,$$
$$y = p\cos\mu,$$
$$z = p\cos\nu$$

トオケバ(8)ニヨリテ

$$x = \sigma_1\cos\alpha,$$
$$y = \sigma_2\cos\beta,$$
$$z = \sigma_3\cos\gamma.$$

然ルニ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ナル故次ノ關係ガ成立ツ.

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = 1. \tag{11}$$

P ニ於ケル平面ヲ動カスニ連レテ x, y, z ハ變化スルモ常ニ(11)ノ關係ヲ保ツ. 從テ之ハベクトル p ノ末端ガ描キ出ス曲面ノ方程式デアル. 此曲面ハ明カニ一ツノ楕圓體デ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ハ其主半徑デアル. 夫レ故之等三應力中ノ一ツガ最大デ又或ル一ツガ最小値ナル事ガ判ル. 斯ル楕圓體ヲ應力ノ楕圓體ト呼ブ.

84. 主應力ノ決定.

任意ノ直交座標軸ニ對シテ應力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 及 τ_x, τ_y, τ_z ガ與ヘラレテ主應力ヲ求メルタメ先ヅ或ル應力 p ガ主應力ノ一ツノ σ(末尾ノ數字 1, 2, 3 ヲ省ク)ト一致スルト假定スレバ(4)式ニ於テ

$$p\cos\lambda = \sigma\cos\alpha,$$
$$p\cos\mu = \sigma\cos\beta,$$
$$p\cos\nu = \sigma\cos\gamma$$

トオキウル故

$$\sigma\cos\alpha = \sigma_x\cos\alpha + \tau_z\cos\beta + \tau_y\cos\gamma,$$
$$\sigma\cos\beta = \tau_z\cos\alpha + \sigma_y\cos\beta + \tau_x\cos\gamma,$$
$$\sigma\cos\gamma = \tau_y\cos\alpha + \tau_x\cos\beta + \sigma_z\cos\gamma.$$

又ハ書キ換ヘテ

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_x-\sigma)\cos\alpha + \tau_z\cos\beta + \tau_y\cos\gamma &= 0, \\ \tau_z\cos\alpha + (\sigma_y-\sigma)\cos\beta + \tau_x\cos\gamma &= 0, \\ \tau_y\cos\alpha + \tau_x\cos\beta + (\sigma_z-\sigma)\cos\gamma &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

之等ノ式ヨリ方向餘弦ヲ消去スレバ σ ニ對スル三次ノ方程式ガ出來ル. 卽

$$(\sigma_x-\sigma)(\sigma_y-\sigma)(\sigma_z-\sigma) - (\sigma_x-\sigma)\tau_x^2 - (\sigma_y-\sigma)\tau_y^2 - (\sigma_z-\sigma)\tau_z^2 + 2\tau_x\tau_y\tau_z = 0,$$

又ハ

$$\begin{aligned} \sigma^3 - (\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y - \tau_x^2 - \tau_y^2 - \tau_z^2)\sigma \\ - \sigma_x\sigma_y\sigma_z + \sigma_x\tau_x^2 + \sigma_y\tau_y^2 + \sigma_z\tau_z^2 - 2\tau_x\tau_y\tau_z = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

此式ノ三根ガ主應力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ノ大サヲ決定スル. 而シテ方程式ノ理論ニヨリテ

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

デアルカラ物體中ノ一點ニ於テ互ニ直角ヲナス三ツノ垂直應力ノ和ハ

不變デアル.

已ニ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ノ大サヲ知ル時ハ其各ニ對シテ(12)式ヨリ方向餘弦ヲ求メ主應力ノ方向ヲ定メルコトガ出來ル.

85. 簡單ナル場合ノ主應力.

物體中ノ任意ノ一點ニ於ケル主應力ヲ與ヘル方程式(13)ノ中モシ

$$\sigma_x\sigma_y\sigma_z-\sigma_x\tau_x^2-\sigma_y\tau_y^2-\sigma_z\tau_z^2+2\tau_x\tau_y\tau_z=0 \tag{14}$$

ナル條件ガ成立テバ σ ノ一ツノ根ハ明カニ零トナル. 斯ル根ヲ σ_3 トスレバ他ノ二根 σ_1 及 σ_2 ハ次ノ方程式デ決定サレル.

$$\sigma^2-(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\sigma+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x+\sigma_x\sigma_y-\tau_x^2-\tau_y^2-\tau_z^2=0. \tag{15}$$

偖條件(14)ガ如何ナル場合ニ滿足サレルカト言ヘバ $\sigma_x,\cdots\tau_x,\cdots$ 中末尾ノ文字 x, y, z ヲ異ニセル三個ノ σ 及 τ ガ同時ニ零トナル時例ヘバ

(a) $\qquad \sigma_y=\sigma_z=\tau_x=0,$

(b) $\qquad \sigma_z=\tau_x=\tau_y=0$

ノ如ク同名ノ文字ヲ帶ビザル二ツノ σ トーツノ τ トガ零トナルカ又ハ二ツノ τ トーツノ σ トガ零トナル時ニ滿足サレル.

已ニ(14)ガ滿足サレ $\sigma_3=0$ トナレバ(8)ノ第三式ニヨリテ γ ノ値如何ニ關セズ $\cos\nu=0$ トナル故 p ハ常ニ σ_1 及 σ_2 ノ平面内ニ横ハル. 而シテ應力ノ楕圓體ガ應力ノ楕圓トナル事素ヨリデアル.

上述シタ例(a)ノ場合 $(\sigma_y=\sigma_z=\tau_x=0)$ ニ於テハ x 軸ニ直角ナル平面ニ作用スル三應力 $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ 並ニ之等ノ剪斷應力ト對ヲナス τ_{yx}, τ_{zx} ガ存在スル丈ケデ其他ハ零デアル. 斯樣ナ應力ノ作用ハ x 軸ノ方向ヲ軸トスル棒ノ場合ニ相當スル. 次ニ他ノ例(b)ノ場合 $(\sigma_z=\tau_x=\tau_y=0)$ ニ於テハ $\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ ガ零トナル故 z ノ方向ノ應力成分ハ皆零デ殘リノ應力ハ何レモ xy 平面ニ平行デアル. 且 $\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$ デアルカラ z 軸ニ直角ナル平面ニハ應力ガ全ク作用セヌ譯トナル.

之等ノ場合ニ於ケル(15)式ハ甚ダ簡單トナル. 先ヅ(a)ノ場合ニハ

$$\sigma^2-\sigma_x\sigma-(\tau_y^2+\tau_z^2)=0. \tag{15a}$$

偖此式ニ於テ $\tau_y^2+\tau_z^2=\tau^2$ トスレバ.

$$\sigma^2-\sigma_x\sigma-\tau^2=0. \tag{16}$$

此式ノ二根ヲ σ_1, σ_2 トスレバ

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2+4\tau^2}. \tag{17}$$

次ニ(b)ノ場合ニハ

$$\sigma^2-(\sigma_x+\sigma_y)\sigma+\sigma_x\sigma_y=\tau_z^2. \tag{15b}$$

此式ニ於テ若シ $\sigma_y=0$ トスレバ(16)ト同ジ樣ニナル. 只異ル點ハ τ ノ代リニ τ_z ガ書カレタ丈ケデアルガ前ノ場合ニ座標軸ノ取リ方ヲ變ヘレバ問題ノ性質ヲ局限セズニ $\tau_y=0$ トシテ τ ノ代リニ τ_z トスル事ガ出來ルカラ左樣ニ考ヘレバ全ク同ジ事デアル. 而シテ(15b)ヲ解ケバ

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_z^2}. \tag{18}$$

(17)ニ示ス特別ノ場合ハ棒ニ於ケル垂直及剪斷兩應力ノ組合ヲ論ズルタメニ已ニ42節ニ論ジタ處デ例ヘバ曲ゲガ剪斷ヲ伴フ場合又ハ曲ゲガ振リト組合フ場合ニハ斯ル主應力ヲ受ケル. 併シ茲ニハ一般的ノ計算法ヲ説明スルタメニ之ヲ繰返シタノデアツテ次ニ尚 σ_1 及 σ_2 ノ方向ヲ定メル事ヲ述ベヤウ.

主應力 σ 及其方向餘弦ヲ含ム(12)ノ第三式ニ於テ(b)ニ相當シテ $\sigma_z=\tau_x=\tau_y=0$ トオケバ

$$\sigma\cos\gamma=0$$

トナリ $\sigma\neq0$ ナル故 $\cos\gamma=0$ デナケレバナラヌ. 即 σ_1 及 σ_2 ノ方向モ亦 xy 平面ニ平行デ之ハ當然ノ事デアル.

次ニ $\cos\alpha$ 及 $\cos\beta$ ハ如何カト云フニ(12)ノ他ノ兩式即

$$(\sigma_x-\sigma)\cos\alpha+\tau_z\cos\beta=0,$$

$$\tau_z\cos\alpha+(\sigma_y-\sigma)\cos\beta=0$$

ヨリ先ヅ $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ ヲ求メレバ

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{\tau_z}{\sigma-\sigma_x}=\frac{\sigma-\sigma_y}{\tau_z}.$$

然ルニαガxノ正軸ノ兩側ニ於テ$\frac{\pi}{2}$ヨリ小ナル間ハ $\cos\alpha=\sin\beta$ ナル故

$$\tan\beta=\frac{\tau_z}{\sigma-\sigma_x}=\frac{\sigma-\sigma_y}{\tau_z}. \tag{19}$$

夫レ故初メ(18)ニヨリテσ_1及σ_2ノ値ヲ求メ然ル後之等ヲ順次(19)ノ何レカ一式中ノσニ代入スレバαニ關スル上ノ約束ニ從ヒテ其方向ガ確定サレル.

之ニ反シテ若シ σ_1, σ_2 ヲ求メズ只之等主應力ノ方向ノミヲ見出サントスルニハ(19)中ノσヲ消去スレバ宜シイ. 卽

$$\sigma-\sigma_x=\tau_z\cot\beta,$$

$$\sigma-\sigma_y=\tau_z\tan\beta.$$

兩邊ノ差ヲ作レバ

$$\sigma_y-\sigma_x=\tau_z(\cot\beta-\tan\beta).$$

從テ

$$\left.\begin{aligned}&\tan 2\beta=\frac{2\tau_z}{\sigma_y-\sigma_x},\\ \text{又ハ}\quad&\beta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2\tau_z}{\sigma_y-\sigma_x}+\frac{n\pi}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

nハ正又ハ負ノ整數デアツテαニ關スル上ノ假定ニ合フ樣法線ノ方向ヲ定メレバ結局之ニヨリテ互ニ直角ヲナス二直線ガ引カレ其一方ガσ_1ニ對シ他ノ者ガσ_2ニ對スル. 序ニ述ベテオクガ上ノβハ73圖ニ示スβト定義ノシカタハ違ツテ居ルケレドモ此場合ニハ相等シクナルノデアツテ卽上式中ニ $\sigma_y=0$ トスレバ VI 章(16)式ト符合スル.

次ニ最モ簡單ナ場合ノ一ツトシテ $\sigma_y=\sigma_z=\tau_x=\tau_y=\tau_z=0$ トシヤウ. 此場合ニハ(17)又ハ(18)カラ見ラレル樣ニ主應力中σ_3ノ外尙他ノ一ツガ零

トナル. 例ヘバ

$$\sigma_2=0.$$

而シテ

$$\sigma_1=\sigma_x.$$

此時ニハ(8)ヨリ

$$\cos\mu=0,\qquad \cos\nu=0$$

トナル故

$$\cos\lambda=\pm 1.$$

從テ凡テノpガσ_1ノ方向ニ起ル. 之ハ棒ヲ引張リタル時ニ起ル應力狀態デ棒ノ何レノ傾斜斷面ヲ考ヘテモ之ニ働ク應力ハ軸ノ方向ニ一致スル.

終リニ同樣ニ簡單ナル他ノ場合ハ $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_x=0$ デアル. 此場合ニハ只 τ_y, τ_z ノミガ殘リ(16)カラ

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\}=\pm\tau.$$

卽零デナイ二ツノ主應力ハ等大デ互ニ異符號デアル. 之ハ棒ノ橫斷面ガ只剪斷應力ノ作用ヲ受ケルカラ捩リノ場合デアツテ特別ニ $\tau_y=0$ トナル樣ニ座標軸ヲトレバτ_z以外ノ應力成分ハ皆零トナリ $\tau=\tau_z$ ト書ケル. 而シテβノ一ツノ値ハ(20)ニヨリテ$\frac{\pi}{4}$トナル. 此時二ツノ主應力ハ棒ノ軸ニ45°ノ傾キヲナス.

86. Mohr ノ應力圖.

物體中ノ任意ノ一點ニ於テ主應力ノ方向ヲ直交座標軸ニトリ簡單ノタメニ

$$a=\cos^2\alpha,\qquad b=\cos^2\beta,\qquad c=\cos^2\gamma \tag{21}$$

トオケバ已ニ(9)及(10)ニ示シタ樣ニ次ノ式ガ成立ツ.

(i) $$p^2=a\sigma_1^2+b\sigma_2^2+c\sigma_3^2,$$

(ii) $$\sigma=a\sigma_1+b\sigma_2+c\sigma_3.$$

但主應力ノ値ガ皆異ルナラバ夫レハ $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$ ナル順序ニアルモノト假定スル.

例ヘバ方向餘弦 $\cos\alpha$ 及 $\cos\beta$ ガ與ヘラレ卽 a ト b トガ定マル時ハ c ハ

(iii) $$a+b+c=1$$

ヨリ極マル. 從テ (ii) ヨリ σ ヲ見出シ (i) ヨリ $\tau^2=p^2-\sigma^2$ ヲ計算スルコトガ出來ル. 反對ニ σ 及 τ ヲ與ヘテ α,β,γ ヲ決定スルタメニハ (i), (ii), (iii) ヨリ a, b, c ヲ求メレバ宜シイ. タトヘバ a ニ對シテハ次ノ式ヲ書クコトガ出來ル.

$$a=\frac{\Delta_1}{\Delta},$$

但 $$\Delta=\begin{vmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2\\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix},\qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}p^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2\\ \sigma & \sigma_2 & \sigma_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}.$$

此式ノ分母子ヲ展開シテ簡單ニ書キ直セバ次ノ第一式ガ導カレル. 又 σ ニ添ヘタ數字ヲ順次交代シテ書キ換ヘル時ハ b 及 c ニ對スル他ノ兩式ヲ得ル. 卽

$$\left.\begin{aligned}a&=\frac{\tau^2+(\sigma-\sigma_2)(\sigma-\sigma_3)}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)},\\ b&=\frac{\tau^2+(\sigma-\sigma_3)(\sigma-\sigma_1)}{(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)},\\ c&=\frac{\tau^2+(\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2)}{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)}.\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

夫レ故 σ 及 τ ノ値ヲ與ヘレバ其値ガ考ヘツツアル應力狀態ニ適當ナル限リハ之ニ對スル a, b, c ガ(22)式ニヨリテ計算サレル. 併シ方向餘弦自身ハ

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{a},\quad \cos\beta=\pm\sqrt{b},\quad \cos\gamma=\pm\sqrt{c}$$

トナル故正及負ノ組合セ八通リアリテ答ガ唯一ツデナイ. 之ハ考ヘツツアル法線ガ一點ノ周リニ凡テノ方向ヲトル自由ヲ許サレルカラデ若シタトヘバ座標軸ノ正ノ方向ニ開ク空間ノミヲ考ヘレバ方向餘弦ノ符號ハ皆正デアル. 而シテ斯樣ナ制限ヲ設ケテモ σ 及 τ ノ凡テノ組合セヲ考ヘル上ニ少シノ不自由モナイノハ明カデアル.

次ノ說明ニ於テ上ノ制限ヲ必シモ必要トシナイニ拘ラズ事ヲ簡單トスルタメニ正ノ座標軸ヲ境界線トスル空間ヲ取リ此中ニ法線ガ橫ルモノト定メル. 而シテ舊ノ問題ニ歸リテ a, b, c ニ夫レ夫レアル値ヲ與ヘレバ σ 及 τ ハ(22)ノ各式ニ於ケル右邊ノ分母ヲ兩邊ニ乘ジタル後簡單ナ書換ヘニヨリテ導カレル次ノ二次方程式ヲ滿足スル.

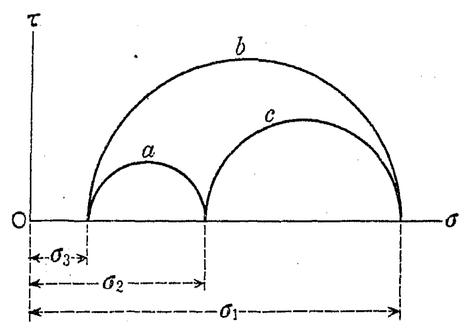
$$\left.\begin{aligned}\tau^2+\left(\sigma-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2&=a(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)+\frac{1}{4}(\sigma_2-\sigma_3)^2,\\ \tau^2+\left(\sigma-\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}\right)^2&=b(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)+\frac{1}{4}(\sigma_3-\sigma_1)^2,\\ \tau^2+\left(\sigma-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2&=c(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)+\frac{1}{4}(\sigma_1-\sigma_2)^2.\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

偖一平面上ニ σ 及 τ ヲ表ス直交座標軸ヲ作レバ(23)ノ各式ハ何レモ σ 軸上ニ中心ヲ有スル圓ヲ示ス. 之等ノ圓ヲ夫レ夫レ常數 a, b, c ト同名ノ文字ヲ用ヰテ區別スレバ其中心ノ位置及半徑ハ次ノ表ノ樣ニナル.

圓	座標軸ノ原點ヨリ中心ニ至ル距離	半徑
a	$\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}$	$\sqrt{a(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)+\frac{1}{4}(\sigma_2-\sigma_3)^2}$
b	$\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}$	$\sqrt{b(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)+\frac{1}{4}(\sigma_3-\sigma_1)^2}$
c	$\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$	$\sqrt{c(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)+\frac{1}{4}(\sigma_1-\sigma_2)^2}$

今 $\cos\alpha$ 及 $\cos\beta$ ガ與ヘラレ a ト b トガ知ラレテ居レバ此等兩方ノ値ヲ滿足スル σ 及 τ ハ a, b 兩圓ノ關係ヲ同時ニ滿スモノデナケレバナラヌ故卽二ツノ圓ノ交點ノ座標ガ要件ニ適フ σ, τ ノ値デアル.

偖特別ノ場合トシテ a, b, c ガ夫レ夫レ零トナル時ハ上ノ三圓ノ半徑ハ $\frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_3)$, $\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)$, $\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)$ トナリ σ 軸上ノ三點 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ニ於テ之等ノ圓ガ二ツ宛互ニ相切スル. 120 圖ハ τ ノ正ノ値ニ對スル各圓ノ半分ヲ示ス. 夫レ故平面ヘノ法線ガ座標面 yz, zx, xy 內ニアルニ從テ之ニ



120 圖

相應スル(σ, τ)點ハ夫レ夫レ前記ノ特別ナル圓弧 a, b, c 上ニアリ且法線ガ座標軸 x, y, z ノ方向ニアルニ從テ點ハ bc, ca, ab 各二圓ノ切スル點卽 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ニ一致スルコト勿論當然デアル. 而シテ考ヘツツアル空間內ニ引カレタ任意ノ法線ニ對スル(σ, τ)點ガ常ニ之等特別ノ三圓ニヨリテ圍マレタ面內ニ落ルコトヲ證明シヤウ. 若シ之ガ眞デナク此面外ニアル一點アリトスレバ其點ヲ通ル b 圓ノ半徑ガ $\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)$ ヨリ尙大ナルコトアルベク又 a, c 兩圓ノ半徑ガ夫レ夫レ $\frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_3), \frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)$ ヨリモ小ナルコトアリウベキ筈ナレドモ前ノ表カラ直ニ判ルヤウニ b 圓ノ半徑ハ假定ニヨリテ

$$(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)<0$$

ナルタメ $b=0$ ノ時最大デ又 a, c ハ

$$(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)>0,$$

竝ニ

$$(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)>0$$

ナルタメ $a=0,\ c=0$ ノ時最小デアル. 從テ上ノ面以外ニ一點モ存在シ得ナイノデアル.

之迄仕慣レテ來タ樣ニ法線ノ方向餘弦ヲ用キテ某平面ノ位置ヲ定メ此方法デ本節ノ樣ナ計算ヲ行フコトガ出來ルノデアルガ又次ノ樣ナ表シ方ヲ用キルノモ便利デアル. 卽座標軸ノ原點ヲ中心トシテ小ナル長サヲ半徑トスル球面ヲ作レバ一法線ノ方向ニ對シテ之ガ球面ヲ貫ク

點ガ一ツアル. 此點ニ於ケル球面ヘノ切面ヲ考ヘレバ前ノ法線ニヨリテ示サレル平面ニ平行デ且兩者ノ距離微小ナレバ兩者何レヲトルモ大差ナイ. ソレデ此小球面上ノ某點ニ於ケル平面ト云フ樣ナ表シ方デ法線ヲ用キル平面ノ表シ方ニ代用スルコトガ出來ル. 而シテ球面上ノ點ノ位置ハ其座標デ示サレ例ヘバ

$$x=r\cos\alpha, \qquad y=r\cos\beta$$

ナル二座標ヲ與ヘレバ考ヘツツアル空間內ニ限ラレタル球面上ノ點ノ位置ハ確定スル. 斯樣ニシテ球面上ノ點ヲ與ヘルコトハ同時ニ $\cos\alpha$ 及 $\cos\beta$ ガ定マル譯ニナリ從テ前ニ述ベタ樣ニ σ, τ 平面上ノ一點ガ相呼應スル結果ニナル. 一言ニシテ表セバ球面ノ八分ノ一ガ σ, τ 平面上ノ或ル有限面積內ニ寫像サレル.

以上述ベタ σ, τ 線圖ヲ標題ノ樣ニ Mohr ノ應力圖ト呼ブ. 之ハ應力ニ關スル諸問題ノ解決上甚ダ有益ナル助トナルモノデアル. 此線圖ニ就テ見ルニ σ_1 ヨリ σ_3 ニ至ル間ノ任意ノ σ ヲ與ヘレバ之ニ對スル τ ノ値ハ無數ニアルモ其內最大ノ τ ハ 120 圖中 b 圓上ノ一點ニヨリテ與ヘラレル. 夫レノミナラズ一般ニ σ ノアル値ニ對シテ最大ノ τ ヲ與ヘル圓ヲ主要圓ト呼ベバ主要圓ノ最頂點ノ縱座標ガ凡テノ τ 中ノ最大ノ τ ヲ決定スルコトガ直ニ判ル. 其値ハ主要圓ノ半徑ニ等シク卽

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}. \tag{24}$$

之ニ相當スル σ ハ

$$\sigma=\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}. \tag{25}$$

此時ノ平面ノ位置ハ(24), (25)ノ値ヲ(22)ノ中ニ入レテ $a, c, (b=0)$ ヲ求メレバ判ル. 併シ斯ル特別ノ場合ニハ寧ロ(25)ノ右邊ヲ

$$\sigma=a\sigma_1+c\sigma_3$$

ノ相當邊ト等シクオイテ a 及 c ヲ定メル方簡單デアル. 卽

$$a=\frac{1}{2}, \qquad c=\frac{1}{2}.$$

従テ考ヘツツアル空間ニ於テハ

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\beta=0,\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

故ニ問題ノ法線ハσ_1トσ_3トヲ含ム平面内ニ於テ之等ノ間ノ角ヲ二等分スルモノデアル.

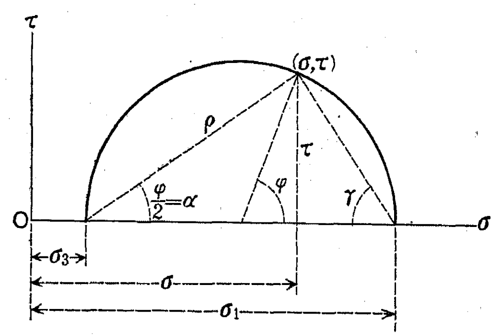
終リニ稍一般的ノ場合トシテ主要圓上ノ任意ノ一點ガ考ヘツツアル空間ノ何レノ方向ニ一致スルカヲ吟味シヤウ. (22)ノ第二式ヲ零ニ等シクスレバ

$$\tau^2=(\sigma_1-\sigma)(\sigma-\sigma_3).$$

之ヲ他ノ兩式ニ代入スレバ

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{\sigma-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3},\\ c&=\frac{\sigma_1-\sigma}{\sigma_1-\sigma_3}.\end{aligned}\right\}\qquad(26)$$

今σ,τ平面ニ於テ(121圖)主要圓上ノ一點ヲ圓ノ中心ト結ビ之ガσ軸



121 圖

トナス角ヲφトシ又同點トσ_3點トヲ結ビ其距離ヲρトスレバ

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{\sigma-\sigma_3}{\rho}=\frac{\rho}{\sigma_1-\sigma_3}.$$

故ニ

$$\cos^2\frac{\varphi}{2}=\frac{\sigma-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}.$$

問題ノ性質上αハ必ズ$\frac{\pi}{2}$以下ナルベキニヨリ此$\frac{\varphi}{2}$ガ直ニαノ値ヲ與ヘ又$\gamma=\frac{\pi}{2}-\alpha$ヨリ$\gamma$ガ定マル. 故ニ應力圖上$\alpha$ノ値ヲ見出シ平面ノ方向ヲ決スルハ甚ダ簡單デアルト言ハネバナラヌ. 特ニσ,τ點ガ主要圓ノ最高點ニ來ル場合ニハ $\frac{\varphi}{2}=\frac{\pi}{4}$ トナリテ前ノ結果ト一致スル.

例題 1. 横斷面ニ一様ナル垂直應力σノ作用スル棒ノ傾斜面ニ於ケル應力ヲ見出スコト.

傾斜面ト棒ノ軸トノ間ノ角ヲφトシ此平面ニ作用スル應力σ_φ及τ_φヲ計算シヤウ. 之等二應力ノ合力pガσト同一直線中ニ作用スルコトハ85節ノ中ニ述ベタ如クデアルガ其大サハ(4)カラ求メラレル. 卽棒ノ軸ノ方向ヲxトスレバ$\sigma_x=\sigma$トナリ其他ノ五個ノ分應力ハ皆零デアル. 而シテ$\alpha=\frac{\pi}{2}-\varphi$ナル故

$$p\cos\lambda=\sigma\sin\varphi,\qquad \cos\mu=\cos\nu=0.$$

従テ $\mu=\nu=\frac{\pi}{2}$, $\cos\lambda=\pm1$ トナリ卽pノ方向ハ軸ト一致スルコト上述ノ如クデアル. 而シテ $\pm p=\sigma\sin\varphi$ ナル故垂直應力σ_φハ

$$\sigma_\varphi=\pm p\sin\varphi=\sigma\sin^2\varphi.$$

又 $\tau_\varphi=p\cos\varphi$ トスレバ剪斷應力ノ大サハ

$$\tau_\varphi=\pm\sigma\sin\varphi\cos\varphi.$$

元來(4)ハ四面體ニ働ク力ノ平衡カラ導カレタモノデアルガ只今ノ場合ニハ$\sigma,p,\sigma_\varphi,\tau_\varphi$等ノ應力ガ一平面中ニアル故横斷面及傾斜面ヲ二面トシ第三面ハ棒ノ軸ニ平行ナル長サ不定ノ直角三角柱ヲ考ヘレバ充分デアル.

例題 2. 引張試驗片ノ横斷面ニ起ル垂直應力ヲ知リテ最大ノ剪斷應力ヲ見出スコト.

已知ノ垂直應力ヲσトスレバ之ガ唯一ノ主應力デアツテ他ノ二ツノ主應力ハ零デアルカラ求メル最大ノ剪斷應力ハ86節ニヨリ$\frac{\sigma}{2}$ニ等シイ. 而シテσ以外ニ主應力ノ確定シタ方向ナキ故斯ル剪斷應力ノ作用スル平面ハσノ方向ニ對シテ$\frac{\pi}{4}$ノ傾斜ヲナス任意ノ平面デアルコトモ亦明カデアル.

同樣ナル結果ハ例題1ニ導イタτ_φノ式ノ極大値ヲ求メテモ得ラレル. 卽$\sin\varphi\cos\varphi=\frac{1}{2}\sin 2\varphi$ハ$\varphi=\frac{\pi}{4}$ノ時極大デ其値ハ$\frac{1}{2}$ニ等シイカラ結局前ノ結果ヲ確メル事ニナル.

例題 3. 柱狀ノ試驗片ヲ取リ其側面ニ流體ノ壓力p'ヲ加ヘテ壓縮應力p'ヲ生ゼシメ之ト同時ニ柱軸ニ直角ナル兩端ヲ壓シテpナル密度ノ壓縮應力ヲ作用セシメル時試驗片內ニ起ル最大ノ剪斷應力ヲ見出スコト. 但$p>p'$トスル.

求メル最大ノ剪斷應力ノ大サハ$\frac{p-p'}{2}$ニ等シクpニ對シテ45°ノ傾斜ヲナス凡テノ平面ニ起ルモノデアル.

例題 4. 物體內ノ任意ノ一點ニ於テ次ノ如キ應力狀態ヲ引起サシメル外力ノ作用ハ如何デアルカ.

$$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=-p',$$

$$\tau_x=\tau_y=\tau_z=0.$$

但p'ハ點ノ位置ニ關セザル正ノ常數デアル.

(4)ニヨリテ

$$p\cos\lambda=-p'\cos\alpha,$$

$$p\cos\mu=-p'\cos\beta,$$

$$p\cos\nu=-p'\cos\gamma.$$

之等三式ヲ夫レ夫レ二乘シテ加ヘル時ハ

$$p=p'.$$

而シテ

$$\cos\lambda=-\cos\alpha,\quad \cos\mu=-\cos\beta,\quad \cos\nu=-\cos\gamma.$$

卽物體ノ表面ニ作用スル力ノ密度ハp'ニ等シク又其方向ハ表面ヨリ內部ニ向フ垂直線ニ一致スル. 故ニ物體ガ周圍ニ流體ノ壓力ヲ受ケル場合デアル. 尙假定シタ樣ナ應力狀態ガ成立スルタメニハ質量ニ作用スル力X, Y, Zガ零ナルベキハ(3)ヨリ見テ明カデアル.

以上ハ物體內ノ各點ニ於テ三ツノ方向ニ一樣ナル密度ノ壓力ヲ受ケタ場合デアルガ柱體ニ於テz軸ヲ柱軸ニ平行ナラシメル時

$$\sigma_x=\sigma_y=-p',$$

$$\sigma_z=\tau_x=\tau_y=\tau_z=0$$

ノ如キ應力狀態ガ生ズルタメニハ其側面ニp'ナル壓力ヲ加ヘルベキコトハ矢張リ上ト同樣ノ方法デ述ベルコトガ出來ル.