IX. 曲線軸ノ棒

55. 應力ノ計算

一般ニ曲線軸ノ棒ト云ヘバ各斷面ノ中心ヲ貫ク軸ガ任意ノ曲線ヲナス物體ヲ指スノデアルガ併シ此處デハ問題ヲ簡單トスルタメ棒ノ形ヲ次ノ樣ニ限定シヤウ.

(1) 棒ノ軸ハ一平面中ニアル曲線ナル事.

(2) 此平面ハ各斷面ヲ互ニ對稱ナル二部ニ分ケルコト.

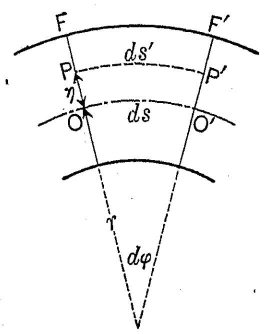
結局棒ハ一ツノ對稱平面ヲモツコトニナル. 而シテ此條件ノ外斷面ハ更ニ第二ノ對稱軸ヲモツ必要モナク又其形ガ軸ニ沿ヒテ不變デアルコトモ要求サレテ居ラヌ.

次ニ棒ノ上ニ作用スル外力ニ對シテ次ノ約束ヲ設ケル.

(3) 外力ハ凡テ上ノ對稱平面內ニ働ク.

以上(1),(2),(3)ノ條件ガ滿足サレルモノトシテ棒ニ起ル應力ヲ計算シヤウ. 先ヅ棒ノ任意ノ斷面ニ於テ外力ガ如何ナル作用ヲ呈スルカヲ知ル爲靜力學ノ法則ニヨリテ之ヲ斷面ノ中心ニ於テ對稱平面中ニ働ク合成力及同平面中ニ棒ヲ曲ゲ樣トスル偶力ニ纏メル. 而シテ合成力ヲ更ニ斷面ニ垂直及平行ノ二分力ニ分ケル時ハ前者ガ棒ヲ引キ又ハ壓スニ對シテ後者ハ斷面ニ辷リヲ起サセ樣トシテ働ク. 斯ル力ノ作用ヲ受ケル棒ノ變形ヲ考ヘルニ已ニ述ベタ條件ガ滿足サレルナラバ軸ガ之ヲ含ム對稱平面內デ變形スルコトハ明カデアル. 其處デ外力ノ諸作用中垂直分力P及偶力Mノ作用ガ如何ナル應力ヲ引起スカニ就テ考ヘテ見ヤウ. Pハ棒ヲ引キ又ハ壓スニ從テ正又ハ負トシMハ棒ノ曲リヲ更ニ増ス樣ニ働クカ又ハ減ズル樣ニ働クカニ從テ正又ハ負ト定メル. 92圖ハ變形前ニ於ケル棒ノ一部ヲ示スモノデ卽F, F'ヲ互ニ接近シタ二ツノ横斷面トシ之等兩斷面ノ重心O, O'ノ間ノ距離ハ$ds = rd\varphi$デアル. 次ニO, O'

ニ於テ對稱平面(紙面)ニ垂直線ヲ立テテ之等ヲ所屬斷面ノ彎曲軸ト稱ヘル. 偖同一斷面中ニ於テ彎曲軸ニ平行ナル直線ヲ引キ其彎曲軸ヨリノ距離ヲ η ニテ表ス. 但 η ハ圖ニ示ス如ク軸ノ張リ出シタ方ニ測レバ正トシ反對ノ方ニ於テハ負トシテ區別スル. 今 P, P' ヲ η ノ同値ヲ有セル二直線ノ紙面ヘノ射影トシ兩點間ノ距離ヲ ds' トスレバ



92 圖

$$\begin{aligned} ds' &= (r+\eta)\,d\varphi \\ &= ds + \eta\,d\varphi. \end{aligned}$$

變形前ニ於ケル此長サガ變形後如何ナル延長ヲナスカト言フニ η ノ變化ヲ省略シテ

$$\Delta ds' = \Delta ds + \eta\,\Delta d\varphi.$$

從テ P ニ於ケル ds' ノ伸ビハ

$$\varepsilon = \frac{\Delta ds'}{ds'} = \frac{\Delta ds + \eta\,\Delta d\varphi}{ds + \eta\,d\varphi} = \frac{\dfrac{\Delta ds}{ds} + \dfrac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\dfrac{\eta}{r}}{1 + \dfrac{\eta}{r}}.$$

此式ニ於テ

$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta ds}{ds}, \qquad \omega = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \tag{1}$$

トスレバ

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 + \omega\dfrac{\eta}{r}}{1 + \dfrac{\eta}{r}} = \varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0)\frac{\eta}{r+\eta}. \tag{2}$$

正比例ノ法則ガ成立スルトスレバ之ニ相當スル應力ハ

$$\sigma = E\varepsilon = E\left[\varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0)\frac{\eta}{r+\eta}\right]. \tag{3}$$

偖此應力ノ分布ト平衡スルモノハ P 及 M ナル故 df ヲ以テ斷面 F ノ O ヨリ η ナル距離ニアル狹イ面積ヲ示ス時ハ

$$P = \int \sigma\,df = E\left[\varepsilon_0 \int df + (\omega - \varepsilon_0)\int \frac{\eta}{r+\eta}\,df\right],$$

$$M = \int \eta\sigma\,df = E\left[\varepsilon_0 \int \eta\,df + (\omega - \varepsilon_0)\int \frac{\eta^2}{r+\eta}\,df\right].$$

但積分ノ範圍ハ何レモ全面ニ取ラレル. 夫レデ

$$\int df = f, \quad \int \eta\,df = 0.$$

又次ノ式ニテ定義サレル常數 $\varkappa$ ヲ用キル.

$$\left.\begin{aligned} &\int \frac{\eta}{r+\eta}\,df = -\varkappa f, \\ \text{或ハ書キ直シテ}\quad &\varkappa = -\frac{1}{f}\int \frac{\eta}{r+\eta}\,df = \frac{r}{f}\int \frac{df}{r+\eta} - 1. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

然ル時ハ

$$\int \frac{\eta^2}{r+\eta}\,df = \int\left(\eta - \frac{r\eta}{r+\eta}\right)df = -r\int \frac{\eta}{r+\eta}\,df.$$

從テ

$$\int \frac{\eta^2}{r+\eta}\,df = r\varkappa f.$$

之等ノ式ヲ上ノ P 及 M ノ中ニ入レル時ハ

$$P = Ef\left[\varepsilon_0 - \varkappa(\omega - \varepsilon_0)\right],$$

$$M = Efr\varkappa(\omega - \varepsilon_0).$$

從テ

$$\left.\begin{aligned} \omega - \varepsilon_0 &= \frac{M}{Efr\varkappa}, \\ \varepsilon_0 &= \frac{P}{Ef} + \varkappa(\omega - \varepsilon_0) = \frac{1}{Ef}\left(P + \frac{M}{r}\right), \\ \omega &= \varepsilon_0 + \frac{M}{Efr\varkappa} = \frac{1}{Ef}\left(P + \frac{M}{r} + \frac{M}{r\varkappa}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

特別ノ場合トシテ若シ ε_0 ノ式ニ $P = 0$ トオケバ

$$\varepsilon_0 = \frac{M}{Efr}$$

トナリ卽鑾曲軸ガ中立軸ト一致セヌ事ガ判ル．此點ニ於テ曲線軸ノ棒ハ直線軸ノ場合ト趣ヲ異ニスルノデアル．

已ニ ε_0 及 ω ノ値ガ知ラレタ上ハ σ ノ式(3)ガ直ニ次ノ樣ニナル．

$$\sigma=\frac{P}{f}+\frac{M}{fr}+\frac{M}{fr\varkappa}\frac{\eta}{r+\eta}. \qquad (6)$$

此式中ノ $\varkappa$ ハ其定義(4)ニヨリテ明カナル如ク單ナル數デ單位ニ關係シナイ．而シテ之ハ與ヘラレタ斷面ニ對シテ一々計算スルヲ要スルガ或ル斷面形ノ例並ニ圖式計算ノ一法ヲ以下兩節ニ述ベヤウ．

矩形斷面ニ對スル次ノ節ノ $\varkappa$ ヲトリテ之ヲ(6)ニ入レ又一方ニ於テハ後ニ述ベル平面ノ問題中同心圓弧ヲ以テ內外ノ境トスル板ノ應力ヲ求メテ之等ヲ比較スル時ハ軸ノ曲率半徑ガ小ナラザル限リ兩者ガ殆ンド等シイ値ヲ示ス．從テ上ニ述ベタ計算法ハ少クモ之等ノ比較ノ範圍內ニ於テ實用上適當ト見做シテ宜シイ．

尙玆ニ斷面ノ高サガ半徑 r ニ比ベテ小ナル場合ニ次ノ近似式ヲ用ヰウルコトヲ附加ヘタイ．卽前ニ示シタヤウニ

$$\varkappa f r=\int\frac{\eta^2}{r+\eta}df.$$

$\frac{\eta}{r}$ ガ已ニ1ニ對シテ省略サレルモノトスレバ近似的ニ

$$\varkappa f r^2=\int\eta^2 df=I.$$

從テ

$$\varkappa=\frac{I}{fr^2}. \qquad (7)$$

此値ヲ用ヰル時ハ(6)ハ次ノ樣ニナル．

$$\sigma=\frac{P}{f}+\frac{M}{fr}+\frac{M\eta}{I}.$$

r 大ナル爲第二項ヲ第三項ニ對シテ省略スレバ

$$\sigma=\frac{P}{f}+\frac{M\eta}{I}. \qquad (8)$$

之ハ直線棒ノ場合ノ式デアル．

56.　斷面常數 χ ノ計算．

(a)　矩形．93圖．

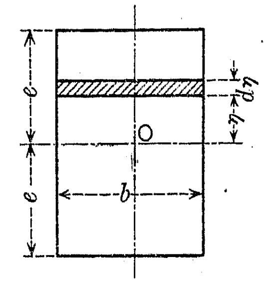
幅ヲ b トシ高サヲ $2e$ トスレバ

$$f=2eb,$$

$$df=bd\eta.$$

(4)ニ上ノ f 及 df ヲ入レル時ハ

$$\varkappa=\frac{r}{2e}\int_{-e}^{+e}\frac{d\eta}{r+\eta}-1.$$



93　圖

從テ

$$\varkappa=\frac{r}{2e}\log\frac{r+e}{r-e}-1. \qquad (9)$$

此式ヲ $\frac{e}{r}$ ノ級數ニ展開スルトキハ

$$\varkappa=\frac{1}{3}\left(\frac{e}{r}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{e}{r}\right)^4+\frac{1}{7}\left(\frac{e}{r}\right)^6+\cdots\cdots \qquad (10)$$

(b)　圓及楕圓．94圖．

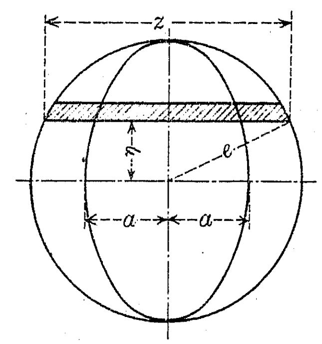
先ヅ圓(半徑 e)ニ對シテ計算ヲ行フ．

$$f=\pi e^2, \quad z=2\sqrt{e^2-\eta^2},$$

$$df=2\sqrt{e^2-\eta^2}\,d\eta.$$

從テ(4)ニ於テ

$$\int\frac{df}{r+\eta}=2\int\frac{\sqrt{e^2-\eta^2}}{r+\eta}d\eta.$$



94　圖

此式中ニ次ノ樣ニ置ク．

$$\sqrt{e^2-\eta^2}=e-\eta x.$$

然ル時ハ

$$\eta=\frac{2ex}{1+x^2},$$

$$d\eta=\frac{2e(1-x^2)}{(1+x^2)^2}dx.$$

從テ

$$\int_{-e}^{+e}\frac{\sqrt{e^2-\eta^2}}{r+\eta}\,d\eta=\int_{-1}^{+1}\frac{e-\dfrac{2ex^2}{1+x^2}}{r+\dfrac{2ex}{1+x^2}}\,\frac{2e(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$=2e^2\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}\,\frac{dx}{r+2ex+rx^2}.$$

偖 $\dfrac{e}{r}=n$ トスレバ

$$\int_{-e}^{+e}\frac{\sqrt{e^2-\eta^2}}{r+\eta}\,d\eta=2en\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}\,\frac{dx}{1+2nx+x^2}$$

$$=2en\left[\frac{n^2-1}{n^2}\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{1+2nx+x^2}+\frac{1}{n^2}\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{1+x^2}-\frac{2}{n}\int_{-1}^{+1}\frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}\right]$$

$$=\frac{\pi e}{n}\left[1-\sqrt{1-n^2}\right].$$

故ニ

$$\varkappa=\frac{r}{\pi e^2}\,\frac{2\pi e}{n}\left[1-\sqrt{1-n^2}\right]-1$$

$$=\frac{2}{n^2}\left[1-\sqrt{1-n^2}\right]-1.$$

即

$$\varkappa=\frac{2}{\left(\dfrac{e}{r}\right)^2}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{e}{r}\right)^2}\right]-1. \tag{11}$$

$\varkappa$ ハ又次ノ樣ニモ書ケル.

$$\varkappa=\frac{1}{4}\left(\frac{e}{r}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{e}{r}\right)^4+\frac{5}{64}\left(\frac{e}{r}\right)^6+\cdots. \tag{12}$$

以上圓ニ對シテ導カレタ結果ヲ棒ノ對稱平面内ノ半徑ガ e ニ等シイ楕圓ノ場合ニ用ヰテ差支ヘノナイコトハ次ノ説明カラ明カデアル. 即楕圓ノ他ノ半徑ヲ a トシ其面積ヲ f' ニテ表セバ

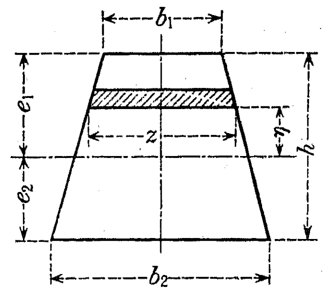
$$f'=\pi ae=\frac{a}{e}f,$$

$$df'=\frac{a}{e}\,df.$$

從テ $\varkappa$ ノ式ハ圓ノ場合ト同ジ形ニナル.

(c) 梯形. 95 圖.

圖ニ示ス樣ニ η ヲ上ノ方ニ正ト取ツテ計算シヤウ.



95 圖

$$f=\frac{b_1+b_2}{2}h,$$

$$z=b_2-\frac{b_2-b_1}{h}(e_2+\eta),$$

$$df=\left(b_2-\frac{b_2-b_1}{h}(e_2+\eta)\right)d\eta.$$

從テ (4) ニ於テ

$$\int_{-e_2}^{+e_1}\frac{df}{r+\eta}=\left(b_2-\frac{b_2-b_1}{h}e_2\right)\int_{-e_2}^{+e_1}\frac{d\eta}{r+\eta}-\frac{b_2-b_1}{h}\int_{-e_2}^{+e_1}\frac{\eta\,d\eta}{r+\eta}$$

$$=\left(b_2-\frac{b_2-b_1}{h}e_2\right)\log\frac{r+e_1}{r-e_2}-\frac{b_2-b_1}{h}(e_1+e_2)+\frac{b_2-b_1}{h}r\log\frac{r+e_1}{r-e_2}$$

$$=\left[b_2+\frac{b_2-b_1}{h}(r-e_2)\right]\log\frac{r+e_1}{r-e_2}-(b_2-b_1).$$

故ニ

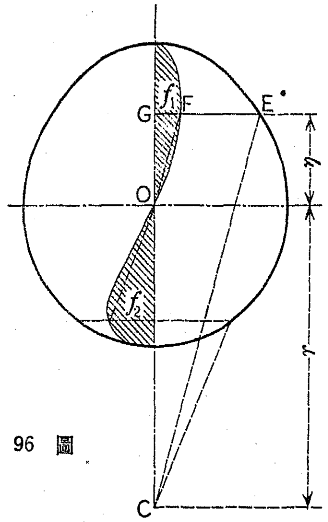
$$\varkappa=\frac{2r}{(b_1+b_2)h}\left\{\left[b_2+\frac{b_2-b_1}{h}(r-e_2)\right]\log\frac{r+e_1}{r-e_2}-(b_2-b_1)\right\}-1. \tag{13}$$

57. χ ノ圖式計算法 (Tolle).

與ヘラレタ斷面(96圖)ハ OC 軸ニ對シテ對稱的デアルカラ次ノ方法ハ OC 軸ノ左右何レカノ半面ニ就テ行ヘバ宜シイ. 周邊上ノ任意ノ一點ヲ E トスレバ半面ノ幅ハ EG デアル. 今 EG 上ニ

$$FG=EG\times\frac{\eta}{r+\eta}$$

ヲトリテ F 點ヲ定メル. 之ガ爲ニ軸ノ曲率中心 C ヲ E ト結ビ O ヲ通シテ CE ニ平行線 OF ヲ引ケバ F ハ即求メル點デアル. 同樣ノ方法ヲ η



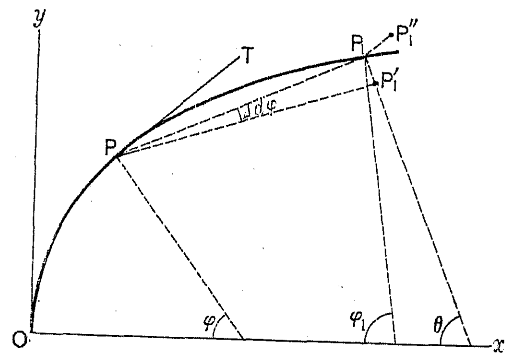
96 圖

ノ正負種々ノ値ニ對シテ行ヒ之ニ依テ得タ幾ツカノ點ヲ曲線デ結ベバ圖ニ示ス樣ナ形ノ曲線デ圍マレタ面積ガ得ラレル．此面積ヲ測リテ得タ答(f_1-f_2)ハ卽$\frac{1}{2}\int\frac{\eta}{r+\eta}df$ニ等シイ．但$f_1$及$f_2$ハ夫レ夫レ$\eta$ノ正負兩方ノ値ニ對スル面積ノ絕對値デアル．而シテ$\varkappa$自身ハ次ノ樣ニナル．

$$\varkappa=-\frac{2}{f}(f_1-f_2)=\frac{2(f_2-f_1)}{f}. \tag{14}$$

58. 曲線軸ノ變形.

97圖ニ於テ紙面ガ棒ノ對稱平面ニ一致スルモノトシ變形前ノ軸線ヲOPP_1トスル．此線中ニ任意ノ一點Oヲ取リテ原點トシOニ於テ曲線ヘノ法線並ニ切線ノ方向ニ直交軸Ox及Oyヲ選ブ．而シテ之等ノ座標軸ハO點デ曲線ニ固定サレタモノト考ヘル．偖曲線上ノ任意ノ一點P_1ノ座標ヲx_1, y_1トシ又P_1ニ於ケル曲線ヘノ法線ガx軸ノ負ノ方向トナス角ヲφ_1トスレバ外力ノ作用ヲ受ケテ曲線ガ變形ヲ惹起ストキx_1, y_1ハ夫レ夫レΔx_1及Δy_1ナル變化ヲ生ジφ_1ハ$\Delta\varphi_1$ナル變化ヲ伴フ．先ヅ$\Delta\varphi_1$ヲ



97 圖

考ヘルニOP_1上ノ任意ノ一點Pニ於テ互ニ相接近シタ二法線間ノ角$d\varphi$ガ變形ノタメニ生ズル變化ハ$\Delta d\varphi=\omega\, d\varphi$ナル故

$$\Delta\varphi_1=\int_0^{\varphi_1}\Delta d\varphi=\int_0^{\varphi_1}\omega\, d\varphi. \tag{15}$$

次ニΔx_1及Δy_1ヲ計算スル．元來Pニ於ケル微小ナル角$d\varphi$ノ受ケル變化ノタメニ弦PP_1ハ$\omega\, d\varphi$ナル廻轉ヲナシ從テP_1ハPP_1ニ殆ンド直角ノ方向ニ於ケル小移動ヲナシテP'_1ニ來ル．又Pニ於ケル弧線dsノ變形$\varepsilon_0\, ds$ノタメニP_1ハPニ於ケル切線PTニ平行ノ方向ニ移動シ卽P_1ハP_1''ニ來ル．此第一段ノ移動丈ケヲ考ヘレバx及yノ方向ニ於ケルP_1ノ分移動ハ次ノ如クデアル．

$$PP_1\,\omega\, d\varphi\cos\theta=(y_1-y)\,\omega\, d\varphi,$$
$$-PP_1\,\omega\, d\varphi\sin\theta=-(x_1-x)\omega\, d\varphi.$$

但θハPP_1ヘノ垂直線ガxノ負ノ方向トナス角デ或ハ又PP_1ガyノ正軸トナス角デアルトモ云ヘル．

又第二段ノ變化ノミニ基ク分移動ハ夫レ夫レ

$$\varepsilon_0\, ds\sin\varphi=\varepsilon_0\, dx,$$
$$\varepsilon_0\, ds\cos\varphi=\varepsilon_0\, dy.$$

P點ニ於ケル小弧線ノ方向及長サノ變化ニヨルP_1ノ移動ハ上ノ二組ノ分移動ヲ組合セテ得ラレル故Δx_1及Δy_1ヲ求メルニハ斯樣ニシテ出來タ二式ヲOヨリP_1ニ至ル間ニ積分スレバ宜シイ．卽

$$\left.\begin{aligned}\Delta x_1&=\quad y_1\int_0^{\varphi_1}\omega\, d\varphi-\int_0^{\varphi_1}y\,\omega\, d\varphi+\int_0^{x_1}\varepsilon_0\, dx,\\ \Delta y_1&=-x_1\int_0^{\varphi_1}\omega\, d\varphi+\int_0^{\varphi_1}x\,\omega\, d\varphi+\int_0^{y_1}\varepsilon_0\, dy.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

特ニ若シ斷面ノ高サガ曲率半徑ニ比ベテ小ナル場合ニハωノ式(5)ニ於テ先ヅ(7)ヨリ$\varkappa=\frac{I}{fr^2}$トオキ且右邊括弧內ノ第一第二兩項ヲ省イテ(言葉ヲ換ヘテ言ヘバωニ對シテε_0ヲ省イテ)

$$\omega = \sim \frac{Mr}{EI} \tag{5a}$$

トシテ差支ヘガナイ. 又同ジク(5)ノ ε_0 ノ式ノ中 P ニ對シテ $\dfrac{M}{r}$ ヲ省ケバ結局上ノ式(16)カラ下ノ樣ナ近似式ガ書ケル.

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_1 &= \frac{1}{E}\left[\quad y_1\int_0^{\varphi_1}\frac{M}{I}r\,d\varphi - \int_0^{\varphi_1}y\frac{M}{I}r\,d\varphi + \int_0^{x_1}\frac{P}{f}dx\right], \\ \Delta y_1 &= \frac{1}{E}\left[-x_1\int_0^{\varphi_1}\frac{M}{I}r\,d\varphi + \int_0^{\varphi_1}x\frac{M}{I}r\,d\varphi + \int_0^{y_1}\frac{P}{f}dy\right]. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

此節ヲ結ブニ當リテ尙變形ニ關スル問題ノ一ツトシテ曲率半徑ノ變化ヲ求メル式ヲ導キタイト思フ. r ヲ與ヘラレタ曲線ノアル一點ニ於ケル最初ノ半徑トシ又 ρ ヲ同ジ點ニ於ケル變形後ノ半徑トスル. 然ルトキハ小弧線 ds ハ變ジテ $ds+\Delta ds$ トナリ又 $d\varphi$ ハ $d\varphi+\Delta d\varphi$ トナル故

$$ds+\Delta ds = \rho\,(d\varphi+\Delta d\varphi).$$

此式ノ兩邊ヲ $ds=rd\varphi$ ニテ除セバ

$$1+\varepsilon_0 = \frac{\rho}{r}(1+\omega),$$

或ハ

$$\frac{r}{\rho} = \frac{1+\omega}{1+\varepsilon_0}. \tag{18}$$

此式ノ ε_0 及 ω ニ(5)ヲ代入スレバ

$$\frac{r}{\rho} = \frac{Ef+P+\dfrac{M}{r}+\dfrac{M}{r\varkappa}}{Ef+P+\dfrac{M}{r}} = 1+\frac{M}{\left(Ef+P+\dfrac{M}{r}\right)r\varkappa}.$$

故ニ

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}+\frac{M}{\left(Ef+P+\dfrac{M}{r}\right)r^2\varkappa}. \tag{19}$$

次ニ上ノ(18)ヨリ近似的ニ

$$\frac{r}{\rho} = 1+\omega-\varepsilon_0.$$

之ニ(5)ヲ代入スレバ

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}+\frac{M}{Efr^2\varkappa} \tag{20}$$

トナリ卽曲率半徑ノ逆數ノ變化ハ加ヘラレタ曲ゲノ偶力ニ比例スル.

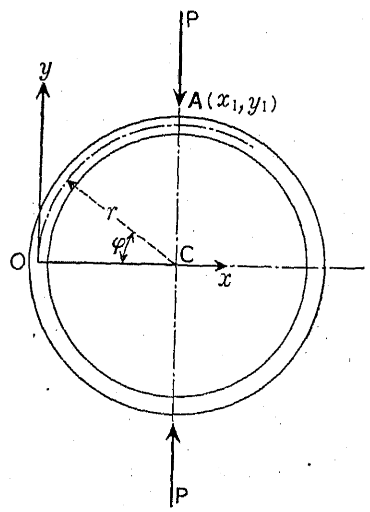
更ニ若シ $\varkappa fr^2 = I$ トスレバ

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}+\frac{M}{EI}. \tag{21}$$

モシ $r=\infty$ ナラバ此式ハ直線棒ニ於ケル計算ノ結果ト一致スルコトIII 章(15)ニ比較スレバ明カデアル.

59. 圓環ヲ壓ス場合.

中心軸ノ半徑 r ヲモツ圓環アリテ其直徑ノ方向ニ作用スル力 P, P ヲ加ヘテ之ヲ壓ス時ハ力ノ方向ニ於ケル環ノ直徑ハ縮ミ之ト直角ノ方向ノ直徑ハ伸ビル. 斯ル變形ヲ計算スルタメニ中心ヲ通ル水平軸ノ方向ヲ x 軸トシ圓周上ノ一點 O ヲ原點トスル直交座標軸ヲ引ク. 98圖. 外力ノ方向ヲ y 軸ニ平行トスレバ變形ハ垂直及水平ノ兩直徑ニ對シテ對稱ヲナス故全圓周ノ四分ノ一 AO ヲ取リテ此部分ノ變形ヲ考ヘレバ充分デアル. 切離サレタ四分ノ一圓弧ノ一端 O ニ於ケル力及偶力ヲ考ヘルニ先ヅ此斷面ニハ明カニ剪斷力ノ作用ナク大サ $\dfrac{P}{2}$ ニ等シキ力ガ壓ス樣ニ作用シテ居ル. 又偶力ハ未知デ其モーメントヲ M_0 ニテ表ス. Ox 軸ヨリ角 φ ヲ距テル任意ノ斷面ヲ取レバ曲ゲ偶力ノモーメントハ次ノ式ニテ示サレル.



98 圖

$$M = M_0 - \frac{P}{2}r(1-\cos\varphi).$$

力ヲ受ケタ圓環ノ變形ヲ見ルニ對稱ノ爲ニ角 $OCA=\varphi_1$ ハ依然直角ヲナス. 夫レ故(15)ニヨリテ

$$\Delta\varphi_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\,d\varphi=0.$$

斷面ノ高サガ半徑 r ニ比ベテ可ナリ小ト假定シテ(5a)ヨリ

$$\omega=\frac{Mr}{EI}=\frac{r}{EI}\left(M_0-\frac{Pr}{2}+\frac{Pr}{2}\cos\varphi\right).$$

此式ヲ用キテ上ノ條件式ヲ積分スレバ

$$\left(M_0-\frac{Pr}{2}\right)\frac{\pi}{2}+\frac{Pr}{2}=0.$$

之ヨリ M_0 ヲ求メレバ

$$M_0=\frac{Pr}{2}\left(1-\frac{2}{\pi}\right). \tag{22}$$

從テ

$$M=\frac{Pr}{2}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)-\frac{Pr}{2}\left(1-\cos\varphi\right)$$
$$=Pr\left(\frac{1}{2}\cos\varphi-\frac{1}{\pi}\right).$$

$\varphi=\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ ニ對スル M ヲ M_1 トスレバ

$$M_1=-\frac{Pr}{\pi}. \tag{23}$$

弧線ノ伸縮ニ依ル半徑ノ變化ハ甚ダ小ナル故 Δx_1 及 Δy_1 ニ對スル(17)式ニ於テ各々第三項ヲ省略シテ計算ヲ行ヘバ A 點ノ座標 $x_1=y_1=r$ ノ變化ハ次ノ樣ニナル.

$$\Delta x_1=\frac{Pr^3}{EI}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos\varphi-\frac{1}{\pi}\right)d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\left(\frac{1}{2}\cos\varphi-\frac{1}{\pi}\right)d\varphi\right]$$
$$=\frac{Pr^3}{EI}\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{4}\right), \tag{24}$$

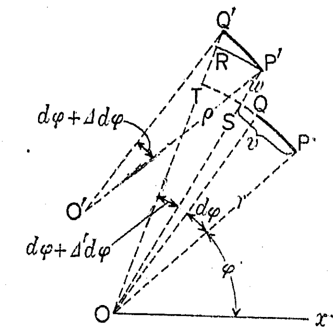
$$\Delta y_1=\frac{Pr^3}{EI}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}\cos\varphi\right)d\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos\varphi\right)\left(\frac{1}{2}\cos\varphi-\frac{1}{\pi}\right)d\varphi\right]$$
$$=-\frac{Pr^3}{EI}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{\pi}\right). \tag{25}$$

座標軸ニ對スル A 點ノ變位定マル故求メル直徑ノ變化ハ Δx_1 及 Δy_1 ヲ二倍シテ之ヲ決定スル事ガ出來ル. 例ヘバ薄肉ノ圓管ヨリ短イ輪ヲ切リテ之ヲ壓シ其直徑ノ變化ヲ測レバ實驗的ニ $2\Delta x_1$ ヲ求メル事ガ出來ル故其結果ヨリ E ガ計算サレル.

上ノ計算デハ圓環ノ長サヲ短イト假定シタ. 若シ管ノ長サガ相當ニ大デアレバ上ノ式ノ E ノ代リニ61節ノ終ニ述ベル樣ニ $E\frac{m^2}{m^2-1}$ ヲ置イテ計算スル方適當デアル. $m=\frac{10}{3}$ トスレバ此式ハ $1.1E$ ニ等シイ.

60. 圓弧ノ變形.

99圖ニ示ス樣ニ O ヲ中心トスル半徑 r ノ圓弧 PQ ヲトリ其上ノ一點 P ノ位置ヲ示スタメニ Ox 線ヨリノ角 φ ヲ以テスル. 今此圓弧ガ變形ヲ生ジ P ガ P' ニ來ルモノトシ卽圓周ノ方向ノ變位ヲ v トシ半徑ノ方向ノ變位ヲ w トスル. 而シテ曲率半徑ハ變ジテ ρ トナル. 此際小弧線 PQ ハ $P'Q'$ ニ移リ其長サハ前ニ比ベテ變化ナシト假定スル. 偖 Q ノ移動ハ $v+dv,\ w+dw$ ニテ表サレ其狀圖ニ示ス如クデアルトスレバ $P'Q'$ ト O ヲ中心トスル小圓弧 $P'R$ トノ間ノ角(下ニ簡單ノ爲ニ $\angle Q'P'R$ トカク)ヲ小サイト假定シテ近似的ニ $P'Q'=P'R$ ト書ケバ



99 圖

$$r\,d\varphi=(r+w)(d\varphi+\Delta'd\varphi).$$

從テ近似的ニ

$$r\,\Delta'd\varphi+w\,d\varphi=0. \tag{26}$$

又直線 OQ' 及 $O'P'$ ノ間ノ角ヲ求メレバ $\angle OP'O'=\angle Q'P'R=\frac{dw}{rd\varphi}$ ナル故 $d\varphi+\Delta'd\varphi+\frac{dw}{rd\varphi}$ トモ書ケ又ハ $d\varphi+\Delta d\varphi+\frac{dw}{rd\varphi}+\frac{d^2w}{rd\varphi^2}d\varphi$ トモ書ケル. 之等兩式ヲ等シク置イテ得ル方程式ノ兩邊ヨリ相等シイ項ヲ去リテ簡單ニ

スレバ

$$\Delta' d\varphi = \Delta d\varphi + \frac{d^2 w}{r\, d\varphi^2} d\varphi .$$

(26)ニヨリテ $\Delta' d\varphi$ ヲ消去シ且(1)ニヨリテ $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \omega$ ト書ケバ

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w + r\,\omega = 0 .$$

然ルニ(5a)ヲ用キレバ

$$\omega = \frac{Mr}{EI} .$$

故ニ

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w + \frac{Mr^2}{EI} = 0 . \qquad (27)$$

次ニ

$$ST = QT - QS = QT - PS + PQ .$$

此式ニ於テ $QT = v + dv$ ナル故兩邊ヲ書キ換ヘテ

$$r\,(d\varphi + \Delta' d\varphi) = dv + r d\varphi ,$$

又ハ

$$r\,\Delta' d\varphi = dv .$$

此式ト(26)トヨリ $\Delta' d\varphi$ ヲ消去スレバ

$$dv + w\, d\varphi = 0 ,$$

又ハ

$$\frac{dv}{d\varphi} = -w . \qquad (28)$$

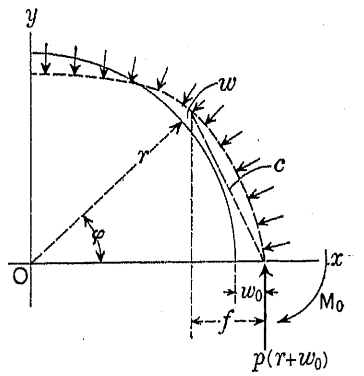
(27)及(28)ガ圓弧ノ彈性變形ニ對スル微分方程式デアル.

61. 外壓ヲ受ケル圓環及圓筒ノ安定.

圓環又ハ圓筒ノ外部ニ作用スル壓力ヲ增セバ遂ニ安定ガ失ハレルコトハ能ク知ラレタ事實デアル. 今微分方程式(27)ノ應用ノ例トシテ斯ル場合ノ安定ヲ論ジヤウ. 偖半徑 r ノ圓ガ壓力ヲ受ケテ少シ壓シ曲ゲラレタト假定スル. 100 圖ノ破線ハ變形ノ大體ノ有樣ヲ示シ卽變形ガ Ox, Oy 軸ニ夫レ夫レ對稱ヲナストシタ. 從テ兩軸ハ曲線ニ垂直デア

ル. 斯樣ナ彈性變形ガ可能ナル條件ヲ導クタメニ圖ニ示ス座標 r, φ ヲ用キル. 又 $\varphi = 0$ ニ對スル w ノ値ヲ w_0 ニテ表ス. 偖紙面ニ直角ノ方向ニ測ラレタ圓環ノ長サヲ1單位ト假定シテ任意ノ斷面ニ於ケル曲ゲモーメントヲ求メレバ

$$M = M_0 - p\,(r + w_0) f + p \frac{c^2}{2} .$$



100 圖

此式ノ最後ノ項ハ c ヲ長サトスル弦上ノ弧ニ作用スル壓力ノモーメントデアル. 之ハ弧ノ微小部分ニ作用スル力ヲ取リ上ニ述ベタ弦ニ直角ナル成分ヲ求メテ其モーメントヲ作リテ積分スレバ直ニ求メラレル. c ニ平行ナル分力ハ必ズ方向反對スル等大ノ成分ノ存在スル爲モーメントヲ生ジナイ.

偖

$$(r + w)^2 = c^2 - f^2 + (r + w_0 - f)^2 .$$

故ニ w^2, w_0^2 等ヲ省略スレバ

$$\frac{c^2}{2} - (r + w_0) f = r\,(w - w_0) .$$

從テ

$$M = M_0 + pr\,(w - w_0) .$$

此値ヲ(27)ニ入レル時ハ

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w + \frac{pr^3 (w - w_0) + M_0 r^2}{EI} = 0 .$$

又ハ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + \alpha^2 w = \frac{p r^3 w_0 - M_0 r^2}{EI} , \\ &\text{但} \qquad \alpha^2 = 1 + \frac{pr^3}{EI} . \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

此微分方程式ノ積分ハ明カニ

$$w = A\cos\alpha\varphi + B\sin\alpha\varphi + \frac{pr^3w_0 - M_0r^2}{EI+pr^3}$$

トナリ且常數 A 及 B ノ決定ニ對シテハ次ノ條件ヲ考ヘル必要ガアル. 卽先ヅ $\varphi=0$ ノ時 $w=w_0$ 竝ニ $\frac{dw}{d\varphi}=0$ ナルヲ要スル故此第二ノ條件ニヨリテ $B=0$ トナリ第一ノ條件ニヨリテ

$$A = w_0 - \frac{pr^3w_0 - M_0r^2}{EI+pr^3}$$

$$= \frac{EIw_0 + M_0r^2}{EI+pr^3}.$$

從テ

$$w = \frac{(EIw_0+M_0r^2)\cos\alpha\varphi + pr^3w_0 - M_0r^2}{EI+pr^3}. \tag{30}$$

此式ニヨリテ示サレル變形ガ可能ナラバ圓周ハ變ジテ同ジ形ノ二組ノ波ヲ生ズベク從テ $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ヲ距テテ波ノ峯ト谷トガ相呼應スベキ筈デアル. 故ニ $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ノ時 $\frac{dw}{d\varphi}$ ハ再ビ零トナル. 卽

$$\sin\frac{\alpha\pi}{2} = 0.$$

故ニ外壓ガ次ノ値ニ達スレバ考ヘツツアル如キ變形ガ成立ツ.

$$\frac{\alpha\pi}{2} = \pi,$$

又ハ

$$\sqrt{1+\frac{pr^3}{EI}} = 2,$$

卽

$$p = \frac{3EI}{r^3}. \tag{31}$$

此式中ニ斷面(厚サ h, 長サ 1)ノ慣性モーメント

$$I = \frac{h^3}{12}$$

ヲ入レル時ハ

$$p = \frac{E}{4}\left(\frac{h}{r}\right)^3. \tag{32}$$

又ハ

$$h = r\sqrt[3]{\frac{4p}{E}}. \tag{33}$$

(32)式ハ圓環ノ安定ニ對スル限界壓力[1]ヲ與ヘル. 之ハ二個ノ波ノ場合デ夫レ以上ノ數ノ場合ハ只今ノ問題ニ於テ必要デナイ. 併シ玆ニ注意スベキハ上ノ式ガ長イ圓筒ニ對スル Bryan[2] ノ式ト少シ相違スル點デアル. 此相違ハ次ノ樣ニシテ除カレル.

二ツノ直角方向ニ作用スル應力 σ_1, σ_2 ニ對スル變形成分 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ハ VI 章(19)ニヨリテ與ヘラレル. 若シ之等ノ何レカ一ツ例ヘバ $\varepsilon_2=0$ トスレバ

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{m}.$$

之ヲ他ノ成分 ε_1 ノ式中ニ導ケバ

$$\varepsilon_1 = \frac{m^2-1}{m^2}\frac{\sigma_1}{E}.$$

夫レ故 σ_1 ト ε_1 トノ關係ハ正比例ノ常數トシテ E ノ代リニ $\frac{m^2}{m^2-1}E$ ヲ用キテ之ヲ表ス事ガ出來ル. 從テ圓筒ノ長サガ相當ニ長クシテ長サノ方向ノ伸縮ガ妨ゲラレル時ハ圓周方向ノ σ, ε ノ關係ヲ此係數ニヨリテ表シ得ル譯デアツテ圓筒ニ對スル限界壓力ハ(32)ヲ修正シテ次ノ樣ニ係數 $\frac{m^2}{m^2-1}$ ヲ入レテ之ヲ求メル事ガ出來ル. 卽最小ナル限界壓力ハ

$$p = \frac{E}{4}\frac{m^2}{m^2-1}\left(\frac{h}{r}\right)^3. \tag{34}$$

若シ $m=\frac{10}{3}$ トスレバ此式ノ方ガ(33)ヨリモ凡ソ 10% 大ナル値ヲ與ヘル.

此限界壓力ノ式ハ圓筒ノ兩端ノ影響ガナイト考ヘ得ル程相當ニ長イ場合ニ對スルモノデアツテ短イ場合ニハ通用シナイ. 夫レデハ短イ場合ノ安定問題ハ如何ニシテ決セラレルカト云フニ之ニ對シテハ例ヘバ Bach[3] ノ實驗式ノ如キ者ヲ參考スル外 Southwell,[4] Mises[5] 等ノ數學的計

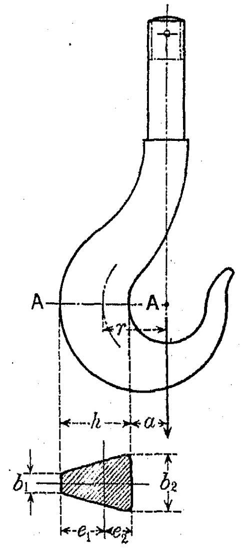
1) A. Föppl, Technische Mechanik, III, 4 版, 282 頁; 10 版, 331 頁.
2) Love, Mathematical Theory of Elasticity, 2 版, 529 頁; 4 版, 574 頁.
3) C. Bach, Maschinen-Elemente, 11 版, 247 頁; 13 版, I 卷, 249 頁.
4) Phil. Mag., May 1913, 687 頁; Sept. 1913, 502 頁; Jan. 1915, 67 頁.
5) Zeitschrift des V. D. I., 1914, 750 頁.

算ヲ參考シテ頂キタイト思フ. 卽計算ノ結果ニ依レバ或ル長サ以下デハ兩端ノ支持ガ安定ニ影響スルモノデアツテ長サガ短クナルニ連レテ限界壓力ハ或ル程度迄次第ニ增加スル. 殊ニ面白イノハ安定ヲ失フ筒壁ノ凹凸ガ必シモ $n=2$ ノ場合ト限ラズシテ長サニヨリテ 3 又ハ以上ノ波ヲ生ズ可キ點デアル. 尙唯今ノ問題ニ關スル實驗トシテハ Carman[1] ノ著ヲ紹介シタイ.

上ノ計算ハ彈性安定ノ場合ニ對スルモノデアルガ壁ノ厚サガ稍大トナレバ非彈性ノ安定ガ問題トナル事丁度柱ノ場合ト同樣デアル.

例題 1. 起重機用鉤ノ斷面ニ生ズル最大應力ノ計算.

鉤ノ形ハ 101 圖ニ示ス如クデ其中心線ニ沿ヒテ荷重 Q ガ吊サレルモノトシ橫斷面 AA 中ニ生ズル應力ノ計算ヲ試ミヤウ. 此處ニ斷面ハ梯形ト見做シテ κ ニ對スル(13)式ヲ用ヰルケレドモ製圖室ニ於テハ寧ロ圖式計算法ヲ用ヰテ斷面ノ正確ナル形ニ對スル κ ヲ定メル方ガ望マシイ.



101 圖

僣圖ニ於テ

$$r=a+e_2,\quad h=2a,\quad b_2=3b_1$$

ト假定スル. 然ル時ハ

$$r+e_1=3a,\quad r-e_2=a,$$

$$e_2=\frac{h}{3}\,\frac{2b_1+b_2}{b_1+b_2}=\frac{5}{6}a,$$

$$e_1=\ 2a-\frac{5}{6}a=\frac{7}{6}a,$$

$$r=\ a+\frac{5}{6}a=\frac{11}{6}a.$$

之等ノ値ヲ(13)ニ入レル時ハ

$$\kappa=0.0975.$$

1) Phil. Mag., Dec. 1916, 559 頁.

而シテ(6)ニ於テ

$$P=Q,\quad M=-Q(a+e_2).$$

故ニ

$$\sigma=\frac{Q}{f}-\frac{Q(a+e_2)}{fr}-\frac{Q(a+e_2)}{\kappa fr}\,\frac{\eta}{r+\eta}$$

$$=-\frac{Q}{\kappa f}\,\frac{\eta}{r+\eta}=-\frac{Q}{0.0975f}\,\frac{\eta}{\frac{11}{6}a+\eta}.$$

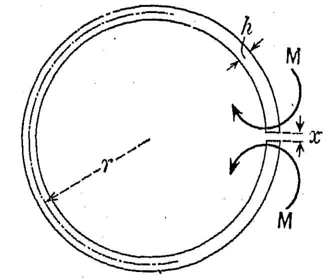
鉤ノ內側 $\left(\eta=-\frac{5}{6}a\right)$ ニ起ル最大引張應力　$\sigma=8.6\frac{Q}{f}$.

鉤ノ外側 $\left(\eta=+\frac{7}{6}a\right)$ ニ起ル最大壓縮應力　$\sigma=-4.0\frac{Q}{f}$.

若シ眞直ノ棒ト見テ曲率半徑ヲ無限大トシテ計算スレバ如何ニナルカ. 其結果ヲ上ノ計算ト比較スルノハ好イ練習問題デアラウ.

例題 2. 偶力ノ作用ノミヲ受ケル環.

殆ンド全圓周ニ近イ環アリテ其斷面ヲ一樣トシ又斷面ノ中心ヲ通ル圓ノ半徑ヲ r トスル (102 圖). 環ノ切口ニ於テ或ル偶力ヲ加ヘテ之ヲ變形スル時環ノ兩端ガ丁度相接スルトシヤウ. 最初切口ニ於ケル兩端ノ距離ヲ x トスレバ環ノ斷面ニ於ケル最大ノ曲ゲ應力ハ如何.



102 圖

半徑 r ヲ相當ニ大ト見テ近似式(8)及(21)ヲ用ヰ $P=0,\ \eta=\frac{h}{2}$ トオク. 然ル時ハ M ノ項ヲ消去シテ

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{r}+\frac{2\sigma}{Eh},$$

又ハ

$$\frac{r-\rho}{\rho r}=\frac{2\sigma}{Eh}.$$

然ルニ

$$2\pi(r-\rho)=x,\quad \rho=r-\frac{x}{2\pi}.$$

最後ノ式ノ右邊第二項ハ第一項ニ比ベテ非常ニ小ナル故近似的ニ

$$\frac{r-\rho}{\rho r}=\frac{x}{2\pi r^2}.$$

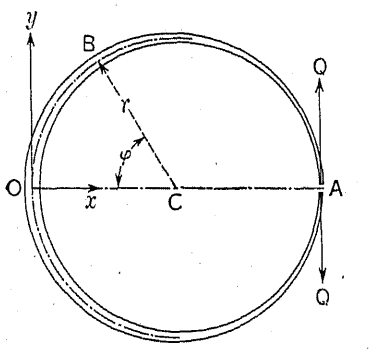
從テ

$$\sigma=\frac{Ehx}{4\pi r^2}.$$

例題 3. 圓環ヲ開ク力ノ計算.

圓環ノ切リ口ニ二ツノ力 Q, Q ヲ加ヘテ之ヲ開カセル場合ヲ取リテ座標軸ノ方向ニ於ケル分移動ノ式(17)ノ應用ヲ示サウ.

先ヅ環ノ厚サガ各部一樣ト假定シテ計算ヲ試ミヤウ. 後ニ示ス計算ノ爲ニ描カレタ 103 圖ハ環ノ厚サガ一樣ナラザル場合ニ對スルモノデアルガ座標軸ノ取リ方ハ此圖ト同樣ニシテ卽圓ノ中心及環ノ切口ヲ通ル直線ノ方向ニ x 軸ヲ又圓周ニ接シテ y 軸ヲ引ク. 環ノ一端 $x_1=2r$, $y_1=0$, $\varphi_1=\pi$ ニ於ケル y 軸ノ方向ノ變位 Δy_1 ヲ求メル爲近似式(17)ヲ用ヰル. 夫レハ斷面ノ寸法ガ半徑ニ比ベテ可ナリ小ト假定シタ故デアル. 倍



103 圖

$$x=r(1-\cos\varphi),\quad y=r\sin\varphi,$$

$$P=Q\cos\varphi,\qquad M=-Qr(1+\cos\varphi).$$

而シテ斷面一樣デ $f=bh$, $I=\frac{1}{12}bh^3$ ナル故

$$-x_1\int_0^\pi\frac{M}{I}r\,d\varphi=\frac{2Qr^3}{I}\int_0^\pi(1+\cos\varphi)\,d\varphi=\frac{24Qr^3}{bh^3}\pi,$$

$$\int_0^\pi x\frac{M}{I}r\,d\varphi=-\frac{Qr^3}{I}\int_0^\pi(1-\cos^2\varphi)\,d\varphi=-\frac{6Qr^3}{bh^3}\pi,$$

$$\int_0^{y_1}\frac{P}{f}dy=\frac{Qr}{f}\int_0^\pi\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{Qr}{bh}\frac{\pi}{2}.$$

$\frac{r}{h}$ ガ可ナリ大ナレバ最後ノ積分ハ他ノモノニ比ベテ遙ニ小デアル. 依テ之ヲ省略スレバ

$$\Delta y_1=\frac{18Q}{E}\frac{r^3}{h^3}\frac{\pi}{b}.$$

Q ヲ加ヘテ環ヲ擴ゲタ時ノ半徑ヲ最初ノ半徑ニ比ベテ略ボ $\frac{h}{2}$ 丈ケ大トスレバ圓周ノ擴リハ πh トナル故試ニ $2\Delta y_1$ ヲ πh ニ等シクオケバ

$$Q=\frac{bh^4}{36r^3}E.$$

此力ニヨリテ生ズル應力ヲ求メル爲(8)ノ第一項ヲ省略シテ近似式 $\sigma=\frac{Me}{I}$ ヲ用ヰレバ $\varphi=0$ ニ於ケル最大應力ノ値ハ下ノ如クデアル.

$$\sigma=\frac{12Qr}{bh^2}=\frac{h^2}{3r^2}E.$$

從テ

$$h=r\sqrt{\frac{3k_b}{E}}.$$

$k_b=1200\,kg/cm^2$, $E=750\,000\,kg/cm^2$ トスレバ

$$h=\frac{r}{14.4}.$$

次ニ環ノ厚サガ h_1 ヨリ零ニ變ズルト見做シ其最モ厚イ斷面ノ中心ニ座標軸ノ原點ヲ取リ環ノ直徑ノ方向ニ x 軸ヲ又圓周ニ切シテ y 軸ヲ選ブ (103 圖). 圓弧上ノ任意ノ點 B ニ於ケル法線ノ傾ヲ φ トシテ斷面ノ厚サヲ $h=h_1\sqrt[3]{\frac{1+\cos\varphi}{2}}$ トスル. 環ノ一端ニ於ケル變位 Δy_1 ヲ求メル爲(17)式中ニ次ノ樣ニオク.

$$f=bh=bh_1\sqrt[3]{\frac{1+\cos\varphi}{2}}=bh_1\cos^{\frac{2}{3}}\frac{\varphi}{2},$$

$$I=\frac{bh_1^3}{24}(1+\cos\varphi).$$

然ル時ハ r ヲ常數トシテ積分スルコトニヨリテ

$$-x_1\int_0^\pi\frac{M}{I}r\,d\varphi=\frac{48Qr^3}{bh_1^3}\pi$$

$$\int_0^{\pi} x\frac{M}{I}r\,d\varphi=-\frac{24Qr^3}{bh_1^3}\pi.$$

偖(17)式ノ第三項ハ前ノ場合ノ樣ニ他ニ比ベテ明カニ小デアルカラ直ニ之ヲ省略シテ差支ヘガナイ. 併シ强イテ其計算ヲ示セバ

$$\int_0^{y_1}\frac{P}{f}dy=\frac{Qr}{bh_1}\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\varphi}{\cos^{\frac{2}{3}}\frac{\varphi}{2}}d\varphi$$

$$=\frac{Qr}{bh_1}\int_0^{\pi}\left(2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1\right)^2\frac{d\varphi}{\cos^{\frac{2}{3}}\frac{\varphi}{2}}$$

$$=\frac{2Qr}{bh_1}\left[4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{10}{3}}\theta\,d\theta-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{4}{3}}\theta\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{-\frac{2}{3}}\theta\,d\theta\right].$$

此最後ノ積分ハ何レモ次ノ公式ニ依リテ直ニ積分サレル.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}\theta\cos^{q-1}\theta\,d\theta=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}.$$

即計算ノ結果

$$\int_0^{y_1}\frac{P}{f}dy=5.1\frac{Qr}{bh_1}.$$

然ルニ$\frac{r}{h_1}$ガ可ナリ大ナレバ前述ノ樣ニ此項ハ他ノ項ニ對シテ省略シテ差支ヘナイ故

$$\Delta y_1=\frac{24\pi}{E}\frac{Q}{b}\frac{r^3}{h_1^3}.$$

環ヲ擴ゲタ時ノ半徑ガ最初ノ半徑ニ比ベテ略ボ$\frac{h_1}{2}$丈ケ大トスレバ圓周ノ擴リハ πh_1 トナル故試ニ $2\Delta y_1$ ヲ πh_1 ニ等シクオケバ

$$h_1=\frac{48}{E}\frac{Q}{b}\frac{r^3}{h_1^3},$$

又ハ

$$Q=\frac{E}{48}\frac{bh_1^4}{r^3}.$$

應力ヲ求メルタメニ前ノ樣ニ近似式 $\sigma=\frac{Me}{I}$ ヲ用キレバ

$$\sigma=\frac{6Qr(1+\cos\varphi)}{bh^2}$$

$$=\frac{Eh_1^2}{4r^2}\sqrt[3]{\frac{1+\cos\varphi}{2}}.$$

此値ハ $\varphi=0$ ノ時最大デ應力ノ限度ヲ k_b トスレバ

$$k_b=\frac{Eh_1^2}{4r^2},$$

又ハ

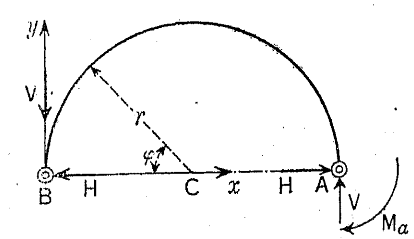
$$h_1=2r\sqrt{\frac{k_b}{E}}.$$

$k_b=1200\,kg/cm^2$, $E=750\,000\,kg/cm^2$ トスレバ

$$h_1=\frac{r}{12.5}.$$

例題 4. 半徑 r ニシテ横斷面一樣ナル半圓弧アリ其兩端ヲピンニテ止メ置キ一端ニ曲ゲ偶力ヲ加ヘル時兩端ニ於ケル支力ヲ計算スルコト.

A ニ於テ加ヘラレタ偶力ヲ M_a トスル (104 圖). 又他端 B ニ於テハ偶力ナク從テ B ニ於ケル支力トシテハ H 及 V ノ兩分力丈ケデアル. 次ニ A ニ於テハ矢張リ水平並ニ垂直ノ二分力作用スルモ其大サハ力ノ平衡ノタメ當然 H 及 V デ方向ハ B 點ノ兩分力ト正反對デアル. 而シテ H ハ圓弧ノ變形ヲ考ヘテ初メテ之ヲ定メルコトガ出來ルケレドモ V ノ方ハモーメントノ平衡カラ次ノ樣ニナル.



104 圖

$$V=\frac{M_a}{2r}.$$

偖圓弧ハ斯ル外力ノ作用ヲ受ケテ變形スルモ A,B 兩支點ノ位置ハ不

變ナル故B點ニ座標軸ノ原點ヲ取リテ圖ニ示ス樣ニx, y軸ヲ選ブ時ハA點ニ於ケルΔx_1ハ零ト置ケル．此條件ニ從テ未知ノ支力Hヲ定メヤウ．(17)ニヨリテ

$$y_1\int_0^\pi \frac{M}{I} r\,d\varphi - \int_0^\pi y\frac{M}{I} r\,d\varphi + \int_0^{x_1}\frac{P}{f}\,dx = 0$$

y_1ガ零ナルタメ第一項ハ零デアル．又第三項ハ圓弧ノ伸縮ニ因ル變位デアツテ之ハ第二項ニ比ベテ甚ダ小デアルカラ省略シヤウ．然ル時ハI及rガ常數ナル故

$$\int_0^\pi y\,M\,d\varphi = 0,$$

又ハ

$$\int_0^\pi M\sin\varphi\,d\varphi = 0.$$

然ルニ

$$M = Vr(1-\cos\varphi) - Hr\sin\varphi.$$

從テ

$$V\int_0^\pi \sin\varphi\,(1-\cos\varphi)\,d\varphi - H\int_0^\pi \sin^2\varphi\,d\varphi = 0.$$

故ニ

$$H = V\frac{\int_0^\pi \sin\varphi\,(1-\cos\varphi)\,d\varphi}{\int_0^\pi \sin^2\varphi\,d\varphi}.$$

之ヲ積分スレバ

$$H = \frac{4V}{\pi},$$

卽

$$H = \frac{2M_a}{\pi r}.$$

Hノ方向ハ圖ニ示ス矢ノ方向ト同一デアル．

上ノ計算ニ於テ　$P = V\cos\varphi + H\sin\varphi$, $dx = r\sin\varphi\,d\varphi$. 之ヲ用ヰテ省略セル第三項ヲ計算シ如何ナル程度迄此省略ガ差支ヘナキヤヲ檢スル事ヲ

勸メタイト思フ．

例題 5.　直徑 80 cm, 厚サ 1.2 cm ノ軟鋼板製ノ圓筒アリテ彈性係數Eヲ 2 100 000 kg/cm^2 トスレバ何氣壓ノ外壓ニ堪ヘウルカ．

(34)ヨリ限界狀態ノ壓力ハ

$$p = \frac{E}{4}\frac{m^2}{m^2-1}\left(\frac{h}{r}\right)^3$$

$$= \frac{2\,100\,000}{4}\frac{100}{91}\left(\frac{1.2}{40}\right)^3$$

$$= 15.6\ kg/cm^2.$$

故ニ15氣壓ニ達スレバ危險デアル．