

補 綴 編

問題 1. 不静定反力及不静定應力の數は
如何にして之を決定するか。

一構造が幾何の不静定反力と不静定應力を有するか即ち與へられた構造が與へられた荷重に對して外的及內的に幾何の不静定未知量を有するかは不静定構造の解法に對して重要な問題である。

今一部材と他部材との取付け或は部材と地盤との取付に就て考へてみるに種々の方法がある。

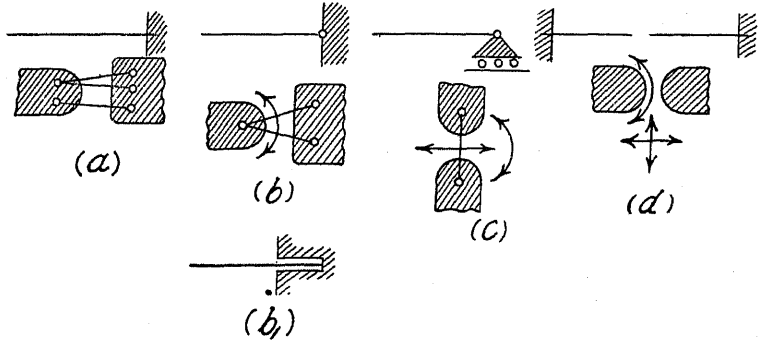


Fig. A.

Fig. A (a) に示すものは既に述べた完全固定端を示すものであつて此固定點に於ては部材は水平にも垂直にも乃至は又廻轉にも拘束せられて動き得ない。即ち拘束せられる方向に對しては未知力の誘導を見るものであつて自由に動き得る方向に

對して力が働き得ないことは云ふまでもないことである。

即ち

完全固定端に對しては未知量は三個である。

次に Fig. A (b) に示すものは部材が鉸によつて取付けられたもので部材は此點に於て自由に廻轉しモーメントには抵抗し得ないが水平竝に垂直方向には充分抵抗し得る構造である。従つて未知力の誘導は此二方向に生じ得る。

即ち

鉸端に對しては未知量は二個である。

同じく (b₁) に示す構造は廻轉竝に垂直方向に對して抵抗し得る構造であつて未知力の數は二個である。此説明によつて普通の兩端固定のビームは其一端に (b₁) の構造をもつことを暗に意味するものであつて水平方向の反力に就て論及してない所以が明になることと思ふ。

Fig. A (c) に示すものはローラー付きの滑動可能な鉸端であつて水平方向と廻轉とは抵抗し得ない構造である。即ち此構造に在つては垂直方向の力のみが未知力である。

従つて

ローラー付き鉸端に對しては
未知量は一個である。

Fig. A (d) に示すものは二個のカンチレバーを相對せしめたもので其接する點に於ては各部材は各各獨立に廻轉も水平動も垂直動もなし得るもので此點には未知力は作用し得ない。併し乍ら斯くの如きは或る意味に於て部材の連結と見做し得ないもので兩部が獨立して働くと考ふべきものである。従つて此處に論及するの要を認めない。

今一部材を他部材又は地盤と完全に固定せしむるには互に竝行ならず又一點に會せざる三本の繫鐔によつて兩者を取り付けることが必要である。若し此中一個の繫鐔を取り除く時は二本の繫鐔の交點を中心として一部材は他部材に對して廻轉のみは自由となるから鉸端又は鉸による連結に對しては二本の繫鐔を想像することが出来る。但し是等は一平面内に於ての考察である。

更に之れより一本の繫鐔を取り除く時は兩部材は其繫鐔の方向のみには動き得ないが之に直角方向の運動と廻轉とは自由である。即ち此場合は鉸を持つローラー端に相當する。

従つて上述のことから未知量の數は假想的繫鐔の數と一致するもので此考へから次の様に不靜定

量の數を決定することが出来る。

今地盤に一部材を剛結せしめるには3個の繫鐔を必要とするもので3個の未知量は静力學の根本法則たる重要な平衡條件

1. 垂直力の代數的總和は零
2. 水平力の代數的總和は零
3. 任意點に關する力系のモーメントの代數的總和は零

から求めらる。若し3個以上の未知量ある場合には茲に不靜定量が生ずるものである。

今地盤をも一個の部材と考へ n 個の部材を剛結せしむるには幾何の繫鐔を必要とするかを考ふるに

$$\text{所要の繫鐔數} = 3(n-1)$$

で與へられる。

故に與へられた架構が $3(n-1)$ より以上の繫鐔をもつ場合には其過剰の數丈け不靜定未知量をもつこととなる。

今與へられた構造物を部材の集合體と考へ斯くの如く考へたる部材の總數を m で表はす。(但し地盤は常に構造物に附隨のものであるから特別に之れを考へ入れず上述の $n-1$ を m として考ふ)此部材が其連結點に於て結合せられる方法が幾何の繫鐔

連結として考へらるゝかを判定したる後構造物全體の結合點に於ける假想繫鐔の總數を j で表はす。又地盤との連結の爲めに支點の狀況に因つて判定せられる假想繫鐔の數を S で表はす時は

與へられたる構造物が靜定構造なる爲めには

$$j+S-3m=0$$

與へられたる構造物が不靜定構造なる爲めには

$$j+S>3m$$

而して $j+S$ が $3m$ より r 個大なる場合には其構造は r 次の不靜定構造であると云ふ。

即ち r 次の不靜定構造は

$$j+S-3m=r$$

なる場合であつて静力學的定性の構造として必要且つ充分とする繫鐔以上に r 個の餘分のものを持つ場合に生ずるものである。

故に此 r 個の不靜定量を定める爲めに吾々は材料の彈性を應用するものである。

Fig. B は上式説明の實例を示すもので次表と對照して不靜定未知量の數は明瞭に理解せらるべきである。

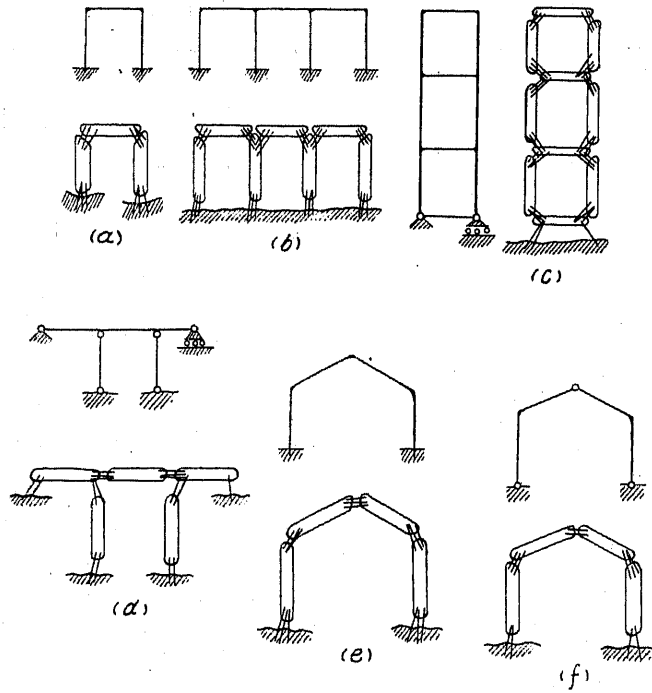


Fig. B.

Fig.	$j+s-3m$	不静定未知量の数 (r)
(a)	$6+6-3(3)$	3
(b)	$18+12-3(7)$	9
(c)	$36+3-3(10)$	9
(d)	$10+7-3(5)$	2
(e)	$9+6-3(4)$	3
(f)	$8+4-3(4)$	0

問題 2. 一徑間の閉合架構又は固定脚架構の解法に應用せらるゝ働の表式は如何なるものが計算に便利であるか

普通架構の解法に應用する働の表式は最小働の原理又はカステリアノ氏の法則に依るものであるが一徑間の閉合架構又は固定脚架構に對しては撓角撓度法以外に次に示す考察は甚だ計算を簡明ならしめる。

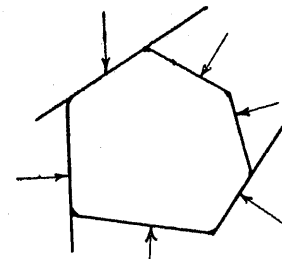


Fig. C.

Fig. C に示す架構は數個の直釘又は彎曲釘を剛結した構造で其釘の端部は圖に示す如く張出して居てもよいのである。若し架構が圖に示す如き閉合架構にあらずして一部地盤に固定せらるゝ場合には地盤に相當する部材の慣性モーメントを無限大と考へて計算する。

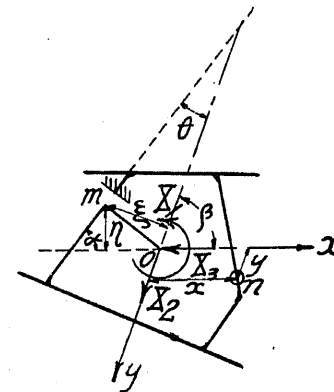


Fig. D.

今一部材の一點 m に働く彎曲モーメント M , 直應力 N , 剪力 S を考へるに是等のものは其點 m より臂木を出し其先端に働く方

今一部材の一點 m に働く彎曲モーメント M , 直應力 N , 剪力 S を考へるに是等のものは其點 m より臂木を出し其先端に働く方

便上誘導した力 X_1, X_2, X_3 を以て次の様に置き換へることが出来る。

$$(a) \quad \begin{cases} M = X_1 - X_2\xi - X_3\eta \\ N = -X_2\cos\theta - X_3\cos\alpha \\ S = -X_2\sin\theta + X_3\sin\alpha \end{cases}$$

而して X_1, X_2, X_3 に假定した方向は随意に與へるもので推定の方向が事實と反すれば結果に於て負號をとつて現はれて來るに過ぎない。併し是等の M, N, S を定むべき X_1, X_2, X_3 は働の表式を應用して見出される。

今直應力と剪力との影響が彎曲モーメントの影響に對して省略し得る場合を考ふれば(16)式を應用することが出来る。

而して計算の便宜上或る既知常數の I_c を誘導し

$$\frac{1}{EI} = \frac{1}{EI_c} \frac{I_c}{I} = \frac{1}{EI_c} \omega$$

即ち ω を以て $\frac{I_c}{I}$ を表はす時は(16)式は次の様になる。

$$(A) \quad \begin{cases} \int M\omega \frac{\partial M}{\partial X_1} ds = 0, \\ \int M\omega \frac{\partial M}{\partial X_2} ds = 0, \\ \int M\omega \frac{\partial M}{\partial X_3} ds = 0. \end{cases}$$

此式は(16)式の他形で單閉合の架構又は單徑間の固定脚架構に對しては應用廣く且つ便利なものであつて此式の積分は架構の全部材に施す可きものであるが部材の張出して居る部分には其必要がないことになる。

何んとなれば此部分に對して其自由端からモーメントを考ふれば其れが X に對する偏微分は零であるからである。

今 m 點から出した方便上の臂木の先端を x, y 座標の原點と考へ M_0 を以て總ての X を除去した際の單純な靜定性構造が荷重により起す彎曲モーメントとし部材を外側に向つて凸狀ならしむるものと假定して進む。即ち M_0 には便宜上負號を持たしめて式を作る。

斯くする時は前に約束したモーメントの符號に關する規約に従つて一部材の n 點に於けるモーメントは次式で與へられる。

$$(b) \quad \begin{cases} M = X_1 + X_2x \sin\beta + X_3y \sin\beta - M_0 \\ \frac{\partial M}{\partial X_1} = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial X_2} = x \sin\beta, \quad \frac{\partial M}{\partial X_3} = y \sin\beta. \end{cases}$$

従つて(A)式は

$$(c) \quad \begin{cases} \int \{X_1 + X_2x \sin\beta + X_3y \sin\beta - M_0\} \omega ds = 0 \\ \int \{X_1 + X_2x \sin\beta + X_3y \sin\beta - M_0\} \omega x \sin\beta ds = 0 \end{cases}$$

$$\int \{X_1 + X_2 \sin \beta + X_3 y \sin \beta - M_o\} \omega y \sin \beta ds = 0$$

或は(c)式は次の様になる。

$$(d) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 \int \omega ds + X_2 \sin \beta \int \omega x ds + X_3 \sin \beta \int \omega y ds \\ \quad = \int M_o \omega ds \\ X_1 \int \omega x ds + X_2 \sin \beta \int \omega x^2 ds + X_3 \sin \beta \int \omega xy ds \\ \quad = \int M_o \omega x ds \\ X_1 \int \omega y ds + X_2 \sin \beta \int \omega xy ds + X_3 \sin \beta \int \omega y^2 ds \\ \quad = \int M_o \omega y ds \end{array} \right.$$

今各部材の長素が ωds なる重量をもつものと考へ此考察の下に架構の重心を求めれば座標原点 O を此重心に一致せしむることにより

$$(e) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \omega x ds = \int (\omega ds)x = 0, \\ \int \omega y ds = \int (\omega ds)y = 0. \end{array} \right.$$

が満足せられる。又同様な考察の下に x, y 座標軸をして共軛ならしむれば其性質として

$$(f) \quad \int \omega xy ds = \int (\omega ds)xy = 0$$

である。

従つて對照軸をもつ架構であれば其重心は容易に定り且つ x, y 軸は直角座標軸となり(d)式は簡單となり X_1, X_2, X_3 は次の様になる。

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \frac{\int M_o \omega ds}{\int \omega ds}, \\ X_2 = \frac{\int M_o \omega x ds}{\int \omega x^2 ds}, \\ X_3 = \frac{\int M_o \omega y ds}{\int \omega y^2 ds}. \end{array} \right.$$

又荷重が對照軸に對し對照的にかゝる場合には

$$(g) \quad \int M_o \omega x ds = 0$$

であるから

$$(h) \quad X_2 = 0$$

となる。

従つて斯くの如き對照荷重に對しては X は次式から求めらる。

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \frac{\int M_o \omega ds}{\int \omega ds} \\ X_3 = \frac{\int M_o \omega y ds}{\int \omega y^2 ds} \end{array} \right.$$

(B)式及(C)式に於て

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} G = \int \omega ds, \\ H = \int \omega x^2 ds, \\ J = \int \omega y^2 ds. \end{array} \right.$$

と置く時は(B)式は

$$(E) \begin{cases} X_1 = \frac{\int M_o \omega ds}{G}, \\ X_2 = \frac{\int M_o \omega x ds}{H}, \\ X_3 = \frac{\int M_o \omega y ds}{J} \end{cases}$$

となる。是等の G, H, J は荷重には無関係にして架構の形と部材の断面に支配せらるゝ値である。

此(E)式は單徑間の對照架構又は閉合架構に對しては應用廣い便利な表式である。唯其重心を見出すことが一つの手數であるが實際問題としては對照形が多く且つ其形も定つて居るから豫め其重心を求めておくことが出来る。Table A は此重心の位置を示すものである。

Table A

番號	架 構 の 形	η の 値	摘 要
(1)		$\frac{k_1 h + k_2(h+d) + 2h+d}{2+2k_1+k_2+k_3}$	$k_1 = \frac{I_2}{I_1} \frac{h}{s},$ $k_2 = \frac{I_2}{I_3} \frac{l_1}{s},$ $k_3 = \frac{I_2}{I} \frac{l}{s}.$
(2)		$\frac{k_1 h + k_2(h+d) + 2h+d}{2+2k_1+k_2}$	$I = \infty$

Table A (續き)

番號	架 構 の 形	η の 値	摘 要
(3)		$\frac{k_1 h + 2h+d}{2+2k_1+k_3}$	$l_1 = 0$
(4)		$\frac{k_1 h + 2h+d}{2(1+k_1)}$	$l_1 = 0$ $I = \infty$
(5)		$\frac{1+k_2}{2+k_2+k_3} d$	$h = 0$
(6)		$\frac{1+k_2}{2+k_2} d$	$h = 0$ $I = \infty$
(7)		$\frac{1+k}{1+2k+m} h$	$k = \frac{I_2}{I_1} \frac{h}{l} \quad d = 0$ $m = \frac{I_2}{I_1} \quad I_3 = I_2$ $l_1 + 2s = l$
(8)		$\frac{1+k}{1+2k} h$	$I = \infty$ $d = 0, I_3 = I_2$ $l_1 + 2s = l$
(9)		$\frac{d}{2+k_3}$	$l_1 = 0,$ $h = 0$
(10)		$\frac{d}{2}$	$l_1 = 0,$ $h = 0$ $I = \infty$

η は重心と下部材又は地盤との距離を示す。

問題 3. 垂直単荷重をもつ鉸脚矩形架構の
水平反力を求む

Fig. E(a) に於て鉸脚 A 及 D に働く垂直反力は單
桁の場合と同様に簡単に之を見出すことが出来る
が水平反力の H は不静定性のものである。

今(15)式より

$$\frac{\partial \omega}{\partial H} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} dx + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial H} dx = 0$$

次に柱 AB 及 CD の慣性モーメント並に断面積
を I_1 及 A_1 で表はし横材 BC の慣性モーメント並に
断面積を I_2, A_2 とする。

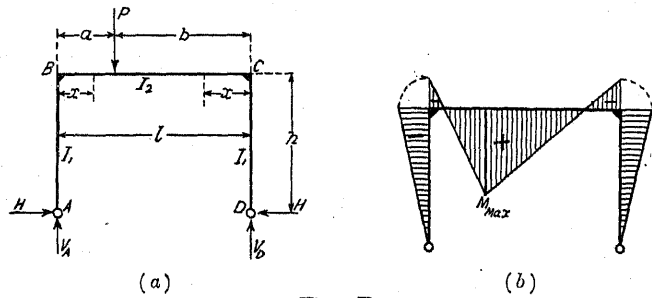


Fig. E.

上式の積分は架構の部材全體に施すべきもので
先づ柱 AB に對し鉸脚 A より x を測り M 及 N を求
むれば次の如くである。

$$M = -Hx, \quad \frac{\partial M}{\partial H} = -x$$

$$N = -V_A, \quad \frac{\partial N}{\partial H} = 0$$

故に

$$(a) \quad \begin{cases} \int_0^h \frac{M}{EI_1} \frac{\partial M}{\partial H} dx = H \frac{h^3}{3EI_1}, \\ \int_0^h \frac{N}{EA_1} \frac{\partial N}{\partial H} dx = 0 \end{cases}$$

又 DC なる柱に對しては鉸脚 D に働く H が

$$H_D = H_A = H$$

なる關係上 DC 間に就いては全く(a)式と同じ結果
が得られる。

次に BC なる横材に對しては次の如くである。

$$M = M_0 - Hh, \quad \frac{\partial M}{\partial H} = -h$$

$$N = -H, \quad \frac{\partial N}{\partial H} = -1.$$

茲に M_0 は單桁と見做せる場合の彎曲モーメント
である。

$$(b) \quad \begin{cases} \int_0^l \frac{M}{EI_2} \frac{\partial M}{\partial H} dx = -\frac{1}{EI_2} \int_0^l (M_0 - Hh)h dx \\ = H \frac{h^2 l}{EI_2} - \frac{h}{EI_2} \int_0^l M_0 dx \\ \int_0^l \frac{N}{EA_2} \frac{\partial N}{\partial H} dx = -\frac{Hl}{EA_2} \end{cases}$$

故に

$$(c) \quad \frac{\partial \omega}{\partial H} = 2H \frac{h^3}{3EI_1} + H \frac{h^2 l}{EI_2} - \frac{Hl}{EA_2} - \frac{h}{EI_2} \int_0^l M_0 dx = 0$$

此右邊最後の項は與へられた荷重に對して單桁が惹起す彎曲モーメントを其徑間全體に對して集めたものに係數 $\frac{h}{EI_2}$ を乗じたもので豫め種々の荷重に對し計算し置くことを得るものである。

今便宜上 \mathfrak{M} を以て此モーメントの面積を表はさしめる。

即ち

$$(d) \quad \mathfrak{M} = \int_0^l M_0 dx$$

とすれば(e)式より H は次の様になる。

$$(e) \quad H = \frac{\mathfrak{M}}{hl \left\{ 1 + \frac{2}{3} \frac{hI_2}{I_1} + \frac{I_2}{A_2} \frac{1}{h^2} \right\}}$$

今の場合荷重は E 點に置かれた單一荷重であるから

$$\mathfrak{M} = \frac{P \cdot ab}{2}$$

である。

$$\text{今} \quad \frac{h}{l} \frac{I_2}{I_1} = n$$

$$\frac{I_2}{A_2} = r^2 \quad (\text{但し } r = \text{環動半徑})$$

と置けば此場合の H は次式で與へられる。

$$(f) \quad H = \frac{Pab}{2hl \left(1 + \frac{2}{3}n + \frac{r^2}{h^2} \right)}$$

然るに直應力 N に因る影響は(f)式に於て $\left(\frac{r}{h}\right)^2$ の函數として表はれ彎曲に因るものと比較して省略し得る微量である。

故に之れを省略する時は

$$(g) \quad H = \frac{Pab}{2hl \left(1 + \frac{2}{3}n \right)}$$

問題 4. 一側の柱に水平單荷重をもつ鉸脚矩形架構の水平反力を求む

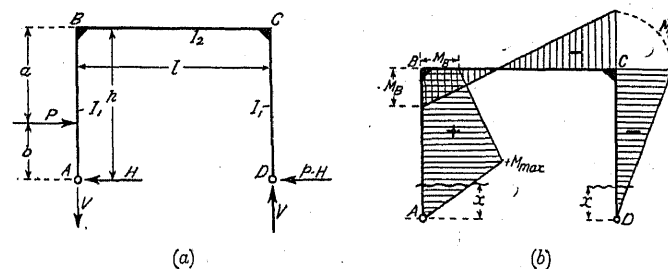


Fig. F.

靜力學の平衡條件から鉸脚 A 及 D に生ずる水平反力の和は水平荷重 P に等しく又 A 及 D に働く垂直反力の和は零であるから

$$P - H_A - H_D = 0$$

$$V_A = V_D = V$$

故に $H_A = H$ とすれば $H_D = P - H$ である。

又鉸脚 A に於てモーメントをとれば

$$Pb - Vl = 0$$

であるから

$$(a) \quad V = \frac{Pb}{l}$$

又直應力 N の影響を考慮にとらない場合には

$$\frac{\partial \omega}{\partial H} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} dx = 0$$

から H を求めることが出来る。

荷重點 E より下方 AE 間に在りては

$$M = Hx, \quad \frac{\partial M}{\partial H} = x$$

荷重點 E より上方 EB 間に在りては

$$M = Hx - P(x-b), \quad \frac{\partial M}{\partial H} = x$$

故に柱 AB に対しては

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^h \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} dx &= \frac{1}{EI_1} \left\{ \int_0^b Hx^2 dx \right. \\ &+ \left. \int_b^h \{Hx^2 - Px(x-b)\} dx \right\} \\ &= \frac{1}{EI_1} \left\{ \frac{Hh^3}{3} - \frac{P}{3}(h^3 - b^3) + \frac{P}{2}b(h^2 - b^2) \right\} \end{aligned} \right.$$

柱 CD に対しては

$$M = -(P-H)x, \quad \frac{\partial M}{\partial H} = x$$

故に

$$(c) \quad \int_0^h \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} dx = \frac{1}{EI_1} \int_0^h (H-P)x^2 dx = \frac{1}{EI_1} (H-P) \frac{h^3}{3}$$

BC なる横材に対しては

$$M = Hh - Vx - Pa, \quad \frac{\partial M}{\partial H} = h,$$

$$\begin{aligned} \text{故に} \quad \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} dx &= \frac{1}{EI_2} \int_0^l \{Hh - Vx - Pa\} h dx \\ &= \frac{1}{EI_2} \left\{ Hh^2 l - \frac{Vh l^2}{2} - Pahl \right\} \end{aligned}$$

此式の V に (a) 式の値を入れる時は

$$(d) \quad \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} dx = \frac{1}{EI_2} \left\{ Hh^2 l + \frac{Pbh l}{2} - Pl^2 l \right\}$$

従つて (b), (c), (d) 式を集むれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial H} &= \frac{1}{EI_1} \left\{ \frac{2}{3} Hh^3 - \frac{2}{3} Ph^3 - \frac{1}{6} Pb^3 + \frac{1}{2} Pbh^2 \right\} \\ &+ \frac{1}{EI_2} \left\{ Hh^2 l + \frac{1}{2} Pbh l - Pl^2 l \right\} = 0 \end{aligned}$$

従つてこれより

$$(e) \quad H = P \frac{n(4h^3 + b^3 - 3bh^2) + 3h^2(2h-b)}{6h^3 \left(1 + \frac{2}{3}n\right)}$$

問題 5. 垂直単荷重をもつ鉸脚弧形架構の
水平反力を求む

一徑間の鉸脚架構に於ては横材が弧形をなす場合も不静定反力は水平推力の H のみである。

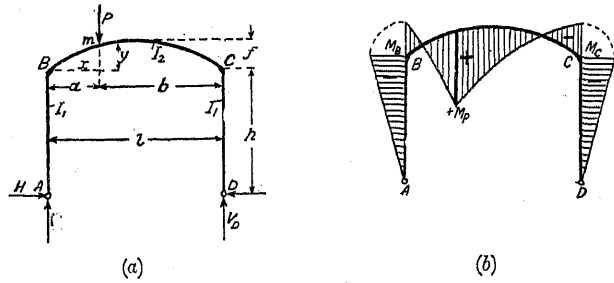


Fig. G.

故に

$$\frac{\partial \omega}{\partial H} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} dx + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial H} dx = 0$$

を應用するものとし柱 AB に就いて之れを計算すれば

$$M = -Hx, \quad \frac{\partial M}{\partial H} = -x,$$

$$N = -V_A, \quad \frac{\partial N}{\partial H} = 0$$

故に

$$(a) \quad \int_0^h \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} dx + \int_0^l \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial H} dx = H \cdot \frac{h^3}{3EI_1}$$

部材 CD に対しても同様である。

又弧形部材 BC に対しては E 及 I を一定値と假定し又弧形の曲半径が適當に大きく $dx=ds$ と考へ得るものとし BC を單桁と考へた場合の彎曲モー

メントを M_0 とすれば BC に対しては

$$M = M_0 - H(h+y), \quad \frac{\partial M}{\partial H} = -(h+y),$$

$$N = -H, \quad \frac{\partial N}{\partial H} = -1.$$

故に

$$\begin{aligned} & \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} dx + \int_0^l \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial H} dx \\ &= -\frac{1}{EI_2} \int_0^l \{M_0 - H(h+y)\}(h+y) dx + \frac{1}{EA_2} \int_0^l H dx \\ &= -\frac{h}{EI_2} \mathfrak{A} - \frac{1}{EI_2} \mathfrak{B} + \frac{2hH}{EI_2} \mathfrak{C} + \frac{2H}{EI_2} \mathfrak{M} + \frac{H}{EI_2} h^2 l \\ & \quad + \frac{Hl}{EA_2}, \end{aligned} \quad (b)$$

茲に

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \int_0^l M_0 dx, \\ \mathfrak{B} &= \int_0^l M_0 y dx, \\ \mathfrak{C} &= \int_0^l y dx, \\ \mathfrak{M} &= \frac{1}{2} \int_0^l y^2 dx. \end{aligned}$$

是等 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{M}$ の値は上式で定められるもので

あるから與へられた荷重と弧形の種類に依つて豫め計算し得るものである。

故に

$$\frac{\partial \omega}{\partial H} = 0$$

が次式を與へる。

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} H = \frac{\mathfrak{M} + \mathfrak{B}}{h^2 \left\{ 1 + \frac{2}{3}n + \left(\frac{r}{h} \right)^2 \right\} + 2\{\mathfrak{F}h + \mathfrak{M}\}} \\ \text{茲に} \\ n = \frac{hI_2}{lI_1}, \quad r^2 = \frac{I_2}{A_2} \end{array} \right.$$

此(c)式に於て $y=0$ と置けば鉸脚矩形架構の場合の(c)式が得られる。

此一例として拋物線形の架構に就いて次ぎに述べてみる。

部材 BC が

$$y = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2)$$

なる拋物線形をなす場合には(c)式に於て

$$(d) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B} = \frac{4f}{l^2} \int_0^l M_0(lx - x^2) dx, \\ \mathfrak{F} = \frac{4f}{l^2} \int_0^l (lx - x^2) dx = \frac{2}{3}fl, \\ \mathfrak{M} = \frac{8f^2}{l^4} \int_0^l (lx - x^2)^2 dx = \frac{4}{15}f^2l. \end{array} \right.$$

又 Fig. G に示す様な單一荷重 P に対して \mathfrak{A} 及 \mathfrak{B} は次の様になる

$$(e) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} = \int_0^l M_0 dx = \frac{1}{2}Pab \\ \mathfrak{B} = \frac{4f}{l^2} \int_0^l M_0(lx - x^2) dx \\ = \frac{4f}{l^2} \left\{ \int_0^a \frac{P \cdot b}{l} x(lx - x^2) dx + \int_0^b \frac{P \cdot a}{l} x(lx - x^2) dx \right\} \\ = \frac{Pabf}{3l^2} \{ l^2 + al - a^2 \} \end{array} \right.$$

故に是等の値を(c)式に入れ且つ N の影響を M に比して微量と考へ之れを省略すれば次式が得られる。

$$(f) \quad H = Pab \frac{5\{3hl^2 + 2f(l^2 + al - a^2)\}}{2l^3 \left\{ 15h^2 \left(1 + \frac{2}{3}n \right) + 4f(5h + 2f) \right\}}$$

問題 6. 垂直単荷重をもつ鉸脚尖頂架構の 水平反力を求む

Fig. H に示す如き鉸脚尖頂架構の頂部材が急傾斜をなさざるものに対しては前節に述べた弧形架構の曲線部が直線となれる特例と見做して解くことが出来る。即ち此種の架構に於ては $x:y = \frac{l}{2}:f$ の関係があるから y は次式で與へられる。

$$(a) \quad y = \frac{2f}{l}x$$

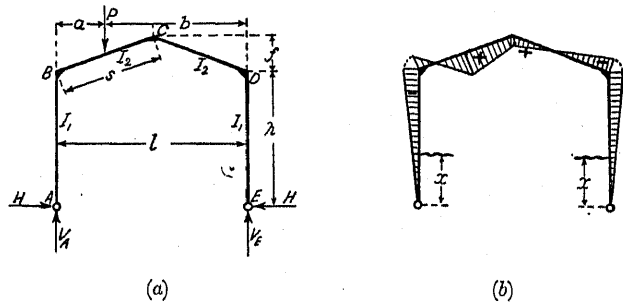


Fig. H.

従つて

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{B} &= \int_0^l M_o y \, dx \\
 &= \frac{2f}{l} \int_0^l M_o x \, dx \\
 \mathfrak{F} &= \int_0^l y \, dx = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} y \, dx \\
 &= \frac{fl}{2} \\
 \mathfrak{M} &= \frac{1}{2} \int_0^l y^2 \, dx = \int_0^{\frac{l}{2}} y^2 \, dx \\
 &= \frac{f^2 l}{6}
 \end{aligned}$$

今圖の如き鉸脚尖頂架構が垂直單荷重をもつ場合の水平推力を求めれば次の如くである。

即ち頂部材 BC 間に單一荷重 P が垂直にかゝるものとする。

此の場合

$$\begin{aligned}
 (c) \quad & \begin{cases} V_A = \frac{Pb}{l}, & V_B = \frac{Pa}{l}, \\ \mathfrak{A} = \int_0^l M_o \, dx = \frac{Pab}{2}, \\ \int_0^l M_o x \, dx = \frac{1}{24} Pa(3l^2 - 4a^2), \\ \text{従つて} \\ \mathfrak{B} = \frac{1}{12l} Paf(3l^2 - 4a^2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

今直應力 N の影響を省略し得るものとするれば弧形架構の (c) 式に是等の値を入れ次式が得られる。

$$(d) \quad H = \frac{Pa}{4l^2} \cdot \frac{6bhl + f(3l^2 - 4a^2)}{3h^2 \left(1 + \frac{2}{3}n\right) + f(3h + f)}$$

問題 7. 任意荷重をもつ固定脚矩形架構の不静定未知量を求む

Fig. I に示す如き單層單徑間の固定脚矩形架構に對する不静定應力の計算は其荷重状態が對照的な場合には比較的簡單であるが任意荷重に對しては複雑する。従つて斯くの如き構造に對しては(16)式に依るよりも 188 頁の (E) 式に依るが便である。

(E) 式中 G, H, J は (D) 式に依つて與へられる。

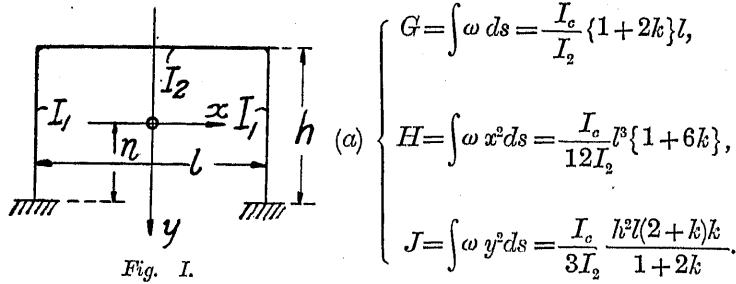


Fig. I.

$$\begin{cases} G = \int \omega ds = \frac{I_c}{I_2} (1+2k)l, \\ H = \int \omega x^2 ds = \frac{I_c}{12I_2} l^3 \{1+6k\}, \\ J = \int \omega y^2 ds = \frac{I_c}{3I_2} \frac{h^2 l (2+k)k}{1+2k}. \end{cases} \quad (a)$$

従つて(E)式に示したXは次式で與へられる。

$$(b) \quad \begin{cases} X_1 = \frac{I_2 \int M_o \omega ds}{I_c (1+2k)l}, \\ X_2 = \frac{12I_2 \int M_o \omega x ds}{I_c l^3 \{1+6k\}}, \\ X_3 = \frac{3I_2 (1+2k) \int M_o \omega y ds}{I_c h^2 l (2+k)k}. \end{cases}$$

問題 8. 垂直単荷重をもつ固定脚矩形架構の不静定量を求む

Fig. J に示す如き單層單徑間の固定脚矩形架構が其横材上に垂直単荷重をもつ場合の不静定應力の計算は問題 7 の結果を應用して之を求めることが出来る。

今此問題を解く爲に先づ此架構の重心に x, y 軸の原点を考へる。此位置は Table A から

$$(a) \quad \begin{cases} \eta = \frac{1+k}{1+2k} h, \\ k = \frac{I_2}{I_1} \frac{h}{l}. \end{cases}$$

に依つて與へられる。

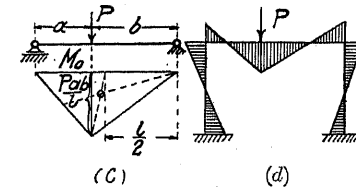
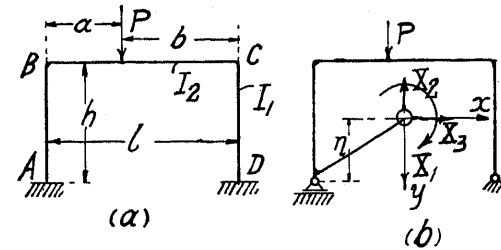


Fig. J.

然るに此際

$$(b) \quad \begin{cases} \int M_o \omega ds = -\frac{Pab I_c}{2I_2}, \\ \int M_o \omega x ds = \frac{Pab(l-2a)I_c}{12I_2}, \\ \int M_o \omega y ds = \frac{Pab hk}{2(1+2k)} \frac{I_c}{I_2} \end{cases}$$

であるから是等の値を問題 7 の (b) 式に入れる時は X が次の様になる。

$$(c) \quad \begin{cases} X_1 = -\frac{Pab}{2l(1+2k)}, \\ X_2 = \frac{Pab(l-2a)}{l^3(1+6k)}, \end{cases}$$

$$\left\{ X_3 = \frac{3Pab}{2hl(2+k)} \right.$$

従つて固定点 A に於ては

$$(d) \quad \left\{ \begin{aligned} M_A &= X_3 \eta + X_1 - X_2 \frac{l}{2} \\ &= \frac{Pab}{2l} \left\{ \frac{5k-1+2\xi(2+k)}{(2+k)(1+6k)} \right\}, \\ \text{茲に } \xi &= \frac{a}{l} \end{aligned} \right.$$

又 A 點に於ける水平反力並に垂直反力は

$$(e) \quad \left\{ \begin{aligned} H_A &= X_3 = \frac{3Pab}{2hl(2+k)}, \\ V_A &= X_2 + \frac{Pb}{l} = \frac{Pab(l-2a)}{l^2(1+6k)} + \frac{Pb}{l} \\ &= \frac{Pb}{l} \left\{ \frac{1+6k+\xi-2\xi^2}{1+6k} \right\} \end{aligned} \right.$$

又 D 點に於ては

$$(f) \quad \left\{ \begin{aligned} M_D &= \frac{Pab}{2l} \left\{ \frac{3+7k-4\xi-2k\xi}{(2+k)(1+6k)} \right\} \\ H_D &= \frac{3Pab}{2hl(2+k)} \\ V_D &= P - V_A = \frac{Pa}{l} \left\{ \frac{6k+3\xi-2\xi^2}{1+6k} \right\} \end{aligned} \right.$$

各部材に於けるモーメント示圖は Fig. J (d) に示す

如くである。

問題 9. 水平単荷重をもつ固定脚矩形架構の
不静定量を求む

垂直単荷重の場合に於けると同様垂直側面の任意點に單一荷重 W をもつものの不静定量の計算は次の如くである。

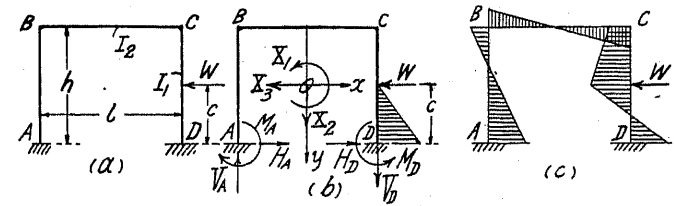


Fig. K.

此問題に對し前同様 $\frac{I_2}{I_1} \frac{h}{l} = k$, $\frac{c}{h} = \delta$ とすれば

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} \int M_o \omega ds &= \frac{I_c}{I_1} \frac{Wc^2}{2} \\ \int M_o \omega x ds &= \frac{I_c}{I_1} \frac{Wlc^2}{4} \\ \int M_o \omega y ds &= \frac{I_c}{I_1} \frac{hc^2 W \{ 3(1+k) - \delta(1+2k) \}}{6(1+2k)} \end{aligned} \right.$$

であるから

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= \frac{k\delta c W}{2(1+2k)}, \\ X_2 &= \frac{3k\delta c W}{l(1+6k)}, \end{aligned} \right.$$

$$X_3 = \frac{\delta^2 W}{2(2+k)} \{3(1+k) - \delta(1+2k)\}.$$

従つて

$$(c) \quad \left\{ \begin{aligned} M_A &= X_1 + X_3 \gamma - X_2 \frac{l}{2} \\ &= \frac{Wc\delta}{2} \left\{ \frac{3+2k-\delta(1+k)}{2+k} - \frac{3k}{1+6k} \right\}, \\ H_A &= X_3 = \frac{\delta^2 W}{2(2+k)} \{3(1+k) - \delta(1+2k)\}, \\ V_A &= X_2 = \frac{3k\delta c W}{l(1+6k)}, \\ M_D &= M_A + V_A l - Wc \\ &= -\frac{Wc\delta}{2} \left\{ \frac{2}{\delta} - \frac{3+2k-\delta(1+k)}{2+k} - \frac{3k}{1+6k} \right\}, \\ H_D &= W - H_A \\ V_D &= -V_A \end{aligned} \right.$$

問題10. 對照的垂直荷重をもつ單層單徑間

固定脚架構の不静定未知量を求む

一般に垂直荷重並に架構が對照的關係にあれば問題は簡単になるもので撓角撓度法は勿論普通のカスチリアノ氏の働の方程式に依るも簡単に解決せられる。

一般に固定脚をもつ單層單徑間の架構は其一般

なる荷重に對しては三個の不静定未知量を有し普通之れを固定支點に於ける水平反力 H ,垂直反力 V ,モーメント M_a に選ぶもので是等を決定するに三個の働の方程式を應用する。

即ち應剪力の影響を彎曲モーメント及直應力の影響に對して省略し得るものには(15)式から

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial H} &= \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} dx + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial H} dx = 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial V} &= \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial V} dx + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial V} dx = 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial M_a} &= \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_a} dx + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial M_a} dx = 0 \end{aligned} \right.$$

是等三式から三個の未知量を決定するものであるが普通 N の影響をも M に對して省略し次式から求める。

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} dx &= 0 \\ \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial V} dx &= 0 \\ \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_a} dx &= 0 \end{aligned} \right.$$

蓋し對照的垂直荷重に對しては垂直反力は直に定まるから不静定未知量としては H と M_a の二個である。

故に

$$(e) \quad \begin{cases} \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} dx = 0 \\ \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_a} dx = 0 \end{cases}$$

から二個の未知量 H と M_a とを求む。

問題 11. 二個の對照的垂直荷重をもつ固定脚梯形架構の不静定未知量を求む

今 Fig. L に示す固定脚梯形架構に對し對照荷重 P が荷せらるゝものとするれば支點 A に於ける垂直反力は P である。

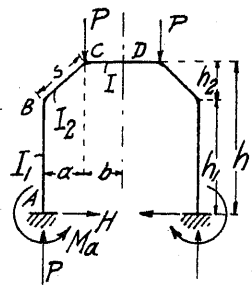


Fig. L.

而して問題 10 の (b) 式により二個の不静定量 H, M_a を求むるものとするれば AB 間に於ては

$$M = -Hx - M_a$$

$$\frac{\partial M}{\partial H} = -x, \quad \frac{\partial M}{\partial M_a} = -1$$

$$\int_0^{h_1} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} dx = \frac{1}{EI_1} \int_0^{h_1} \{Hx^2 + M_a x\} dx$$

$$= \frac{h_1^3}{6EI_1} \{2Hh_1 + 3M_a\}$$

$$\int_0^{h_1} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_a} dx = \frac{1}{EI_1} \int_0^{h_1} \{Hx + M_a\} dx$$

$$= \frac{h_1}{2EI_1} \{Hh_1 + 2M_a\}$$

BC 間に於ては

$$M = Px - M_a - H \left(h_1 + \frac{h_2}{a} x \right)$$

$$\frac{\partial M}{\partial H} = - \left(h_1 + \frac{h_2}{a} x \right)$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_a} = -1$$

故に

$$\int_0^a \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} dx = \frac{s}{6EI_2} \{H(6h_1^2 + 6h_1h_2 + 2h_2^2) - Pa(3h_1 + 2h_2) + 3M_a(2h_1 + h_2)\}$$

$$\int_0^a \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_a} dx = \frac{s}{2EI_2} \{H(2h_1 + h_2) - Pa + 2M_a\}$$

又 CD 間に於ては

$$M = Pa - Hh - M_a$$

$$\frac{\partial M}{\partial H} = -h, \quad \frac{\partial M}{\partial M_a} = -1$$

故に

$$\int_0^b \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} dx = \frac{bh}{EI} \{M_a + Hh - Pa\}$$

$$\int_0^b \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_a} dx = \frac{b}{EI} \{M_a + Hh - Pa\}$$

以上求めた結果を集めて前問題の (b) 式を作る時は次の二式が得られる。

$$(a) \quad \begin{cases} A_1 M_a + B_1 H = 2C_1 \\ A_2 M_a + B_2 H = 2C_2 \end{cases}$$

茲に

$$(b) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{h_1^2}{I_1} + \frac{s(h+h_1)}{I_2} + \frac{2bh}{I} \\ B_1 = \frac{2h_1^3}{3I_1} + \frac{2s(h_1^2 + h_1 h_2 + \frac{h_2^2}{3})}{I_2} + \frac{2bh^2}{I} \\ C_1 = \left\{ \frac{as(2h+h_1)}{6I_2} + \frac{abh}{I} \right\} P \\ A_2 = \frac{2h_1}{I_1} + \frac{2s}{I_2} + \frac{2b}{I} \\ B_2 = \frac{h_1^2}{I_1} + \frac{s(h+h_1)}{I_2} + \frac{2bh}{I} \\ C_2 = \left\{ \frac{as}{2I_2} + \frac{ab}{I} \right\} P \end{cases}$$

(a) 式より未知量の M_a 及 H を求むれば

$$(c) \quad \begin{cases} H = 2 \frac{C_1 A_2 - C_2 A_1}{B_1 A_2 - B_2 A_1} \\ M_a = 2 \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{B_1 A_2 - B_2 A_1} \end{cases}$$

問題 12. 二個の對照的垂直荷重をもつ固定脚矩形架構の不静定未知量を求む

此問題は問題 11 の特別な場合即ち前問題に於て $h_2=0, h_1=h, I=I_2$ となつた場合として問題 11 の結果を應用して求めることが出来る。

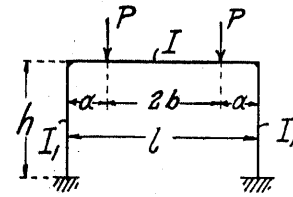


Fig. M.

今 Fig. M に示す固定脚矩形架構に於て上述の條件を考に入れ $\frac{Ih}{I_1 l} = k$ と置けば前問題に於て

$$(a) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{hl}{I}(1+k) \\ B_1 = \frac{h^2 l}{3I}(3+2k) \\ C_1 = \frac{ahl}{2I}(l-a)P \\ A_2 = \frac{l}{I}(1+2k) \\ B_2 = \frac{hl}{I}(1+k) \\ C_2 = \frac{a}{2I}(l-a)P \end{cases}$$

是等の値を前問題の (c) 式に入れば H 及 M_a が得られる。

$$(b) \quad \begin{cases} H = \frac{3Pa(l-a)}{l(2+k)}, \\ M_a = -\frac{Pa(l-a)}{l(2+k)}. \end{cases}$$

問題 13. 鉸脚矩形架構の一剛節に傾斜荷重をもつ場合の不静定未知量を求む。

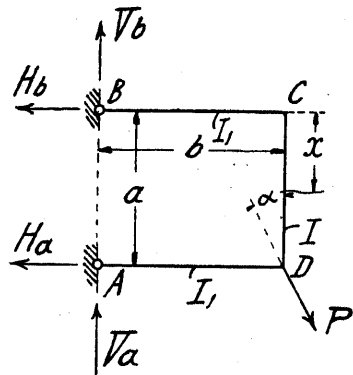


Fig. N.

今 Fig. N に示すカンチレバー式矩形架構が剛節 D に於て部材 CD と α をなす傾斜荷重 P をもつものとするれば A 及 B には水平反力及垂直反力を生ずる。

A 點に於ける是等反力を H_a 及 V_a とし B 點

に於けるものを H_b 及 V_b とする。而して直應力をも考慮にとるものとするれば

部材 CD に就ては

$$M = V_b \cdot b - H_b x \quad \frac{\partial M}{\partial V_b} = b$$

$$N = V_b \quad \frac{\partial N}{\partial V_b} = 1$$

故に

$$\int_0^a \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial V_b} dx + \int_0^a \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial V_b} dx = \frac{1}{2EI} \{ 2ab^2 V_b - a^2 b H_b \} + \frac{V_b a}{EA}$$

部材 AD に就ては

$$M = -V_a x = \{ V_b - P \cos \alpha \} x, \quad \frac{\partial M}{\partial V_b} = x$$

$$N = H_a = \frac{P}{a} \{ a \sin \alpha - b \cos \alpha \}, \quad \frac{\partial N}{\partial V_b} = 0$$

故に

$$\int_0^b \frac{M}{EI_1} \frac{\partial M}{\partial V_b} dx + \int_0^b \frac{N}{EA_1} \frac{\partial N}{\partial V_b} dx = \frac{b^3}{3EI_1} \{ V_b - P \cos \alpha \}$$

部材 BC に就ては

$$M = V_b x, \quad \frac{\partial M}{\partial V_b} = x$$

$$N = H_b = P \frac{b}{a} \cos \alpha, \quad \frac{\partial N}{\partial V_b} = 0$$

故に

$$\int_0^b \frac{M}{EI_1} \frac{\partial M}{\partial V_b} dx + \int_0^b \frac{N}{EA_1} \frac{\partial N}{\partial V_b} dx = \frac{V_b b^3}{3EI_1}$$

是等の結果を集めて零に置く時は V_b が求められる。

$$V_b = \frac{\{ 3ab^2 + 2b^3 n \} \cos \alpha - P}{2 \{ 3ab^2 + 2b^3 n \} + 6a^2}$$

但し

$$n = \frac{I}{I_1}, \quad r^2 = \frac{I}{A}$$

若し直應力の影響を彎曲モーメントに比較して
省略すれば

$$V_b = \frac{P}{2} \cos \alpha$$

又

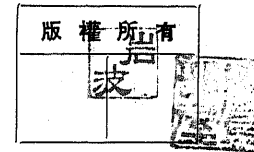
$$V_a = P \cos \alpha - V_b$$

から求めらる。

昭和三年六月一日印 刷
昭和三年六月五日第一刷發行

架 構 新 論

定 價 三 圓 八 十 錢



著 者 鷹 部 屋 福 平

東京市神田區南神保町十六番地

發 行 者 岩 波 茂 雄

東京府荏原郡世田谷町世田谷五十番地

印 刷 者 大 久 保 秀 次 郎

東京市神田區南神保町
發 行 所 岩 波 書 店

電話九段 { 三二〇八番
攝發東京 三六二四〇番

株式會社東京築地活版製造所印刷

大森製本

物理學文獻抄 第一輯	物理學 輸講會編	定價三圓五十錢 送料非留廿七錢
物理學の基礎的問題 第二輯	石原 純著	定價三圓八十錢 送料非留廿七錢
英文 佐野靜雄博士論文集	故佐野教授論 文集刊行會編	定價五圓 送料非留廿七錢
科學概論	田邊 元著	定價二圓八十錢 送料非留廿七錢
鋼の組織と其處理法	兒玉晋匡著	定價三圓五十錢 送料非留廿七錢
熱力學	藤村信次著	定價四圓七十錢 送料非留廿七錢
力學	庄司彦六著	定價二圓八十錢 送料非留廿七錢
新力學	佐野榮治著	定價三圓 送料非留廿七錢
高等數學概要	掛谷宗一著	定價四圓二十錢 送料非留廿七錢
微分方程式論	池田芳郎著	定價四圓三十錢 送料非留廿七錢
積分方程式論	池田芳郎著	近 刊
高等圖學(正射影之卷)	中根孝治著	定價二圓 送料非留十八錢
鐵筋建築構造規準	田中正義著	定價二圓五十錢 送料非留十八錢
岩 波 書 店 刊 行		

2
18
3/1