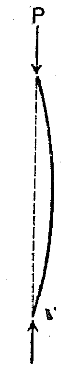
VII. 柱及梁ノ安定

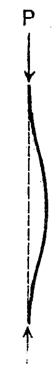
43. 斷面一樣ナル長柱.

之迄論ジテ來タ棒ノ荷重デハ甚シイ變形ノタメニ物體ノ安定ガ亂サレル樣ナ場合ハ無カツタ. 換言スレバ外力ノ作用ヲ受ケル棒ハ常ニ平衡狀態ヲ保チテ內部ニ生ズル應力ノ計算ヲナス事ガ出來タノデアル. 只此囘想カラ除外サレルベキハ40節ニ述ベタ偏心壓縮ノ場合デ此時ニハ或ル條件ノ下ニ撓ミ及應力ガ非常ニ大トナル事ヲ附加ヘテ置イタ. 此問題ヲ緒口トシテ此處ニ長柱ノ安定ヲ論ジ其限界荷重ニ對スルEulerノ公式ヲ導カウ. 茲ニ取扱フ長柱ハ凡ソ次ノ樣ナ條件ヲ滿足スルト見做ス.

75 圖



76 圖



77 圖

(i) 棒ノ軸ハ普通眞直トシ材料ハ各部齊一デ且同一ノ狀態(例ヘバ溫度ニ對シテ)ニ保タレルコト.

(ii) 棒ニ働ク橫ノ力ナキコト.

(iii) 荷ハ軸ノ方向ニ一致スルコト.

(a) 一端固定シ他端自由ナル長柱. 75圖.

先ヅ一樣ノ斷面ヲモツ長柱ヲ下端ニ於テ垂直ニ固定シ壓スニ末端ノ偏心荷重ヲ以テスル40節71圖ノ場合ヲトリテ其撓ミノ式(8)ヲ見ルニδハaニ比例スル. 只今ノ問題デハ上ノ假定(iii)ニ示ス樣ニ$a=0$デアル. 此時ノδノ値ハ如何ニト云フニ$\cos\alpha l\neq 0$ナラバ零ナルモモシ$\cos\alpha l=0$ナル場合ニハ$\delta=a\times\infty$トナリテδハ不定トナル. 然ルニ實際ノ柱ニ於テaガ精密ニ零ナルコトハ困難デアルカラ荷重Pガ漸次大トナリテ

$\alpha l=l\sqrt{\dfrac{P}{EI}}=\dfrac{\pi}{2}$ニ達スレバ柱ハ橫ニ曲ル. 尙一般ニ言ヘバ$l\sqrt{\dfrac{P}{EI}}=\dfrac{3\pi}{2}$, $\dfrac{5\pi}{2}$, … 等ノ値ニ對シテモ彎曲ガ起ル. 之等ノ場合ニハ棒ノ彈性線ガx軸ノ左右ニ凹凸ヲ生ジ$\dfrac{\pi}{2}$ノ係數ガ進ムニ從テ波ノ數ガ次第ニ增ス事ガ容易ニ證明サレル. 併シ斯樣ナ場合ノPノ値ハ最初ノ値ノ$3^2, 5^2, \dots$倍トナリテ高イ限界荷重デアル. 普通ノ計算ニ必要ナ最小ノ限界荷重ハ次ノ式ニテ與ヘラレル.

$$P=\frac{\pi^2}{4}\frac{EI}{l^2}. \tag{1}$$

之ガ求メル公式ノ一ツデ式中Iハ最小ノ慣性モーメントデアル.

(b) 兩端ヲ自由ニ支ヘタ長柱. 76圖.

兩端ヲ止メテアルケレドモ彎曲ハ自由デアル. 斯ル柱ハaノ長柱ガ二ツ連接シテ出來テ居ル樣ニ考ヘラレル故前ノ結果ヲ應用シ卽(1)式ノlノ代リニ$\dfrac{l}{2}$ヲオイテ限界荷重ヲ求メルコトガ出來ル. 卽

$$P=\frac{\pi^2}{4}\frac{EI}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}=\pi^2\frac{EI}{l^2}. \tag{2}$$

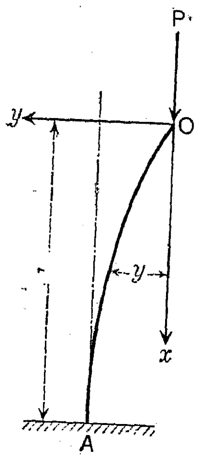
(c) 兩端ヲ固定シタ長柱. 77圖.

兩端ニ於ケル彈性線ヘノ切線ガ舊ノ方向ヲ維持スル樣ニ固メラレテ居ル柱ハaノ形ガ四ツ集リテ出來タモノト考ヘラレルカラ(1)ノlノ代リニ$\dfrac{l}{4}$ヲ入レテ計算スレバ

$$P=\frac{\pi^2}{4}\frac{EI}{\left(\frac{l}{4}\right)^2}=4\pi\frac{EI}{l^2}. \tag{3}$$

以上a, b, cノ場合ニ對スル式ヲ導クニ當リテ便宜上40節ノ偏心荷重ノ計算ノ結果ヲ應用シ卽偏心ガ微小ナリトモ零デナイ限リハ撓ミガ無限大トナル條件ヨリ限界荷重ヲ求メタ. 併シ最初カラ偏心ヲ零トシテ而モ考ヘツツアル彎曲狀態ニ相當スル樣ナ條件ニヨリテ限界荷重ヲ定

メル事ガ出來ル. 即柱ノ兩端ニ於ケル條件ニ合スル樣ナ微分方程式ノ解ガ出レバ其時ノ荷重ハタトヘ最初ノ偏心ナクトモ曲リヲ可能ナラシメル. 之ハ安定ヲ論ズル別ノ方法デアル. 此考デ上ノ公式ヲ改メテ導ク. 78圖ハ一端固定シ他端自由ナル柱ニ同心壓縮荷重ノ作用スル場合ニ柱ガ曲ルト假定シテ引カレタ彈性線ヲ示ス. 彈性線ノ撓ミノ爲荷重Pガ生ズル曲ゲモーメントハPyナル故彈性線ノ微分方程式ハ次ノ通リデアル.



78 圖

$$-EI\frac{d^2y}{dx^2}=Py.$$

此式ノ一般ノ解ハ

$$y=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x,\qquad \alpha=\sqrt{\frac{P}{EI}}$$

兩端ノ條件トシテ $x=0,\ y=0$ 並ニ $x=l,\ \frac{dy}{dx}=0$ トオケバ

$$A=0,\qquad B\alpha\cos\alpha l=0.$$

此第二式ヲ滿足スル最小根ハ $\alpha l=l\sqrt{\frac{P}{EI}}=\frac{\pi}{2}$ デ之ヨリ限界荷重Pガ求メラレ其式ハ無論(1)ト全ク同ジデアル. 上ノ計算ハ75圖ノ場合ニ對シテナサレタケレドモ76圖又ハ77圖ノ如キ柱ニ對シテモ先ヅ彈性線ノ微分方程式ヲ書キ其一般ノ解ヲ求メテ兩端ノ條件ヲ導ケバ夫レ夫レ(2)及(3)ト同樣ノ限界荷重ヲ見出ス事ガ出來ル. 此種ノ計算法ヲ尙次ノ場合ニ用ヰヤウ.

(d) 一端ヲ固定シ他端ヲ自由ニ支ヘタ長柱. 79圖.

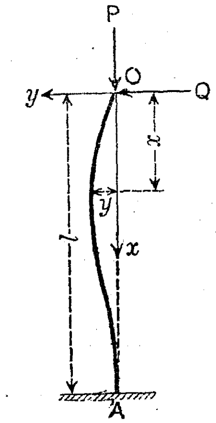
A點ニ於ケル棒ノ固定シ方ハ完全デ彈性線ヘノ切線ガ舊ノ方向ニ止リ又O點ニ於ケル支ヘ方ハ只軸ノ方向ニ於ケル變位ノ案內トナリ曲ゲニ對シテハ自由ト假定スル. 故ニ棒ガ橫ニ曲ル時ハO點デ外力QガPノ方向ニ直角ニ働イテAノ位置ヲ保ツコトガ必要ナルモ偶力ノ作用ハナイ. 斯ル場合ニ原點Oカラ距離xニ於ケル曲ゲモーメントハ $Py-$

Qx トナル故彈性線ノ方程式ヲ作レバ

$$-EI\frac{d^2y}{dx^2}=Py-Qx,$$

又ハ

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{P}{EI}y=\frac{Q}{EI}x.$$



79 圖

此式ノ解ハ $\alpha=\sqrt{\frac{P}{EI}}$ トシテ

$$y=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x+\frac{Q}{P}x.$$

此中ノ積分常數ハ次ノ樣ナ柱ノ兩端ニ於ケル條件ヲ滿足ス可キデアル.

$$x=0,\qquad y=0.$$

$$x=l,\qquad y=0,\quad \frac{dy}{dx}=0.$$

第一ノ條件ニヨリテ

$$A=0.$$

從テ又第二第三ノ條件ヨリ

$$B\sin\alpha l+\frac{Q}{P}l=0,$$

$$B\alpha\cos\alpha l+\frac{Q}{P}=0.$$

B, Qガ零デナシニ之等ノ二式ガ同時ニ成立スル爲ニハ次ノ關係ガ必要デアル.

$$\tan\alpha l=\alpha l.$$

此方程式ヲ滿足ス可キ $\alpha l=l\sqrt{\frac{P}{EI}}$ ノ零ノ次ノ初根 4.4934 ヲ取レバ

$$P=20.19\frac{EI}{l^2}=2.046\,\pi^2\frac{EI}{l^2}. \tag{4}$$

之ガ只今ノ場合ノ最小限界荷重デアル.

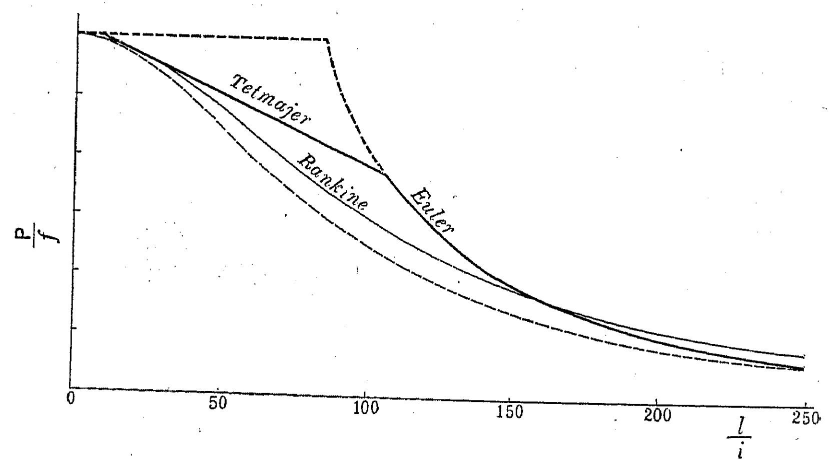
以上導イタ(1)―(4)ノ各式ハ安定ノ限界ニ於ケル荷重ナル故實際許サレル荷重ハ之ヨリモ無論遙ニ小デアル. 又計算ニ用ヰラレル慣性モーメントハ最小ノ値ヲ取ラネバナラヌ.

44. 柱ノ公式ニ就テ.

今斷面ノ最小ノ慣性モーメントヲ $I=fi^2$ ト書ケバ(1)—(4)ノ各式ハ何レモ次ノ形ヲモツ.

$$\frac{P}{f}=\frac{cE}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}. \tag{5}$$

但 c ハ柱ノ支ヘ方ニヨリテ定マル常數デアル. 此式ハ實驗上如何ナル柱ニ對シテモ能ク適合スルカト云フニ之ハ細長イ柱デハ正シイケレドモ比較的短イ場合ニハ實驗ト合ハナイ. 詳シク言ヘバ $\frac{l}{i}$ ガ大ナレバ安定ノ限界ニ於ケル應力 $\frac{P}{f}$ ハ未ダ大デナク從テ彈性ノ範圍内デ曲ル故(5)ハ正シイ. 併シ $\frac{l}{i}$ ガ小トナレバ應力ハ大トナリテ柱ハ非彈性變形ヲ起シテ曲ルカ又ハ曲ル迄モナク壓縮應力ノタメニ降伏シ又ハ破壞シ終ルカ何レカデ從テ上記ノ公式ハ明カニ適合セヌ事ガ判ル. 曲ラズニ壓縮ニヨリテ破損スル場合ニハ應力 $\frac{P}{f}$ ハ材料ノ降伏點若クハ破壞應力ニ等シイ. 之ガ應力ノ最大限ヲ定メル事80圖中水平ノ點線ノ示ス樣デアル. 然ルニ此直線ト Euler 曲線トノ交點附近ノ $\frac{l}{i}$ ニ對スル限界應力ハ之等ノ何レノ線ヨリモ低イ事ガ實驗サレテ居ル. 之ハ上ニ述ベタ樣ニ應力ガ材料ノ比例限界ヲ超エ常數 E ヲ假定シ得ナイ狀態ニ陷ル爲デアル.



80 圖

此實驗上ノ結果ニ合ハス爲ニ種々ノ式ガ與ヘラレテ居ル. 工學上屢々用キラレル所謂Rankineノ式ハ半バ計算ノ結果ニ依リテ說明サレル實驗式デアルガ又斯ノ Tetmajer[1]ノ式ノ如キハ全クノ實驗式デアル. 實驗式ハ實用上便利ナ者トシテ用キラレルガ之ニ對シテ材料ノ壓縮試驗ノ結果ヲ用キタ理論式ニ Kármán[2]ノ者ガアル. 同氏ハ實驗ノ結果カラ或ル係數ヲ計算シ之ヲ Euler ノ公式ニ於ケル彈性係數 E ニ代用シテ能ク事實ト符合スル公式ヲ得ル事ヲ研究シタ. コノ計算法ハ次節ニ讓リ茲ニハ先ヅ Rankine, Tetmajer ノ實驗式ヲ紹介シタイト思フ.

先ヅ Rankine ノ公式ヲ述ベル. 材料ノ壓縮ニ對スル强サヲ K トスレバ $\frac{l}{i}$ ノ小ナル時應力ガ K ニ等シク又 $\frac{l}{i}$ ノ大ナル時之ガ $\frac{cE}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}$ トナル樣ナ式ヲ書イテ中間ノ $\frac{l}{i}$ ニ對スル應力ヲ見ヤウ. 即先ヅ次ノ樣ニ置ク:

$$\frac{P}{f}=\frac{K}{1+\frac{K}{cE}\left(\frac{l}{i}\right)^2}. \tag{6}$$

$\frac{l}{i}$ ノ小ナル時ニハ此式ノ右邊分母ノ第二項ヲ第一項ニ對シテ省略シ得ル故 $\frac{P}{f}$ ガ K ニ等シクナリ又 $\frac{l}{i}$ ガ大ナル時ハ第一項ヲ第二項ニ對シテ省略シ得ル故 $\frac{P}{f}=\frac{cE}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}$ トナル. 從テ一見都合ガ良サ想デアルケレドモ實ハ中間ノ $\frac{l}{i}$ ニ對シテ上式ノ與ヘル $\frac{P}{f}$ ハ80圖ノ下方破線ノ示ス樣ニ實際ヨリモ餘リニ小サ過ギル. 例ヘバ $K=\frac{cE}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}$ ノ時即 $\frac{l}{i}=\sqrt{\frac{cE}{K}}$ ニ對シテ(6)ノ與ヘル應力ハ $\frac{K}{2}$ ニ等シイ. 之ハ實驗ノ結果ニ合ハナイ. 夫レ故上式中ノ分母第二項ノ係數 $\frac{K}{cE}$ ノ代リニ實驗係數 $\varkappa$ ヲ入レテ事實ニ近カラシメルコトハ出來マイカ. 即

$$\frac{P}{f}=\frac{K}{1+\varkappa\left(\frac{l}{i}\right)^2}. \tag{7}$$

1) L. v. Tetmajer, Die Gesetze der Knickungsdruckfestigkeit der Baustoffe, 1903.
2) Mitteilungen über Forschungsarbeiten, 81, 1910.

之ハ屢々Rankineノ名ヲ以テ呼バレテ居ル公式デアル．併シ$\frac{P}{f}$ガ(6)式ヨリ大トナルタメニハ$\varkappa$ハ明カニ$\frac{K}{cE}$ヨリ小ニ取ラレルベキデアルガ斯クスレバ$\frac{l}{i}$ノ或ル値ニ達スル時Eulerノ曲線以上トナル故此公式ヲ用ヰル時ニハ$\frac{l}{i}$ニ對スル使用限度ヲ明カニシテ之ヲ超エヌ樣ニセネバナラヌ．

已ニ一ツノ公式デ$\frac{l}{i}$ノ種々ノ割合ニ對スルPノ値ヲ定メル譯ニ行カヌトスレバ寧ロ$\frac{l}{i}$ノ或ル値以上ニ對シテハEulerノ式ヲ用ヰ之以下ニ於テハ簡單ナ實驗式ヲ用ヰルコトニスレバ宜シイ譯デアッテ此目的ニ對シテTetmajerハ兩端ヲ自由ニ支ヘタ柱ニ對シテ實驗ノ結果ヲ次ノ樣ナ式デ表シタ．卽

$$P = \text{最大荷重} \quad (1000\,kg),$$
$$f = \text{横斷面積} \quad (cm^2)$$

トスレバ

$$\frac{P}{f} = a - b\left(\frac{l}{i}\right) + c\left(\frac{l}{i}\right)^2. \tag{8}$$

此式ニ於テa, b, cハ次表ノ樣ナ數値ノ常數デアッテ之ハ共ニ記載シタ$\frac{l}{i}$ノ範圍内デ實驗サレタ材料ノ場合ニ丈ケ當テ嵌マル．表中ノ材料名ハ緒言中ノ說明ト異ルモ之ハ已ニ歷史的トナッタ古イ實驗ヲ物語ル記錄トシテ此儘ニシヤウ．

材料	a	b	c	$\frac{l}{i}$
木材	0.293	0.00194	—	1.8 - 100
鑄鐵	7.76	0.120	0.00053	5 - 80
錬鐵	3.03	0.0129	—	10—112
熔鐵	3.10	0.0114	—	10—105
熔鋼	3.35	0.0062	—	≦ 90

又Johnsonハ80圖ノ$\frac{P}{f}$ヲ示ス軸ヲ軸トシ頂點ノ高サガ$\frac{P}{f}=K$デ且Eulerノ曲線ニ接スル拋物線ヲ引イテ限界荷重トシテ居ル．斯ル拋物線ノ方程式ハ

$$\frac{P}{f} = K - \frac{K^2}{4cE}\left(\frac{l}{i}\right)^2 \tag{9}$$

デアッテ其Eulerノ曲線ト接スル點ノ座標ハ

$$\frac{l}{i} \doteq \sqrt{\frac{2cE}{K}}, \quad \frac{P}{f} = \frac{K}{2}.$$

併シ此式モ實驗式ニ過ギヌ故寧ロ$c=0$トスル(8)ノ直線式ノ方簡單ナルヲ便トスル．

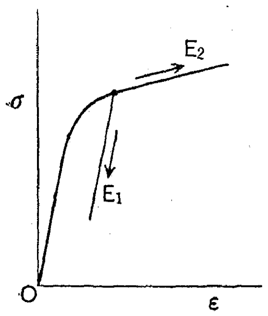
近年行ハレタ實驗ノ結果ニ依レバ鋼ノ降伏點ニ近イ(卽中位ノ$\frac{l}{i}$ニ對スル)限界應力ハ材料ノ性質ニ依リモシ材料ノ永久變形小ナル時ハ降伏點ヲ示ス水平線及Euler曲線ニ殆ンド接近セル應力デ安定ノ限界ニ達スル事ガK. Memmlerニヨリテ報告サレタ.[1] 而シテ一般ニ斯ル限界應力ニ關シテハ前ニ述ベタKármánノ研究ガ注意サレテ居ル.[2] 玆ニ尙附記スベキ事ハEulerノ限界荷重ニ對スル基礎條件デアル．卽43節ニ於テ棒ハ最初眞直デ荷重ハ棒ノ軸ニ一致スルト假定シタ．併シ必シモ斯ル條件ヲ滿足シナイ場合ニ於テモ矢張リEulerノ限界荷重ト等シイ限界荷重ヲ示ス事ガ實驗上見出サレタ．此事ハ數理的ニモ詳シク研究サレテ居ル.[3]

45. Engesser-Kármán ノ研究.

前節ニ述ベタ樣ニ中位ノ$\frac{l}{i}$ヲモツ柱ハ限界應力ニ於テ非彈性ノ曲リヲ起ス．此應力ヲ計算ニヨリテ求メル爲標題ニ示ス兩氏[4)5)]ノ研究ノ概

1) Verhandlungen des 2. internationalen Kongresses für technische Mechanik, Zürich, 1926, 357 頁.
2) 例ヘバ W. Gehler 同上, 364頁.
3) H. Zimmermann, Sitzungsberichte d. preussischen Akademie d. Wissenschaften, 1923, phys.-math. Klasse, 262 頁.
4) Zeitschrift des V. D. I., 42, 1898, 927 頁.
5) 143 頁脚註 2.

要ヲ述ベヤウ. 元來壓サレテ居ル柱ガ安定ノ限界ニ達シテ曲レバ其斷面ノ中立軸ヲ界トシテ一方ノ側ハ益々壓サレテ變形進ミ又他ノ側デハ壓縮減ジテ多少緩ム. モシ此事ガ降伏點ニ近イ應力ニテ起レバ永久變形ノ爲中立軸ノ兩側ニ於ケルσ, εノ關係異リテ之等ニ對シテ一個ノ常數Eヲ用キル事ハ出來ナイ. 卽壓縮應力ノ輕減ヲ意味スルσ, εノ關係ハ今迄辿リ來リシ曲線ノ本筋デハナシニ之ヲ離レタ別ノ曲線デ與ヘラレル. 此曲線ハ原點ニ近イ部分ノ曲線ニ略ボ平行デ81圖ニ下向ノ矢デ示ス如クデアル. 尙此種ノ線圖ハ壓縮試驗ノ結果ヨリ作ラレ彎曲ノ場合ニモ之ヲ用キテ差支ナシト假定シヤウ.



81 圖

今荷重Pヲ受ケテ曲リ出ス前ニ横斷面各部ノ受ケル縮ミヲε_0トスレバ曲ゲノミニヨル應力ハ次ノ二樣ニ區別サレル.

曲リテ伸ビル方, $\varepsilon - \varepsilon_0 > 0, \quad \sigma_b = E_1(\varepsilon - \varepsilon_0)$.

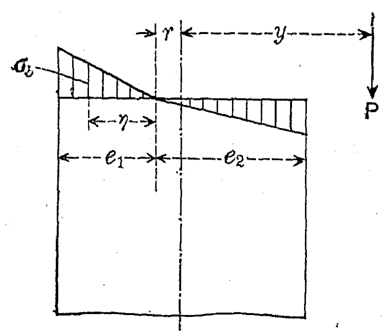
曲リテ縮ム方, $\varepsilon - \varepsilon_0 < 0, \quad \sigma_b = E_2(\varepsilon - \varepsilon_0)$.

曲リヲ起シタ柱ノ横斷面ガ平面ニ止ルト見做セバ

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{\eta}{\rho}. \tag{10}$$

故ニ

$$\sigma_b = E_1 \frac{\eta}{\rho} \quad 並ニ \quad \sigma_b = E_2 \frac{\eta}{\rho}. \tag{11}$$



82 圖

ηハe_1ト$-e_2$トノ間ニ變ル. (11)ノ第一式ノηハ正デ第二式ノソレハ負デアル. 又ρハ精密ニ言ヘバ曲ゲニ於ケル中立軸ヨリ測ルベキ筈ナルモ之ハ斷面ノ中心ヲ通ル彈性線ノ曲率半徑ト見テ大差ナイ.

偖平衡ノ條件ヲ式ニ表セバσ_0ヲ含ム項ハ容易ニ除外サレル故

$$\int \sigma_b \, df = 0, \tag{12}$$

$$\int \sigma_b (\eta + r) \, df = Py. \tag{13}$$

積分ハ全横斷面ニ取ラレル. (12)及(13)ニ(11)ヲ導キ且(13)ニ於テ $\int \sigma_b r \, df = r \int \sigma_b \, df = 0$ トナル故 Py ノ代リニ曲ゲモーメントM_bト記セバ

$$\frac{E_1}{\rho} \int_0^{e_1} \eta \, df + \frac{E_2}{\rho} \int_{-e_2}^0 \eta \, df = 0,$$

$$\frac{E_1}{\rho} \int_0^{e_1} \eta^2 \, df + \frac{E_2}{\rho} \int_{-e_2}^0 \eta^2 \, df = M_b.$$

次ノ記號ヲ用キル

$$S_1 = \int_0^{e_1} \eta \, df, \quad S_2 = -\int_{-e_2}^0 \eta \, df,$$

$$I_1 = \int_0^{e_1} \eta^2 \, df, \quad I_2 = \int_{-e_2}^0 \eta^2 \, df.$$

然ル時ハ上ノ二式ハ下ノ樣ニ書ケル

$$E_1 S_1 = E_2 S_2 \tag{14}$$

並ニ

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 = M_b \rho. \tag{15}$$

尙又

$$E' I = E_1 I_1 + E_2 I_2 \tag{16}$$

トスレバ(15)ハ變リテ

$$E' I = M_b \rho. \tag{17}$$

特ニ矩形斷面ノ場合ヲ考ヘレバ(14)ヨリ

$$E_1 e_1^2 = E_2 e_2^2. \tag{18}$$

又(16)ヨリ

$$\frac{1}{4} E' (e_1 + e_2)^3 = E_1 e_1^3 + E_2 e_2^3.$$

此右邊ニ(18)ヲ導ケバ $E_1 e_1^2 (e_1 + e_2) = E_2 e_2^2 (e_1 + e_2)$ トナル故

$$\frac{1}{4} E' (e_1 + e_2)^2 = E_1 e_1^2 = E_2 e_2^2.$$

之ヨリ

$$\frac{\sqrt{E'}}{2}(e_1+e_2)=e_1\sqrt{E_1}=e_2\sqrt{E_2}.$$

e_1 及 e_2 ヲ消去シテ

$$\frac{2}{\sqrt{E'}}=\frac{1}{\sqrt{E_1}}+\frac{1}{\sqrt{E_2}} \tag{19}$$

夫レ故E_1及E_2ヲ知レバE'ガ求メラレ此常數ヲ用キレバ矩形斷面ノ柱ノ曲ゲヲ(17)ニヨリテ計算サレル. 然ルニ(17)ハ普通ノ曲ゲノ式ト同様ノ形ヲ有スル故安定ノ限界荷重ハ Euler ノ式ト同様ニシテ見出サレ只彈性係數Eノ代リニ材料ノ永久變形ヲ意味スル別ノ係數E'ヲ用キレバ宜シイ. 卽(5)ノ代リニ

$$\frac{P}{f}=c\frac{E'}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}. \tag{20}$$

而シテE'ノ値ハ(19)ノ示ス様ニ比較的小ナルE_2ノ値ノ爲ニ彈性係數ヨリハ明カニ小デアル. 從テ(20)ノ限界應力ハ Euler ノ夫レヨリモ小トナリ其程度ハ材料ノ性質並ニ應力ノ大サニ依ル. 尙(20)ニヨリテ$\frac{P}{f}$ヲ定メル爲ニハE'ヲ壓縮試驗ノ結果ニヨリテ定メルヲ要シ之ハ又應力$\frac{P}{f}$ノ函數ナル故種々ノ$\frac{P}{f}$ニ對スルE'ヲ計算シオケバ與ヘラレタ$\frac{l}{i}$ニ對スル限界應力$\frac{P}{f}$ヲ容易ニ定メル事ガ出來ル.

46. 限界應力以上ノ應力ヲ受ケル柱ノ彈性線.

Eulerノ限界荷重ヲ求メル際眞直ナル柱ノ中心軸ガ限界應力ニ於テ曲線トナリ得ル事ヲ知ツタ. 併シ其形ハ微分方程式ノ解ニ於ケル係數ノ不定ナル爲不定デアツタ. 之ハ曲リノ甚ダ小サイ時ノ話デ換言スレバ彈性線ノ方程式ニ用キル曲率半徑ノ式ニ於テ$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ヲ省畧スル事ガ近似的ニ正シイト見做サレル範圍ニ於ケル事柄デアル. 夫レ故限界應力以上ニ於ケル柱ノ彈性線ヲ吟味スル爲ニハ元ノ方程式ヲ正シク書直ス事ガ必要デアル.

III章(15)式ニヨリテ

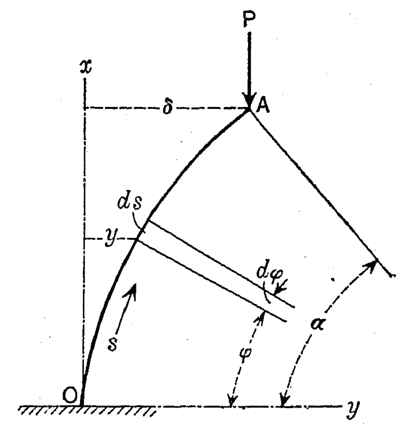
$$\frac{EI}{\rho}=M.$$

彈性線上ノ小サイ弧ノ長サヲdsトシ其垂直軸トナス傾キ卽法線ト水平軸トノ間ノ角ヲφトスレバ(83圖) $\rho d\varphi=ds$ナル故

$$\frac{EI}{\rho}=EI\frac{d\varphi}{ds}.$$

又曲ゲモーメントハ

$$M=P(\delta-y).$$



83 圖

從テ彈性線ノ方程式ハ

$$EI\frac{d\varphi}{ds}=P(\delta-y). \tag{21}$$

座標x, yノ代リニ便宜上s及φヲ用キテ計算スル爲ニ之ヲ更ニ一度微分シテ$\frac{dy}{ds}=\sin\varphi$ヲ導ケバ$y$ハ消去サレル. 卽

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}=-\frac{P}{EI}\sin\varphi. \tag{22}$$

此式ノ兩邊ニ$2d\varphi$ヲ乘ジテ積分スレバ

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=\frac{2P}{EI}\cos\varphi+c.$$

φハ零ヨリ始マリテsノ增スニ連レテ大トナリ柱ノ末端ニ於テαニ達ス. 此時$y=\delta$トナリ(21)ヨリ判ル様ニ$\frac{d\varphi}{ds}=0$トナル故ニ積分常數$c=-\frac{2P}{EI}\cos\alpha$. 從テ

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=\frac{2P}{EI}\left(\cos\varphi-\cos\alpha\right)$$
$$=\frac{4P}{EI}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

兩邊ノ平方根ヲ作リテ少シ書換ヘタ後積分スレバ

$$s=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{EI}{P}}\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

此式ニ於テ$\sin\frac{\varphi}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\theta$トオケバ$\varphi$ガ0ヨリ$\alpha$ニ至ル間ニ$\theta$ハ0

ヨリ$\frac{\pi}{2}$迄增ス. 而シテ$\cos\frac{\varphi}{2}\frac{d\varphi}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta\,d\theta$ナル故$k=\sin\frac{\alpha}{2}$トシテ

$$s=\sqrt{\frac{EI}{P}}\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\qquad s<l. \tag{23}$$

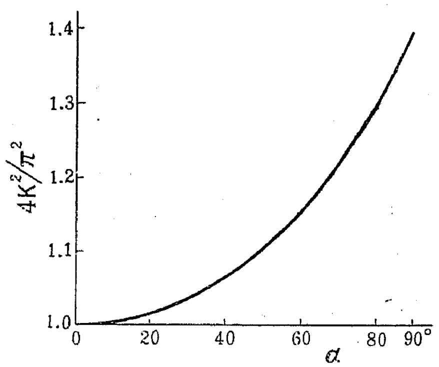
此積分式ハk及上限θノ函數デ第一種ノ楕圓積分デアル. 特ニ上限θヲ$\frac{\pi}{2}$ニ等シクトレバsハ彈性線ノ全長lニ等シクナル. 卽

$$l=\sqrt{\frac{EI}{P}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=K\sqrt{\frac{EI}{P}},$$

又ハ書直シテ

$$P=K^2\frac{EI}{l^2}. \tag{24}$$

此式ハ Euler ノ限界荷重ノ式ト能ク似テ居ル. 併シ係數K^2ハk卽$\sin\frac{\alpha}{2}$ノ函數デ柱ノ末端ニ於ケル彈性線ノ傾キガ小デ$k=0$ト見做サレル時ハ$K^2=\frac{\pi^2}{4}$トナリテ丁度已ニ知ラレテ居ル限界荷重ノ場合ト一致スル. 併シ傾キαガ增スニ連レテK^2ハ次第ニ大トナル. 其有樣ハ84圖ノ示ス如クデアル. 圖ニ於テ橫線ハαヲ示シ縱線ハ之ニ對スル$4K^2/\pi^2$ノ値ヲ示ス. 之ニ依テ荷重ト共ニ彈性線ガ如何ニ傾クカヲ知ル事ガ出來ル.



84 圖

47. 斷面一樣ナラザル長柱.

標題ニ揭ゲタ樣ナ問題モ計算上カラハ大分研究サレテ居ル. 殊ニ航空機ノ構造ニ於テハ材料ヲ節シ重サヲ輕クスルタメニ端ヲ細クシタ柱ヲ用キルタメ種々ノ計算ガ行ハレテ居ル.[1] 夫レデ本題ヲ論ズル前ニ讀

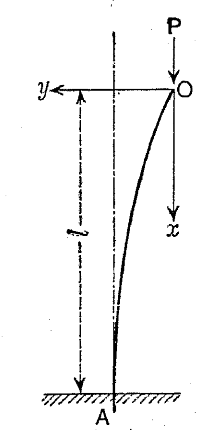
1) 例ヘバ A. J. S. Pippard and J. L. Pritchard, Aeroplane Structure 參照.

者ノ注意ヲ惹キタイト思フ二三ノ論文ヲ擧ゲレバ先ヅ井口在屋博士ハ柱ガ彎曲ヲ起ス場合ニ斷面ニ生ズル應力ヲシテ各部一樣ナラシメル樣ナ特別ノ形卽抵抗平等ナル柱ニ就テ硏究シタ.[1]

又之トハ趣ヲ異ニシテ斷面ガ或ル規則ニ從テ變ズル場合ニ柱ノ限界荷重ヲ求メル方法モ工夫サレテ居ル. Morley[2] ノ說ク漸近法ト稱スベキ方法, Bairstow 及 Stedman[3] ノ試索法等ガ之デアル 若シ斷面ノ變化ガ簡單ナ規則ニ從ハヌ時ニハ之等ノ方法ヲ採ルノモ便デアラウ.

併シ本節以下ニ於テ述べ樣ト思フノハ斷面ガ或ル規則ニ從テ變ズルモノトスレバ限界荷重ヲ極簡單ナ式デ表シ得ル事柄デアッテ殊ニ前記ノ試索法ヲ用キル場合ニ初メ柱ノ限界荷重ヲ見當付ケルタメニハ著者ノ推薦スル計算式ノ助ヲ借リルヲ適當ト考ヘル.

一端固定シ他端自由ナル柱ヲ取ル 併シ中央カラ兩側ガ互ニ對稱ナル柱ノ兩端ヲ支ヘタ場合ニハ其全長ノ二分ノ一ヲ取リテ本節ノ計算ノ結果ヲ應用スルコトガ出來ル. 前ニ Euler ノ公式ヲ導イタ時ノ假定ニ就テハ其後或ル變更ヲ加ヘタケレドモ併シ茲ニハ最初ノ假定ト同樣ニ柱ノ軸ハ眞直デ材料ハ各部齊一トシ又荷重ハ偏心セズ而シテ柱ノ長サガ充分長イト假定シヤウ. 從テ彈性ノ範圍ニ於ケル安定ノミヲ考ヘル. 偖柱ノ橫斷面ハ自由端ヨリ固定端ニ向テ漸次擴大シ斷面ノ慣性モーメントハ自由端ヨリノ距離ノ或ル乘冪ニ比例スルト見做ス.[4] 而シテ此慣性モーメントノ軸ハ初メ一平面中ニ位シ從テ彎曲ガ平面內ニ起ルモノトシテ柱ノ彈性線ヲOAトスル(85圖). 柱ノ末端Oニ座標軸ノ原點



85 圖

1) 東京帝國大學工科大學紀要, V, 8, 1914, 223頁.
2) Engineering, XCVII, 1914, 566頁; CIV, 1917, 295頁.
3) Engineering, XCVIII, 1914, 403頁.
4) 愛知敬一博士モ此假定ト同樣ノ場合並ニ其他ニ就テ計算ヲ試ミタ. 機械學會誌, XXII, 56, 1919, 12頁.

ヲ取リ x 軸ハ柱ノ軸ニ平行トシ y 軸ハ彎曲面內ニ於テ x 軸ニ直角トスル．然ル時ハ若シ荷重 P ノタメニ實際彎曲ガ起ルトスレバ彈性線ノ微分方程式ハ

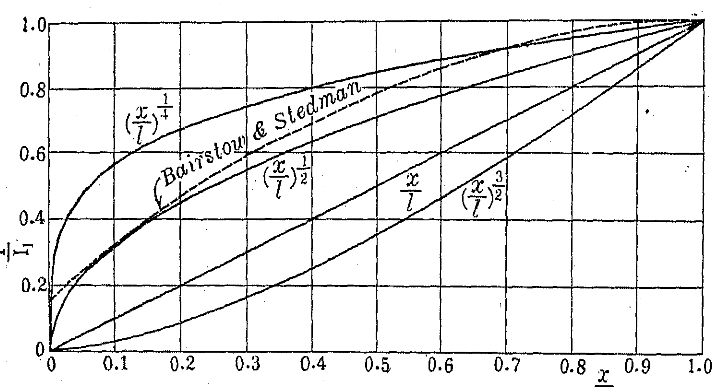
$$-EI\frac{d^2y}{dx^2}=Py.$$

但 E ハ彈性係數，I ハ斷面ノ慣性モーメントデアル．

偖假定ニヨリテ

$$I=I_1\left(\frac{x}{l}\right)^n \tag{25}$$

トオク．卽 I_1 ハ $x=l$ ノ時ノ慣性モーメントデ又 n ハ x ニ無關係ノ常數デアル．此假定ニ從ヘバ柱ノ末端 $x=0$ ニ於テハ $I=0$ トナリ實物ト稍遠キ感ハアルガ之ハ末端ノミニ限ラレル故此點ニ於テ實際ノ柱ガ假定ト稍趣ヲ異ニスル形ヲ有ツテ居テモ限界荷重ノ計算ニハ差シタル障害トナラヌ．試ニ或ル n ノ値ニ對スル $\frac{I}{I_1}$ ノ値ヲ圖示スレバ86圖ノ樣デアル．圖中點線ヲ以テ示スモノハ記入セル著者ノ取ツタ柱ノ例デアル．



86 圖

(25)式ノ I ヲ用キテ彈性線ノ微分方程式ヲ書ケバ

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{Pl^n}{EI_1}x^{-n}y=0. \tag{26}$$

此式ニ於テ

$$\frac{Pl^n}{EI_1}=\alpha\,(\text{常數}) \tag{27}$$

トオケバ

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha x^{-n}y=0. \tag{28}$$

此方程式ハ一ツノ標準型ト稱スベキモノデ其解法ハ微分方程式ノ書籍中ニ見ルコトガ出來ル.[1] 併シ下ニ解法ノ大要ヲ述ベテオカウ．

48. *Bessel* 方程式及函數．

上ノ式(28)ニ

$$y=w\,z^{\frac{1}{2-n}},\qquad z=\frac{1}{1-\frac{n}{2}}x^{1-\frac{n}{2}} \tag{29}$$

トオク．然ル時ハ

$$\frac{dz}{dx}=x^{-\frac{n}{2}},$$

並ニ

$$\frac{dy}{dz}=z^{\frac{1}{2-n}}\frac{dw}{dz}+\frac{1}{2-n}w\,z^{\frac{1}{2-n}-1},$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}=z^{\frac{1}{2-n}}\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{2}{2-n}z^{\frac{1}{2-n}-1}\frac{dw}{dz}-\frac{1-n}{(2-n)^2}w\,z^{\frac{1}{2-n}-2},$$

偖

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}\right)\\&=\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dz}\frac{d^2z}{dx^2}\\&=x^{-n}z^{\frac{1}{2-n}}\left[\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{2}{2-n}z^{-1}\frac{dw}{dz}-\frac{1-n}{(2-n)^2}z^{-2}w\right]\\&\quad-\frac{n}{2}x^{-\frac{n}{2}-1}z^{\frac{1}{2-n}}\left[\frac{dw}{dz}+\frac{1}{2-n}z^{-1}w\right]\\&=x^{-n}z^{\frac{1}{2-n}}\left[\frac{d^2w}{dz^2}+z^{-1}\frac{dw}{dz}-\frac{z^{-2}}{(2-n)^2}w\right].\end{aligned}$$

從テ上ノ微分方程式ハ

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\left(\alpha-\frac{1}{(2-n)^2z^2}\right)w=0. \tag{30}$$

---

1) Forsyth, Treatise on Differential Equation, 4 版, 196 頁.

之ハ Bessel 方程式デ簡單ノタメニ

$$y=w,\quad x=\alpha^{\frac{1}{2}}z,\quad \frac{1}{(2-n)^2}=m^2 \tag{31}$$

トオケバ下ノ形ニ書キ改メラレル.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)y=0. \tag{32}$$

此方程式ノ解ヲ無限級數トシテ表シ即次ノ樣ニ假定シヤウ.

$$y=x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)=\sum_{s=0}^{s=\infty}a_s x^{r+s}. \tag{33}$$

今(32)ノ兩邊ニ x^2 ヲ乘ジテ

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-m^2)y=0,$$

又ハ

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+(x^2-m^2)y=0.$$

之ニ(33)ヲ入レル.

$$\sum_{s=0}^{s=\infty}(r+s)^2a_sx^{r+s}+(x^2-m^2)\sum_{s=0}^{s=\infty}a_sx^{r+s}=0,$$

$$\sum_{s=0}^{s=\infty}\left[(r+s)^2-m^2\right]a_s\,x^{r+s}+\sum_{s=2}^{s=\infty}a_{s-2}\,x^{r+s}=0.$$

假定シタ y ノ式(33)ガ微分方程式ヲ滿足スルタメニハ此式ニ於ケル x ノ各項係數ガ消エナケレバナラヌ. 即

$$s=0,\qquad (r^2-m^2)a_0=0,$$

$$s=1,\qquad \left[(r+1)^2-m^2\right]a_1=0.$$

$s=2$ 以上ニ對シテハ一般ニ

$$\left[(r+s)^2-m^2\right]a_s+a_{s-2}=0.$$

先ヅ $a_0=0$ ナラバ y ノ級數ハ a_1 ヲ以テ始ルケレドモ其形ハ別ニ變ジナイ故 $a_0\neq0$ トシヤウ. 故ニ $s=0$ ノ時ノ係數關係カラ

$$r^2-m^2=0$$

即 $\qquad r=\pm m.$

次ニ此關係ヨリ $(r+1)^2\neq m^2$ ナルコトヲ知ル故 $s=1$ ニ對スル關係式ニ於テハ

$$a_1=0.$$

而シテ

$$a_s=-\frac{a_{s-2}}{(r+s)^2-m^2}=-\frac{a_{s-2}}{s(2r+s)}.$$

$a_1=0$ ナル故 $a_3=0$ トナリ順次 s ノ奇數項ハ消エル.

今 $r=m$ ト取レバ

$$a_s=-\frac{a_{s-2}}{s(2m+s)}.$$

從テ

$$a_2=-\frac{a_0}{2(2m+2)},$$

$$a_4=-\frac{a_2}{4(2m+4)}=\frac{a_0}{2\cdot4(2m+2)(2m+4)},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

夫レデ

$$y_1=a_0x^m\left[1-\frac{x^2}{2(2m+2)}+\frac{x^4}{2\cdot4(2m+2)(2m+4)}-\ldots\right].$$

括弧内ノ一般ノ項ハ

$$(-1)^t\frac{x^{2t}}{2\cdot4\cdots2t(2m+2)(2m+4)\cdots(2m+2t)}.$$

次ニ $r=-m$ ト取ル. 此時ハ

$$a_s=\frac{a_{s-2}}{s(2m-s)}.$$

而シテ

$$y_2=a_0x^{-m}\left[1+\frac{x^2}{2(2m-2)}+\frac{x^4}{2\cdot4(2m-2)(2m-4)}+\ldots\right].$$

一般ノ項ハ

$$\frac{x^{2t}}{2\cdot4\cdots2t(2m-2)(2m-4)\cdots(2m-2t)}.$$

特別ノ場合トシテ若シ $m=0$ ナラバ

$$y_1 = y_2.$$

又若シ m ガ正ノ整數ナラバ y_2 ノ或ル係數ハ無限大トナル．之ニ反シテ m ガ負ノ整數ナラバ y_1 ノ或ル係數ガ無限大トナル．斯樣ニ係數ガ無限大トナル場合ヲ除ケバ y_1 及 y_2 ハ明カニ收斂スル故 m ガ零カ又ハ整數ナラザレバ兩方ノ答ガ正當デアル．然ルニ與ヘラレタ微分方程式ニ於テ m ハ二乘トナリテ存在スル故之ヲ正ト假定シテ差支ガナイ．左スレバ y_1 ハ m ノ整數値ニ對シテ正當ナル解デアリ得ル故 y_2 ニ代ル可キ尙一ツノ解ヲ求メルコトガ必要トナル．併シ斯ル計算ハ本書ノ目的以外ニ亘ルモノトシテ之ヲ省キ本節ノ計算ヲ次ノ樣ニ纒メヤウ．

y_1 及 y_2 ヲ常數 $2^m\Pi(m)$ ニテ除シ積分常數以外ノ式ヲ夫レ夫レ記號 $J_m(x)$ 及 $J_{-m}(x)$ ニテ表ス.[1] 然ル時ハ

$$J_m(x)=\frac{x^m}{2^m\Pi(m)}\left[1-\frac{1}{(m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{1\cdot2(m+1)(m+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\ldots\right]$$

$$=\sum_{t=0}^{t=\infty}\frac{(-1)^t}{\Pi(m+t)\,\Pi(t)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2t}, \tag{34}$$

$$J_{-m}(x)=\sum_{t=0}^{t=\infty}\frac{(-1)^t}{\Pi(-m+t)\,\Pi(t)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2t}. \tag{35}$$

之等ノ式ヲ Bessel 函數ト云フ．故ニ w ヲ Bessel 函數ノ形デ書ケバ m 卽 $\frac{1}{2-n}$ ガ整數ナラヌ時ハ(30)ノ解ハ

$$w=A'J_{\frac{1}{2-n}}\left(\alpha^{\frac{1}{2}}z\right)+B'J_{-\frac{1}{2-n}}\left(\alpha^{\frac{1}{2}}z\right). \tag{36}$$

從テ最初ノ微分方程式(28)ノ解ハ(29)ニヨリテ，

$$y=z^{\frac{1}{2-n}}\left[A'J_{\frac{1}{2-n}}\left(\alpha^{\frac{1}{2}}z\right)+B'J_{-\frac{1}{2-n}}\left(\alpha^{\frac{1}{2}}z\right)\right]$$

$$=x^{\frac{1}{2}}\left[AJ_{\frac{1}{2-n}}\left(\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{1-\frac{n}{2}}x^{1-\frac{n}{2}}\right)+BJ_{-\frac{1}{2-n}}\left(\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{1-\frac{n}{2}}x^{1-\frac{n}{2}}\right)\right]. \tag{37}$$

1) $\Pi(m)=\Gamma(m+1)$.

若シ $\frac{1}{2-n}$ ガ整數ナル時ハ第二項ハ正當デナイカラ前言シタ樣ニ別ノ積分ヲ用キネバナラヌ．

49.　斷面一樣ナラザル場合ノ續キ．

微分方程式(28)ノ解法ヲ述ベタ上ハ愈々安定ノ本題ヲ論ジヤウ．卽長柱兩端ノ條件ニ合フ樣ナ答ハ如何．先ヅ一端 $x=0$ ニ於テ $y=0$ トナル條件ハ(37)式ノ第一項ニヨリテ滿足サレル．從テ $\frac{1}{2-n}$ ノ値ニ關セズ

$$y=Ax^{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2-n}}\left(\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{1-\frac{n}{2}}x^{1-\frac{n}{2}}\right).$$

次ニ柱ノ他端 $x=l$ ニ於テハ $\frac{dy}{dx}=0$ ト假定シ此條件ヲ書クタメニ次ノ簡單ナ關係ヲ用キヤウ．卽

$$\frac{d}{dx}\left[x^mJ_m(x)\right]=x^mJ_{m-1}(x). \tag{38}$$

之ハ次ノ樣ニシテ證明サレル．

$$\frac{d}{dx}\left[x^mJ_m(x)\right]=\sum_{t=0}^{t=\infty}\frac{(-1)^t}{\Pi(m+t)\,\Pi(t)}(m+t)2^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2(m+t)-1}$$

$$=x^m\sum_{t=0}^{t=\infty}\frac{(-1)^t}{\Pi(m-1+t)\,\Pi(t)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m-1+2t}$$

$$=x^mJ_{m-1}(x).$$

此關係ヲ用ヰテ上ノ條件ヲ表セバ

$$J_{-\frac{1-n}{2-n}}\left(\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{1-\frac{n}{2}}l^{1-\frac{n}{2}}\right)=0.$$

今 $J_{-\frac{1-n}{2-n}}(z)=0$ ノ第一根ヲ z_1 トスレバ

$$z_1=\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{1-\frac{n}{2}}l^{1-\frac{n}{2}}.$$

此式ニ(27)ヲ導ケバ結局

$$P=\left(1-\frac{n}{2}\right)^2 z_1^2\frac{EI_1}{l^2}. \qquad (39)$$

與ヘラレタnノ値ニ對スルz_1ヲ求メテ此式ニ入レレバ宜シイノデアルガ$n=0$乃至$\frac{3}{2}$ノ範圍デ斯樣ナ計算ヲ行ヘバ其結果(39)ガ次ノ樣ナ近似式ニテ表サレル事ガ判ル.

$$P=(2.471-1.032\,n)\frac{EI_1}{l^2}. \qquad (40)$$

卽Pガ此値ニ達スレバ柱ノ曲リガ可能デアッテ此時ガ安定ノ限界デアル. 此式ニ於テ $n=0$ トオケバ一樣ナ斷面ヲ有スル柱ニ對スル限界荷重ヲ得ル筈デアッテ又實際 Euler 公式ノ與ヘルモノト一致スルノデアル. 86圖ノ點線デ示ス如キ柱ハ素ヨリ正確ニ距離ノ或ル乘冪ニ比例スル慣性モーメントヲ有タヌケレドモ其限界荷重ガ$n=\frac{1}{4}$ト$\frac{1}{2}$トノ間ニアルベキコトガ想像サレル.

尙斷面ノ形ガ各部相似ニシテ且Iガ(25)ノ規則ニ從フ場合ニ一定ノ限界荷重ニ對スル最小容積ノ形ヲ導クコトガ出來ル.[1]

序ニ附加ヘテ置クガ限界荷重ニ對スル式(39)ノ係數$\left(1-\frac{n}{2}\right)^2 z_1^2$ガ$n$ニ對スル一次式トシテ表シウル點ヨリ或ル小ナル範圍ノsニ對スル$J_s(z)$ノ初根ヲ簡單ナ式ニヨリテ計算シウルコトガ判ル. 卽$s=-\frac{2}{3}$乃至$+1$ノ範圍デハ

$$z_1=2\sqrt{(1+s)(1.439+0.407s)}.$$

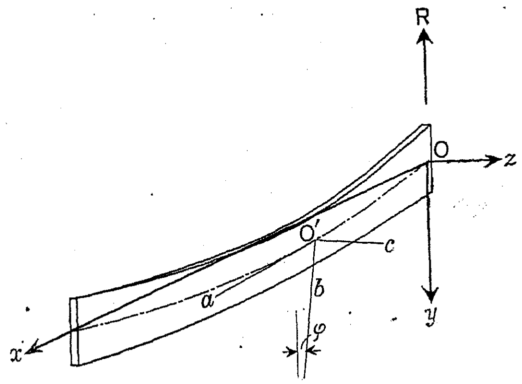
之ハ Bessel 函數初根ノ近似式デアル.

50. 撓セタ梁.

薄イ薬片狀ノ梁ガ荷重ヲ受ケ安定ヲ失ヒテ捩レルコトハ屢々經驗スル所デアル. 斯ル場合ノ限界荷重ヲ見出スタメニ梁軸ノ一端0ヲ原點トシ(87圖)軸ノ變形前ノ方向ヲx軸トシ橫斷面ノ高サノ方向ニy軸ヲ又xy平面ニ直角ニz軸ヲ取リテy,z軸ヲシテ橫斷面中心ニ於ケル主軸ノ方

1) 九州帝國大學工科大學紀要, I, 5, 1919, 395 頁.

向ニ一致セシメル. 又梁ノ軸ハ初メ眞直トシ其材料ハ等質ト見做ス. 偖次ノ計算ニ於テハ常數ノ彈性係數ノ存在スル範圍內デ梁ガ或ル有樣ニ曲リ且捩レル條件ヲ定メヤウ.



87 圖

今O點ニ於テ外力ガ圖ニ示ス樣ニ作用スルトシヤウ. (此圖ニハ他ノ凡テノ力ヲ省略セル故必要ニ應ジテ之ヲ補ッテ下サイ.) 又梁ノ變形ハ恰モ兩端ヲ支ヘテ中央ニ荷重シタ場合ノ樣ニ書イテアルガ下ノ計算ハ一般的デアル. 梁ノ任意ノ橫斷面ヲ取リ其中心O'ヲ原點トシテ彈性線ノ方向ヲa軸トシ又斷面ノ二主軸ノ方向ヲb,c軸トスル座標軸ヲ作ル. O'點ガ移レバ此座標軸モ從テ動ク. 此際a,b,c各軸ノ周リニ生ズル小廻轉ヲ夫レ夫レ$d\theta_a, d\theta_b, d\theta_c$ニテ表ス. 固定軸ノ一ツ卽$x$軸ニ對スル動ク軸$a,b,c$軸ノ傾斜角ヲ次ノ樣ニ書ク.

	a	b	c
x	(ax)	(bx)	(cx)

然ル時ハ(ax)ハ零ニ近ク又$(bx),(cx)$ハ$\frac{\pi}{2}$ニ近イ. 從テ近似的ニ$\cos(ax)=1,\quad \cos(bx)=\cos(cx)=0$トナリテ此特別ノ場合ニハ直ニ次ノ式ガ書ケル. (併シ之ヲ動ク軸ノ一般ノ場合ヨリ導ク爲ニハ適當ナル力學ノ書籍ヲ參考シテ下サイ.)

$$\left.\begin{aligned} d\cos(ax)=0,\quad d\cos(bx)&=-\sin(bx)\,d(bx)=-d\theta_c,\\ d\cos(cx)&=-\sin(cx)\,d(cx)=\quad d\theta_b.\end{aligned}\right\}\tag{42}$$

偖 O' ヲ含ム横斷面ニ於ケルモーメントノ a, b, c 軸ノ方向ノ成分ヲ夫レ夫レ M_a, M_b, M_c トスル．之等ノ中ノ第一ノモノハ捩リヲ起シ又他ノ二ツハ曲ゲヲ起ス．即

$$M_a=-A\frac{d\varphi}{dx},\quad M_b=B\frac{d\theta_b}{dx},\quad M_c=C\frac{d\theta_c}{dx}.\tag{43}$$

A ハ捩リノ剛性ヲ,又 B, C ハ曲ゲノ剛性ヲ示ス．第一式ノ負號ハ M_a ノ廻轉方向ヲ他ノ二ツノ夫レ等ト同ジ規則ニ從ハセル爲ニ必要デアル．又 φ ヲ常ニ小トスレバ

$$\left.\begin{aligned} M_b&=Rx\varphi,\\ M_c&=-Rx.\end{aligned}\right\}\tag{44}$$

上ニ導イタ方向餘弦ヲ用キテ x 軸ノ方向ニ於ケルモーメントノ式ヲ作レバ夫レハ $M_a\cos(ax)+M_b\cos(bx)+M_c\cos(cx)$ ニ等シイ．モシ梁ノ兩端ニ於ケル力ノ外途中ニ力ノ作用ナケレバ上ノモーメントハ不變ナル故

$$\frac{d}{dx}\Big[M_a\cos(ax)+M_b\cos(bx)+M_c\cos(cx)\Big]=0.\tag{45}$$

之ニ(42)ヲ入レテ

$$\frac{dM_a}{dx}-M_b\frac{d\theta_c}{dx}+M_c\frac{d\theta_b}{dx}=0.$$

(43)ヲ入レテ

$$A\frac{d^2\varphi}{dx^2}+M_bM_c\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{B}\right)=0.$$

更ニ(44)ヲ入レテ

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{R^2}{A}\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right)x^2\varphi=0.$$

簡單ノ爲ニ此方程式ヲ次ノ樣ニ書ク．即

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+a^2x^2\varphi=0,\qquad a^2=\frac{R^2}{A}\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right).\tag{46}$$

若シ斷面ノ形ガ細長イ時ハ $C\gg B$ ナル故

$$a^2=\frac{R^2}{AB}\tag{47}$$

J ヲ以テ本節ノ終ニ附記スル樣ニ横斷面ノ形ニヨリテ定マル或ル數量トスレバ $A=GJ$ 又 I ヲ以テ b 軸ノ周リノ横斷面ノ慣性モーメントトスレバ $B=EI$. 從テ近似式(47)ハ次ノ樣ニナル．

$$a^2=\frac{R^2}{EGIJ}.\tag{48}$$

微分方程式(46)ハ前ニ述ベタ(28)ノ n ヲ -2 トシタ特別ノ場合デ其積分ハ(37)ヨリ

$$\varphi=x^{\frac{1}{2}}\left[AJ_{\frac{1}{4}}\left(\frac{a}{2}x^2\right)+BJ_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{a}{2}x^2\right)\right].\tag{49}$$

(i) 一端固定サレ他端自由ナル場合．

例ヘバ梁ノ一端 $x=0$ ガ自由デ荷重 P ノ作用ヲ受ケ他端 $x=l$ ハ構造物ニ固定サレル時ハ次ノ條件ガ滿足サレネバナラヌ．

$$x=0,\quad \frac{d\varphi}{dx}=0.$$

$$x=l,\qquad \varphi=0.$$

偖 φ ノ式(49)ノ右邊第一項ヲ展開スレバ x ノ項ヲ以テ始リ又第二項ノ展開ハ x ヲ含マザル項デ始ル．今 $\frac{d\varphi}{dx}$ ヲ作リテ其中ニ $x=0$ ト置ケバ前ノ初項ハ消エズニ殘ル故上ノ第一條件ニ合フタメニハ $A=0$ トセネバナラヌ．夫レ故

$$\varphi=Bx^{\frac{1}{2}}J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{a}{2}x^2\right).\tag{50}$$

而シテ斯ル φ ガ第二條件ニ合フタメニハ

$$J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{a}{2}l^2\right)=0.$$

之ヲ滿足スル初根ヲ(41)ニヨリテ計算スレバ

$$\frac{a}{2}l^2=2.003$$

即

$$a=\frac{4.01}{l^2}.$$

從テ限界荷重ハ(48)ヨリ $R=P$ トシテ

$$P=\frac{4.01}{l^2}\sqrt{EGIJ}. \tag{51}$$

(ii) 兩端自由ニ支ヘラレテ中央ニ荷重 P ヲ荷フ場合.

此時ニハ R ガ支力 $\frac{P}{2}$ ニ等シイ. 而シテ梁全體ノ平衡ノタメニ必要ニ應ジテ x 軸ノ周リニ作用スル偶力ヲ加ヘルモノトスル. 併シ之ガタメニ基礎方程式(46)ハ變ラナイ. 偖梁端ノ條件ハ荷重後常ニ直立ヲ保ツ意味ニテ

$$x=0,\quad \varphi=0.$$

又中央ニ於テハ傾斜角 φ ガ最大トナルベキ故

$$x=\frac{l}{2},\quad \frac{d\varphi}{dx}=0.$$

第一條件ヨリ直ニ(49)ノ $B=0$ ナルコトガ判ル. 從テ

$$\varphi=Ax^{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{a}{2}x^2\right). \tag{52}$$

此式ニ

$$\frac{a}{2}x^2=\xi$$

ト書ケバ

$$\varphi=A'\xi^{\frac{1}{4}}J_{\frac{1}{4}}(\xi).$$

而シテ $\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d\varphi}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}$ ニ就テ見ルニ $\frac{d\xi}{dx}=ax$ ハ梁ノ中點ニ於テ消エザル故

$$\frac{d\varphi}{d\xi}=A'\xi^{\frac{1}{4}}J_{-\frac{3}{4}}(\xi)$$

ガ第二條件ヲ滿足スルタメニハ

$$J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{a}{8}l^2\right)=0.$$

此式ノ初根ヲ見出スタメニ前ノ近似式(41)ヲ用ヰル事ハ同式應用ノ範圍外ナルタメ稍不正確ノ恐ハアルガ大體ノ見當ヲ知ルタメニ强イテ之ヲ用ヰレバ略ボ 1.06 ナル答ヲ得ル. 而シテ他ノ計算ニ依ルモ殆ンド此値ニ等シイ故

$$a=\frac{8.48}{l^2}.$$

從テ限界荷重ハ

$$P=\frac{17.0}{l^2}\sqrt{EGIJ}. \tag{53}$$

上ノ計算ニ於テ記號 J ヲ以テ表サレル或ル數量ヲ用ヰタガ之ハ捩リノ問題ニ於テ計算サレルベキモノデ例ヘバ矩形斷面ヲ有スル棒ノ捩リハ後章ニ述ベル積リデアルカラ之ニ對スル J ノ正確ナ値ハ其計算ノ結果ヲ待チテ初メテ決定サレル. 多クノ斷面形ニ對シテ次ノ樣ナ實驗式ヲ用ヰル事ガアル. 併シ斯ル式ハ時トシテ大ナル誤ヲ起ス.

$$J=\frac{f^4}{40I_p}. \tag{54}$$

但 f ハ横斷面ノ面積デ I_p ハ横斷面ノ中心ヲ通リ且之ニ直角ナル軸ノ周リノ慣性モーメントデアル.[1] 又其係數40ハ近似數デ正確ニ言ヘバ斷面ノ形ニヨリテ定マル性質ヲ帶ビテ居ル. Bach ハ高サ 200 mm ノ I 形鋼ニ對シテ 40－42 ナル實驗ノ結果ヲ得タ.

例題 1. ピストン棒ノ直徑.

鋼製ノ圓柱形ピストン棒ノ受ケル壓縮力ヲ P' トシピストンノ中部ヨリクロツスヘツドノピンノ中心迄ノ長サヲ l トスル. 偖棒ノ兩端ガ自由ニ支ヘラレルモノト見做シテ如何ナル式ニテ限界荷重ヲ定メルベキカト云フニ普通 Euler ノ公式ヲ用ヰルニハ $\frac{l}{i}$ ガ小サ過ル場合ガ多イ. 併シ夫レニモ拘ラズ同式ニヨリ限界荷重ヲ求メ其代リニ大ナル安全係數ヲ採用シヤウ. 卽實際ノ荷重ハ遙ニ限界値ヨリ小ニ取リテタトヘ他ノ公式ヲ用ヰルトモ充分限界荷重ヨリ以下ニアル樣設計スル. 卽

$$P'=\frac{\pi^2}{S}\frac{EI}{l^2}.$$

---

1) C. Bach, Elastizität u. Festigkeit, 6 版, 339 頁; 9 版, 393 頁.
Todhunter and Pearson, A History of the Elasticity and Strength of Materials, Vol. II, Part I, 195 頁.

横斷面ノ直徑ヲ d トスレバ $I=\frac{\pi}{64}d^4$. 從テ

$$P'=\frac{\pi^2}{S}E\frac{\pi d^4}{64\,l^2}=\sim\frac{E}{2S}\frac{d^4}{l^2}.$$

此式ニ於テ例ヘバ

$$E=2\,100\,000\ kg/cm^2,$$

$$S=21$$

トオケバ

$$P'=50\,000\frac{d^4}{l^2}.$$

之ニ依テ與ヘラレタ P' 及 l ニ對スル直徑 d ヲ計算スルコトガ出來ル。ピストン棒ハ普通上ノ樣ニシテ計算サレルケレドモ純粹ニ中心荷重ヲ受ケズシテ曲ゲモーメントヲ受ケル場合ガ多イ. 又夫レノミナラズ內部ヲ冷却スル內燃機關ノピストン棒ハ熱應力ヲ受ケ且冷却水ノ爲ニ腐蝕疲勞ヲ起シ易イ.

例題 2. 長サ 180 cm, 中央部ノ慣性モーメント 24 cm^4 デ中央カラ兩端ニ向テ次第ニ細ク絞ラレタ木柱ニ於テ其任意ノ横斷面ノ慣性モーメントガ(25)式中ノ $n=1$ トシタ場合ニ相當スルモノト假定シテ限界荷重ヲ計算スルコト. 但 $E=10^5\ kg/cm^2$.

中央カラ兩端ニ至ル間ガ互ニ對稱的ナラバ47節以下ニ述ベタ形ノ柱ガ二ツ集ツテ出來テ居ルト假定シテ宜シイ. 從テ(40)式ニ於テ

$$2l=180\ cm,$$

$$I_1=24\ cm^4,$$

$$n=1$$

ト置ケバ

$$P=1.44\frac{10^5\times 24}{90^2}=427\ kg.$$