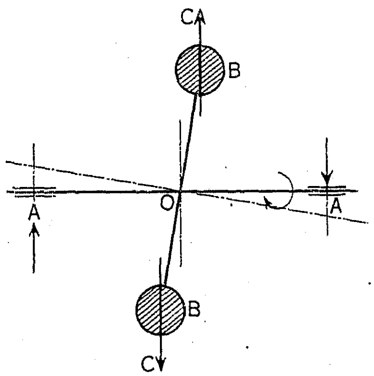
VIII. 軸ノ限界速度.

51. 荷ヲ有ツ輕イ軸.

廻轉スル物體ヲ取付ケタ軸ガ軸承ニ支ヘラレナガラ廻轉スルトシヤウ. 此時軸ノ中心線ガ物體ノ重心ヲ通リ且其慣性ノ主軸ト一致スルコトガ困難ナルタメ力學上興味アル問題ヲ生ズルノデアル. 元來軸ハ前ニモ述ベタ樣ニ曲ゲ及捩リノ兩作用ヲ受ケナガラ廻轉スル棒狀ノ機械部分デアルガ本節ニ於テハ上ノ廻轉體ニ作用スル遠心力ノタメニ軸ノ曲ゲヲ起シ從テ軸ハ廻轉體ニ對シ或ル反抗力ヲ及ボスモノト考ヘルケレドモ軸自身ノ質量ハ之ヲ省略シテ考ヘニ入レナイ. 從テ下ノ計算ノ結果ハ極メテ輕イ而モ彈性的ナル軸ヲ有スル廻轉體ニ適用サレルベキモノデアル.

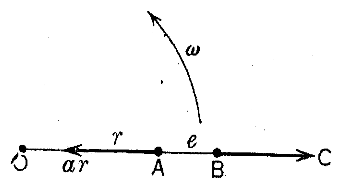


88 圖

先ヅ軸ノ中心線ガ慣性ノ主軸ト一致セザルタメニ起ル影響ヲ考ヘルタメ88圖ニ於テ AA ヲ軸ノ中心線トシ B, B ヲ以テ廻轉體ヲ表サシメル. 而シテ簡單ノタメニ廻轉體ガ B, B ニ集中シタ質量ヨリナルモノト見做ス. 然ル時ハ廻轉ニヨリテ CC ナル遠心力ガ作用スル. 之等ノ力ハ互ニ相等シクシテ反向スルモ兩者ノ間ニ或ル距離ヲ有スル故偶力ヲ形成シテ主軸ノ傾斜ヲ緩和スル樣ナ方向ニ軸ヲ曲ゲル. 而シテ此偶力ト釣合フ可キ他ノ偶力ハ軸承ノ支力ヨリ成ルモノデアル. 此時起ル運動ノ有樣ニ就テハ力學上尙考究スベキモノガアルケレドモ只今ハ之丈ケノ注意ニ止メテ本題卽偏心體ノ安定ヲ論ジヤウ. 卽軸ノ中心線ガ廻轉體ノ重心ヲ通ラヌタメニ如何ナル現象ヲ生ズルカ.

抑多少ノ偏心ガ工作上已ムヲ得ザルモノトスレバ之ガタメニ働ク遠心力ハ當然ノ結果デアツテ從テ軸ハ曲リヲ起ス. 而シテ廻轉速度ガ增セバ遠心力ハ其二乘ニ比例シテ增スノミデナク曲ゲノタメ半徑ガ增大シ遠心力ハ愈々大トナリ或ル限界速度ニ達スレバ軸ハ到底此力ニ堪ヘ得ザルタメ折レル恐レガアル. 此事ハ誰シモ首肯スル處デアルガ斯ル限界速度ヲ過ル時軸ガ折レナイ樣ニ注意スレバ夫レ以上ノ速サニ於テ軸ガ再ビ安全ニ廻轉シ得ル事實ニ至リテハ de Laval ノ蒸氣タービンガ製出サレル迄一般ノ承認スル所トナラナカツタ. 實ニ上記タービンニヨリテ初メテ限界速度以上ニ於ケル安定ノ領域ガ開拓サレタト言ツテ宜シイノデアル. 傳ヘル所ニヨレバ de Laval ハ先ヅ高速度ノ廻轉軸ニ關シテ充分ナル實驗ヲ施シ然ル後其タービン製作ヲ初メタト稱セラレル.[1)]爾來此問題ハ大ニ理論家ノ注意ヲ促シ其研究ヲ進メタノデアル.

89圖ニ於テ O ヲ軸承中心線ノ射影トシ A ヲ軸ノ中心線ガ廻轉體ニ交ル點トスル. 但 $OA=r$. 若シ軸ガ少シモ彎曲ヲ生ゼズモノナラバ $r=0$ デアル. 又 B ヲ廻轉體ノ重心トシ $AB=e$ トスル. 下ノ計算ニ於テ廻轉體ノ運動ガ時間ト共ニ其狀態ヲ變ゼザルモノトシ卽簡單ニ言ヘバ恒久狀態ヲ保ツモノトシテ論ジヤウ. 從テ無論廻轉ノ速度 ω ハ常數デアル. 今廻轉體ニ作用スル力ヲ考ヘルニ B ニ於テ遠心力 C ガ OB ノ方向ニ作用シ又 A ニ於テ軸ノ彎曲ニ因ル反抗力ガ AO ニ沿ヒテ働ク. 後者ハ素ヨリ撓ミ r ニ比例シテ增加スルモノデアツテ $r=1$ ヲ惹起スベキ荷重ヲ a トスレバ反抗力 ar ニヨリテ與ヘラレル. 而シテ廻轉ノ恒久狀態ニ於テ以上二力ガ平衡スルタメニハ C 及 ar ガ同一ノ直線上ニアリテ且之等ハ等大デ互ニ反向ス可キデアル. 故ニ OAB ノ相互ノ位置



89　圖

1) Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der k. technischen Hochschule, München, XXIV, 1896, 50 頁.

89圖ノ如クナラバ

$$m\omega^2(r+e)=ar.$$

故ニ

$$r=e\frac{m\omega^2}{a-m\omega^2}. \tag{1}$$

此式ニ於テ $\omega=0$ ナラバ $r=0$ ナルハ當然ノ結果デアツテ尚 ω ガ增スニ從テ r ハ增加シ $\omega^2=\dfrac{a}{m}$ ナル時ハ $r=\infty$ トナル. 之ハ廻轉軸ノ限界速度ヲ意味スルノデアルガ此時軸ヲ支ヘナガラ廻轉速度ヲ速ニ增加セシメテ其曲折ヲ避ケ更ニ進ミテ ω ヲ增セバ r ハ負トナル. 而シテ其絕對値ハ常ニ e ヨリモ大デアル. 從テ B ハ AO ノ中間ニ來リ $\omega=\infty$ ナル時ハ $r=-e$ トナリテ B ガ O ニ一致スル.

此處ニ限界速度ヲ ω_∞ ニテ表シ $r=\infty$ ナルコトヲ示セバ

$$\omega_\infty=\sqrt{\frac{a}{m}}. \tag{2}$$

而シテ(1)ノ分子分母ヲ m デ除スコトニヨリテ

$$r=e\frac{\omega^2}{\omega_\infty^2-\omega^2}. \tag{3}$$

或ハ角速度トシテ ω ノ代リニ一分間ノ廻轉數 n ヲ用キレバ

$$r=e\frac{n^2}{n_\infty^2-n^2}. \tag{4}$$

尚限界速度ノ式(2)ニ於テ m ノ代リニ廻轉體ノ重量 G 及重力ノ加速度 g ヲ用キテ $m=\dfrac{G}{g}$ ト書キ且又 $\omega_\infty=\dfrac{\pi n_\infty}{30}$ ト記セバ

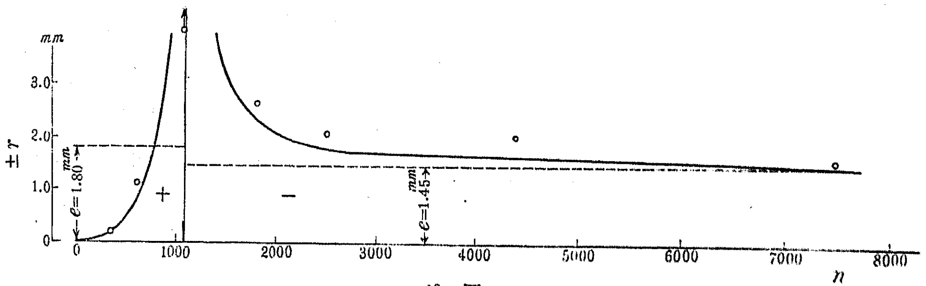
$$n_\infty=\frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{ag}{G}}. \tag{5}$$

G ヲ kg, a ヲ kg/cm ナル單位ニテ表シ $g=980\ cm/sec^2$ トオケバ近似的ニ

$$n_\infty=300\sqrt{\frac{a}{G}}. \tag{6}$$

上ノ計算カラ判ル樣ニ G ガ大デ a ガ小ナル程 ω_∞ ハ小デアル. 從テ重イ荷ヲ負フ細長イ軸ハ比較的低イ限界速度ヲ有ツ.

偖 ω_∞ 以上ニ於ケル廻轉體ノ安定ヲ精シク吟味スルタメニハ振動ノ問題ヲ研究スベキデアルガ之ハ例ヘバ Stodola 又ハ他ノ著[1] ニ讓リ玆ニハ實驗上斯ル安定ガ存在シ且(1),(3)又ハ(4)ヲ用ヰテ計算セル彎曲ノ撓ミ r ガ測定ノ結果ト稍相似タル結果ヲ與ヘルコトヲ述ベテ置キタイト思フ. 此目的ニ對シテ Föppl ノ著述中[2] ニ引用セル實驗ノ一例ヲ下ニ示ス. 卽90圖ニ於テ橫軸ハ廻轉數 n ヲ示シ縱軸ハ撓ミ $\pm r$ ヲ表ス. 偏心



90 圖

距離 e ハ軸ノ殘留性ノ曲リノタメ常ニ不變デハナイ. 依テ測定ノ結果ヲ比較スルタメニ或ル e ノ値ニ換算シテアル. 卽限界速度以下ノ e ヲ 1.80 mm トシ以上ノソレヲ 1.45 mm ト記載シテアル. 而シテ一方ニハ之等ニ對シテ計算サレタ r ノ値ガ曲線ニヨリテ示サレ實測ニヨリテ得タ値ハ點ヲ以テ記入シテアル. 此結果ハ次ノ樣ナ場合ニ對スルモノデアル.

$$G = 0.439\,kg,$$

$$a = 5.86\,kg/cm.$$

從テ

$$n_\infty = 300\sqrt{\frac{a}{G}} = 1095.$$

尙90圖ノ表シ方ハ前ニ紹介シタ原文中ノ圖ト少シク異ル點ノアルコトヲ玆ニ附記シテオク.

---

1) Schweizerische Bauzeitung, 68, Nov. 1916, 209 頁. Stodola, Die Dampfturbinen, 4 版, 626 頁; 6 版, 929 頁. 妹澤克惟, 振動學, 198 頁.

2) Mitteilungen, München, 前出.

52. 荷ノ無イ軸ノ安定.

前節ニ於テ軸ノ限界速度ヲ論ズル際ニハ之ヲ支ヘル軸ノ質量ヲ考ヘナカツタガ本節ニ於テハ斯ル廻轉體ノナイ代リニ軸自身ノ質量ヲ省略セズシテ其安定ヲ考ヘヤウ. 卽殊更彎曲ヲ起スベキ荷重ヲ與ヘズトモ高速度ヲ以テ廻轉スル軸ガ或ル原因ノタメ彎曲ヲ生ズルコトアレバ自身ノ質量ニ作用スル遠心力ノタメニ安定ヲ失フコトガアル.

偖廻轉體ヲ論ジタ時ニハ最初カラ或ル偏心ノ距離ガ存在シテ遠心力ガ作用スルモノト見タノデアルガ唯今ノ問題デハ軸ノ中心線ガ最初眞直ト見テ若シ撓ミヲ生ズルナラバ斯ル彎曲ガ果シテ可能ナリヤ否ヤヲ考ヘヤウ.

一樣斷面デ且眞直ナ棒ノ中心線上ノ任意ノ一點ヲ原點トシ x 軸ヲ最初ノ中心線ニ一致セシメ之ニ直角ニ y 軸ヲ設ケ彈性線上ノ任意ノ一點ニ於ケル單位ノ長サノ質量 m_1 ヲトレバ之ニ作用スル遠心力ハ $m_1\omega^2 y$ デアル. 今軸ガ宛モ靜止セル如ク考ヘ其代リニ全長ニ亙リテ $m_1\omega^2 y$ ニ等シイ密度ノ荷ガ作用スルモノト見テ差支ヘナク從テ III 章(73)ニヨリテ彈性線ノ微分方程式ハ次ノ樣ニ書ケル.

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = m_1\omega^2 y.$$

此式ニ於テ E, I ハ例ノ如ク彈性係數及慣性モーメントヲ表ス. 偖

$$\frac{m_1\omega^2}{EI} = p^4 \tag{7}$$

トオケバ微分方程式ハ

$$\frac{d^4y}{dx^4} = p^4 y \tag{8}$$

トナル. 而シテ此式ノ積分ハ $e^{\lambda x}$ ノ形ヲ有スル四項ヨリナリ且 λ ノ値ハ $\pm p$ 及 $\pm ip$ ナル故

$$y = c_1 e^{px} + c_2 e^{-px} + c_3 e^{ipx} + c_4 e^{-ipx},$$

又ハ

$$y = A\cosh px + B\sinh px + C\cos px + D\sin px. \tag{9}$$

之等ノ式ニ於テ $c_1, c_2, \cdots$ 及 A, B, C, D 等ハ何レモ任意ノ常數デ兩端ノ條件ニヨリテ定メラレル. 次ニ二三ノ特別ナル場合ヲ述ベヤウ.

(a) 一端固定シ他端自由ナル場合.

座標軸ノ原點ヲ廻轉軸ノ固定端ニトリテ軸ノ長サヲ l トスレバ兩端ノ條件ハ次ノ如クデアル.

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

$$x = l, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0.$$

前ノ二ツノ條件ヨリ

$$A + C = 0, \quad B + D = 0.$$

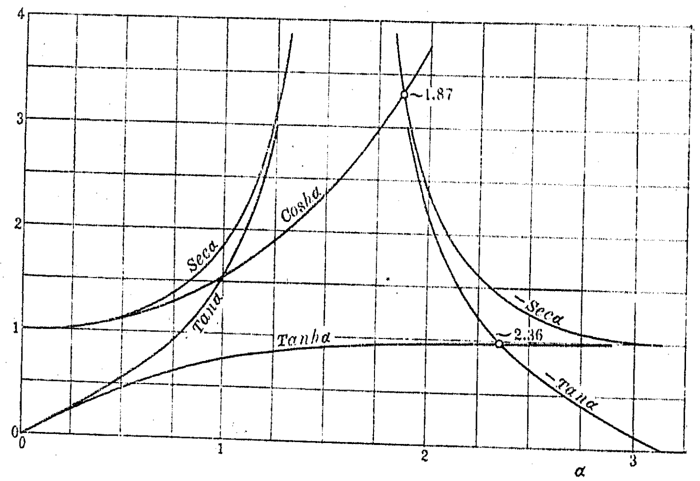
故ニ(9)ハ

$$y = A(\cosh px - \cos px) + B(\sinh px - \sin px).$$

此式ガ自由端ノ二ツノ條件ヲ滿足スル爲ニハ

$$A(\cosh pl + \cos pl) + B(\sinh pl + \sin pl) = 0,$$

$$A(\sinh pl - \sin pl) + B(\cosh pl + \cos pl) = 0.$$



91 圖

之等ノ兩式ヨリ A, B ヲ除クトキハ

$$(\cosh pl + \cos pl)^2 = \sinh^2 pl - \sin^2 pl.$$

然ルニ $\cosh^2 pl - \sinh^2 pl = 1$ ナル故

$$\cosh pl \cos pl = -1. \tag{10}$$

此關係ヲ滿足スベキ pl ノ最小値ハ $\frac{\pi}{2}$ ト π トノ間ニアリテ其値ハ91圖ヨリ見ル如ク 1.87 ニ近ク尙一層精シク檢算スレバ 1.8751 デアル.[1] 故ニ

$$\omega = \frac{1.8751^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m_1}}$$

$$= \frac{3.516}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m_1}}. \tag{11}$$

之ガ唯今ノ場合ノ最低ノ限界速度デアツテ軸ハ此速度以下デ安定ナルハ勿論之以上ニ於テモ再ビ(10)ガ成立セヌ間ハ安定デアル.

(b) 兩端ガ自由ニ支ヘラレル場合.

軸ノ長サヲ l トシ原點ヲ其中央ニトル時ハ兩端ノ條件ハ次ノ如クデアル.

$$x = \pm\frac{l}{2}, \quad y = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

偕彈性線ガ原點ノ兩側ニ於テ y 軸ノ同一ノ方向ニ曲リテ對稱ヲナス

---

1) 方程式 $\cos x \cosh x = -1$ ノ根ヲ求メルコト. 此根ハ多クノ文獻ニ記載サレテ居ルガ最モ便利ナ計算法トシテ林桂一博士ノ著ヲ用キヤウ. 卽下ノ計算ハ Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen e^x und e^{-x}, Berlin u. Leipzig, 1921 ニヨル. 此表ヨリ略ボ(10)式ヲ滿足シ想ナ x ニ對スル $\cos x$ 及 $\cosh x$ ヲ求メレバ

x	$\cos x$	$\cosh x$	$\cos x \cosh x$	
1.875	−0.29953	3.33709	−0.99956	I
1.876	−0.30049	3.34027	−1.00372	II

$$\text{II} - \text{I} = -0.00416$$

從テ $\cos x \cosh x$ ガ丁度 -1 ニ等シクナル樣ナ x ノ値ハ次ノ如クデアル.

$$x = 1.875 + 0.001 \times \frac{44}{416} = 1.8751.$$

モノト假定スレバ y ハ x ノ偶函數ナルベキ故(9)ニ於テ B 及 D ハ當然零トナル. 從テ

$$y = A\cosh px + C\cos px.$$

此式ハ $x=0$ ニ於テ $\frac{dy}{dx}=0$ ナルヲ示ス. 而シテ兩端ニ於ケル上ノ條件ヲ入レル時ハ

$$A\cosh\frac{pl}{2} + C\cos\frac{pl}{2} = 0,$$

$$A\cosh\frac{pl}{2} - C\cos\frac{pl}{2} = 0.$$

之ニ依テ見ルニ

$$A\cosh\frac{pl}{2} = 0, \qquad C\cos\frac{pl}{2} = 0. \tag{12}$$

之等ノ中第一式中ノ $\cosh\frac{pl}{2}$ ハ常ニ1ヨリ小ナルコトナキ故 A ガ零トナラネバナラヌ. 又第二式ニ於テ若シ C ガ零ナラバ凡テノ常數ガ消エテ $y=0$ トナリ卽軸ガ曲ラヌコトヲ示スノデアルガ斯ル場合ハ目的デハナイ. 卽 C ガ零ナラズトスレバ $\cos\frac{pl}{2}=0$ トナルヲ要スル. 之ヲ滿足スル $\frac{pl}{2}$ ノ最小値ハ $\frac{\pi}{2}$ ナル故之ニ對スル ω ノ式ハ次ノ如クデアル.

$$\omega = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m_1}}. \tag{13}$$

上ノ計算ニ於テ若シ彎曲ガ軸ノ中央ニ對シテ左右對稱デナイト假定スレバ

$$y = B\sinh px + D\sin px.$$

之ニ兩端ノ條件ヲ入レテ結局 $\sin\frac{pl}{2}=0$ ナルヲ要スルコトニナル故 $\frac{pl}{2}$ ノ最小値ハ零ノ次ニ π デアル. 從テ之ニ對スル ω ノ値ハ前ノ結果ノ四倍ニナル.

(c) 兩端自由ナラザル場合.

b ニ於ケル如ク軸ノ中央ニ原點ヲトリテ兩端ノ條件ヲ書ク時ハ

$$x = \pm\frac{l}{2}, \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

y ヲ x ノ偶函數ト考ヘレバ

$$A\cosh\frac{pl}{2} + C\cos\frac{pl}{2} = 0,$$

$$A\sinh\frac{pl}{2} - C\sin\frac{pl}{2} = 0.$$

從テ

$$\tanh\frac{pl}{2} = -\tan\frac{pl}{2}. \tag{14}$$

斯ル關係ヲ滿足スル $\frac{pl}{2}$ ノ最小値ハ91圖ニ示ス樣ニ $\frac{\pi}{2}$ ト π トノ間ニアリテ其値 2.36 ニ近ク尙表ヲ用ヰテ檢スレバ答ハ 2.3650 デアル.[1] 依テ

$$\omega = \frac{4.7300^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m_1}}$$

$$= \frac{22.373}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m_1}}. \tag{15}$$

本節ニ述ベタ限界速度ノ計算ハ荷重ナキ軸ニ關スルモノデアルガ若シ軸ガ荷重ヲ有スル時ニハ限界速度ヲ定メルタメニ Dunkerley ノ實驗式ト稱スルモノガアル. 卽荷重ナキ軸ノ限界速度ヲ ω_1 トシ幾ツカノ荷重ニ對スル夫レ夫レノ限界速度ヲ $\omega_2, \omega_3, \cdots$ トスレバ求メル速度 ω ハ次ノ式カラ計算サレル.[2]

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} + \cdots. \tag{16}$$

1) 方程式 $\tanh x = -\tan x$ ノ根ヲ求メルコト. 171 頁脚註ニ紹介シタ表ヨリ上式ヲ滿足シ想ナ $\tan x$ 及 $\tanh x$ ヲ求メレバ

x	$\tan x$	$\tanh x$	$\tan x+\tanh x$
2.365	−0.98254	0.98250	−0.00004
2.366	−0.98058	0.98254	+0.00196

從テ最後ノ和ヲ丁度零ニ等シクスル樣ナ x ノ値ヲ小數點以下四位迄正シク計算スレバ次ノ如クデアル.

$$x = 2.3650.$$

2) (16) 式ノ理論ニ關シテハ例ヘバ妹澤克惟, 振動學, 209 頁參照.

53. 棒ノ横振動ト軸ノ限界速度.

横斷面一樣ニシテ眞直ナル軸ヲ有ツ棒ニ起ル曲ゲ振動卽横振動ヲ論ズルタメニ棒ノ中心線ノ方向ニ x 軸ヲ取リ長サ dx ナル任意ノ微小部分ヲ考ヘルニ之ニ作用スル慣性ノ力 $-m_1\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dx$ (m_1 ハ單位ノ長サノ質量)ガ丁度靜止セル場合ノ荷重ノ密度ノ樣ニ作用スル. 但其方向ハ $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ ト正反對ナレバ負號ヲ附ケル. 精密ニ言ヘバ上ノ慣性力ノ外ニ尙微容積ガ彎曲ト共ニ其方向ヲ變ズル故此廻轉ニ對スル抵抗ヲ生ズル筈ナルモ之ハ斷面ノ大サ小ナル場合ニハ省略シテ差支ヘガナイ. 斯ル假定ノ下ニ III 章(73)ニ只今ノ荷重密度ノ式ヲ入レル時ハ

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+m_1\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0,$$

又ハ

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{m_1}{EI}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0. \tag{17}$$

x ノミノ或ル函數ヲ X ニテ表シ此式ノ解ヲ下ノ樣ニオク.

$$y=X\cos kt. \tag{18}$$

之ヲ(17)ニ導クトキハ

$$\frac{d^4X}{dx^4}=\frac{k^2 m_1}{EI}X. \tag{19}$$

偖此式ヲ前節ニ述ベタ廻轉軸ノ微分方程式(8)ニ比較スルニ y ノ代リニ X ヲ書キ又 ω ノ代リニ k ヲ書ケバ其他ハ全ク同一デアル. 故ニ斯ル棒ニ於テ他ニ力ノ强制ヲ受ケズシテ自由ニ起ル振動ノ速サハ兩端ノ狀況ヲ等シクスル軸ノ限界速度ト同一デアル.

玆ニ尙エナージーノ式ニ就テ述ベヤウ. 元ノ微分方程式ヲ取リ其兩項ニ $\frac{\partial y}{\partial t}dx$ ヲ乘ジテ棒ノ全長ニ積分スレバ境界條件ヲ考ヘテ

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 dx+\frac{1}{2}\int_0^l m_1\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx\right]=0. \tag{20}$$

括弧内ノ第一項ハ後ニ至リテ(95節)判ル樣ニ曲ゲノ變形勢力ヲ表シ又第二項ハ運動ノ勢力ヲ表ス. 夫レ故自由ニ振動スル棒ノ變形及運動ノ

兩勢力ノ和ハ時間的ニ不變デアル. 此處デハ微分方程式ヲ基トシテエナージーノ式ヲ導イタケレドモ慣性ノ力ヲ外力ト見テ假想移動ノ原理カラ之ヲ書ク事モ出來ル. 偖(18)ヲ(20)ニ導ケバ

$$k^2=\frac{\int_0^l EI\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2 dx}{\int_0^l m_1 X^2 dx}. \tag{21}$$

正シイ X ヲ用ヰレバ之ハ無論正シイ k ヲ與ヘル. 而シテ正シイ k ハ X ニ近似式ヲ與ヘタ場合ヨリ必ズ小デアル. 何トナレバ上ノ式ノ分子ハ變形勢力ニ比例シ之ハ一定條件ノ下デ極小ナルヲ本則トスル故デアル. 從テ上ノ式ノ與ヘル近似値ハ一ツノ上限デアツテ此計算法ヲ Rayleigh ノ方法ト云フ. 例ヘバ一端固定シ他端自由ナル一樣斷面ノ棒ニ對シテ兩端ノ條件ニ適フ近似式トシテ $X=a\left(\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^3}{3}+\frac{\xi^4}{12}\right)$, $\xi=\frac{x}{l}$ トオケバ $k=\frac{3.53}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m_1}}$. 此式ノ係數ハ正確ナル値 3.516 ヨリ少シ大デアルガ其差ハ凡ソ 0.4 % ニ過ギナイ. 此問題ニ就テハ尙 102 節ニ論ジヤウ.

54. 捩レノ振動.

長サ l ナル軸ノ兩端ニ夫レ夫レ慣性モーメント J_1 及 J_2(單位 $kg\,cm\,sec^2$, 斷面ノ $I\ cm^4$ ト混同シナイ樣ニシテ下サイ)ヲ有スル車ヲ取付ケテ一方ノ端ニ偶力 M_1 ヲ加ヘ他ノ端ニ働ク抵抗ノ偶力 M_2 ニ打勝チナガラ軸ヲ廻轉スル. 而シテ軸自身ノ質量ハ車ノ慣性モーメント大ナルタメ之ヲ省略シテ差支ヘナイモノト見做シテ下ノ計算ヲ行フ. 併シ軸ガ捩レニ對シテ彈性的ノ抵抗ヲ持ツコトハ勿論デアル.

最初軸ガ少シモ捩リヲ受ケナイ時ノ狀態ヲ基トシテ兩方ノ車ガ廻轉スル角ヲ θ_1 及 θ_2 トシテ表セバ一般ニ之等ノ角ハ相等シカラズシテ其差 $(\theta_1-\theta_2)$ ガ軸ノ捩レノ角ニナル. 從テ軸ハ $(\theta_1-\theta_2)$ ニ比例スル彈性ノ偶力ヲ生ズルモノデアル. 偖假定ニヨリテ軸ノ質量ヲ考ヘズニ兩端ノ車丈ケヲ想像シ之等ニ作用スル力ノ平衡ヲ見ルニ先ヅ第一ノ車ニ對シテハ

廻轉ノ偶力ガM_1デ之ニ反對スルモノハ慣性モーメントニ基因スル抵抗$J_1\dfrac{d^2\theta_1}{dt^2}$及軸ノ彈性ヨリ生ズル偶力$c(\theta_1-\theta_2)$デアルカラ運動ノ方程式ハ次ノ如クデアル.

$$M_1=J_1\frac{d^2\theta_1}{dt^2}+c(\theta_1-\theta_2).$$

次ニ第二ノ車ニ對シテハ廻轉シ様トスル偶力ガ$c(\theta_1-\theta_2)$デ之ニ抵抗スルモノハ$J_2\dfrac{d^2\theta_2}{dt^2}$及$M_2$デアルカラ

$$c(\theta_1-\theta_2)=J_2\frac{d^2\theta_2}{dt^2}+M_2.$$

依テ上ノ兩式ヲ書キ換ヘテ

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2}+\frac{c}{J_1}(\theta_1-\theta_2)=\frac{M_1}{J_1},$$

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2}-\frac{c}{J_2}(\theta_1-\theta_2)=-\frac{M_2}{J_2}.$$

上ヨリ下ヲ引キ且$\theta_1-\theta_2=\theta$トスレバ

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+c\left(\frac{1}{J_1}+\frac{1}{J_2}\right)\theta=\frac{M_1}{J_1}+\frac{M_2}{J_2}. \tag{22}$$

之ガ基礎ノ微分方程式デアルガ此式中ノM_1及M_2ハ一般ニ常數ニアラズシテ絶エズ變化スル場合ガ多イ. 併シ廻轉軸ガ恒久ノ狀態ヲ持續シ且他ニ抵抗ノ原因ナキ限リハM_1及M_2ノ一定時間ノ平均値ハ互ニ相等シカルベク斯ル値ヲトリテMトシ且凡テノ變化ヲ度外視スル時ハ

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+(c\theta-M)\left(\frac{1}{J_1}+\frac{1}{J_2}\right)=0. \tag{23}$$

此式ノ積分ハ一般ニ

$$\left.\begin{aligned}\theta&=\frac{M}{c}+A\cos\alpha t+B\sin\alpha t,\\ \text{但}\quad \alpha&=\sqrt{c\left(\frac{1}{J_1}+\frac{1}{J_2}\right)}.\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

θノ式ニ於ケル$\dfrac{M}{c}$ハ偶力Mガ軸ノ兩端ニ作用シ合ヒテ且少シモ振動ヲ生ゼザル場合ノ捩レノ角デ又第二第三兩項ハ自由振動ヲ表ス. 尚A

及Bハ$t=0$ノ時ノ狀況ニヨリテ條件ニ合フ様適當ニ定メラレルベキ常數デアルガ此種ノ振動ハ上ノ計算ニ省略シタ空氣ノ抵抗,軸承ノ摩擦,材料彈性ノ非可逆性等ノタメニ次第ニ消エ失セル. 併シ之ハ上ノ様ニMヲ常數トシタ自由振動ノ場合ノ事デ若シ例ヘバ廻轉ノ偶力ガ時間ト共ニ週期的ノ變化ヲナシ從テ微分方程式中ニ正弦又ハ餘弦ノ如キ函數ガ顯レルトスレバ玆ニ振動ハ强制サレル. 而シテ斯ル函數ノ週期ガ自由振動ノ週期ト一致スル時ハ共鳴ノ現象ヲ起シ振幅ノ增大ハ遂ニ軸ノ破損ヲ來スニ至ル事ガアル. 此理ニヨリテ自由振動ノ速サガ重要ナル役目ヲ有スル譯デアル. 即速サハ

$$\alpha=\sqrt{c\left(\frac{1}{J_1}+\frac{1}{J_2}\right)}.$$

例ヘバ斷面圓形ノ軸ヲトリ其斷面ノ重心ヲ通リテ之ニ直角ナル軸ノ周リノ慣性モーメントヲI_pトスレバ$c=\dfrac{GI_p}{l}$ナル故

$$\alpha=\sqrt{\frac{GI_p}{l}\,\frac{J_1+J_2}{J_1J_2}}. \tag{25}$$

船舶推進用ニ往復運動機械ヲ用キ長イ軸ノ末端ニ取付ケラレタ暗車ヲ角速度ωヲ以テ廻轉スル場合ヲ考ヘルニ此時軸ニ作用スル廻轉ノ偶力ハクランクノ圓周ヘノ切線力圖ヲ描キテ容易ニ之ヲ見出スコトガ出來ル. 而シテ此偶力ハ一般ニ角ωtノ整數倍ヲ以テ進ムFourierノ級數ニヨリテ表シウベキ故若シ其級數中ノ或ル一項ガ機械及暗車ヨリ成ル振動體ト同一ノ週期ヲ有スル時ハ共鳴ヲ生ジテ軸ノ捩レヲ過大ナラシメル恐レガアル. H. Frahm ハ斯ル問題ヲ實地ニ就テ悉シク研究シタ.[1]

例題 直徑$d\,cm$ナル鋼ノ軸ガ$100\sqrt{d}$ナル距離ニアル軸承ニヨリテ自由ニ支ヘラレル時軸自身ノ限界速度ヲ計算スルコト.

(13)ニヨリテ限界速度ハ

1) Zeitschrift des V. D. I., 1902, 797 頁.

$$\omega = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m_1}},$$

又ハ

$$n = \frac{30\,\pi}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m_1}}.$$

此式ニ於テ

$$\frac{I}{m_1} = \left(\frac{\pi}{64}\,d^4\right)\Big/\left(\frac{\gamma}{g}\,\frac{\pi}{4}\,d^2\right) = \frac{g}{\gamma}\,\frac{d^2}{16}.$$

但 γ ハ材料單位容積ノ重サデアル. 從テ

$$n = \frac{7.5\,\pi d}{l^2}\sqrt{\frac{g}{\gamma}E}$$

然ルニ假定ニヨリテ

$$\frac{d}{l^2} = 10^{-4}.$$

此外尚

$$g = 980\ cm/sec^2,$$

$$\gamma = 7.85 \cdot 10^{-3}\ kg/cm^3,$$

$$E = 2.1 \cdot 10^6\ kg/cm^2$$

等ノ數値ヲ用キレバ

$$n = 7.5\,\pi\,10^{-4}\sqrt{\frac{980 \cdot 10^3 \cdot 2.1 \cdot 10^6}{7.85}}$$

$$= 1208.$$

故ニ求メル限界速度ハ一分間 1208 廻轉デアル.