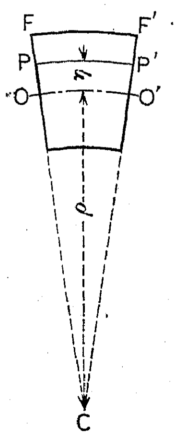
III. 曲　ゲ.

15. 曲ゲノタメニ生ズル應力及伸ビ.

6節ニ於テ棒ノ横斷面ニ直角ナル平面中ニ作用スル偶力M_2ガ棒ヲ曲ゲル樣ニ働ク事ヲ述ベタ. 斯ル偶力ノ作用ニ遇ヘバ眞直ナル棒ノ軸ハ所謂彈性線ト稱スル曲線ニナリ最初互ニ平行ナリシ二ツノ相接近セル斷面 F, F' ハ變ジテ或ル小サイ角 OCO' ヲナス樣ニナル. 29圖. OO' ハ彈性線ノ一部ヲ表シ之ハ紙面中ニ横ハルトシヤウ. 偖 O 及 O' ニ於テ紙面ニ直角ノ線ヲ立テル時ハ之ヲ彎曲軸ト云フ. 棒ガ曲ル時ハ F, F' 間ノ距離 PP' ハ之等ノ點 P, P' ノ位置ニヨリテ原形ヨリモ大トナリ又ハ小トナル. 而シテ此際生ズル伸ビヲ求メルタメニハ變形ニ關スル次ノ假定ヲ基トシテ進ム事ニスル. 卽棒ノ斷面ハ常ニ平面デ且彈性線ニ垂直ナル事 (XVI 章例題2參照) 並ニ彈性線ノ曲リ方ハ小デ且應力ガ伸ビニ正比例ヲナス事等.



29 圖

偖 $\eta = OP = O'P'$ (η ハ OO' ニ對シテ C ト反對ノ方向ニ測リテ正トスル),

$ds = OO'$ 及 PP' ノ最初ノ長サ,

$\varepsilon_0 = O$ 點ニ於ケル軸ノ方向ノ伸ビ,

$\varepsilon = P$ 點ニ於ケル軸ノ方向ノ伸ビ

トスレバ

$$OO' = ds(1+\varepsilon_0),$$
$$PP' = ds(1+\varepsilon).$$

從テ

$$\frac{PP'}{OO'} = \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_0}.$$

然ルニ O 點ニ於ケル彈性線ノ曲率半徑ヲ ρ トスレバ

$$\frac{PP'}{OO'} = \frac{\rho+\eta}{\rho}.$$

故ニ

$$\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon_0} = 1 + \frac{\eta}{\rho}.$$

之ヨリ

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\eta}{\rho} + \varepsilon_0 \frac{\eta}{\rho}.$$

此式ニ於テ ε_0 及 $\frac{\eta}{\rho}$ ハ共ニ小ナル數デアルカラ之等ノ相乘積ヲ省略スル時ハ

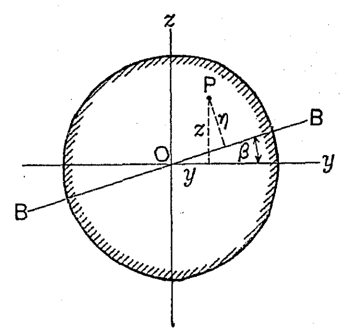
從テ

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 + \frac{\eta}{\rho}. \\ \sigma &= E\varepsilon = E\left(\varepsilon_0 + \frac{\eta}{\rho}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

(1)式ニ就テ見ルニ η ヲ一定トスル各點換言スレバ彎曲軸ニ平行ナル直線上ノ各點ニ於ケル應力及伸ビハ共ニ不變デアル. 特ニ ε 及 σ ガ零トナル樣ナ斷面上ノ直線ハ之ヲ稱シテ中立軸ト呼ブ.

16. 平衡ノ要件.

與ヘラレタ斷面ノ中心 O ヲ原點トシテ直交軸 Oy 及 Oz ヲ引ク. 30圖. 但 Oy 軸ハ偶力ノモーメント M ノ軸ト一致スル樣ニ取ル. (以下簡單ノタメニ M_2 ヲ略シテ M ト記シ特ニ曲ゲノ偶力ヲ示スタメニハ M_b ト記ス). 詳シク言ヘバ Oy 軸ト直角ナル平面ノ中ニ偶力ガ作用スル.



30 圖

偖偶力 M ト之ニ依テ生ズル應力トノ間ニ平衡ノ成立スル爲ニハ應力 σ ノ合成力ハ全横斷面上ニ積分シタ結果零トナリ又 σ ノ生ズル Oy 軸ノ周リノモーメントハ前述セル M ニ又 Oz 軸ノ周リノモーメントハ零ニ等シキ事ヲ要スル故之等ノ條件ヲ式デ書ケバ

$$\left.\begin{aligned}\int\sigma\,df&=0,\\ \int z\,\sigma\,df&=M,\\ \int y\,\sigma\,df&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

之等ノ積分ハ何レモ全面ニ及ブ.

次ニ棒ガ如何ニ曲ルカヲ考ヘルニ一般ニ彎曲軸ハ Oy 軸ニ對シテ或ル傾斜ヲナスベキ故 BOB ヲ以テ斷面上ニ於ケル彎曲軸ノ位置ヲ示シ其 Oy 軸トナス角ヲ β トスル. 然ル時ハ任意ノ一點 $P(y,z)$ ノ彎曲軸ヨリノ距離ハ

$$\eta=z\cos\beta-y\sin\beta.$$

此式ヲ(1)ニ代入スレバ

$$\sigma=E\left(\varepsilon_0+\frac{z\cos\beta-y\sin\beta}{\rho}\right).$$

之ヲ前記ノ(2)ノ第一式ニ入レテ積分スル. 斷面上ノ各點ニ於テ生ズル應力ノ範圍內ニ於テハ其値ノ大小並ニ符號ノ正負ニ關セズ彈性係數 E ヲ不變ト見做ス. 又 O 點ハ斷面ノ中心ナル故 $\int y\,df=\int z\,df=0$ トナル. 計算ノ結果ハ

$$E\varepsilon_0\int df=E\varepsilon_0 f=0.$$

夫レ故 E ガ不變ナラバ $\varepsilon_0=0$ トナリ卽彎曲軸上ノ各點ハ棒ノ軸ノ方向ニ伸ビモ縮ミモセズ. 換言スレバ彎曲軸ガ中立軸ト一致スル. 已ニ $\varepsilon_0=0$ ナル上ハ(1)ヨリ

$$\left.\begin{aligned}&\sigma=\frac{E\eta}{\rho},\\ \text{又ハ}\quad&\sigma=\frac{E}{\rho}(z\cos\beta-y\sin\beta)\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

トナリ此 σ ヲ(2)ノ殘リノ二式中ニ入レル時ハ

$$\frac{E}{\rho}\left(\cos\beta\int z^2\,df-\sin\beta\int y\,z\,df\right)=M,$$

$$\frac{E}{\rho}\left(\cos\beta\int y\,z\,df-\sin\beta\int y^2df\right)=0.$$

之等ノ式ニ於テ次ノ樣ニオク.

$$I_y=\int z^2\,df,\quad I_z=\int y^2\,df,\quad K=\int y\,z\,df.\qquad(4)$$

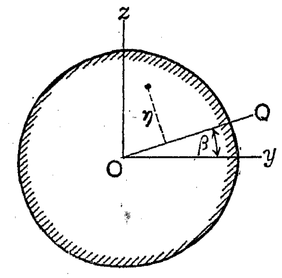
但積分ハ全斷面ニトル. 然ル時ハ

$$\left.\begin{aligned}\frac{E}{\rho}(I_y\cos\beta-K\sin\beta)&=M,\\ \frac{E}{\rho}(I_z\sin\beta-K\cos\beta)&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

之ニ就テ尚述ベル前ニ先ヅ次ノ節ヲ導ク必要ガアル.

17. 斷面ノ慣性モーメント.

31圖ニ於テ O ヲ斷面中ノ任意ノ一點トシ之ヲ原點トシテ任意ノ直交軸 Oy, Oz ヲ引ク. 然ル時ハ Oy ト角 β ヲナス OQ 線ヲ軸トスル斷面ノ慣性モーメントハ次ノ式ノ樣デアル.



31 圖

$$I=\int\eta^2\,df=\int(z\cos\beta-y\sin\beta)^2\,df.$$

他ニハモーメントト云フ語ヲ屢々用ヰルニ拘ラズ慣性モーメントト云フ言葉ハ或ハ廣ク用ヰラレテ居ラヌカモ知レヌ. 夫レデ判リ易イ場所ニハ寧ロ簡單ニ代名詞トシテ記號 I ヲ用ヰヤウ.

偖原點ノ位置ガ前節ノ場合ト違ツテ任意ニ定メラレテ居ルケレドモ便宜上前同樣ノ記號ヲ用ヰル時ハ右邊ノ計算ノ結果

$$I=I_y\cos^2\beta+I_z\sin^2\beta-2K\sin\beta\cos\beta.\qquad(6)$$

偖 OQ 上ニ $\frac{1}{\sqrt{I}}$ ノ値ヲ表ス樣ニ適當ノ尺度ヲ用ヰテ或ル長サヲ切リ取リ之ヲ OQ デ示ス時ハ Q 點ノ座標ハ

$$y=\frac{\cos\beta}{\sqrt{I}},\qquad z=\frac{\sin\beta}{\sqrt{I}}.$$

若シ同様ノ方法ヲ β ノ種々ノ値ニ對シテ行ヘバ Q 點ハ平面上ニアル軌跡ヲ描ク可ク其曲線ノ方程式ハ(6)カラ導カレル. 卽

$$I_y y^2+I_z z^2-2Kyz=1. \tag{7}$$

之ハ明カニ楕圓ヲ表シ其中心ハ座標軸ノ原點ト一致スル. 此結果ヲ言葉デ述べレバ次ノ樣デアル. 或ル斷面中ノ任意ノ一點ヲ通ル直線ヲ軸トシタ斷面ノ I ノ平方根ノ逆數ヲ求メ之ヲ軸ノ方向ニ動徑トシテトル時ハ其末端ハ一ツノ楕圓ヲ描キ出ス.

今此楕圓ノ二ツノ主軸ノ方向ニ座標軸ヲ廻ス時ハ上ノ方程式中 yz ノ相乘積ノ項ハ消エ卽 $K=0$ ナルユエ

$$I_y y^2+I_z z^2=1.$$

而シテ楕圓ノ二主軸中例ヘバ y ノ方向ニ於ケル b ガ大ナル半徑ヲ表シ又 z ノ方向ニ於ケル c ガ小ナル半徑デアルトスレバ之等ニ相當シテ $I_y=\frac{1}{b^2}$ ガ I ノ最小ノ値デ又 $I_z=\frac{1}{c^2}$ ガ最大ノ値デアル.

斯樣ニ與ヘラレタ斷面中ノ任意ノ一點ヲ原點トシテ座標軸ノ方向ヲ適當ニ選べバ之等ノ軸ノ周リノ I ガ原點ヲ通ル凡テノ軸ノ中デ最大又ハ最小ノ値ヲトルコトヲ知ル. 斯ル軸ヲ與ヘラレタ點ニ於ケル主軸ト呼ブ. 而シテ主軸 Oy ト角 β ヲナス任意ノ軸ニ對スル慣性モーメントハ次ノ式ニテ與ヘラレル.

$$I=I_y\cos^2\beta+I_z\sin^2\beta. \tag{8}$$

又慣性モーメントハ斷面積ト慣性半徑ノ二乘トノ相乘積デ表サレル. 卽

$$I=fi^2. \tag{9}$$

I_y 及 I_z ニ對シテハ i ノ末尾ニ記號ヲ添ヘテ區別スル. 然ル時ハ(8)式ハ次ノ樣ニナル.

$$i^2=i_y^2\cos^2\beta+i_z^2\sin^2\beta. \tag{10}$$

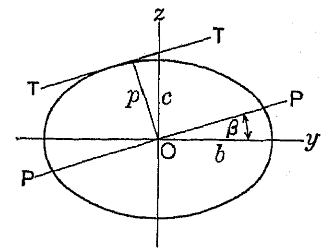
前ニ慣性楕圓ノ動徑ノ長サヲ $\frac{1}{\sqrt{I}}$ ニ等シクトルコトヲ述べタガ f ハ

動徑ノ方向ニ無關係デアルカラ尺度サヘ注意スレバ結局 $\frac{1}{i}$ ヲ示スモノト考ヘテ宜シイ.

上ニ述べタ慣性楕圓ノ性質ヲ少シ變ヘテ說明スルコトモ出來ル. 之ガタメニ楕圓ニ關スル次ノ定理ヲ引用スル. 32圖ニ於テ楕圓ノ中心カラ切線 TT ニ下シタ垂線ノ長サヲ p トスレバ

$$p^2=b^2\sin^2\beta+c^2\cos^2\beta. \tag{11}$$

但 β ハ切線ガ y 軸トナス角デアル. 此式ヲ(10)式ト比較スルニ若シ $b=i_z, c=i_y$ ナラバ $p=i$ ナルコトガ判ル. 卽斯ル楕圓ノ中心ヲ貫イテ y 軸ト任意ノ角 β ヲナス直線 PP ノ周リノ慣性半徑ハ楕圓ノ中心カラ PP ニ平行ナル切線 TT ヘ下シタ垂線ノ長サデ與ヘラレル.



32 圖

前ニ慣性楕圓ノ動徑ヲシテ適當ナ尺度デ $\frac{1}{i}$ ヲ示サシメル樣ニ述べタ. 卽動徑 $=\frac{k^2}{i}$. 此式中ノ常數 k ノ値ヲ特ニ下ノ樣ニ選ブ.

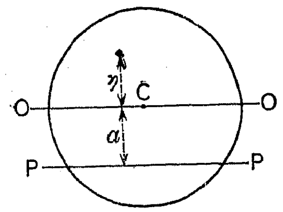
$$k^2=i_y i_z. \tag{12}$$

然ル時ハ楕圓ノ主半徑ハ $\frac{k^2}{i_y}=i_z$, $\frac{k^2}{i_z}=i_y$ トナリ上ノ楕圓ト全ク一致スルノデアル. 夫レ故楕圓ノ主半徑ヲ夫レ夫レ $b=i_z$, $c=i_y$ トシテ描ケバ第二ノ方法デ任意ノ軸ニ對スル I ヲ見出スコトガ出來ル計リデナク矢張リ第一ノ方法ニ依ル事モ出來ルノデアル.

要スルニ斷面ノ一點ニ於テ直交スル二主軸ニ對スル I ガ知ラレル時ハ各點ヲ通ル任意ノ傾斜軸ニ對スル夫レヲ見出ス事ガ出來ル.

次ニ尙慣性モーメントノ計算ニ於テ屢々軸ヲ平行ナル他ノ位置ニ移スコトガアル. 卽互ニ平行ナル二軸ニ對スル慣性モーメント間ノ關係ト云フ問題ガ起ルガ之ニ對シテ吾々ハ先ヅ任意ノ一軸ト之ニ平行ナル斷面ノ中心軸トノ間ノ關係ヲ述べヤウ.

33圖ニ於テ OO ハ斷面ノ中心 C ヲ通ル軸デ PP ハ之ニ平行ナル任意



33 圖

ノ軸デアル. 兩軸間ノ距離ヲ a ニテ表シ斷面上ノ任意ノ點ガ OO ヨリ相去ル距離ヲ η トスル. 但 η ハ OO ニ對シテ PP ト反對ノ方向ニ測リテ正トスル. 然ル時ハ PP ニ對スル慣性モーメント I' ト OO ニ對スル I トノ關係ハ次ノ樣ニシテ求メラレル.

$$I' = \int (\eta + a)^2 \, df$$
$$= \int \eta^2 \, df + 2a \int \eta \, df + a^2 \int df.$$

之等ノ積分ハ全面積ニ及ブ. 然ルニ凡テノ中心軸ニ對シテ $\int \eta \, df = 0.$
又面積ヲ示スタメ $\int df = f$ トオケバ

$$I' = I + a^2 f. \tag{13}$$

夫レ故中心軸ニ對スル I ヲ知レバ之ニ $a^2 f$ ヲ加ヘルコトニヨリテ平行軸ニ對スル I' ガ求メラレル. 從テ此定理ノ應用トシテ互ニ平行ナル任意ノ二軸ノ慣性モーメント間ノ關係ヲ知ル事ガ出來ル.

以上述ベテ來タ慣性モーメントハ凡テ斷面中ニ橫ハル軸ニ對スルモノデアルガ時トシテハ斷面ヲ直角ニ貫ク軸ニ對スル慣性モーメントガ出テ來ル. 斷面上ノ任意ノ一點ヨリ軸ニ至ル距離ヲ ρ トスレバ只今ノ慣性モーメントハ $I_p = \int \rho^2 \, df$ ト定義サレル. 偖此軸ガ斷面ト交ル點ヲ原點トシテ直交軸 y 及 z ヲ斷面中ニトル時ハ $\rho^2 = y^2 + z^2$ ナル故

$$I_p = \int \rho^2 \, df = \int (y^2 + z^2) \, df.$$

此積分ハ全面ニ及ブ. 最後ノ式ニ於テ前ノ樣ニ記號 I_z 及 I_y ヲ用キレバ

$$I_p = I_y + I_z. \tag{14}$$

此結果ヲ用キテ I_y 及 I_z ノ値カラ I_p ヲ求メラレル. I_p ヲ極慣性モーメントト云フ.

18. 應力ノ計算.

16節ニ於テ平衡ノ條件カラ導イタ最後ノ式(5)ニ就テ考ヘルニ先ヅ曲ゲ偶力ノモーメントノ軸ガ斷面ノ中心ヲ通ル一主軸ト合シ從テ座標軸 Oy, Oz ガ兩主軸ノ方向ト一致スレバ前節ニ述ベタ樣ニ $K = 0$ トナル故次ノ樣ニナル.

$$\frac{E}{\rho} I_y \cos\beta = M, \quad \frac{E}{\rho} I_z \sin\beta = 0.$$

從テ此第二式ヨリ

$$\sin\beta = 0 \quad 或ハ \quad \beta = 0.$$

夫レ故偶力ノ平面ガ一主軸ニ於テ斷面ニ直交スル場合ニハ彎曲軸ガ他ノ主軸ト一致シ且前ノ E ニ關スル假定ニヨレバ中立軸モ亦之ト重ナル. 此時

$$\frac{E}{\rho} I_y = M$$

ナル故

$$\sigma = \frac{E\eta}{\rho} = \frac{M\eta}{I_y}.$$

多クノ問題ニ於テハ棒ニ働ク外力ガ各斷面ノ中心ヲ通ル主軸ノ一ツヲ含ム平面中ニ作用シ從テモーメントノ軸ガ他ノ主軸ノ方向ニ一致スル. 此時ニハ上ニ述ベタ樣ニ彎曲軸ガモーメントノ軸ト共ニ一主軸ノ方向ニ落チ凡テノ彎曲軸ハ互ニ平行トナルカラ彈性線ハ外力ノ働ク平面中ニ橫ハル. 此時記號ノ簡單ノタメニ前ニ用キタ I_y ノ代リニ I ヲ用キテ外力ノ作用スル平面ニ對シテ直角ナル方向ノ主軸ニ對スル慣性モーメントト定メル. 然ル時ハ

$$\frac{EI}{\rho} = M, \tag{15}$$

$$\sigma = \frac{M\eta}{I}. \tag{16}$$

(15)式中ノ EI ハ曲ゲニ對スル剛性ヲ表ス. 此式ハ梁ノ彈性線ノ計算ニ用キラレル基礎ノ式デアルガ此問題ハ次ノ節ニ讓ル. 又(16式ハ E

ガ不變ナリトノ假定ノ下ニ彎曲軸若クハ中立軸カラ距離ηニアル斷面中ノ諸點ニ生ズル應力σヲ計算スルタメニ用ヰラレル. σハηニ比例シテ增ス故ηノ最大値ヲトリテ之ニ對スルσヲ求メルノガ强サノ問題ニ於テ通例行フ仕事デアル. ηノ符號ニ關セズ其極限値ヲeデ示セバ

$$\sigma=\frac{Me}{I}. \tag{17}$$

eガ正ノηノ最大値ヲ表スナラバ之ニ對スルσハ素ヨリ正ノ最大應力デ引張ヲ意味シ又eガ負ノηノ最大絕對値ナラバ之ニ對スルσハ負ノ最大應力デ壓縮ヲ表ス. 斯樣ニ一ツノ與ヘラレタ斷面中ニ於テハ中立軸ノ兩側ノ最モ遠イ點ニ最大ノ應力ヲ生ズル. 併シ一本ノ棒全體ヲ考ヘレバ一般ニ$\frac{Me}{I}$ノ値ガ斷面每ニ變化スル故凡テノ斷面中デノ最大ノ$\frac{Me}{I}$ヲ求メルコトガ强サノ計算上常ニ必要トナル. 尙(17)ヲ導ク時偶力ノ平面ガ橫斷面ノ一主軸ヲ通ルト假定シタ. 此主軸ガ橫斷面ノ對稱軸デナイ場合ノ實驗ノ結果ニヨレバ計算ヨリ遙ニ相違セル應力ノ發生ヲ見ルコトガアル.[1)]

19. 彈性線ノ方程式.

眞直ナル軸ノ方向ヲx軸トシ適宜ノ一點ヲ原點トシテ之ト直角ニ撓ミノ方向ニy軸ヲ取リ之ニ對シテ棒ノ彈性線ノ一般方程式ヲ導カウ. 先ヅ曲線上ノ任意ノ一點ニ於ケル曲率半徑ハ次ノ式デ與ヘラレル

$$\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\pm\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

ρヲ常ニ符號ニ關セズ取扱フタメニハ$\frac{d^2y}{dx^2}$ガ正又ハ負ナルニ從ヒ換言スレバ彈性線ガy軸ノ正又ハ負ノ方向ニ對シテ凹形ナルニ從ヒテ前式右側分母ノ符號ヲ＋又ハ－ニ選ブ. 曲ゲ彈性ノ多クノ場合ニ於テハ軸

1) Bach, Elastizität u. Festigkeit, 6版, 227頁. 同9版 (R. Baumann 共著), 267頁.

線ノ撓ミ極メテ小デ$\frac{dy}{dx}$ガ1ニ對シテ著シクナイノガ普通デアル. 夫レ故1ニ對シテ$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ヲ無視シテ差支ヘガナイト見做セバ上式ハ甚ダ簡單ニナル. 卽

$$\frac{1}{\rho}=\pm\frac{d^2y}{dx^2}.$$

之ヲ前節ニ揭ゲタ(15)卽$\frac{EI}{\rho}=M$ノ中ニオク. 然ル時ハ

$$\pm EI\frac{d^2y}{dx^2}=M. \tag{18}$$

Eハ普通xニ對シテ無關係デアル. 併シIハ斷面ノ形ガ棒ノ各部ニ於テ不變ナル時ニ常數トナリテ一般ニハxノ函數デアル. 又Mハ通例xノ函數デアル計リデナク棒ガ軸ニ平行ナル荷重ヲ受ケル際ニハyノ函數トモナル. 斯ル一般ノ場合ニ此微分方程式ヲ解ク事ハ必シモ容易デナイガ或ル簡單ナ場合ニ於ケル應用ハ後ニ示ス積リデアル. 而シテ上記ノ微分方程式ハ二次デアルカラ之ヲ解ケバ一般ニ二ツノ未知常數ガ出テ來ル. 之等ハ棒ノ兩端ニ於ケル條件カラ適當ニ決定サレルベキ者デアル.

20. 偶力ノ平面ガ斷面ノ一主軸ヲ含マヌ場合.

以上ノ計算ニ於テハ偶力ガ橫斷面ノ一主軸ヲ含ミテ之ニ直交スル平面中ニ作用スル場合ヲ述ベタガ若シ然ラザル場合ニハOy並ニOzノ兩軸ハ主軸ト一致シナイ故$\beta \neq O$トナリテ彎曲軸(及中立軸)ハOy軸ニ對シテ或ル傾斜ヲナス筈デアル(30圖參照). 此時應力ノ計算ヲナスタメニハ便宜上矢張リ主軸ノ方向ニ直交座標軸ヲ取リテ其代リニ偶力ヲ之等兩軸ヲ含ム平面中ニ作用スル二ツノ成分ニ分ケ之等ノ各ニ對シテ18節ノ結果ヲ應用シテ夫レ夫レノ引起ス應力ヲ計算シ其結果ヲ組合セテ所要ノ値ヲ見出スノガ便デアル.

先ヅ曲ゲ偶力ノモーメントMヲ示ス軸ガ一主軸Oyトナス角ヲαト

スレバ上ノ方針ニ從テ作レル兩成分ハ $M\cos\alpha$ 及 $M\sin\alpha$ デ其方向ハ之等モーメントガ同符號ヲ有スル間ハ y 及 z ノ符號ヲ同ジクスル横斷面上ノ一點デ異符號ノ應力ヲ生ズル樣ニ作用スル. 偖 Oy 及 Oz 兩軸ニ對スル慣性モーメントヲ夫レ夫レ I_y 及 I_z トシ横斷面上ノ一點 (y, z) ニ於ケル應力ヲ別々ニ計算スレバ $\frac{Mz\cos\alpha}{I_y}$ 及 $-\frac{My\sin\alpha}{I_z}$ デアル. 依テ之等ノ代數和ヲ求メテ所要ノ應力ヲ計算スレバ

$$\sigma = M\left(\frac{z\cos\alpha}{I_y} - \frac{y\sin\alpha}{I_z}\right). \tag{19}$$

而シテ中立軸ノ位置ハ此式ノ σ ヲ零トスル樣ナ (y, z) ノ軌跡ニヨリテ與ヘラレル. 卽

$$\frac{z}{y} = \frac{I_y}{I_z}\tan\alpha.$$

斯ル直線ノ Oy 軸トノ傾斜角ヲ β トスレバ

$$\tan\beta = \frac{I_y}{I_z}\tan\alpha. \tag{20}$$

此式ヨリ中立軸ノ位置ヲ定メル時ハ自ラ横斷面ノ何レノ點ニ於テ最大ノ應力ガ生ズ可キカヲ知リウル故之ニ相當シタ座標 (y, z) ヲ(19)ニ入レテ所要ノ應力ヲ求メルコトガ出來ル.

21. 慣性モーメントニ關スル雜題.

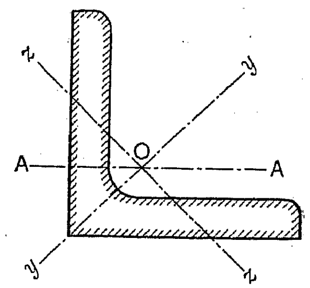
(a) 任意ノ一點ヲ通シテ平面上ニ引カレタ二ツノ直交軸ノ周リノ慣性モーメントノ和ハ不變デアル.

(14)ニ示ス樣ニ二直交軸ニ對スル慣性モーメントノ和 $I_y + I_z$ ハ極慣性モーメント I_p ニ等シイ. 此事ハ直交軸ノ方向如何ニ關係シナイカラ標題ノ事實ヲ證シ得ラレル. 尙(8)式ヲ用ヰテ此問題ヲ證明スルコトモ亦容易デアル.

(b) 等邊山形(34圖). 一邊ノ長サ 60 mm ノ等邊山形ノ中心ヲ通ル主軸 yy 及 zz ニ對スル慣性モーメントガ夫レ夫レ $I_y = 55.1\,cm^4$ 及 $I_z = 14.6\,cm^4$ ナル事ヲ知リテ中心 O ヲ通リ一邊ニ平行ナル軸 AA ニ對スル I ヲ求メル.

主軸 yy ハ斷面ノ對稱軸デ AA 軸ハ yy ト $\frac{\pi}{4}$ ナル角ヲナス故求メル値ハ(8)式中ニ上ノ I_y 及 I_z ヲオキ且 $\beta = \frac{\pi}{4}$ トシテ計算スレバ宜シイ. 卽

$$I = \frac{55.1 + 14.6}{2} = 34.85\,cm^4.$$



34 圖

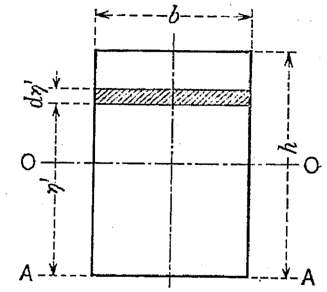
之ガ求メル I ノ値デアッテ此結果ハ前項aノ性質ニヨリテモ明カデアル. 何トナレバ AA 軸及之ニ直交スル中心軸ニ對スル慣性モーメントノ和卽 $2I$ ハ $I_y + I_z$ ニ等シイ故デアル.

(c) 矩形(35圖). 軸 AA ヲ矩形ノ一邊(長サ b)ノ方向ニトル時此軸ニ對スル慣性モーメントハ

$$I' = \int_0^h \eta'^2 df = b\int_0^h \eta'^2 d\eta'.$$

積分ノ上限 h ハ矩形ノ高サデアル. 之ヲ計算スレバ

$$I' = \frac{1}{3}bh^3.$$



35 圖

矩形ノ中心ヲ通リテ AA ニ平行ニ OO ヲ引ケバ之ヲ軸トスル慣性モーメントハ(13)ヲ應用シテ次ノ樣ニ書ケル.

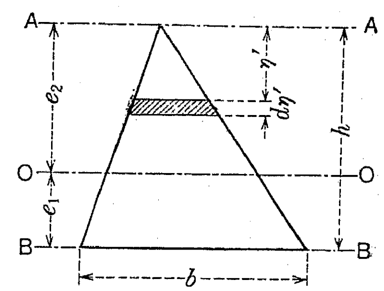
$$I = \frac{1}{3}bh^3 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{1}{12}bh^3. \tag{21}$$

(d) 三角形(36圖). 與ヘラレタ三角形ノ頂點ヲ過ギテ底邊ニ平行ニ直線 AA ヲ引キ之ヲ軸トスレバ

$$I' = \int_0^h \eta'^2\,df = \frac{b}{h}\int_0^h \eta'^3\,d\eta'.$$

但 b ハ底邊ノ長サ, h ハ三角形ノ高サデアル.

$$I' = \frac{1}{4}bh^3.$$



36 圖

三角形ノ重心ヲ過ギテ底邊ニ平行ニ引カレタ直線 OO ニ對スル I ハ

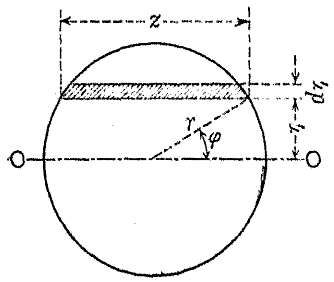
$$I=\frac{1}{4}bh^3-\left(\frac{2}{3}h\right)^2\frac{bh}{2}=\frac{1}{36}bh^3. \tag{22}$$

終リニ軸ヲ底邊ニ一致シテトレバ

$$I''=\frac{1}{36}bh^3+\left(\frac{h}{3}\right)^2\frac{bh}{2}=\frac{1}{12}bh^3.$$

(e) 圓(37圖). 半徑 r ヲ有スル圓ノ中心軸 OO ニ對スル I ハ

$$I=2\int_0^r \eta^2 z\,d\eta.$$



37 圖

此式ニ於ケル z ハ OO 軸ニ平行ナル任意ノ弦ノ長サデアル. 今其一端ヲ通ル半徑ガ軸 OO トナス鋭角ヲ φ トスレバ

$$\eta=r\sin\varphi,\qquad d\eta=r\cos\varphi\,d\varphi,$$

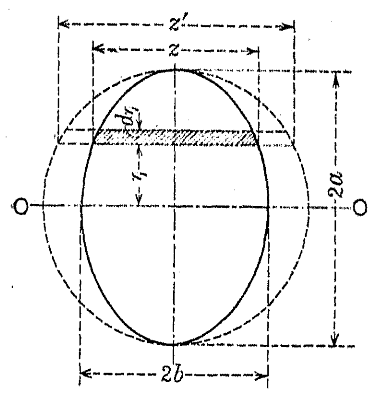
$$z=2r\cos\varphi.$$

之等ノ値ヲ I ノ式ニ代入シテ計算スレバ

$$I=4r^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{4}r^4. \tag{23}$$

(f) 楕圓(38圖). 楕圓ノ主軸ノ長サヲ $2a$ 及 $2b$ トシモーメント,ノ軸 OO ヲ $2b$ ノ方向ニトル. 然ル時ハ

$$I=2\int_0^a \eta^2 z\,d\eta=2\frac{b}{a}\int_0^a \eta^2 z'\,d\eta.$$



38 圖

最後ノ積分中ノ z' ハ圖ニ示ス樣ニ楕圓ニ外接スル圓ノ有ツ弦ノ長サデアツテ OO 軸ヨリノ距離 η ノ凡テノ値ニ對シテ $z=\frac{b}{a}z'$ ノ關係ガアル. 上ノ式ヨリ

$$I=\frac{\pi}{4}a^3b. \tag{24}$$

(g) 簡單ナ形ノ組合セ. 多クノ斷面形ハ簡單ナ斷面形ノ組合セニヨリテ作ラレル. 例ヘバ62及63頁ノ表ノ中デ第2乃至第5ノ各斷面ハ何レモ矩形ノ組合セデ出來ル. 又六角形ハ三角形ノ組合セニヨリテ計算サレ中空ノ圓及楕圓ハ中空ナラザル場合ノ結果カラ容易ニ導カレル. 一例トシテ表ノ第4ニ示スI形ノ慣性モーメントヲ求メル爲ニ先ヅ與ヘラレタ斷面ノ中心ヲ見出ス. 卽39圖ニ於テ

$$e_1=\frac{1}{2}\frac{sh^2+B_0s_1^2+b_0s_2(2h-s_2)}{sh+B_0s_1+b_0s_2}. \tag{25}$$

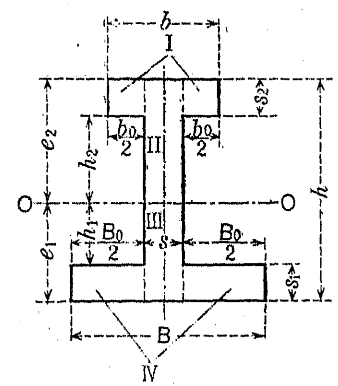
之ヨリ中心軸ノ位置定マル. 次ニ斷面ヲ圖ニ示ス樣ニ四個ノ部分ニ分ケ各部ノ OO ニ對スル I ヲ別々ニ書ケバ次ノ樣ニナル.

$$I_I=\frac{1}{3}b_0(e_2^3-h_2^3),$$

$$I_{II}=\frac{1}{3}se_2^3,$$

$$I_{III}=\frac{1}{3}se_1^3,$$

$$I_{IV}=\frac{1}{3}B_0(e_1^3-h_1^3).$$



39 圖

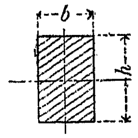
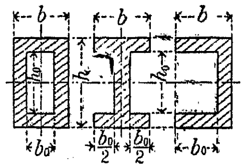
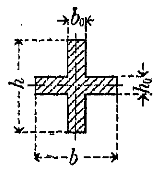
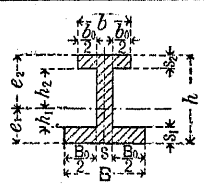
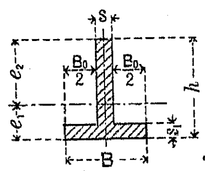
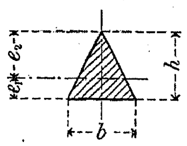
I_I ヲ求メル時ニハ幅 b_0 デ高サガ夫レ夫レ e_2 及 h_2 ニ等シイ二ツノ矩形ニ對スル I ヲ求メ之等ノ差ヲ作レバ直ニ第一式ガ書ケル. 同樣ナル方法ガ I_{IV} ニ對シテモ行ハレル. 偖上ノ四式ヲ加ヘ合セル時ハ

$$I=\frac{1}{3}\left[(B_0+s)e_1^3-B_0h_1^3+(b_0+s)e_2^3-b_0h_2^3\right]$$

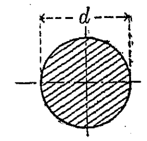
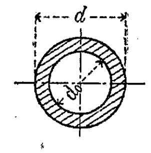
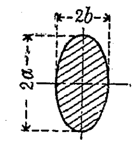
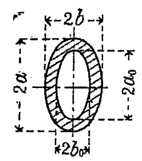
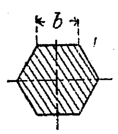
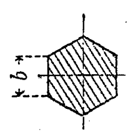
$$=\frac{1}{3}\left[Be_1^3-B_0h_1^3+be_2^3-b_0h_2^3\right]. \tag{26}$$

以上述ベタコトヲ應用シテ玆ニ計算法ヲ記サナイ表中ノ諸斷面ニ對シテ I, e, f 等ノ値ヲ求メルノガ良イ練習デアル.

断面ノ慣性モーメント（記號ノ意味ハ次ノ頁及 18 節參照）

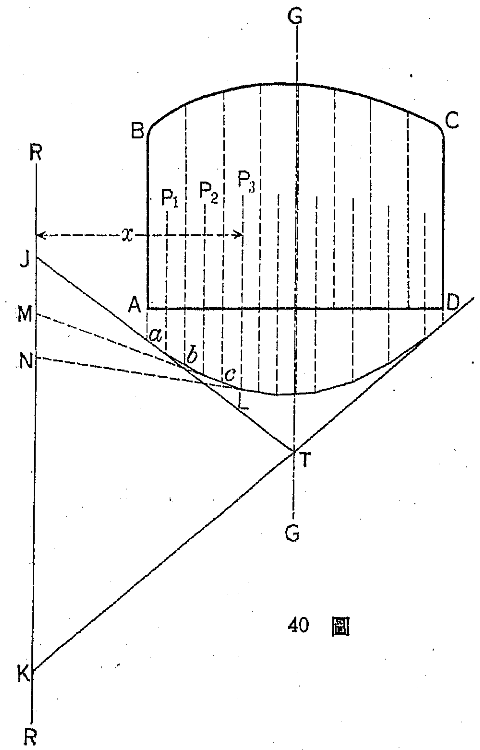
番號	斷面	I	e	f
1		$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{h}{2}$	bh
2		$\frac{1}{12}(bh^3-b_0h_0^3)$	$\frac{h}{2}$	$bh-b_0h_0$
3		$\frac{1}{12}\left[b_0h^3+(b-b_0)h_0^3\right]$	$\frac{h}{2}$	$b_0h+(b-b_0)h_0$
4		$\frac{Be_1^3-B_0h_1^3+be_2^3-b_0h_2^3}{3}$	$e_1=$ $\frac{sh^2+B_0s_1^2+b_0s_2(2h-s_2)}{2(sh+B_0s_1+b_0s_2)}$	$sh+B_0s_1+b_0s_2$
5		$\frac{Be_1^3-B_0(e_1-s_1)^3+s\,e_2^3}{3}$	$e_1=$ $\frac{1}{2}\,\frac{sh^2+B_0s_1^2}{sh+B_0s_1}$	$sh+B_0s_1$
6		$\frac{1}{36}bh^3$	$e_1=\frac{h}{3}$	$\frac{1}{2}bh$

I＝横ノ中心軸＝對スル慣性モーメント, e＝中心距離, f＝斷面積

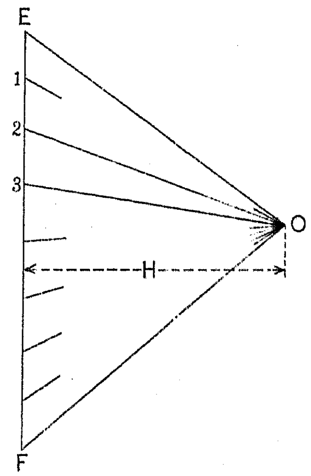
番號	斷面	I	e	f
7		$\frac{\pi}{64}d^4$	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{4}d^2$
8		$\frac{\pi}{64}(d^4-d_0^4)$	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{4}(d^2-d_0^2)$
9		$\frac{\pi}{4}a^3b$	a	πab
10		$\frac{\pi}{4}(a^3b-a_0^3b_0)$	a	$\pi(ab-a_0b_0)$
11		$0.54\,b^4$	$0.866\,b$	$2.6\,b^2$
12		$0.54\,b^4$	b	$2.6\,b^2$

22. 慣性モーメントノ圖式計算法

斷面ノ形ガ不規則ナル場合ニハ圖式計算法ヲ用ヰルガ便デアル. 其一ツノ方法ヲ示ス爲40圖ニ於テ $ABCD$ ヲ與ヘラレタ斷面トシ其 RR 軸



40 圖



41 圖

ニ對スル I ヲ求メヤウ. 此目的ヲ以テ先ヅ與ヘラレタ平面形ノ中心ヲ通リテ RR ニ平行線ヲ引ク. $ABCD$ ヲ RR ニ平行ナル數多ノ直線ニヨリテ小面積ニ分ケ其中心ヲ夫レ夫レ $P_1, P_2, P_3, \cdots$ トスル. 各小面積ヲ測リ其大サヲ適當ノ尺度デ直線ノ長サ $E1, 12, 23, \cdots$ トシテ表シ RR ニ平行ナル EF 線上ニ順次配列スル. 41圖. 此直線カラ或ル距離 H ニ任意ノ點 O ヲトリ O ト直線上ノ諸點 $E, 1, 2, 3, \cdots$ トヲ結ビ次ニ $P_1, P_2, P_3, \cdots$ ヲ通シテ RR ニ平行線ヲ引キ之等ヲ切リテ O ヨリ發スル放射線ニ平行ナル連續ノ直線ヲ引キ之ヲシテ一本ノ屈曲線タラシメル.

今 $P_1, P_2, P_3, \cdots$ ヲ通リ RR ニ平行ナル方向ニ於テ各小面積ニ比例ス

ル力ガ柔軟ナル絲ニ作用スルモノト見レバ絲ガ此屈曲線ノ方向ヲ取リテ釣合フ. 此理ヲ簡單ニ説明スルタメニ41圖ノ力線圖中ヨリ $\Delta O23$ ヲ取リテ考ヘルニ一邊23ハ與ヘラレタ力ヲ表シ又他ノ二邊 $O2$ 及 $3O$ ハ之ニ釣合フベキ他ノ二力ヲ表ス. 從テ絲ガ此荷重ノ下ニ上ノ兩邊ニ平行ナル屈曲線ノ方向ヲ取ルノハ當然デアル. 而シテ邊 $O2$ ニヨリテ表サレル力ハ $\Delta O12$ ノ一邊 $2O$ ト平均シテ互ニ消シ合フ樣ニ力線圖ノ放射線ノ表ス力ハ OE 及 FO ヲ除ケバ皆絲ノ內力デアツテ卽相互間ニ平衡ヲ保チ只 OE 及 FO ノ二力ヲ絲ニ加ヘテ引張レバ荷重トノ平衡ガ成立スルノデアル. 夫レ故前ニ述ベタ屈曲線ヲ表スタメニ索狀ナル形容詞ヲ冠シヤウ.

次ニ面積 $ABCD$ 兩端ノ縦線及各小面積ヲ區劃スル縦線ヲ延長スレバ前ノ索狀屈曲線ヲ $a, b, c, \cdots$ ノ諸點デ切ル. 之等ノ點デ屈曲線ニ接スル曲線ヲ引ク(圖ノ鮮明ノタメニ此曲線ハ40圖ニ示シテサイ). 然ル時ハ $P_1, P_2, P_3, \cdots$ ヲ通ル箇々ノ荷重ノ代リニ密度ガ $ABCD$ ノ縦線デ示サレル連續的ノ散布荷重ガ絲ニ作用シタ時ノ形ガ此所謂索狀曲線ニヨリテ表サレル. 此曲線ノ兩端ノ切線ヲ延長シテ相會スル點ヲ T トスレバ二力 OE 及 FO ノ合力卽 EF ハ此點ヲ通ル筈デアル. 故ニ T ヲ通シテ RR ニ平行ナル直線 GG ヲ引ケバ之ハ $ABCD$ ノ中心ヲ通ル.

偖 RR ヨリ距離 x ニ於テ小面積 df ヲ考ヘ其兩側ノ縦線ノ延長ト索狀曲線トノ交點ヲ通ル二切線ヲ引イテ生ズル小三角形 LMN ニ於テ $MN = dy$ トスル(40圖ニハ小面積 df ヲ省略シ又以下ノ説明ニ對シテ前ノ作圖ヲ其儘用ヰタノハ圖ヲ簡單ニスル爲デアルカラ其積リデ見テ下サイ). 然ル時ハ

$$\Delta LMN = \frac{1}{2} x\,dy.$$

然ルニ O ヲ通シテ LM, LN ニ平行ナル二直線 $O2, O3$ ヲ引クコトニヨリテ $\Delta O23$ ヲ作レバ23ハ df ヲ表ス. 而シテ ΔLMN 及 $\Delta O23$ ハ互ニ相似デアルカラ

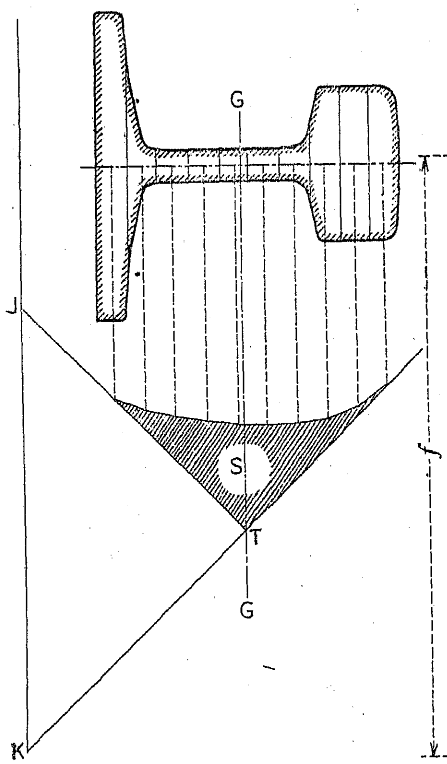
$$\frac{df}{H}=\frac{dy}{x} \quad \text{又ハ} \quad x\,df=H\,dy.$$

面積$ABCD$中ノ凡テノ小區劃ニ對シテ同法ヲ行ヒテ得ル此型ノ式ヲ寄セ集メレバ左邊ハ與ヘラレタ面積ノRR線ノ周リノモーメント卽所謂靜止モーメントトナリ又右邊ハ$H=JK$ヲ乘ジタモノトナル．此方法ニヨリテ靜止モーメントヲ見出スコトガ出來ルガ之ハ今ノ目的ニハ必要デハナイ．夫レヨリモ慣性モーメント自身ヲ見出スタメニハ上ノ式ノ兩邊ニxヲ乘ジテ

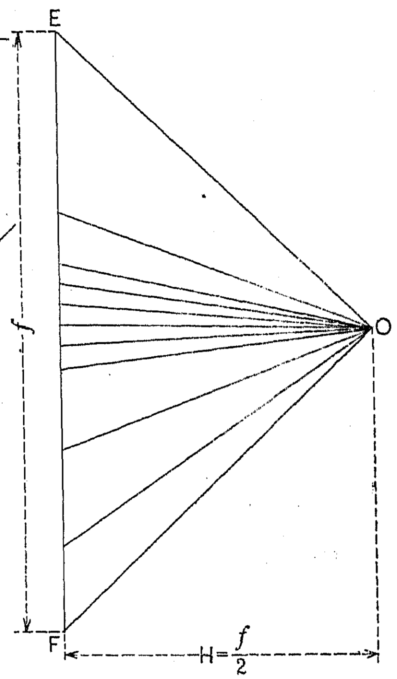
$$x^2\,df=Hx\,dy$$

トシ且 $x\,dy=2\Delta LMN$ ヲ代用スレバ

$$x^2\,df=2H\Delta LMN.$$



42 圖



43 圖

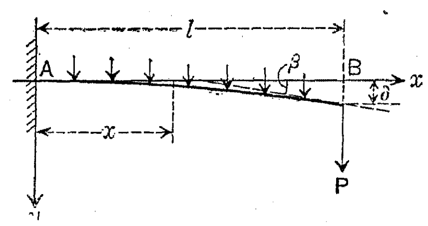
故ニ求メル慣性モーメントハΔLMNノ樣ナ型ノ小三角形ノ總和ニ$2H$ヲ乘ジタ積トナル．而シテΔLMNノ和ハ索狀曲線,兩端ノ切線及直線RR等ニヨリテ圍マレル面積ニ外ナラヌ．若シ特別ノ場合トシテRRガ中心軸GGニ一致シテ選バレル時ハ索狀曲線及其兩端ノ切線ガ圍ム面積ニ$2H$ヲ乘ジテ慣性モーメントヲ出スコトガ出來ル．42及43圖ハ軌條斷面ニ上ノ方法ヲ行ヒタル有樣ヲ示スモノデHガ$\frac{f}{2}$ニ等シク取ラレテアルカラ斷面ノ中心ヲ通リテ底邊ニ平行ナル軸GGニ對スル慣性モーメントハ面積Sニfヲ乘ジタモノニ等シク卽

$$2HS=fS. \tag{27}$$

23. 一端固定シ他端自由ナル梁.

斷面不變ニシテ且其主軸ヲ含ム平面中ニ外力ガ作用スルト假定シテ標題ノ樣ナ簡單ナ梁ニ就テ應力及變形ノ計算ヲ試ミ樣ト思フ．

44圖ニ於テABヲ梁トシ其長サヲlデ示ス．A端ハ他ノ構造物ニ固定サレB端ハ全ク自由デ支ヘル者ガナイ．此梁ニ働ク外力ハB點ニ荷重Pガアル外全長ニ亘リテ各部一樣ニ配布サレタ荷$Q=pl$ヲ負フモノトスル．卽pハ單位ノ長サニ働ク荷ノ密度デアル．偖Aヲ原點トシ梁軸ノ元ノ方向ニx軸ヲトリ且荷ノ作用スル向キニy軸ヲ定メルコト圖ノ如クナラバAカラ距離xニアル任意ノ點ニ於テ作用スル偶力ノモーメントハ



44 圖

$$M=P(l-x)+\frac{p}{2}(l-x)^2 \tag{28}$$

トナリ之ハ$x=0$ノ時最大ナルコト素ヨリデアル．卽其値ハ

$$M_A=Pl+\frac{pl^2}{2}=\left(P+\frac{Q}{2}\right)l. \tag{29}$$

一般ニ x ニ對スル M ノ値ヲ示ス線圖ヲ引クコトハ一應試ミルベキ練習問題デアラウ. 夫レ故(28)式ヲ幾何學的ニ說明スレバ其右邊第一項ハ直線狀デ第二項ハ拋物線狀デアル. 本題ニ歸リ假定ニヨリテ斷面ハ不變デアルカラ I ハ常數トナリ從テ M_A ノ値ヲ(17)ニ入レテ σ ノ最大値ヲ見出スコトガ出來ル.

次ニ44圖カラ了解サレル樣ニ M ノ正値ハ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ノ正値ト一致シテ居ルカラ(18)ニヨリテ彈性線ノ方程式ハ

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=P(l-x)+\frac{p}{2}(l-x)^2. \tag{30}$$

此微分方程式ノ兩側ヲ二度積分スレバ

$$EIy=P\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{p}{2}\left(\frac{l^2x^2}{2}-\frac{lx^3}{3}+\frac{x^4}{12}\right)+cx+c'.$$

右邊ノ c, c' ハ未知常數デアツテ之ヲ定メル爲ニハ梁ノ A 端ニ於ケル條件ヲ用キル. 卽座標軸ノ原點ガ常ニ A ヲ離レズ又 x 軸ノ方向ガ A 點ニ於テ彈性線ノ方向ニ一致スル事等ヲ假定スレバ次ノ二ツノ條件ガアル.

$x=0$ ナル時 $\qquad y=0,\quad \dfrac{dy}{dx}=0.$

上ノ解ガ此條件ニ合フ爲ニハ y 及 $\dfrac{dy}{dx}$ ノ兩式ニ $x=0$ トオキ且之等ヲ零ニ等シカラシメル. 卽初メノ條件ヨリ $c'=0$ トナリ又後ノ條件ヨリ $c=0$ トナル.

故ニ正當ナ答ハ

$$EIy=P\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{p}{2}\left(\frac{l^2x^2}{2}-\frac{lx^3}{3}+\frac{x^4}{12}\right), \tag{31}$$

又

$$EI\frac{dy}{dx}=P\left(lx-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{p}{2}\left(l^2x-lx^2+\frac{x^3}{3}\right). \tag{32}$$

之等ノ式ニヨリテ0ヨリ l ニ至ル間ノ任意ノ x ニ對スル彈性線ノ撓ミ及傾キヲ決定スルコトガ出來ル. 併シ B 端ニ於ケル之等ノ値ヲ求メレ

バ足リルコトガ多イカラ上ノ式ニ $x=l$ トオク. 先ヅ B 點ノ撓ミヲ δ トスレバ

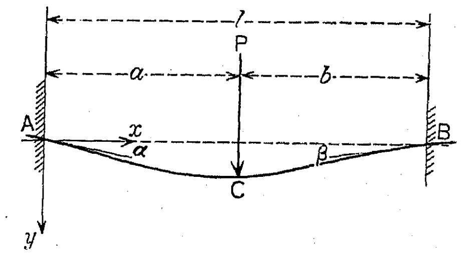
$$\delta=\frac{l^3}{EI}\left(\frac{P}{3}+\frac{Q}{8}\right). \tag{33}$$

又 B 點ノ傾斜角ヲ β トスレバ β ハ小サイ故 $\tan\beta=\sim\beta$ トシテ

$$\beta=\frac{l^2}{2EI}\left(P+\frac{Q}{3}\right). \tag{34}$$

24. 兩端ニ於テ支ヘラレル梁.

長サ l ニ亘リテ斷面不變ノ梁 AB アリテ其兩端 A 及 B ハ他ノ構造物ニヨリテ支ヘラレル. 45圖. 之ニ加ヘラレル荷重ハ AB 中ノ一點 C ニ於ケル P ト全長 l ニ配布サレル $Q=pl$ ノ二種トシ何レモ橫斷面ノ一主軸ヲ含ム平面內ニ作用スルト見做ス. 而シテ兩端ニ於ケル支ヘ方ハ棒ノ曲ゲニ對シテ全ク自由デモナク併シ完全ニ妨ゲモシナイト想像シ A 及 B ニ於テ彈性線ニ切線ヲ引ケバ之ガ最初ノ軸ノ方向ニ對シテ小サナ角 α 及 β ヲナスモノトスル. 今 A ヲ原點トスル直交軸 x 及 y ヲ引キ A ヨリ距離 x ニアル任意ノ點ニ於ケル偶力ノモーメントヲ求メルタメ此點ヨリ左側ニ働ク凡テノ外力ヲ考ヘル. 先ヅ AC ノ部分ニ對シテハ A 點ニ於テ支力 R_A ト未知ノ偶力 M_A トガ作用スル. 支力ハ上方ニ向テ働ケバ正トシ偶力ハ45圖ト反對ニ棒ノ軸ヲ上方ニ凹形ナラシメル樣ニ働ク時正トスル. 之等ノ外尙曲ゲノモーメントヲ引起ス原因トナルモノハ長サ x ノ上ニ配布サレタ荷重 px デアル. 之等ノ外力ガ生ズルモーメントヲ一括シテ M デ示セバ



45 圖

$$M=M_A+R_Ax-\frac{px^2}{2}. \tag{35}$$

此式ハAC上ニノミ用キラレルベキ者デC點ヲ超エテ右ノ方CB上ニ來レバPノ引起スモーメントヲ附加ヘナケレバナラヌ．卽

$$M=M_A+R_Ax-\frac{px^2}{2}-P(x-a). \tag{36}$$

従テ全曲線ABヲ一ツノ微分方程式デ表スコトハ出來ナイカラAC及BCニ對シテ別々ノ式ヲ書カネバナラヌ．此處ニMハ曲線ヲシテyノ負ノ方向ニ向テ凹形ナラシメル時正ニ取ラレテ居ル故符號ニ注意シテ(18)カラAC及BCニ對スル夫レ夫レ次ノ樣ナ微分方程式ヲ書ク．

$$-EI\frac{d^2y}{dx^2}=M_A+R_Ax-\frac{px^2}{2}, \tag{37}$$

$$-EI\frac{d^2y}{dx^2}=M_A+R_Ax-\frac{px^2}{2}-P(x-a). \tag{38}$$

先ヅEIヲ常數ト見テ(37)ヲ積分スレバ

$$-EIy=M_A\frac{x^2}{2}+R_A\frac{x^3}{6}-\frac{px^4}{24}+cx+c'.$$

式中c及c'ハ未知常數デ之ヲ定メルニハ次ノ條件ニヨル．卽

$x=0$ノ時　$y=0,\quad \dfrac{dy}{dx}=\alpha.$

初メノ條件ヨリ$c'=0$トナリ後ノ條件ヨリ$c=-EI\alpha$トナル．夫レ故

$$\left.\begin{aligned} EIy&=EI\alpha x-M_A\frac{x^2}{2}-R_A\frac{x^3}{6}+\frac{px^4}{24},\\ EI\frac{dy}{dx}&=EI\alpha-M_Ax-R_A\frac{x^2}{2}+\frac{px^3}{6}.\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

次ニ復EIヲ常數トシテ(38)ヲ積分スレバ

$$-EIy=M_A\frac{x^2}{2}+R_A\frac{x^3}{6}-\frac{px^4}{24}-\frac{P}{6}(x-a)^3+kx+k'.$$

k及k'ハ未知ノ常數デアルガ之ヲ定メルニハ$x=a$ニ於テ此式ノ與ヘルy及$\dfrac{dy}{dx}$ノ値ガ前ノACニ對スル式ヨリ出シタ値ト一致シナケレバナラヌト云フ條件ニ依ル．然ル時ハ直ニ$k'=0$, $k=-EI\alpha$ナル事ヲ知ル．従テ

$$\left.\begin{aligned} EIy&=EI\alpha x-M_A\frac{x^2}{2}-R_A\frac{x^3}{6}+\frac{px^4}{24}+\frac{P}{6}(x-a)^3,\\ EI\frac{dy}{dx}&=EI\alpha-M_Ax-R_A\frac{x^2}{2}+\frac{px^3}{6}+\frac{P}{2}(x-a)^2.\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

以上AC及BCニ對スル式ガ導カレタガ之丈ケデハ未ダM_A及R_Aガ未知量トシテ殘テ居ルカラ之等ヲ決定セネバナラヌ．此目的ニ對シテハBCニ屬スル方程式ガ丁度A點ニ於ケル樣ニB點ニ於テモyノ方向ニ變位セズ又傾斜角ガ或ル値$-\beta$ヲトルト云フ條件ヲ用キヤウ．卽上ノ式ニ

$x=l$ノ時　$y=0,\quad \dfrac{dy}{dx}=-\beta$

ト置ク．然ル時ハ

$$EI\alpha l-M_A\frac{l^2}{2}-R_A\frac{l^3}{6}+\frac{pl^4}{24}+\frac{Pb^3}{6}=0,$$

$$EI(\alpha+\beta)-M_Al-R_A\frac{l^2}{2}+\frac{pl^3}{6}+\frac{Pb^2}{2}=0.$$

R_A及M_Aニ對シテ之等ノ聯立方程式ヲ解キ$Q=pl$ト書ケバ

$$\left.\begin{aligned} R_A&=P\frac{(3a+b)b^2}{l^3}+\frac{Q}{2}+\frac{6EI}{l^2}(-\alpha+\beta),\\ M_A&=-P\frac{ab^2}{l^2}-\frac{Ql}{12}+\frac{2EI}{l}(2\alpha-\beta).\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

偖B點ノ支力及モーメントヲ夫レ夫レR_B及M_Bトスレバ

$$R_B=P+Q-R_A,$$

$$M_B=M_A+R_Al-\frac{Ql}{2}-Pb.$$

之等ノ式ニ上ノ(41)ヲ入レテ

$$\left.\begin{aligned} R_B&=P\frac{(a+3b)a^2}{l^3}+\frac{Q}{2}+\frac{6EI}{l^2}(\alpha-\beta),\\ M_B&=-P\frac{a^2b}{l^2}-\frac{Ql}{12}+\frac{2EI}{l}(-\alpha+2\beta).\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

茲ニ於テα及βガ與ヘラレレバ任意ノ點ニ於ケルMヲ計算シ且又彈

性線ノ性質ヲ吟味スルコトガ出來ル. 併シ多クノ問題デハ兩端ノ支ヘ方ニ關シテ特別ノ假定ヲ設ケテ計算ヲ簡單ニスルコト次ノ場合ノ如クデアル.

(i) 兩端ガ全ク自由ニ支ヘラレル場合.

兩支點ガ曲ゲニ對シテ少シモ抵抗ヲ起サヌト云フ場合ハ稀デ少クモ支點ノ摩擦ガ曲ゲノ妨ゲトナル場合ガ多イ. 併シ完全ニ自由ナル曲ゲガ許サレルモノトスレバ支點ニ於ケル偶力ハ零デアルカラ

$$M_A = M_B = 0$$

トナル. 此場合ニハ M_A 及 M_B ガ已知デ α 及 β ガ反テ未知數デアルカラ若シ(41),(42)ヲ用キテ R_A 及 R_B ヲ求メヤウトスレバ先ヅ M_A 及 M_B ノ式ヲ零ニ等シクオク. 之等ヲ滿足スル $(\alpha-\beta)$ ヲ R_A 及 R_B ノ式ニ導イテ之ヲ消去スル事ガ必要デアル. 斯様ナ手數ヲ經タ結果ハ無論次ノ簡單ナ計算ノ結果ト一致スル. 即兩支點 B 及 A ニ對スル力ノモーメントヲ取ルコトニヨリテ直ニ

$$R_A = P\frac{b}{l}+\frac{Q}{2},\quad R_B = P\frac{a}{l}+\frac{Q}{2}. \tag{43}$$

而シテ AC 上ノ任意ノ點ニ於ケル曲ゲモーメントハ

$$M = R_A x - \frac{px^2}{2}. \tag{44}$$

偖梁 AB 上ノ何レノ點ニ於テ M ノ最大値ガ起リ且又其値ガ幾何デアルカヲ知ル事ハ强サノ計算上必要デアル. 今假リニ $a>b$ トシ AC 又ハ BC 上ニ $\dfrac{dM}{dx}=0$ トナル様ナ特異ノ點ガ存在スルヤヲ吟味シヤウ. 若シ斯ル點存在スレバ之ハ明カニ M ノ極大トナル點デアル. 今 AC ニ對シテハ(44)式ヨリ

$$\frac{dM}{dx} = R_A - px.$$

之ヲ零トオケバ

$$x = \frac{R_A}{p}.$$

(43)ヨリ

$$x = \frac{P}{Q}b + \frac{l}{2}.$$

夫レ故 AC 上ノ求メル點ハ AB ノ中央ヨリモ B ノ方ニ向ツテ $\dfrac{P}{Q}b$ 丈ケ偏シタ位置ニアリウル譯デアルガ若シ計算ノ結果 $x>a$ ナラバ斯様ナ點ハ實在シナイ. 即

$$\left.\begin{aligned} \frac{P}{Q}b+\frac{l}{2} < a \text{ 又ハ } \frac{P}{Q} < \frac{a-b}{2b} \\ x = \frac{R_A}{p} = \frac{P}{Q}b+\frac{l}{2} \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

ナル時

ニ於テ M_{max} 生ジ其値ハ次ノ式ノ様ニナル.

$$M_{max} = \frac{R_A^2}{2p} = \left(P\frac{b}{l}+\frac{Q}{2}\right)^2 \frac{l}{2Q}. \tag{46}$$

上ニ述ベタ様ニ M_{max} ノ起ルノハ梁ノ全長ノ $\dfrac{1}{2}$ ヨリモ長イ區劃中デアルカラ當然 BC 中ニ起ルコトハナイ. 故ニモシ $a>b$ ナラバ AC ノ方丈ケヲ考ヘレバ宜シイ. 又反對ニ $a<b$ ナラバ BC ノ方丈ケヲ考ヘレバ宜シイトモ言ヘル.

併シ AC 上ニ於テ上ノ式ノ與ヘル x ノ値ヲ滿足スルコトガ出來ナイ場合ガアル. 換言スレバモシ

$$\frac{P}{Q}b+\frac{l}{2} \geqq a \quad \text{又ハ} \quad \frac{P}{Q} \geqq \frac{a-b}{2b} \tag{47}$$

ナル時ハ問題ノ特異點ハ AC 中ニ存在シナイカ又ハ丁度 C 點ト一致スルカデアル. 何レニセヨ此時ニハ C 點ノ M ガ最大デアルカラ强サノ計算ニハ次ノ曲ゲモーメントヲ取レバ宜シイ.

$$M_C = \left(P+\frac{Q}{2}\right)\frac{ab}{l}. \tag{48}$$

次ニ彈性線ニ關シテハ先ヅ(41),(42)ニ於テ $M_A = M_B = 0$ トオイテ兩端ノ傾斜 α, β ヲ求メル. 即

$$EI\alpha = P\frac{ab(a+2b)}{6l}+\frac{Ql^2}{24}, \quad EI\beta = P\frac{ab(2a+b)}{6l}+\frac{Ql^2}{24}. \tag{49}$$

又 C 點ノ撓ミヲ求メルタメニハ(39)ノ第一式ヨリ

$$EI\delta = EI\alpha a - R_A\frac{a^3}{6}+\frac{pa^4}{24}$$

$$= P\frac{a^2b^2}{3l}+\frac{pab}{24}(l^2+ab). \tag{50}$$

同ジク C 點ニ於ケル傾キハ(39)ノ第二式ヨリ

$$EI\gamma = EI\alpha - R_A\frac{a^2}{2}+\frac{pa^3}{6}$$

$$= P\frac{ab}{3l}(b-a)+p\frac{(l^2+2ab)(b-a)}{24}. \tag{51}$$

(ii) 兩端ガ完全ニ固定サレル場合.

梁ガ荷ヲ受ケテ變形ヲ起ス時兩端ガ完全ニ固メラレテ居ルタメ彈性線ヘノ切線ガ元ノ方向ヲ保ツコトモ殆ンド實現シ難イ場合デアツテ(i)ノ自由ナル場合ニ對シテ自由ナラザル他ノ極端條件ト見ルベキデアル. 此時ニハ假定ニヨリテ

$$\alpha=\beta=0.$$

又特別ノ場合トシテ P ガ AB ノ中央ニ働キ $a=b$ ト見做ス. 然ル時ハ(41), (42)ヨリ

$$\left.\begin{aligned} R_A &= R_B = \frac{1}{2}(P+Q), \\ M_A &= M_B = -\frac{Pl}{8}-\frac{Ql}{12}. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

任意ノ點ニ於ケル曲ゲモーメントハ(35)ニヨリテ

$$M = M_A + R_A x - \frac{px^2}{2}.$$

而シテ

$$\frac{dM}{dx} = R_A - px > 0.$$

故ニMハ梁ノ兩端ニ於テ負デ中央ニ向フニ從テ增加シ遂ニ正トナル. $x=\frac{l}{2}$ ニ於ケル値ハ次ノ如クデアル.

$$M_C = \frac{Pl}{8}+\frac{Ql}{24}. \tag{53}$$

之ヲ $-M_A$ 及 $-M_B$ ト比べレバ後ノ二ツガ $\frac{Ql}{24}$ 丈ケ大ナルコトガ判ル. 卽兩端ノ曲ゲモーメントガ絕體値ニ於テ最大デアル.

次ニ彈性線ノ形ヲ考ヘルニ上ニ述べタ樣ニ M ガ負カラ正ニ移ル時零トナル故斯ル點デハ $\frac{d^2y}{dx^2}=0$. 從テ彈性線ハ彎曲ノ向キヲ變ヘル. 此點ニ於テハ

$$\frac{px^2}{2} - R_A x - M_A = 0.$$

此方程式ヲ解イテ適當ナル x ノ値ヲ取ルベキデアルガ先ヅ最初ニ P 丈ケガ作用シテ $p=0$ トナル場合ヲ考ヘヤウ. 此時ニハ

$$x = -\frac{M_A}{R_A} = \frac{l}{4}. \tag{54}$$

次ニ若シ $p\neq 0$ ナラバ上ノ二次方程式ヨリ

$$x = \frac{R_A}{p} \pm \sqrt{\left(\frac{R_A}{p}\right)^2+\frac{2M_A}{p}}. \tag{55}$$

特ニ若シ $P=0$ トオケバ

$$x = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2-\frac{l^2}{6}} = \frac{l}{2}\pm\frac{l}{\sqrt{12}}. \tag{56}$$

夫レ故兩端ヨリ $0.2113\,l$ ナル距離ニ於テ M ハ零トナル. 終リニ中點ニ於ケル彈性線ノ傾キハ當然零デアルガ撓ミハ次ノ樣ニナル.

$$EI\delta = -M_A\frac{l^2}{8} - R_A\frac{l^3}{48}+\frac{pl^4}{384} = \left(P+\frac{Q}{2}\right)\frac{l^3}{192}. \tag{57}$$

25. 數多ノ支點ヲモツ梁.

三個ノ支點上ニ橫ハル梁ニ働ク支力ノ計算ガ物體ノ變形ヲ考ヘズニ行ハレ得可キモノデナイ事ハ已ニ緖言中ニ述べタ通リデアツテ支點ノ

數ガ四個又ハ以上トナレバ尙更計算ガ複雜トナルモノデアル. 斯ル場合ノ一例トシテ三點デ支ヘラレ散布サレタ荷重ヲ負フ梁ニ働ク支力ヲ見出サンニ先ヅ各支點ガ夫レ自身トシテハ彎曲ヲ妨ゲヌ樣ニ作ラレテ居ルトスレバ兩端ノ偶力ハ零デアル. 併シ中間ノ支點ニ於テハ左右兩側ノ變形ガ互ニ牽制シ合フタメニ此處ノ斷面ニハ未知ノ偶力ガ働キ彈性線ヘノ切線ハ軸ノ最初ノ方向ニ對シテ未知ノ或ル角ヲナス可キデアル. 今三支點ヲ A,B,C ト命名シ第一ノ梁間 AB ノ長サヲ l_1, 散布荷重ヲ $Q_1=p_1l_1$ トシ前節ノ(41)及(42)ヲ用キレバ

$$0=-\frac{Q_1l_1}{12}+\frac{2EI}{l_1}(2\alpha-\beta),$$

$$M_B=-\frac{Q_1l_1}{12}+\frac{2EI}{l_1}(-\alpha+2\beta).$$

此兩式カラ α ヲ消去スレバ

$$2M_B=-\frac{Q_1l_1}{4}+\frac{6EI}{l_1}\beta.$$

次ニ第二ノ梁間 BC ノ長サヲ l_2, 散布荷重ヲ $Q_2=p_2l_2$ トシテ前同樣ノ手續ヲ行フ. B 點ニ於ケル傾キハ $-\beta$ デアルカラ β ヲ含ム M_B ノ式ハ

$$2M_B=-\frac{Q_2l_2}{4}-\frac{6EI}{l_2}\beta.$$

之等ノ兩式ヨリ M_B ヲ求メレバ

$$M_B=-\frac{Q_1l_1^2+Q_2l_2^2}{8(l_1+l_2)}. \tag{58}$$

已ニ M_B ガ判レバ支力ハ次ノ關係カラ求メラレル.

$$M_B=R_Al_1-\frac{Q_1l_1}{2}=R_Cl_2-\frac{Q_2l_2}{2},$$

並ニ

$$Q_1+Q_2=R_A+R_B+R_C.$$

卽

$$R_A=\frac{Q_1}{2}-\frac{Q_1l_1+Q_2\dfrac{l_2^2}{l_1}}{8(l_1+l_2)}=\frac{Q_1(3l_1+4l_2)-Q_2\dfrac{l_2^2}{l_1}}{8(l_1+l_2)}, \tag{59}$$

$$R_C=\frac{Q_2}{2}-\frac{Q_1\dfrac{l_1^2}{l_2}+Q_2l_2}{8(l_1+l_2)}=\frac{Q_2(4l_1+3l_2)-Q_1\dfrac{l_1^2}{l_2}}{8(l_1+l_2)}. \tag{60}$$

故ニ

$$R_A+R_C=\frac{Q_1\left(3l_1+4l_2-\dfrac{l_1^2}{l_2}\right)+Q_2\left(4l_1+3l_2-\dfrac{l_2^2}{l_1}\right)}{8(l_1+l_2)}.$$

從テ

$$R_B=\frac{Q_1\left(5l_1+4l_2+\dfrac{l_1^2}{l_2}\right)+Q_2\left(4l_1+5l_2+\dfrac{l_2^2}{l_1}\right)}{8(l_1+l_2)}. \tag{61}$$

斯樣ニ梁 AC ガ變形スル時 AB 及 BC ノ接續點タル B ニ於テ彈性線ノ傾キガ急ニ變ルコトガナイト云フ事實ヲ根據トシテ β ヲ消去シ M_B 以下ノ計算ガ出來タノデアル. 玆ニ注意ス可キコトハ上ノ計算ニ於テ三支點ガ一直線上ニアルコトヲ無言デ約束シタ點デ若シ此事ガ成立シナイナラバ之ニ應ジテ適當ナル修正ヲ加ヘネバナラヌ. 斯ル場合ニハモーメント及支力ノ値ハ無論變動ヲ生ズ可キ筈デ一般ニ三點以上ノ支點ヲモツ梁ヲ論ズル場合ニ最モ用心ヲセネバナラヌ事柄デアル.

偖上ノ例ニ戻リテ考ヘルニ之丈ケノ計算ガ濟メバ其他ノ計算例ヘバ任意ノ點ノモーメントヲ見出シ應力ヲ求メル事ノ如キハ容易ニナシ得ラレル筈デアルカラ之以下ノ計算ハ試ミナイデ只一二ノ尙一層特別ナル場合ニ就テ支力ガ如何ナル値ヲトルカヲ說明シ樣ト思フ.

(i) $l_1=l_2=l$ デ且 $Q_1=Q_2=Q$ ナル場合.

梁 AC ガ更ニ中央ノ一點 B デ支ヘラレ全長一樣ノ散布荷重ヲ受ケル場合デアル. 此時ノ R_A, R_B, R_C ノ値ハ上ノ結果カラ直ニ記ス事ガ出來ル.

$$R_A=R_C=\frac{3}{8}Q,\quad R_B=\frac{5}{4}Q. \tag{62}$$

(ii) $l_1=l_2=l$ デ且 $Q_1=0,\quad Q_2=Q$ ナル場合.

梁 AC ガ更ニ中央 B デ支ヘラレ AB 間ハ荷ヲ負ハズ. 單ニ BC 間ニノミ散布荷重 Q ヲ受ケル場合デアル. 上ノ値ヲ R_A, R_B, R_C ノ諸式ニ入レ

ル時ハ下ノ樣ニナリテA點ノ支力ハ上カラ下ニ向テ作用スル事ガ判ル.

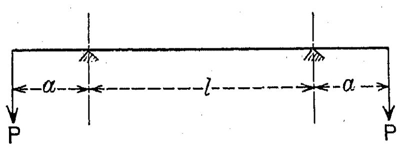
$$R_A = -\frac{Q}{16},\quad R_B = \frac{5}{8}Q,\quad R_C = \frac{7}{16}Q. \tag{63}$$

之等ノ場合ニ於ケル各梁間ノモーメントガ如何ナル値ヲ取ルカヲ見出シテ之ヲ中間ノ支點デ切リ離サレタ單純ナル梁ニ於ケルモーメントニ比較シテ連續セル梁ノ有利ナ點ヲ知リ又中間ノ支點ガ兩端ノ夫レ等ト同一水平線上ニナイ場合ニハ上ノ計算ガ如何ニ變ル可キカヲ考ヘルコトハ好イ練習問題デアラウ. 尙散布荷重ノ代リニ集中荷重ガ作用スル時ノ計算モ同樣ノ方法デ出來ル事ヲ注意シタイ.

剛性體ノ靜力學ヲ以テスル丈ケデハ不可解ナ上ノ問題ニ對スル計算ノ方法ハ必シモ此處ニ述ベタ主旨ニ依ラズトモ他ニモ途ガアル. 此點ニ關シテハ本章ノ終リニ揭グル例題5及XVII章變形ノ仕事ト題スル處ヲ參考シテ頂キタイ.

26. 抵抗一樣ナル梁.

斷面一樣ナル梁ニ於テハ最大偶力ノ作用スル處ニ最大ノ應力生ジ一般ニ應力ノ分布ガ一樣デナイ. 只例ヘバ梁ガ其兩端ヨリ等距離ニアル二支點上ニ支ヘラレテ兩端ニ夫レ夫レ相等シイ荷重ヲ受ケル場合ニハ(46圖)兩支點ヨリ外ノ部分コソ兩端ヨリノ距離ニ比例シテモーメントガ增加スルケレドモ兩支點內ニ於テハ不變デアル. 夫レ故梁ノ斷面ガ一樣デアル事ガ$\sigma = \frac{Me}{I}$ヲ一樣ナラシメルニ必要デアル. 併シ多クノ場合ニハMガ變數ナル故最初ニ述ベタ樣ナ有樣トナル. 元來σヲ各斷面ニ於テ一定ニシ樣トスルタメニハ等式$\frac{I}{e} = \frac{M}{\sigma}$ノ示ス樣ニ斷面ノ$\frac{I}{e}$ヲ$M$ニ比例シテ變ジナケレバナラヌ. 一端固定サレタ梁ノ自由ナル他ノ端ニ荷重Pガ作用スル二三ノ場合ニ就テ此事ヲ說明シヤウ.[1]



46 圖

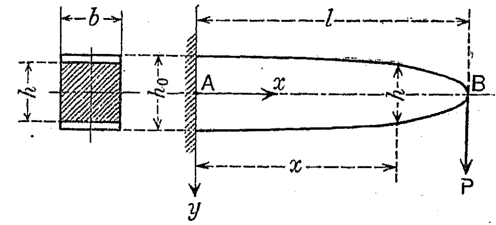
1) 愛知敬一博士ハ自身ノ重サヲ計算ニ入レテ抵抗一樣ナル梁ヲ硏究シタ. 機械學會誌, XXII, 54, 1918, 97頁.

(a) 斷面矩形ニシテ其幅不變ナル場合 (47圖).

固定サレタ一端Aヲ原點トシテ之ヨリ距離xニアル任意ノ横斷面ニ於テ

$$M = P(l-x),\quad \frac{I}{e} = \frac{1}{6}bh^2$$

ナル故



47 圖

$$\frac{1}{6}bh^2 = \frac{P(l-x)}{\sigma}.$$

假定ニヨリテbハ常數ナレバhハ次ノ式ヨリ求メラレル.

$$h^2 = \frac{6P(l-x)}{\sigma b}.$$

之ハB端ニ頂點ヲ有シABヲ軸トスル拋物線ノ方程式デアル. 而シテA端ニ於ケル斷面ノ高サハ

$$h_0 = \sqrt{\frac{6Pl}{\sigma b}}.$$

又任意ノ横斷面ノ高サハh_0ニ對シテ次ノ比ヲ保ツ.

$$\frac{h}{h_0} = \sqrt{\frac{l-x}{l}}. \tag{64}$$

上ノ規則ニ從テhヲ定メ梁ヲ作ル時B端ノ撓ミハ如何ナル値ヲトルカ. 微分方程式$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ニ於テ

$$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{e} = \frac{2\sigma}{h_0}\sqrt{\frac{l}{l-x}}.$$

故ニ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\sigma}{Eh_0}\sqrt{\frac{l}{l-x}}.$$

此式ニ於テxニ無關係ナル部分ヲ下ノ樣ニ書ク.

$$\frac{2\sigma}{Eh_0}\sqrt{l} = \alpha.$$

然ル時ハ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a}{\sqrt{l-x}}.$$

之ヲ積分スレバ

$$\frac{dy}{dx}=-2a(l-x)^{\frac{1}{2}}+c.$$

$x=0$ ニ對シテ $\frac{dy}{dx}=0$ ト假定スレバ　$c=2a\sqrt{l}$.　從テ

$$\frac{dy}{dx}=2a\left[l^{\frac{1}{2}}-(l-x)^{\frac{1}{2}}\right].$$

更ニ積分シテ

$$y=2a\left[l^{\frac{1}{2}}x+\frac{2}{3}(l-x)^{\frac{3}{2}}\right]+c'.$$

$x=0$ ニ於テ $y=0$ ナル故　$c'=-2a\frac{2}{3}l^{\frac{3}{2}}$.　夫レ故彈性線ノ方程式ハ

$$y=2a\left[l^{\frac{1}{2}}x+\frac{2}{3}(l-x)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}l^{\frac{3}{2}}\right].$$

B 端ノ撓ミ δ ヲ求メル爲ニハ此式ノ中ニ $x=l$ トオケバヨイ. 卽

$$\delta=\frac{2}{3}a\,l^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\frac{\sigma}{E}\frac{l^2}{h_0}.$$

又　$I_0=\frac{1}{12}bh_0^3$　トシテ上ノ式ニ

$$\sigma=\frac{Pl\,h_0}{2I_0}$$

ヲ入レル時ハ

$$\delta=\frac{2}{3}\frac{Pl^3}{EI_0}. \tag{65}$$

此撓ミハ一樣ノ斷面 $b\,h_0$ ヲ有スル梁ノ場合ノ二倍ニ當ル. 卽各橫斷面ノ最大應力ガ一樣トナリテ餘計ナ材料ガ節約サレルト共ニ同ジ最大應力ヲ生ズル一樣斷面ノ梁ニ比ベテ撓ミガ大トナル. 同樣ノ事柄ガ次ノ場合ニモ起ル.

(b)　斷面矩形ニシテ其高サ不變ノ場合 (48圖).

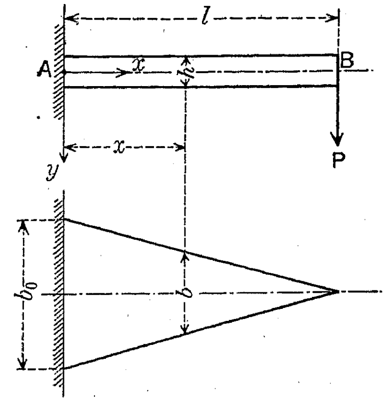
a ト同樣ナル計算ニヨリテ

$$\frac{1}{6}bh^2=\frac{P(l-x)}{\sigma}.$$

此場合ニハ h ヲ常數トシテ b ノ値ヲ見出サネバナラヌ. 卽

$$b=\frac{6P(l-x)}{\sigma h^2}.$$

B 端卽 $x=l$ ニ於テ b ハ零トナリ A ニ向フニ從テ B ヨリノ距離ニ比例シテ增加シ平面圖ノ輪廓ハ三角形トナル. A 端ニ於ケル斷面ノ幅ハ



48 圖

$$b_0=\frac{6Pl}{\sigma h^2}.$$

而シテ

$$\frac{b}{b_0}=\frac{l-x}{l}. \tag{66}$$

此問題ニ於テハ

$$\frac{M}{I}=\frac{2\sigma}{h}$$

ガ常數トナリ從テ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EI}$ ノ右邊ハ x ニ無關係トナル故之ヲ積分スル事ハ極メテ容易デアル. 併シ已ニ $\frac{M}{EI}$ ガ不變デ曲率半徑 ρ ガ常數ナル上ハ彈性線ガ圓弧トナル故圓ノ性質カラ B 點ノ撓ミヲ直ニ書キウルノデアル. 卽半徑 ρ, 撓ミ δ, 長サ l ノ間ニ次ノ關係ガアル.

$$\delta(2\rho-\delta)=l^2.$$

又ハ省略ヲ行ツテ

$$\delta=\frac{l^2}{2\rho};$$

卽

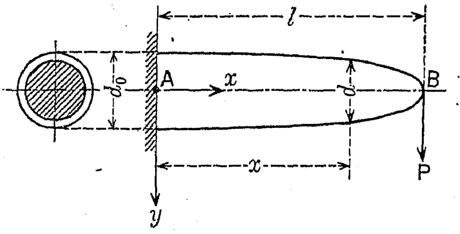
$$\delta=\frac{\sigma\,l^2}{Eh}=\frac{Pl^3}{2EI_0}. \tag{67}$$

此式中

$$I_0=\frac{1}{12}b_0h^3.$$

此 δ ノ値ハ一樣ノ斷面 b_0h ヲ有スル棒ノ場合ノ 1.5 倍ニ相當スル.

(c) 斷面圓形ノ場合 (49 圖).



49 圖

前例通リA點ヲ原點トシテ距離xノ任意ノ斷面ニ就テ見ルニ

$$\frac{I}{e}=\frac{\pi}{32}d^3 \quad \text{ナル故}$$

$$\frac{\pi}{32}d^3=\frac{P(l-x)}{\sigma}.$$

此式ヨリdヲ求メレバ

$$d=\sqrt[3]{\frac{32P(l-x)}{\pi\sigma}}.$$

A端ノ横斷面ノ直徑ハ

$$d_0=\sqrt[3]{\frac{32Pl}{\pi\sigma}}.$$

而シテ

$$\frac{d}{d_0}=\sqrt[3]{\frac{l-x}{l}}. \tag{68}$$

又B端ノ撓ミヲ求メルタメニハ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2\sigma}{Ed}.$$

之ト(68)トヨリdヲ消去スル時ハ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2\sigma}{Ed_0}\sqrt[3]{\frac{l}{l-x}}.$$

此式ニ於テ

$$\frac{2\sigma}{Ed_0}\sqrt[3]{l}=a$$

トオケバ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a}{(l-x)^{\frac{1}{3}}}.$$

之ヲ積分シテ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2}a(l-x)^{\frac{2}{3}}+c.$$

$x=0$ニ對シテ$\dfrac{dy}{dx}=0$トスレバ　$c=\dfrac{3}{2}al^{\frac{2}{3}}$.　從テ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}a\left[l^{\frac{2}{3}}-(l-x)^{\frac{2}{3}}\right].$$

更ニ之ヲ積分スレバ

$$y=\frac{3}{2}a\left[l^{\frac{2}{3}}x+\frac{3}{5}(l-x)^{\frac{5}{3}}\right]+c'.$$

$x=0$ニ於テ$y=0$ナル故　$c'=-\dfrac{3}{2}a\dfrac{3}{5}l^{\frac{5}{3}}$.　故ニ

$$y=\frac{3}{2}a\left[l^{\frac{2}{3}}x+\frac{3}{5}(l-x)^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{5}l^{\frac{5}{3}}\right].$$

$x=l$ニ對スルy即求メルB點ノ撓ミハ

$$\delta=\frac{3}{5}al^{\frac{5}{3}}=\frac{6}{5}\frac{\sigma}{E}\frac{l^2}{d_0}.$$

又ハ

$$\delta=\frac{9}{5}\frac{P}{EI_0}\frac{l^3}{3}. \tag{69}$$

此式中

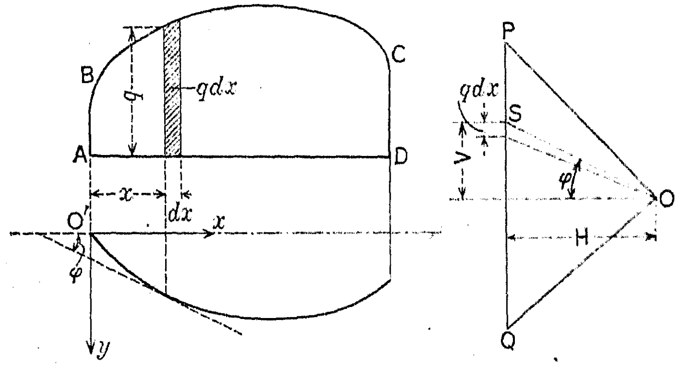
$$I_0=\frac{\pi}{64}d_0^4.$$

此δノ値ハ一樣ノ直徑d_0ヲ有スル棒ノ場合ノ 1.8 倍ニ當ル.

27. 彈性線ノ作圖法.

已ニ述ベタ樣ニ計算ニヨリテ梁ノ彈性線ニ對スル微分方程式ヲ解イテ其形ヲ定メル外時トシテハ下ニ說ク作圖法ヲ用キルノガ便利デアル. 此處ニ述ベル作圖法ハ例ヘバ50圖ノ面積$ABCD$ガ荷ヲ示ス時Oヲ極トシタ力ノ線圖ニ對應シテ引カレタ索狀曲線ガ一般ニ梁ノ彈性線ト微分方程式ノ形ヲ同ジクスルト云フ事柄ニ基クモノデ即或ル適當ナ方法デ索狀曲線ヲ引ケバ之ガ求メル彈性線ヲ與ヘルノデアル. 此方法ヲ行フ爲ニ先ヅ索狀曲線ノ方程式ヲ求メ如何ニスレバ之ガ彈性線ノ方程式ト見做サレルカヲ考ヘネバナラヌ.

先ヅ50圖ニ於テ面積$ABCD$ヲ縱ニ分割シテ幾多ノ小面積ヲ作リ各部分ノ面積ニ比例シタ荷ガ其中心ニ集中シテ垂直ニ作用スルモノト見テ之等ノ荷ヲ表ス線ヲ直線PQ上ニ順次配列シOヲ極トシテ放射線ヲ引



50 圖

キ之ニ平行ナル索狀多邊形ヲ描キ遂ニ索狀曲線ヲ作ル迄ノ手續ハ前ニ慣性モーメントヲ作圖デ求メタ時ト同樣デアル.

假例ニヨリテ梁ノ軸上ノ任意ノ一點O'ヲ原點トシx及yノ兩軸ヲ作ルコト圖ノ樣ニスル. 而シテO'ヨリ距離xノ點ニ働ク荷重ノ密度ヲqトシ此xニ相當シタ索狀曲線上ノ點ノ切線ノ傾キヲφニテ表ス. 次ニ力ノ線圖中Oヲ通シテ上ノ切線ニ平行線OSヲ引ケバOSハ索狀曲線ノ一點ニ働ク張力ヲ示ス. 此OS線ヲ水平並ニ垂直ノ二成分H及Vニ分ケレバ

$$\tan\varphi = \frac{V}{H}$$

ナル故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V}{H}.$$

右邊Hハxニ無關係デアルガVノ方ハ變數デアル. 即力ノ線圖カラ判ル樣ニ

$$dV = -q\,dx.$$

之等兩式ヨリVヲ消去スル爲前式ノ兩邊ヲ更ニxニ對シテ微分スレバ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H}\frac{dV}{dx}$$

後ノ式ヲ導イテ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q}{H}. \tag{70}$$

之ガ索狀曲線ノ方程式デアッテ已ニ屢々論ジテ來タ彈性線ノ方程式(18)ト能ク似テ居ル. 殊ニ後者ノ中ニ含マレテ居ル偶力Mノ符號ノ取リ方ニ關シテハ彈性線ヲy軸ノ負ノ方向ニ凹形ナラシメル樣ニ作用スルMヲ正トスルナラバ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}.$$

之ヲ上ノ(70)ト比較シテ若シ$\frac{q}{H}$ガ$\frac{M}{EI}$ニ等シイ樣ニ選バレレバ索狀曲線ノ作圖法ガ直ニ彈性線ヲ求メル方法トナルコトヲ知ル.

上ノ理論ニヨリ次ノ二ツノ場合ヲ區別シテ作圖ヲ行フ.

(i) Iガ不變ノ場合.

此時ニハ次ノ樣ニトル.

$$q = M \quad 及 \quad H = EI.$$

即荷重圖ノ縱線ノ高サガMヲ表シ且極Oノ距離ヲEIニ等シクスレバ宜シイ. 出來タ索狀曲線ハ適當ナ尺度デ計レバ梁ノ撓ミ及傾キヲ與ヘル. 此尺度ハ作圖ニ用ヰタ各部ノ尺度ニ依テ定マル. 例ヘバ梁ノ長サガ$\frac{1}{n}$ノ縮尺ヲ用ヰテ引カレM線圖ノ高サハ $1\,cm = f\,kgcm$ ノ割合デアルトスレバ荷重圖ト見做サレルM圖ノ $1\,cm^2$ ハ $nf\,kgcm^2$ ニナル. 此圖ノ各部分ヲ力ノ線圖ニ引ク際次ノ尺度ヲ採ルト假定スル.

$$1\,cm = g\,kgcm^2.$$

而シテ極ノ距離ヲ $a\,cm$ ニトレバ其尺度ハ

$$1\,cm = \frac{EI}{a}\,kgcm^2$$

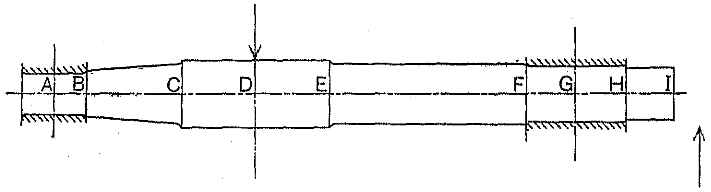
デアルカラ從テ彈性線ノ傾キヲ見出スタメニハ索狀曲線ノ傾キニ$\frac{ga}{EI}$ナル常數ヲ乘ゼネバナラヌ. 又撓ミヲ求メルニハ索狀曲線ノ撓ミニ$\frac{gan}{EI}$ヲ乘ズ可キデアル.

(ii) Iガ變數ノ場合.

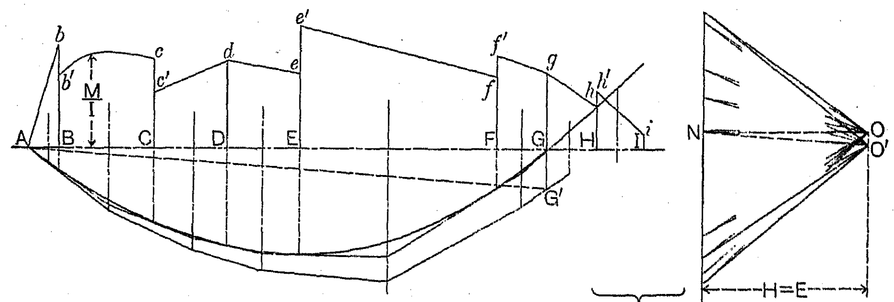
此時ニハ次ノ樣ニトル.

$$q=\frac{M}{I}\quad 及\quad H=E.$$

卽荷重圖ノ縱線ノ高サガ $\frac{M}{I}$ ヲ表シ且極ノ距離ガ E ヲ示ス樣ニ作圖スル.



51 圖



52 圖

例ヘバ51圖ニ於テ AI ナル棒ガ A, G 兩點デ支ヘラレ矢ノ樣ナ二ツノ荷ヲ受ケテ生ズル彈性線ヲ求メルタメニ先ヅ $A,B,C,D,\cdots$ 等ノ斷面ヲ考ヘ之等ノ點ニ於ケル M ノ値ヲ計算シ之ヲ夫レ夫レノ斷面ノ慣性モーメント I ニテ除ス. 左カラ始メテ A 點ニ於テハ $M=0$ ナルタメ $\frac{M}{I}$ モ亦零デアル. 次ニ B 點ニ於テハ棒ノ直徑ガ急變スルタメ同點ノ直左又ハ直右ニ於テ $\frac{M}{I}$ ノ値ガ別々ニナル. 斯樣ニシテ求メタ $\frac{M}{I}$ ヲ52圖ノ AI 線上ニ立テテ $\frac{M}{I}$ 線圖ヲ作ル時ハ $B, C, \cdots$ 等ノ諸點デ非連續ノ變化ヲ表ス $Abb'cc'\cdots$ 線ヲ得ル. 圖ニ於テ長サノ尺度トシテ $\frac{1}{n}$ ノ縮尺ヲ用キ又 $\frac{M}{I}$ ニ對シテハ $1\,cm=h\,kg/cm^3$ ノ割合ヲトレバ $\frac{M}{I}$ 線圖ノ $1\,cm^2$ ハ $nh\,kg/cm^2$ ニ當ル. 而シテ更ニ進ンデ O' ヲ極トシタ力ノ線圖ヲ作ル際

$$1\,cm=g\quad kg/cm^2$$

ノ割合デ $\frac{M}{I}$ 線圖ノ面積ヲ順序ニ從テ一直線上ニ引キ且極ノ距離ヲ a cm ニ定メ卽

$$1\,cm=\frac{E}{a}\,kg/cm^2$$

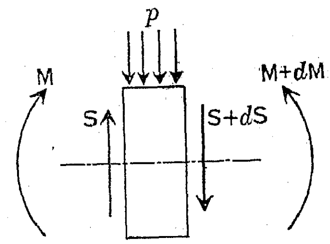
ナラシメル時ハ出來上リタル索狀曲線ノ傾キニ $\frac{ga}{E}$ ヲ乘ジテ彈性線ノ本當ノ傾キヲ知リ又圖ノ撓ミニ $\frac{gan}{E}$ ヲ乘ジテ實際ノ撓ミヲ見出ス事ガ出來ル.

附ケ加ヘテオクガ極ヲ O' ヨリ O ニ移シテ更ニ射線ヲ引イテアルノハ彈性線ヲシテ A 點ノ外 G 點ヲモ通ラセタイタメニ最後ニ施シタ手續ヲ示スニ過ギヌ. 卽此目的ノ爲 $O'N$ ヲ AG' ニ平行ニ引イテ N ヲ求メ次ニ水平線 NO ヲ引イテ NO ガ前ト同ジク $H=E$ ヲ表ス樣ニトリテ O ヲ決定スルノデアル.

28. 彈性線ノ方程式ノ他ノ形.

19節ニ於テ彈性線ノ微分方程式ヲ書イタ. 卽 $\frac{d^2y}{dx^2}<0$ ト $M>0$ トガ對應スル樣ニ符號ヲ定メレバ(18)ヨリ

$$-EI\frac{d^2y}{dx^2}=M.$$



53 圖

此式ノ代リニ下ニ導ク樣ナ他ノ形ノ方程式ヲ用キル事ガ時トシテ便利デアル. 53圖ニ示ス樣ナ梁ノ一小部分(長サ dx)ヲ取リ之ニ作用スル力及偶力ノ平衡ヲ考ヘレバ次ノ式ガ成立ツ.

$$\left.\begin{aligned} dS+p\,dx&=0,\\ dM&=S\,dx.\end{aligned}\right\}\qquad(71)$$

之等兩式ヨリ S ヲ消去スレバ

$$\frac{d^2M}{dx^2}=-p.\qquad(72)$$

前ニ書イタ彈性線ノ方程式ヨリMヲ代入スレバ

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right)=p. \tag{73}$$

之ガ只今求メル方程式デアツテ其解ハ四ツノ常數ヲ含ム故之ヲ適當ナ條件ニヨリテ定メネバナラヌ．次ノ節ニ此式ノ應用ヲ示ス．

29. 彈性床上ノ梁

梁ガ幾ツカノ點ニ於テ支ヘラレル代リニ連續セル床ニヨリテ支ヘラレルカ又ハサウ考ヘテ荷重ノ爲梁ガ曲レバ梁ニ對シテ作用スル床ノ支力ハ長サノ方向ニ連續スルト見做ス．サテ簡單ナ計算ヲナス爲ニ梁ノ彈性線上ノ任意ノ點ニ於ケル撓ミyト丁度其點ニ於ケル支力ノ密度p'トハ正比例ヲナストト假定シヤウ．此假定ニ對シテ注意スベキハ先ヅ床ノ移動ガ實際ハ其點ノ力ノミニヨリテ定マルモノデナイ事デ卽彈性床上ニ作用スル力ハ其點ノミナラズ附近ニ於ケル他ノ諸點ノ移動ヲ起ス筈デアル．夫レ故嚴密ニ言ヘバ上ノ假定ハ正シクナイガ併シ斯樣ニ考ヘレバ計算ガ簡單ニナル故此假定ニ從フ．次ニモシ梁ガ床ヲ離レテ上ル場合ニハ此處ニ支力ハ作用シナイ．夫レ故支力ノ作用スル場所ニ於テハ梁ト床トガ離レナイ樣ニ結バレテ居ルト見做ス．夫レデ只今ノ假定ヲ式ニ示セバ

$$p'=Ky. \tag{74}$$

p'及yハ距離xノ函數デ又Kハ床ノ彈性ニヨリテ定マル常數デアル．他ニ散布荷重ナキ梁ニ於テハ(73), (74)ニヨリテ彈性線ノ微分方程式ヲ次ノ形ニ表ス事ガ出來ル．右邊ノ負號ハ(74)ノp'ガ53圖ノpノ方向ト反對ニ卽y軸ノ負ノ方向ニ向フ事ヲ示ス．

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right)=-Ky. \tag{75}$$

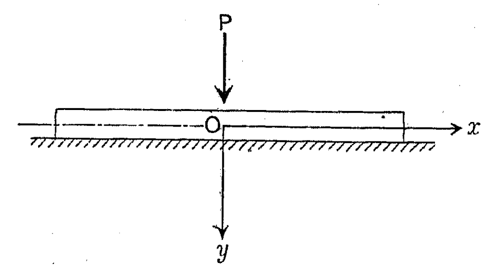
EIヲ常數トシテ之ヲ解ク爲ニyヲ$e^{\alpha x}$ノ形ニ表セバ$\alpha^4=-\dfrac{K}{EI}$トナリ詳シク言ヘバαノ四ツノ根ガ次ノ式ニテ表サレル．

$$\alpha=(1\pm i)\beta\ \text{及}\ (-1\pm i)\beta,\quad \text{但}\quad \beta=\sqrt[4]{\frac{K}{4EI}}.$$

夫レ故

$$y=e^{\beta x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)+e^{-\beta x}(C\cos\beta x+D\sin\beta x). \tag{76}$$

常數A, B, C, Dハ境界條件ニヨリテ定メラレル．



54　圖

例ヘバ無限ニ長イ梁ガ彈性床上ニ置カレテ其一點ニ荷重Pガ作用スレバ(54圖)此點ヲ原點トシテ次ノ樣ニ常數ヲ定メル事ガ出來ル．先ヅ$x>0$ノ範圍ニ於テxヲ非常ニ大トシテyヲ消滅セシメル爲ニハ(76)式中$e^{\beta x}$ノ項ハ消エル事ヲ要シ從テ$A=B=0$. 次ニ原點ニ於ケル彈性線ヘノ切線ハ水平ナルヲ要スル故

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=\beta(D-C)=0,\quad \text{卽}\quad D=C.$$

依テ(76)ハ次ノ樣ニナル．

$$y=C\,e^{-\beta x}(\cos\beta x+\sin\beta x). \tag{77}$$

最後ニ原點ノ直グ隣ニ於ケル剪力ハ$\dfrac{P}{2}$ニ等シク且原點ノ直グ右隣ニ於テハ梁ノ左半分ニ働ク外力ガ上ヨリ下ニ向フ故此點ヲ考ヘテ符號ヲ選ベバ(71)ノ第二式ヨリ

$$\left(\frac{dM}{dx}\right)_{x=0}=-\frac{P}{2}.$$

又ハ

$$EI\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}=\frac{P}{2}.$$

(76)ヲ三度微分シテ此式ニ入レル時ハ

$$4EIC\beta^3=\frac{P}{2}.$$

同樣ノ結果ハ$p'dx=Kydx$ヲ零ヨリ無限大迄積分シテ之ヲ$\dfrac{P}{2}$ニ等シク置イテモ得ラレル．何レニシテモ此式ヲ書キ換ヘテ

$$C=\frac{P}{2}\frac{\beta}{K}.$$

故ニ求メル彈性線ノ方程式ハ次ノ樣ニナル.

$$y=\frac{P\beta}{2K}e^{-\beta x}(\cos\beta x+\sin\beta x). \tag{78}$$

最大ノ撓ミハ原點ニ於テ生ジ其値ハ次ノ式ニヨリテ計算サレル.

$$\delta=(y)_{x=0}=\frac{P\beta}{2K}. \tag{79}$$

又曲ゲモーメントハ

$$M=-EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P}{4\beta}e^{-\beta x}(\cos\beta x-\sin\beta x). \tag{80}$$

M ノ最大ノ値ハ原點ニ於ケル値デ即

$$M_{x=0}=\frac{P}{4\beta}. \tag{81}$$

鐵道ノ軌條ヲ恰モ連續セル彈性床上ノ梁ノ樣ニ見做シテ取扱フ場合ニ軌條ニ作用スル最大曲ゲモーメントハ此式ニヨリテ與ヘラレル. 更ニ進ミテ之ヨリ應力ノ計算ガナサレル譯デアルガ上ノ式ヨリ知ル樣ニ $M_{x=0}$ ハ β ニ逆比例シ β ハ他ノ條件ヲ同一トスレバ $\sqrt[4]{I}$ ニ逆比例スル故結局 $M_{x=0}$ ハ $\sqrt[4]{I}$ ニ比例スル. 即床ノ狀況ヲ同一トスレバ幾何學的ニ相似ノ斷面形ヲモツ大小二種ノ軌條ノ受ケル最大曲ゲモーメントハ斷面形ノ寸法ニ比例シ大ナル斷面積ノモノハ大ナルモーメントヲ受ケル. 應力自身ハモーメントヲ $\frac{I}{e}$ ニテ除シタル商ニ等シク $\frac{I}{e}$ ハ斷面寸法ノ三乘ニ比例スル故應力ハ其二乘ニ逆比例ヲナス事ガ判ル. 換言スレバ應力ハ斷面積ニ逆比例ヲナシ大ナル斷面積ノモノハ小ナル應力ヲ受ケル.

上ノ計算ニ於テハ單ニ一個ノ荷重ノミヲ考ヘタ. モシ幾ツカノ荷重ガ同時ニ作用スレバ夫レ夫レニ對スル撓ミ又ハモーメントノ値ヲ組合セテ所要ノ答ヲ得ル.

彈性床上ノ梁ハ種々ノ問題ニ其應用ヲ見ル. 之ニ關スル著作モ少クナイ. 又梁ト梁トガ互ニ彈性的ニ結合サレル場合例ヘバ軌條ト繼目板トノ結合ノ如キ問題ニ於テハ矢張リ本節ト似タ計算ヲナス事ガ出來ル.[1)]

1) Zeitschrift f. angewandte Mathematik u. Mechanik, 11, 1931, 165 頁.

30. 正比例ノ法則ニ從ハヌ材料.

材料ノ多數ハ其彈性ガ正比例ノ法則ニ從ハナイ. 詳シク言ヘバ (σ,ε) 線圖中ノ直線ノ部分ガ小サイ場合ガ多イノデアツテ例ヘバ實用上重要ナル鑄鐵,銅等ハ其適例デアル(II章14節參照). 斯ル性質ノ材料デ作ラレタ梁ガ外力ヲ受ケテ如何ナル應力狀態ヲ生ズルカヲ知ル事ハ素ヨリ必要ナル事デアルカラ從テ此問題ハ從來屢々研究ノ題目トナツタ. 元來如何ナル性質ノ材料ニセヨ σ ト ε トノ關係ハ引張及壓縮ノ兩試驗ニヨリテ可ナリ精シク判ルカラ曲ゲノ場合ニモ若シ同ジ關係ガ成立スルモノトスレバ横斷面中ノ各點ニ於ケル ε ヲ與ヘテ之ニ相應スル σ ヲ定メル事ガ出來ル. 夫レ故或ル外力ノ下ニ生ズル ε ヲ測リテ σ ガ斷面上ニ如何樣ニ配布サレルカヲ考ヘ此應力狀態ガ丁度外力ノ偶力ト平衡スルヤ否ヤヲ吟味スルカ又ハ外ノ偶力ト丁度相匹敵スル應力ヲ假定シ之ニ伴フ ε ガ果シテ實現スルカヲ檢スル如キ斯ル方法ヲ以テ計算上ノ推定ヲ實驗的ニ試ミルコトガ研究上當然取ラレル可キ普通ノ筋道デアル.[1)] 併シ稍之ト趣ヲ異ニシテ曲ゲ彈性ノ試驗ノ結果カラ梁ノ中ニ起ル σ ト ε トノ關係ヲ見付ケテ之ヲ引張及壓縮ノ場合ノ兩者ノ關係ト比較研究シタ人モアル.[2)]

此處デハ前ノ方法ニ從テ計算ヲ行フタメ先ヅ次ノ假定ヲ設ケヤウ.

1. 横斷面ノ任意ノ一點ニ於テ之ニ直角ノ方向ニ生ズル應力及伸ビハ同ジ材料ヲ單ニ引キ又ハ壓シタ時ト同ジ關係ヲ保ツ.

次ニ變形ニ關シテ

2. 横斷面ハ變形後ト雖依然軸線ニ直角ノ平面ヲナス.

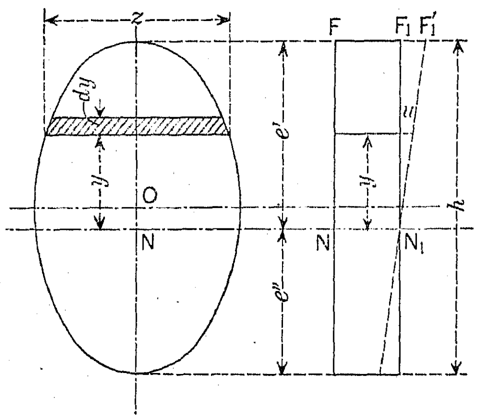
1) C. v. Bach, Elastizität u. Festigkeit, 6 版, 263 頁. 同 9 版 (R. Baumann 共著), 271 頁.
W. Pinegin, Zeitschrift des V. D. I., 1906, 2029 頁. Mitteilungen über Forschungsarbeiten, 48.
Eugen Meyer, Zeitschrift des V. D. I., 1908, 167 頁.
R. Schöttler, Zeitschrift des V. D. I., 1912, 351 頁. Mitteilungen über Forschungsarbeiten, 127, 128.
著者, 九州帝國大學工科大學紀要, I, 111 頁.

2) H. Herbert, Zeitschrift des V. D. I., 1910, 1387 頁. Mitteilungen über Forschungsarbeiten 89.

第二ノ假定ハ梁ノ各部ガ一樣ノ偶力ヲ受ケル時ニハ事實ト見テ宜シイデアラウガ併シ其他ノ場合ヲ含ム上ノ假定ハ只計算ヲ簡單ニスルタメノ便法デアルニ過ギヌ. 終リニ尙約束シテ置クコトハ

3. 外力ハ横斷面ノ對稱軸ヲ含ム平面中ニ作用スル.

偖常數Eガ存在シナイ故16節ニ述ベタ中立軸ノ位置ニ關スル事柄ハ只今ノ場合ニ適用サレヌ. 卽中立軸ガ斷面ノ中心ヲ通ルコトハ極メテ特別ノ場合ニノミ起ル事柄デアツテ一般ニハ左樣デナイ. 只其方向ハ常ニ外力ノ働ク上記ノ平面ニ直角デアル.



55 圖

今55圖ノ右方側面圖ニ於テ外力ガ紙面中ニ作用シテ互ニ相接近シタ二斷面F, F_1間ノ材料ヲ變形セシメルモノト考ヘル. 此時F_1ハFニ對シ紙面ニ直角ナルN_1軸ノ周リニ廻轉スル. 而シテ第二ノ假定ニヨリ變形後ノ兩横斷面ハ依然平面デアルカラ直線F及F_1'ガ變形後ノ兩斷面ノ射影ヲ示スモノト見ラレル. 卽距離NN_1ノ長サハ舊ノ通リデアルガ之ヨリモ上ノ方ノ材料ハ伸ビ下ノ方ノモノハ縮ミ其變形ハ直線的デアル. 偖NN_1カラyナル距離ニアル任意ノ層デハ最初ノ長サFF_1ガu丈ケノ増加ヲ受ケル. 斷面ノ頂部$y=e'$ニ對シテハ$u=u'$トシ又底部$y=-e''$ニ對シテハ$u=-u''$トスル. e''モu''モ共ニ絶對値デアル. 然ル時ハ

$$\frac{y}{u}=\frac{e'}{u'}=\frac{e''}{u''}.$$

卽 $e'+e''=h$トスレバ

$$\frac{y}{u}=\frac{e'+e''}{u'+u''}=\frac{h}{u'+u''}.$$

之等ノ式ノ分母ヲ夫レ夫レNN_1ニテ除シ且

$$\frac{u}{NN_1}=\varepsilon,\quad \frac{u'}{NN_1}=\varepsilon',\quad \frac{u''}{NN_1}=\varepsilon''$$

ト記ス時ハ

$$\frac{y}{\varepsilon}=\frac{h}{\varepsilon'+\varepsilon''}.$$

而シテ

$$\varepsilon'+\varepsilon''=a \tag{82}$$

ト置ケバ

$$\frac{y}{\varepsilon}=\frac{h}{a}.$$

從テ

$$y=\frac{h}{a}\varepsilon,\quad dy=\frac{h}{a}d\varepsilon. \tag{83}$$

之ニ依テ見ルニ$\frac{h}{a}$ハ一ツノ斷面中ノ各點ニ於テ不變ノ數デアルカラεハyニ正比例スルコトガ判ル. 卽yニアル常數ヲ乘ズレバ直ニεヲ知ル事ガ出來ル.

次ニ力ノ平衡ノ理論ニヨリテ棒ノ軸ノ方向ニσノ生ズル力ノ全體ノ和ハ零トナリ又中立軸ノ周リニσノ引起スモーメントハ偶力Mニ等シカル可キ筈デアル. 之ヲ式ニ書ケバ

及

$$\left.\begin{aligned}\int_{-e''}^{e'}\sigma z\,dy&=0,\\ \int_{-e''}^{e'}\sigma z y\,dy&=M.\end{aligned}\right\} \tag{84}$$

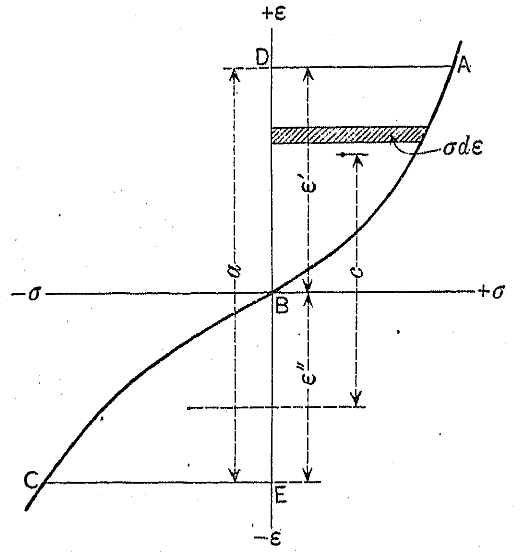
之等ノ式ノy及dyヲ已ニ導イタ(83)デ代用スレバ

及

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\varepsilon''}^{\varepsilon'}\sigma z\,d\varepsilon&=0,\\ \left(\frac{h}{a}\right)^2\int_{-\varepsilon''}^{\varepsilon'}\sigma z\varepsilon\,d\varepsilon&=M.\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

特例トシテ斷面ガ幅bノ矩形ナラバ$z=b$トオケバ宜シイ. 卽

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\varepsilon''}^{\varepsilon'}\sigma\,d\varepsilon&=0,\\ b\left(\frac{h}{a}\right)^2\int_{-\varepsilon''}^{\varepsilon'}\sigma\varepsilon\,d\varepsilon&=M.\end{aligned}\right\} \tag{86}$$



56 圖

56圖ニ示ス曲線ヲ單純ナ引張及壓縮ノ實驗ヨリ得タ(σ,ε)線圖デアルトスレバ第一ノ假定ニ從ヒ此圖ニ示サレタσ,ε間ノ關係ガ曲ゲラレタ同種類ノ材料ニ於テモ亦眞デアルト假定シテ次ノ樣ニ圖上ノ解決ヲ試ミヤウ.

斷面矩形ノ場合ニ對スル上ノ(86)ノ第一式ハ

$$\int_0^{\varepsilon'}\sigma\,d\varepsilon=-\int_{-\varepsilon''}^{0}\sigma\,d\varepsilon$$

トナリ此條件ハ(σ,ε)線圖ニ於テ下ノ樣ニナル.

$$\text{面積}\,ABD=\text{面積}\,BCE.$$

而シテ此關係ガ滿足サレルト同時ニ(86)ノ第二式ニ依リテ次ノ條件ノ成立ヲ要スル. 卽Mニ對スル式ニ於テ左邊積分ノ値ハABD及BCE兩面積ノσ軸ニ對スルモーメントノ和ニ等シキ故

$$\int_0^{\varepsilon'}\sigma\,d\varepsilon=-\int_{-\varepsilon''}^{0}\sigma\,d\varepsilon=A$$

トオキ且兩面積ノ中心間ノ距離ニ當ルεノ値ヲcトスレバ

$$M=b\left(\frac{h}{a}\right)^2Ac$$

ト書キウルノデ之等ノ二ツノ條件ヲ滿足スル樣ニ與ヘラレタMニ對スル面積ガ定マリε'及ε''ガ見付ケラレル時ハe',e''ハ夫レ夫レ

$$e'=\frac{h}{a}\varepsilon' \quad \text{及} \quad e''=\frac{h}{a}\varepsilon''$$

トナリテ中立軸ノ位置ハaヲ斷面ノ高サト見タ時ノσ軸ト一致スルノデアル. 而シテε'及ε''ハ一般ニ等シクナイカラe'トe''トハ不等ナノガ通例デアル. 斯樣ニシテ斷面上ノ各點ノσ,εガ決定サレル.

正比例ノ法則ニ從ハヌ材料ニ於テモ荷ノ小ナル間ハσ,εノ關係ガ直線ヲ去ルコト未ダ遠カラヌ爲應力ノ狀態ハEヲ常數トシタ場合ノ結果ニ近イノデアルガ負擔スベキ荷ガ大トナレバ(σ,ε)線ハ次第ニ直線ヨリ遠ザカリ材料ノ中立軸ニ近イ部分ガ直線ノ時ヨリモ割合ニ大ナル荷ヲ負ヒ遠イ部分殊ニ斷面ノ兩極端ハ負擔ガ比較的小デアル. 殊ニ又σノ正負兩値ニ對スル曲線ノ形異リ遂ニ中立線ガ重心ヨリモεノ負値ノ側ニ偏スルタメニ一層直線的ノ應力配布ト趣ヲ異ニスル樣ニナル. 斯樣ナ場合ニ普通ノ式デσヲ求メルト實際働イテ居ル正ノσ_{max}ヨリハ大ナル値ヲ與ヘル事ニナルカラ斯ル計算ノ結果ヲ以テ本當ニ作用スルσト混同シナイ樣ニ注意セネバナラヌ.

例ヘバ鑄鐵ノ品位ヲ定メルタメニ行フ曲ゲ試驗ニ於テ破壞ノ時ノMヲ見出シ,普通ノ式$\sigma=\dfrac{Me}{I}$ヲ用キテ强サヲ計算スルノガ通例デアルガ此時ノ$\dfrac{Me}{I}$ハ實際材料ノ堪ヘ得タσノ最大値ヲ意味スルノデハナク一定ノ試驗片ヲ用キテ何程ノ曲ゲノモーメントニ堪ヘタカヲ示スタメノ便宜上ノ表シ方デアルト見ナケレバナラヌ.

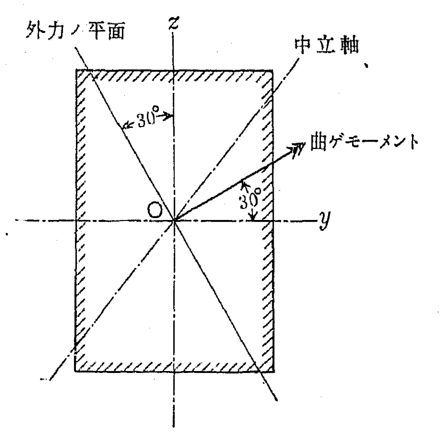
夫レデハ曲ゲノ際梁ニ起ル最大ノσハ同種ノ材料ヲ引張ル時ノ最大値ヨリモ大デナイカト云フ疑問ガ起ル. 此問ニ對シテ大デナイト答ヘルハ Bach ノ鑄鐵試驗ノ成績デ$+\sigma_{max}$ヲ引張ノ强サニ等シクトリテ計算シタ結果ガ實測トヨク合フコトヲ記載シテ居ル.[1] 併シ之ト一致シナイ他ノ實驗ノ結果モ發表サレテ居ルノデ Pinegin ノ出シタ結果ニ依レバ梁ヲ破壞スルタメニ加ヘラレタ實際ノ曲ゲモーメントハ引張及壓縮試驗ノ結果ヲ基トシテ求メタ最大ノモーメントノ値ヨリモ凡ソ15乃至21%大デアツタト言フコトデアル. 元來材料ノ强サハ種々ノ影響ヲ蒙ルモノデ引張ト曲ゲトノ應力配布ノ相違[2] 及鑄鐵中ニ最初ヨリ存在スル所謂鑄造應力等ノタメ斯樣ナ結果ヲ來スノデアルト思ハレル.

1) Bach 及其他ノ著者ノ文獻ハ 91 頁脚註ヲ見ヨ.
2) 此點ニ關シテハ中西不二夫博士ノ研究ガアル. 機械學會誌, XXXIV, 1933, 439 頁.

次ニ强サノ代リニ破壊ヲ起スニハ遙カニ小ナル荷重ニヨリテ生ズル變形ニ關シテ計算ト實測トガ符合スルカヲ檢セントスル試ミモ亦企テラレタノデアツテ Pinegin ノ實驗ノ結果ヲ用ヰタ Eugen Meyer ノ計算ニヨレバ實際トヨク一致シテ居ルコトガ知ラレタニ拘ラズ著者ノ實驗ノ結果ハ計算ト測定トガ必シモ正確ナル一致ヲナサヌ事ヲ示シテ居ル. 此問題ニ關シテ尙參考トス可キモノハ Herbert, Schöttler 等ノ著デアル. 前ニモ述ベタ様ニ鑄造ノ際カラ材料中ニ存在シテ居ル應力ハ實驗ノ結果ヲ甚シク攪亂シテ其爲丈ケニテモ精確ナ結果ヲ導クニ困難ヲ來スコト大デアル. 從テ本節ニ述ベタ計算法ガ可ナリ正シイカ否ヤヲ論ズルハ稍根據ノ薄弱ナルヲ感ズル譯デアルガ併シ斯様ナ方法ニ依リテ E ヲ常數トシタ場合ニ比シテハ遙ニ實際ニ近イ計算ガ出來卽材料內ニ起ル變形並ニ荷ノ負擔ニ關スル問題ヲ或ル程度迄闡明シ得ルノデアル.

以上正比例ノ法則ニ從ハヌ材料ニ就テ述ベタ事ハ移シテ以テ正比例ノ限界以上ニ負荷サレタ可鍛鐵ノ如キ場合ニ應用サレル.

例題 1. 邊ノ長サ 9 *cm* 及 6 *cm* ノ矩形斷面ヲ有スル梁ニ 16 000 *kgcm* ノ曲ゲモーメント作用スル. 但外力ノ平面ハ矩形ノ中心ヲ通リ長邊ニ對シテ 30° ノ傾斜ヲナス. 此時ノ中立軸ト最大應力トヲ見出スコト(57 圖).



57 圖

$$I_y = \frac{6\times 9^3}{12} = 364.5\ cm^4,$$

$$I_z = \frac{9\times 6^3}{12} = 162\ cm^4.$$

中立軸ノ位置ハ

$$\tan\beta = \frac{364.5}{162}\tan 30^0,$$

$$\beta = 52^0\,24'\,40''.$$

次ニ最大應力ハ中立軸ヨリ最モ遠イ點ニ生ズル故 $y=-3, z=+4.5$ 及 $y=+3, z=-4.5$ ノ兩點ニ於ケル應力ヲ(19)ニヨリテ計算シヤウ.

$$M_y = 16\,000\cos 30^0 = 13\,857\ kg\,cm,$$

$$M_z = 16\,000\sin 30^0 = 8000\ kg\,cm.$$

上ノ二點ニ於ケル應力ハ其絕對値相等シク卽

$$\sigma_{max} = \frac{13\,857}{364.5}\times 4.5 + \frac{8000}{162}\times 3$$

$$= 171 + 148 = 319\ kg/cm^2.$$

例題 2. 横斷面一様ナル梁ガ兩端ヨリ等距離ニアル二ツノ支點上ニ安置サレテ全體一様ナル密度ノ荷重ヲ受ケル場合ニ曲ゲモーメントヲ最小トスル様ニ支點ノ位置ヲ定メルコト.

58 圖ノ梁ニ於テ荷重ノ密度ヲ p トシ全體ノ荷重ヲ Q トスレバ $Q=pl$. 偖 A 及 B ニ於ケル曲ゲモーメントノ大サハ

$$M_A = M_B = \frac{pz^2}{2} = \frac{Qz^2}{2l}.$$

又梁ノ中點 C ニ於テハ

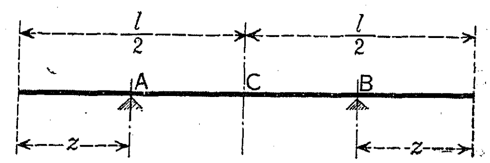
$$M_C = \frac{Q}{2}\left(\frac{l}{4} - z\right).$$

之等ノモーメントガ最大ナル者デアツテ若シ $M_A = M_B = M_C$ ナル如ク z ヲ選ベバ最モ都合ヨイ譯デアル. 卽上式ノ右邊ヲ相等シクオイテ

$$\frac{z^2}{l^2} = \frac{1}{4} - \frac{z}{l}.$$

此二次方程式ヲ解イテ適當ナル根ヲ定メル時ハ

$$z = 0.2071\,l.$$

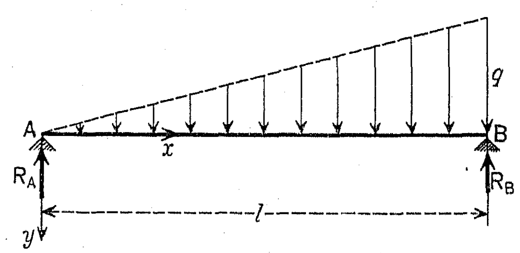


58 圖

x ガ此値ヨリ大ナレバ M_A, M_B ガ大トナリ又小ナレバ M_C ガ大トナル. 卽之ガモーメントヲ最小ナラシメル支點ノ位置ヲ決定スルモノデアル. 其モーメントノ値ハ 0.02145 Ql ニ等シイ.

例題 3. 橫斷面一樣ナル梁ガ兩端ニ於テ支ヘラレ其一端ニ於テ零ニシテ他端ニ向テ直線狀ニ增大スル密度ノ荷重ヲ受ケル時ノ曲ゲモーメント及彈性線ヲ見出スコト.

59圖ニ於テ梁ノ長サヲ l トシ A 點ノ荷重密度ヲ零, B 點ノ夫レヲ q トスル. 然ルトキハ全荷重ハ $Q=\frac{ql}{2}$ デ又兩端 A 及 B ニ於ケル支力ハ夫



59 圖

レ夫レ $R_A=\frac{1}{3}Q$ 及 $R_B=\frac{2}{3}Q$. 又 A 點ヨリ任意ノ距離 x ニ於ケル荷重ノ密度ハ $\frac{qx}{l}$ ナル故同點ノ曲ゲモーメントハ次ノ式ノ樣ニナル.

$$M=\frac{Q}{3}x-\frac{qx^3}{6l}=\frac{Q}{3}x\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right).$$

最大ノモーメントヲ求メルタメニハ

$$\frac{dM}{dx}=\frac{Q}{3}-\frac{Qx^2}{l^2}=0,$$

卽

$$x=\frac{l}{\sqrt{3}}=0.577\,l.$$

之ニ相當シテ

$$M_{max}=0.128\,Ql.$$

次ニ彈性線ノ微分方程式ハ

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{Q}{3}x\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right).$$

之ヲ積分シテ

$$y=-\frac{Q}{6EI}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{10l^2}\right)+cx+c'.$$

積分常數 c 及 c' ハ次ノ條件ニヨリテ定メラレル. 卽

$$x=0,\quad y=0\quad \text{並ニ}\quad x=l,\quad y=0$$

トスレバ

$$c'=0,\quad c=\frac{7}{180}\frac{Q}{EI}l^2.$$

從テ

$$y=\frac{7}{180}\frac{Q}{EI}l^2x-\frac{Q}{6EI}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{10l^2}\right)$$
$$=\frac{Q}{EI}\frac{l^3}{180}\left[7\frac{x}{l}-10\left(\frac{x}{l}\right)^3+3\left(\frac{x}{l}\right)^5\right].$$

最大ノ撓ミガ何處ニ起ルカヲ定メルタメニハ y ヲ x ニ對シテ微分スルコトニヨリテ

$$\frac{x}{l}=0.519.$$

之ニ對スル撓ミハ

$$y_{max}=0.013\frac{Ql^3}{EI}.$$

例題 4. 橫斷面一樣ナル梁ノ一端ヲ固定シ他端ヲ梁ニ直角ヲナス針金ニテ支ヘ且此點ニ於テ針金ヲ引ク樣ニ荷重 P ヲ加ヘル時梁ノ撓ミヲ計算スルコト.

P ノ一部ハ梁ヲ曲ゲルタメニ働キ他ノ一部ハ針金ヲ伸バスタメニ働クモノト考ヘルコトガ出來ル. 前者ヲ P' トスレバ後者ハ $(P-P')$ デアル. 偖梁及針金ガ變形ヲ受ケテ梁ノ撓ミト針金ノ伸ビトガ相等シイトスレバ次ノ如キ式ガ書ケル.

$$\frac{P'l'^3}{3E'I}=(P-P')\frac{l}{Ef}.$$

左邊ノ l', E' 及 I ハ梁ニ對スル例ノ記號デアツテ右邊ノ l, E, f ハ針金ニ屬スルモノデアル. 此方程式ヨリ P' ヲ求メレバ

$$P'=\frac{P}{\frac{Efl'^3}{3E'Il}+1}.$$

故ニ梁ノ撓ミ(又ハ針金ノ伸ビ)ハ

$$\delta=\frac{P}{\frac{Ef}{l}+\frac{3E'I}{l'^3}}.$$

又曲ゲモーメント $P'l'$ 及張力 $(P-P')$ モ直ニ求メラレル.

例題 5. 一水平線上ニアル三支點デ支ヘラレタ横斷面一様ナル梁ガ均一密度 p ノ散布荷重ヲ受ケル時ニ25節トハ異リタル方法デ支力ノ計算ヲ行フコト.

兩端ノ支點ヲ夫レ夫レ A 及 C トシ中間ノ支點ヲ B トスル. 今與ヘラレタ梁ガ兩端 A, C ニ於テ自由ニ支ヘラレテ前記ノ散布荷重ヲ受ケル外 B 點ニ於テ下ヨリ上ニ向フ未知ノ力 R_B ノ作用ヲ受ケルモノト考ヘヤウ. サテ假定ニ基キ B 點ノ變位ガ丁度零トナルタメニハ此集中荷重ノ大サハ幾何デアルカ. 此計算ニヨリテ R_B ヲ求メレバ之ガ B 點ノ支力ニ外ナラヌノデアツテ他ノ二點ノ支力ハ容易ニ計算サレル. 依テ撓ミヲ與ヘル式(50)即

$$EI\delta=P\frac{a^2b^2}{3l}+p\frac{ab}{24}(l^2+ab)$$

ニ於テ下ノ様ニオク

$$a=l_1,\quad b=l_2,\quad l=l_1+l_2,\quad P=-R_B \ 及\ \delta=0.$$

然ル時ハ

$$R_B=p\frac{l_1+l_2}{8l_1l_2}\left[(l_1+l_2)^2+l_1l_2\right].$$

之ハ(61)ニ於テ $\frac{Q_1}{l_1}=\frac{Q_2}{l_2}=p$ トオイタ結果ト一致スル筈デアル.

例題 6. 前ノ例題ニ於テ B 點ガ柱デ支ヘラレルモノト假定シ荷重ト共ニ起ル柱ノ壓縮ヲ考ヘニ入レテ支力ノ計算ヲナスコト. 但柱ノ長サハ横ニ彎曲ヲ生ズル程長クナイモノト定メテオク.

支柱ノ横斷面積ヲ f, 長サヲ l', 彈性係數ヲ E' トシ且三支點 A,B,C, ハ最初一水平線上ニアリテ荷重ヲ加ヘルト共ニ只 B 點丈ケガ壓シ下ゲラレルモノト考ヘヤウ. 然ル時ハ B 點ニ於ケル梁ノ撓ミハ柱ノ壓縮ト丁度相等シイ故前ノ例題ニ於ケル δ ヲ零トスル代リニ之ヲ $\frac{R_Bl'}{E'f}$ ニ等シク置イテ R_B ヲ求メレバ宜シイ. 即

$$\frac{1}{EI}\left[-R_B\frac{l_1^2l_2^2}{3(l_1+l_2)}+p\frac{l_1l_2}{24}(l_1^2+3l_1l_2+l_2^2)\right]=\frac{R_Bl'}{E'f}.$$

從テ

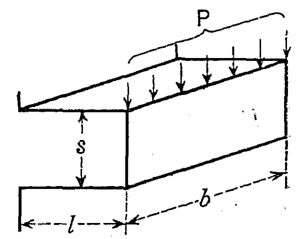
$$R_B=p\frac{l_1+l_2}{8l_1l_2}\frac{(l_1+l_2)^2+l_1l_2}{1+3\frac{E}{E'}\frac{I}{f}\frac{l'(l_1+l_2)}{l_1^2l_2^2}}.$$

已ニ R_B ガ判レバ他ノ二支力ハ力ノ平衡ノ條件ニヨリテ直ニ見出サレル. 上ノ結果ヲ見ルニ最後ノ分數ノ分母ノ第二項ガ1ニ比ベテ小ナラザル限リハ R_B ハ前ノ例題ノ場合ヨリモ相當ニ小トナル譯デアル. 尙特ニ $l_1=l_2=\frac{l}{2}$ トスレバ

$$R_B=\frac{5}{8}\frac{pl}{1+48\frac{E}{E'}\frac{I}{f}\frac{l'}{l^3}}.$$

例題 7. 齒車ノピッチノ計算.

速度高カラヌ齒車ノ齒ハ主トシテ强サヲ眼目トシテ其寸法ヲ定メル. 60圖ニ示ス如キ一枚ノ齒ノ尖端ニ沿ヒテ傳ヘラレル可キ力 P ガ一様ニ散布サレルモノトシ又齒ノ高サヲ l, 厚サヲ s, 幅ヲ b トスル. 然ル時ハ P ノ生ズル曲ゲノ應力ヲシテ或ル限度 k_b ヲ超過セシメヌタメニハ



60 圖

$$k_b=\frac{6Pl}{bs^2}\quad 又ハ\quad P=\frac{bs^2k_b}{6l}.$$

p ヲピッチトシ一例トシテ $l=0.7p$, $s=0.5p$ トスレバ

$$P=\frac{1}{6}\frac{0.5^2}{0.7}k_bbp=0.06\,k_bbp.$$

此式ニ於テ　$0.06\,k_b = k$ トオケバ

$$P = k\,b\,p.$$

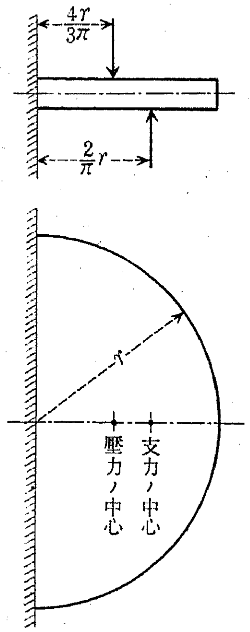
例ヘバ鑄鐵ニ對シテ $k_b = 300 - 400\ kg/cm^2$ トスレバ $k = 18 - 24$.　又 b ハ普通 $2p$ ニ取ラレル．之ニ依テ求メルピッチ p ヲ計算スルコトガ出來ル．尙 l 及 s ノ p ニ對スル上ノ割合ハ大體ノ値ヲ示スニ止ル．

例題 8.　圓板ノ略式計算法．

一般ニ板ノ問題ハ計算ガ面倒ナル故時トシテハ近似法ヲ用ヰテ應力ヲ求メル．玆ニ述ベル圓板ノ計算ハ最モ簡單ナ方法ニ依ルモノデ從テ其結果ハ素ヨリ正シクナイ．併シ之ニ依テ大體何程ノ應力ガ生ズルカヲ知ル事ガ出來ル．周圍ヲ大ナル無理ナシニ支ヘタ圓板ノ表面ニ液壓 p ヲ加ヘル時ハ其直徑ニ沿ヒテ破壞ガ起ル實驗上ノ事實ヲ根據トシテ半圓板ヲ其斷面ニ於テ固定シ(61 圖)壓力 $\frac{1}{2}p\pi r^2$ 及之ト等大ノ半圓周上ノ支力ヲ以テ荷重サレタ梁ト考ヘル．依テ斯ル梁ノ固定端ニ於ケル曲ゲモーメントヲ計算シヤウ．先ヅ半圓ノ重心ハ圓ノ中心ヨリ $\frac{4r}{3\pi}$ ノ距離ニアル故表面ニ作用スル壓力ノ生ズルモーメントハ $\frac{1}{2}p\pi r^2\frac{4r}{3\pi}$ ニ等シク又支力ハ當然圓周上ニ一樣ニ配布サレルモノト見做サレル故其モーメントハ力ニ半圓周ノ重心ノ圓ノ中心ヨリノ距離 $\frac{2r}{\pi}$ ヲ乘ジテ $\frac{1}{2}p\pi r^2\frac{2r}{\pi}$ デアル．而シテ前者ハ後者ト反對ノ方向ニ廻轉セントスル故之等ノ差ヲ作リテ

$$M = \frac{1}{3}p\,r^3.$$

斯ル曲ゲモーメントノ作用ヲ受ケル梁ノ斷面 $(2r \times h)$ ニ生ズル應力ヲ普通ノ式デ計算スルコトハ素ヨリ當ヲ得ナイ．何トナレバ板ハ斯ル簡單ナ曲ゲデナシニ實ハ其



61 圖

中心ニ對シテ對稱ヲナス樣ニ曲ゲラレル故デアル．併シ略式計算ノ簡單ナ譯モ此處ニアルノデアツテ卽固定セル直徑ノ各點ガ同樣ノ應力配布ヲ受ケルモノトシテ最大値ヲ求メレバ

$$\sigma = \frac{1}{3}p\,r^3 \Big/ \frac{1}{3}r\,h^2 = p\,\frac{r^2}{h^2}.$$

上ノ計算ニ於ケル假定ノ正シカラザルヲ補フタメニ p ノ前ニ或ル補正係數ヲ導キ之ヲ實驗的ニ定メルコトガアル．卽

$$\sigma = \mu\,p\,\frac{r^2}{h^2}.$$

後ニ圓板ノ彈性ヲ論ジテ只今ノ場合ニ相當スル應力ノ式ヲ導ク積リデアルガ其結果ニ依レバ

$$\sigma = \frac{3}{8}\,\frac{3m+1}{m}\,\frac{r^2}{h^2}\,p.$$

若シ $m = \frac{10}{3}$ トスレバ

$$\sigma = 1.24\,\frac{r^2}{h^2}\,p.$$

故ニ上ノ近似式ガ實際ニ近イ値ヲ與ヘルタメニハ μ ガ 1 ヨリ大ナル事ヲ知ルノデアル．