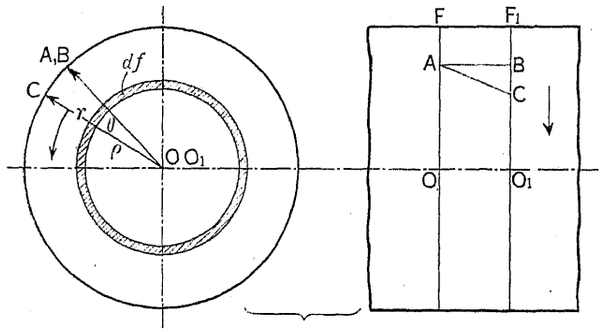
V. 捩　リ.

36. 横斷面圓形ノ場合.

棒ノ捩リニ關スル問題ヲ種々ノ斷面形ノ場合ニ就テ論ズルコトハ彈性學上興味アル事柄ナルモ後章ニ述ベル應力及變形ノ總論ヲ終ヘ斯學ノ基礎ヲ確カニシタ上デナケレバ其眞相ヲ叙シ難キ故茲ニハ最モ簡單デ而モ應用廣キ標題ノ如キ場合ノミヲ論ジヤウ. 偖外力ガ棒ノ軸ノ周リニ働ク廻轉偶力ヲ生ズル時棒ハ捩レテ68圖ニ示ス如ク圓形ノ兩斷面 F, F_1 ハ相對的ニ廻轉ヲ起ス. 此際斷面上ノ各部ガ如何ニ變形スルカヲ



68 圖

明カニシナケレバ應力ノ配布ヲ計算スルコトガ出來ナイ譯デアルガ之ガ爲次ノ樣ナ假定ヲ設ケル.

(i) 棒ノ斷面ハ變形後モ依然平面ナルコト.

(ii) 斷面上ニ引カレタ半徑ハ變形後モ依然直線ナルコト.

(iii) 二ツノ斷面上ノ半徑ハ變形ノタメニ相對的廻轉ヲ生ジ其角ハ二面間ノ距離ニ比例スルコト.

之等ノ事柄ハ假定トシテ述ベオクニ止ルモ圓形ノ場合ニハ之レ以外ニ尤モラシイ別ノ假定ヲ與ヘルコトハ出來ナイ相談デアルト言ツテヨイ. 從テ以下ノ計算ノ結果ガ最モ信ヲ置クニ足ル事ハ必シモ嚴密ナル

理論ノ判定ヲ待タズトモ略ボ察知スル事ガ出來ル.

最後ノ假定ニ從ヘバ棒ノ長サノ何處ヲ取ルモ廻轉ノ度合ハ同一デアルカラ68圖ニ於テ F, F_1 ノ間ノ距離ヲ單位ノ長サニ等シク取リ之ニ就テ變形ヲ考ヘル. 初メ棒ノ表面ニ軸ニ平行ナル直線 AB ヲ引キ置ケバ變形ノタメ半徑 BO_1 ハ AO ニ對シテ $\angle BO_1C=\theta$ ヲ描キテ CO_1 ニ移リ AB ハ AC ノ如キ曲線トナル. 初メノ二ツノ假定ニヨリテ平面ハ依然平面デ半徑ハ依然半徑ナル故變形前 BO_1 上ニアリシ各點ハ CO_1 上ニ於ケル位置ヲ占メ又兩平面上ニ於テ中心ヨリノ距離ガ ρ ナル如キ二點間ニ起ル相對的移動ハ $\rho\theta$ ニ等シイ. 而シテ之等ノ二面ハ互ニ單位ノ距離ニアル故前章32節ニ述ベタ樣ニ $\rho\theta$ ハ中心ヨリ ρ ナル距離ニ於テ起ル辷リ γ ニ外ナラヌ. 卽

$$\gamma=\rho\theta. \tag{1}$$

之ニ G ヲ乘ズレバ

$$\tau=G\gamma=G\rho\theta. \tag{2}$$

上ノ辷リ γ ハ半徑ト直角ニ起ルカラ τ モ亦同樣デアル.

斯樣ニ γ ハ斷面ノ中心ヨリノ距離ニ比例シ中心ニ於テハ零デ圓周上ニ於テ最大トナル. モシ G ガ常數ナラバ τ ニ就テモ亦同樣デアル.

今 G ヲ不變トシテ圓周ニ起ル τ ノ値 $\tau_1=Gr\theta$ ヲ見出ス爲先ヅ次ノ樣ニ書ク

$$\tau=\tau_1\frac{\rho}{r}.$$

然ルニ應力 τ ノ配布ノ爲棒ノ軸ノ周リニ生ズル應力ノ廻轉モーメントハ無論外カラ加ヘラレル捩リ偶力ノモーメントニ等シイカラ68圖ニ於テ横斷面中ニ縞ヲ附ケタ小面積ヲ df トスレバ積分ヲ全面ニ取リテ

$$M=\int\tau\rho\,df.$$

之ニ上ノ τ ヲ導クバ

$$M=\frac{\tau_1}{r}\int\rho^2\,df.$$

此式ノ右邊ニアル積分ハ圓形斷面ノ極慣性モーメントデ之ハ $I_p=\frac{\pi}{2}r^4$ ニ等シイ. 故ニ

$$M=\tau_1\frac{\pi}{2}r^3.$$

從テ $d=2r$ トスレバ

$$\tau_1=\frac{2}{\pi}\frac{M}{r^3}=\frac{16}{\pi}\frac{M}{d^3}. \tag{3}$$

次ニ單位ノ長サニ對スル捩レノ角 θ ヲ求メルニ

$$\theta=\frac{\gamma_1}{r}=\frac{\tau_1}{G}\frac{1}{r}.$$

之ニ(3)ヲ入レル時ハ

$$\theta=\frac{2}{\pi}\frac{M}{r^4}\frac{1}{G}=\frac{32}{\pi}\frac{M}{d^4}\frac{1}{G}. \tag{4}$$

θ ヲ知ル時ハ距離 l ナル兩斷面間ノ捩レノ角ハ直ニ θl トシテ計算サレル. 又一般ニ $\frac{M}{\theta}$ ノ比ハ捩リニ對スル剛性ヲ表ス. 之ハ只今ノ圓形斷面ニ於テハ GI_p ニ等シイ.

以上ノ計算法ヲ押シ擴メテ中空ノ圓形斷面ノ場合ニ對スル τ_1 及 θ ノ式ヲ導クコト容易デアル. 即

d = 斷面ノ外徑, d_0 = 斷面ノ內徑

トスレバ

$$\int\rho^2\,df=\frac{\pi}{32}(d^4-d_0^4).$$

故ニ

$$M=\tau_1\frac{\pi}{16}\frac{d^4-d_0^4}{d},$$

又ハ

$$\tau_1=\frac{16}{\pi}M\frac{d}{d^4-d_0^4}. \tag{5}$$

從テ又

$$\theta=\frac{32}{\pi}\frac{M}{d^4-d_0^4}\frac{1}{G}. \tag{6}$$

37. 常數ノ彈性係數存在セザル場合.

若シ辷リト之ニ對スル應力トノ間ニ正比例ノ法則ガ成立シナケレバ彈性係數 G ガ存在セヌタメ前節ノ計算ノ結果ヲ用ヰル譯ニ行カヌ. 元來斯樣ナ性質ノ材料カラ出來タ丸棒ヲ捩ル時變形ニ關シテハ矢張リ前節ニ假定シタ事柄ヲ其儘使フヨリ外他ニ考ハナイノデアルカラ此場合ニモ(1)ニヨリテ

$$\gamma=\rho\theta$$

トナリ辷リハ中心ヨリノ距離ニ比例スル. 併シ應力ハ最早 $G\gamma$ デ與ヘラレヌタメ半徑ニ沿ヒテ直線狀ニ變化シナイ. 從テ此點ニ於テ前ノ式ガ正シクナイ. 夫レデハ外力ノモーメント M ヲ知リテ丸棒ノ橫斷面(半徑 r)ニ起ル最大應力ヲ見出スニハ如何ニスレバ宜シイカ.

捩リモーメント M ト應力 τ ノ引起スモーメントトハ材料ノ性質ニ無關係ニ常ニ相等シイノデアルカラ前節ト同樣ニ

$$M=\int\tau\rho\,df=2\pi\int_0^r\tau\rho^2\,d\rho.$$

此式ニ於テ $\rho=\frac{\gamma}{\theta}$ ト書キ且與ヘラレタ一定ノ M ニ對シテ θ ハ不變デアルカラ下ノ式ガ書ケル.

$$d\rho=\frac{d\gamma}{\theta}.$$

從テ

$$M=\frac{2\pi}{\theta^3}\int_0^{\gamma_1}\tau\gamma^2\,d\gamma. \tag{7}$$

此右邊ガ積分サレルタメニハ τ ガ γ ノ函數トシテ與ヘラレネバナラヌ. 併シ之等二ツノ間ノ關係ハ引張試驗ノ結果カラ σ ト ε トノ關係ヲ出シタ樣ニ簡單ニ見出シ得ナイノデアル. 何トナレバ引張試驗ノ場合ニハ斷面上ニ力ガ一樣ニ配布サレルモノト見レバ材料ノ性質ニ關係ナク σ ヲ計算シ得タノデアルガ捩リノ場合ニハ肉ノ薄イ圓筒形ノ棒ニ就テ試驗ヲ行ヒ細イ輪狀ノ斷面ニ於ケル應力ガ略ボ一樣デアルト見做サレル如キ實驗ノ方法ヲ取ラナケレバ τ ヲ計算シ得ナイ. 夫レ故斯ル方法デ

豫メτトγトノ關係ヲ明カニシテ上ノ式ヲ積分スル事ハ容易デナイカラ夫レヨリモ寧ロ此式カラτガγニ依テ如何ニ變ズルカヲ研究シヤウ. 例ヘバτヲγノ或ル函數トシテ表シテ上式ヲ積分スレバγニ無關係ノ未知常數ヲ除イテハ計算ガ出來ル. 之ガタメニ求メル方程式ガ引張ノ時ノ樣ニ下ノ式デ表サレルト假定スル.

$$\gamma=\beta\tau^n.$$

βモnモ其値未知ノ常數デアル. 此式ヲ書キ換ヘテ

$$\tau=\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\frac{1}{n}}=k\gamma^{\frac{1}{n}},\quad k=\beta^{-\frac{1}{n}} \tag{8}$$

トスルコトガ出來ルカラ之ヲMノ式ノ右邊ニ導ク.

$$M=\frac{2\pi k}{\theta^3}\int_0^{\gamma_1}\gamma^{\frac{2n+1}{n}}d\gamma$$

$$=\frac{2\pi n}{3n+1}\frac{k}{\theta^3}\gamma_1^{\frac{3n+1}{n}}.$$

此式ニ於テ $\theta^3=\left(\frac{\gamma_1}{r}\right)^3$ トシテ表シウル故

$$M=\frac{2\pi n}{3n+1}r^3k\gamma_1^{\frac{1}{n}}. \tag{9}$$

之ヲ見ルニ$\frac{2\pi n}{3n+1}r^3k$ハ常數デアルカラMガ$\gamma_1^{\frac{1}{n}}$ニ比例シ結局τガγニ對スル場合ト同樣ノ規則ニ從フ. 只係數ガτノ場合ニハkデアツタニ對シMノ式ハ之ニ$\frac{2\pi n}{3n+1}r^3$ヲ乘ジタモノトナツテ居ル差ガアルニ過ギヌ. 從テ上ノ計算ニ從ヘバ丸棒ノ試驗片ニ施シタ實驗ノ結果カラγ_1及Mヲ座標トスル曲線ヲ引ケバ其縱線Mノ尺度ヲ變ジテ直ニτ_1ノ曲線ト見ルコトガ出來ル. 而シテk(若クハβ)並ニnノ値ヲ求メルコトハ玆ニ說明スル迄モナイ.

上ト似タ計算法ハ Ludwik[1] ノ材料ノ流レニ關スル研究中ニ記サレテ居ル.

併シτニ對シテ上ノ樣ナ方程式ヲ與ヘズニM曲線ヲ使用シテ容易ニ

1) P. Ludwik, Elemente der technologischen Mechanik, 1909, 31頁.

應力ノ値ヲ見出ス方法ガアル. 之ガタメニ先ヅ前ノ(7)ヲ書キ換ヘテ

$$\int_0^{\gamma_1}\tau\gamma^2d\gamma=\frac{M\theta^3}{2\pi}.$$

此兩邊ヲγ_1ニ對シテ微分スル. 此時ニハ無論Mモθモ共ニ變ズル故

$$\tau_1\gamma_1^2=\frac{3M\theta^2+\theta^3\frac{dM}{d\theta}}{2\pi}\frac{d\theta}{d\gamma_1}.$$

然ルニ

$$\frac{d\theta}{d\gamma_1}=\frac{1}{r}.$$

故ニ

$$\tau_1\gamma_1^2=\frac{3M\theta^2+\theta^3\frac{dM}{d\theta}}{2\pi r}.$$

兩邊ヲ $\gamma_1^2=\theta^2r^2$ ニテ除ス時ハ

$$\tau_1=\frac{3M+\theta\frac{dM}{d\theta}}{2\pi r^3}. \tag{10}$$

此右邊ハθ及Mヲ座標トシタ曲線カラ容易ニ計算サレルカラ從テ與ヘラレタθ(若クハγ_1)ニ對スルτ_1ヲ求メルコトガ出來ル.

次ニ一二ノ特別ノ場合ニ對シテ(10)ノ與ヘルτ_1ヲ求メヤウ. 先ヅ$\frac{dM}{d\theta}$ガ常數ニ等シイ場合ニハM曲線ガ座標軸ノ原點ヲ通ル一直線トナリテ常數ノGガ存在スル時ニ一致スル. 此時ハM直線上ノ任意ノ點ニ對シテ$\frac{dM}{d\theta}=\frac{M}{\theta}$ナル故

$$\tau_1=\frac{2M}{\pi r^3}.$$

之ハ前節ノ(3)ト符合スル.

又θガMヨリ大ナル割合デ增加スレバM曲線ハθ軸ニ對シテ凹形トナリ$\frac{dM}{d\theta}$ハ$\frac{M}{\theta}$ヨリモ小デアル. 從テ斯樣ナ場合ノτ_1ノ値ハGガ存在スル場合ニ比ベテヨリ小トナルコトガ判ル.

尙若シ極端ニ曲線ガθ軸ニ平行トナリ$\frac{dM}{d\theta}=0$トナル時ハ

$$\tau_1 = \frac{3}{2}\frac{M}{\pi r^3}.$$

即(3)ノ値ノ$\frac{3}{4}$倍ニ當ル. 此時ハ變形ガ進ミテモ應力ノ配布ニ變動ヲ生ジナイコトヲ意味スルノデ即τガγニ無關係デアル. 横斷面ノ半徑上ニ沿ヒテτガ不變デ中心モ圓周モ齊シクτ_1ノ作用ヲ受ケルト假定シテ(7)ヲ積分スレバ實際之ト同樣ノ結果ニ到着スルノデアル.[1]

例題 1. 軸ノ直徑.

軸承ニ支ヘラレテ一方ヨリ他方ニ捩リノ偶力ヲ傳ヘナガラ廻轉スル圓柱形ノ軸ノ直徑ヲ定メヤウ. 元來軸ハ捩リヲ受ケル外多クハ曲ゲヲ受ケル故應力狀態ヲ精密ニ計算スルタメニハ兩方ノ聯立スル場合ヲ考ヘネバナラヌ. 此事ハ後章ニ述ベル積リデアルカラ此處デハ曲ゲヲ省略シテ只捩リノミガ作用スルト見テ簡單ナ計算式ヲ導ク.

偖圓柱體(直徑d)ガ捩リモーメントMヲ受ケテ生ズル應力ハ(3)ニヨリテ與ヘラレル故此應力ガ一定ノ限度k_tヲ超エヌタメニハ

$$k_t \geqq \frac{16}{\pi}\frac{M}{d^3}.$$

Nヲ軸ノ傳ヘルベキ馬力數トシnヲ一分間ノ廻轉數トスレバ

$$75\,N = \frac{M}{100}\frac{\pi n}{30}.$$

此式ニ於テMハ$kgcm$ニテ表サレルモノトシテ之ヲkgmニ直シタ. 上ノ二式ヨリMヲ消去スレバdハ下ノ近似値以上ナルヲ要スル.

$$d = \sqrt[3]{\frac{360\,000}{k_t}\frac{N}{n}}.$$

曲ゲ作用ヲ省略セル故此式中ノk_tハナルベク小ニ取リテdノ小ニ失セヌ樣シナケレバナラヌ. 例ヘバ$k_t = 120\ kg/cm^2$トスレバ

$$d = \sqrt[3]{3000\frac{N}{n}} = 14.4\sqrt[3]{\frac{N}{n}}.$$

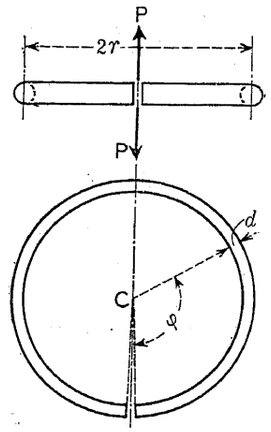
1) James Thomson, Papers in Physics and Engineering, 334頁參照.

モシNガ馬力數デナシニKWノ數ヲ示ス時ハ此式ノ三乘根ノ前ノ數ハ16.0トナル.

軸ニ作用スル曲ゲモーメントノ相應ニ大ナル時ニハ此式ハ尙不安全デアル. 例ヘバ工場内ノ輕イ傳働軸ニ之ヲ使用シテ差支ヘナイケレドモ重イ齒車又ハ調革車ノ取付ケラレタ部分等ハ曲ゲノ作用ヲ充分尊重セネバナラヌ.[1]

例題 2. 丸イ針金ニテ作レル圓柱形螺旋狀スプリングニ於ケル應力及變形ノ計算.

標題ノ如キスプリングハ曲線狀ノ軸ヲ有スルモ直線軸ノ場合ノ式ヲ用ヰテ次ノ如キ簡單ナ計算ニ依ル近似式ヲ導ク. コイルノ半徑ガ針金ノ半徑ニ比ベテ相應ニ大ナル時ハ近似式ノ計算ガ許サレルケレドモ然ラザル場合ニハ正シクナイ.



69 圖

先ヅ69圖ニ示スヤウナ圓環ノ半徑ヲrトシ針金ノ直徑ヲdトスル. 而シテ圓ノ中心Cニ於テ其平面ニ直角ヲナス力P, Pヲ加ヘテ圓環ノ切レ目ガ該平面ヨリ離レル樣ニ引ク時針金ノ任意ノ斷面ニ於ケルPノ作用ヲ考ヘルニ捩リモーメントPrノ作用ヲ見ルノデアル. 但之ト同時ニ作用スベキ剪斷力Pハ省略シヤウ. 只今ノ問題ニ於テrハ常數ナル故何レノ點ニ於テモモーメントハPrデ之ガタメニ生ズル應力ハ(3)ニヨリテ

$$Pr = \frac{\pi}{16}k_t d^3.$$

次ニ針金ノ長サ$r\,d\varphi$ガ捩レ$\theta r\,d\varphi$ヲ生ズルタメニ環ノ中心Cニ於ケ

1) 曲ゲ及捩リノ共同作用ニ就テハVI章42節,同章例題2及XVIII章等參照.

ル變位ハ $\theta r^2 d\varphi$ ニ等シク之ヲ $\varphi=0$ ヨリ終局ノ角 φ_1 ニ至ル迄積分スレバ全體ノ變位ガ求メラレル. 卽求メル變位ヲ y トスレバ

$$y=\int_0^{\varphi_1}\theta r^2\,d\varphi.$$

只今ノ場合ニハ $\theta=\frac{32}{\pi}\frac{Pr}{d^4}\frac{1}{G}$ デ r ハ常數ナル故

$$y=\theta r^2\varphi_1=\frac{32}{\pi}\frac{Pr^3}{d^4}\frac{\varphi_1}{G}.$$

線線狀スプリングハ上ノ樣ナ圓環ヲ幾回モ卷イテ作ラレル故其卷キ數ヲ n トスレバ $\varphi_1=2\pi n$. 之ヲ上ノ式ニ入レル時ハ

$$y=\frac{64n}{G}\frac{Pr^3}{d^4}.$$

例ヘバ最大荷重 160 kg, $r=3\,cm$ トシテ荷重 20 kg ニ付 1 cm ノ變形ヲ生ズル樣ナスプリングヲ設計シテ上ノ結果ノ應用ヲ示ス. 此處ニ $k_t=4000\,kg/cm^2$, $G=850\,000\,kg/cm^2$ ト取リテ針金ノ直徑 d 及卷數 n ヲ定メルノガ問題デアルトスレバ先ヅ

$$d=\sqrt[3]{\frac{16}{\pi}\frac{160\times3}{4000}}=\sqrt[3]{0.611}$$
$$=0.85\,cm.$$

近似計算ナル故直徑ヲ少シ繰上ゲテ見掛ケノ應力ヲ小トスル方安全デアル. 依テ $d=0.9\,cm$ ニ對シテ n ヲ計算スレバ

$$n=\frac{850\,000\times0.9^4}{64\times20\times3^3}=16.15$$

例題 3. 丸イ針金ニテ作レル圓錐形スプリングノ計算.

前題ニ於ケルト同樣ノ注意ヲ以テ近似計算ヲ行フ. 此問題ニ於テハ半徑 r ガ變數デ卽スプリングノ一端ニ於ケル r_1 ヨリ n 卷キテナス間漸次ニ擴大シテ r_2 ニナル. 此時荷重 P ノ生ズル捩リモーメントノ最大値ハ Pr_2 デアル. 從テ强サノ計算ハ次ノ式ニヨリテナサレル.

$$Pr_2=\frac{\pi}{16}k_t\,d^3.$$

次ニ變形ノ計算ニ對シテハ前ノ樣ニ

$$y=\int_0^{\varphi_1}\theta r^2\,d\varphi.$$

此式ニ於テ θ ハ矢張リ $\frac{32}{\pi}\frac{Pr}{d^4}\frac{1}{G}$ ニ等シキモ r ハ φ ノ函數デ之ハ次ノ樣ニオク.

$$r=r_1+(r_2-r_1)\frac{\varphi}{2\pi n}.$$

卽 $\varphi=0$ ノ時 $r=r_1$ 又 $\varphi=2\pi n$ ノ時 $r=r_2$ トナル. 從テ $d\varphi$ ノ代リニ $\frac{2\pi n}{r_2-r_1}dr$ ヲ入レテ

$$y=\frac{64n}{r_2-r_1}\frac{P}{d^4G}\int_{r_1}^{r_2}r^3\,dr$$
$$=\frac{16n}{G}\frac{P(r_1+r_2)(r_1^2+r_2^2)}{d^4}.$$

若シ $r_1=0$ ニシテ $r_2=r$ トオケバ

$$y=\frac{16n}{G}\frac{Pr^3}{d^4}.$$

故ニ此特別ノ場合ニハ其最大半徑 r ヲ以テ半徑トシ同ジ卷キ數ヲ有スル圓柱形スプリングニ比ベテ變形ガ四分ノ一ニ當ル.