

第一編

單一荷重を基礎に置く解法

I. 變形働の概論

1. 働の説明

大き竝に方向の一定した力 P が一點に働くものとし此點が或原因によつて變位 s だけ直動をしたものとする。今 s と P とがなす角を θ で表はせば P の方向に於ける s の分變位は $s \cos \theta$ である。 P と $s \cos \theta$ との相乗積を ω で表はしこれを變位 s の間に力 P がなす働又は仕事といふ。

即ち働の定義から次式が得られる。

$$(1) \quad \omega = P s \cos \theta$$

働は角 θ が直角より小なるか又は大なるかに従つて正又は負の符號を附與せられる。

(1)式から又知り得ることは

$$P s \cos \theta = s P \cos \theta$$

即ち ω なる働は力 P と P の方向に於ける s の分變位 $s \cos \theta$ との積から求めてもよし又變位 s と s の方向の P の分力 $P \cos \theta$ との積から求めても可なりといふことになる。

今與へられた點を A とし其初めの位置を直角座標軸に對し (x, y, z) とし變位 Δs 後の位置を B とし其座標を $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ で與へる。又與力 P の三軸 x, y, z の方向の分力を P_x, P_y, P_z とすれば働 ω は次式で與へられる。

$$(2) \quad \omega = P_x \Delta x + P_y \Delta y + P_z \Delta z$$

若し A 點に働く力が數多ある場合には

$$(3) \quad \omega = \sum \{P_x \Delta x + P_y \Delta y + P_z \Delta z\}$$

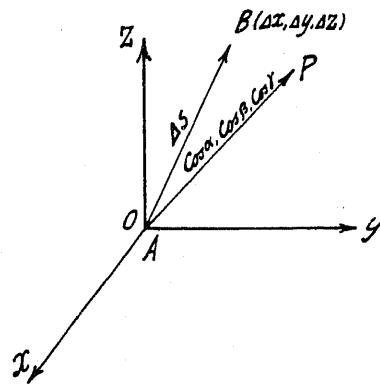


Fig. 4

(2)式及(3)式は次の如くして又誘導することが出来る。

即ち A 點を其儘座標軸の原點に移し力 P の方向餘弦を $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ とすれば P と Δs とのなす角 θ の餘弦は解析幾何學より次式にて與へ

られる。

$$(4) \quad \cos \theta = \frac{1}{\Delta s} (\Delta x \cdot \cos \alpha + \Delta y \cdot \cos \beta + \Delta z \cdot \cos \gamma)$$

此式より

$$P \Delta s \cos \theta = P \{ \Delta x \cdot \cos \alpha + \Delta y \cdot \cos \beta + \Delta z \cdot \cos \gamma \}$$

或は

$$\omega = P_x \Delta x + P_y \Delta y + P_z \Delta z$$

若し A 點に多力が働く場合には

$$\omega = \sum \{P_x \Delta x + P_y \Delta y + P_z \Delta z\}$$

2. 内働の説明

弾性體に外力働く時は弾性體は變形し其内部には應力が生ずる。フック氏の法則に従ふ範囲内で考ふれば此變形は應力に比例し外力が取り除かるゝ時此變形も亦消滅して弾性體は原狀を回復する。斯くして外力が働く間弾性體内に成された働を内働といふ。即ち内働は弾性體が外力に抵抗す可く惹き起すところの應力に因つて成される抵抗働である。而して此内働は應力の種類によつて

直應力内働、彎曲應力内働、應剪力内働等に分つことが出来る。

a. 直應力内働

今一直桁に壓力或は張力が零から徐々に増加して働き最後に N の値をとつたものとする。此直桁の斷面積を A 、長さを l 、其材料の該應力に對する弾性率を E で表はす。フックの法則に従ふ應力の範囲内に於ては應力が 0 から N となる途中の状態に於て應力 N_x に對する變形は

$$\frac{N_x l}{AE}$$

である。此式は E の定義から誘導せられる。此任意途中の状態に於て直桁内に成される内働の増加は

$$\frac{N_x l}{AE} dN_x$$

である。従つて直應力が 0 から N に到達する間の全内働は次式から與へられる。

$$(5) \quad \omega = \int_0^N \frac{N_x l}{AE} dN_x = \frac{N^2 l}{2AE}$$

b. 彎曲應力内働

今 Fig. 5 を彎曲のモーメント M を受けるところのビームの一部とする。此ビームの長素 dx に就て中立線 nn から y なる距離に於て Δdx 丈の變形ありしものとすれば

$$\Delta dx = \frac{\sigma}{E} dx$$

即ち此式は E の定義から得られるもので σ は中立線から y なる點の彎曲による應力を示すものである。

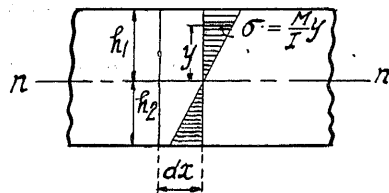


Fig. 5.

る。

而して

$$\sigma = \frac{M}{I} y$$

で與へられる。茲に

I はビーム断面の慣性モーメントである。又 b を y に於けるビームの幅とすれば断面素 $b dy$ なる小面積に就ての内働は

$$\frac{1}{2} \sigma b dy \Delta dx = \frac{1}{2} \frac{M^2}{I^2 E} b dx y^2 dy$$

である。今長素 dx に就ての内働を求むれば上式から

$$\frac{1}{2} \frac{M^2}{I^2 E} dx \int_{-h_2}^{+h_1} b y^2 dy$$

而して此式中

$$\int_{-h_2}^{+h_1} b y^2 dy = I$$

であるからビームの全長 l に對し彎曲のモーメントによる内働 ω は次式から與へられる。

$$(6) \quad \omega = \int \frac{M^2}{2EI} dx$$

c. 應剪力内働

應剪力によるビームの變形は彎曲によるものに比較して多くの場合小さい。従つて内働の計算から此ものゝ影響を省略しても大なる誤差を生じない場合が多い。

今ビームの一端から x なる距離に於て働く應剪力を Q で表はしビームの断面積を A , 應剪力に就て

の弾性率を G で表はす。

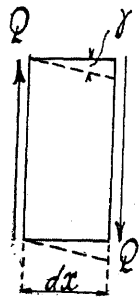


Fig. 6

若し Q が断面上一様に分布せられて居る場合には應剪力強度は $Q:A$ である。

而して長素 dx に對し Q が起すところの角變化 γ は次式で與へられる。

$$\gamma = \frac{Q}{GA}$$

且つ長さ dx に對しなされる内働は

$$\frac{1}{2} Q \gamma dx = \frac{Q^2}{2GA} dx$$

である。應剪力強度が断面上一様な場合には此式から求めてよいのであるが一般に此應力強度は断面の形によつて断面上各點で値を異にして居る

従つて應剪力の内働に對しては

$$(7) \quad \omega = \int a \frac{Q^2}{2GA} dx$$

が使用せられる。此 a は常に 1 より大なる値で正方形又は長方形の断面に對しては 1, 2 であり圓形断面に對しては 1, 19 である。

II. カスチリアノ氏法則

カスチリアノ氏の働の法則としてよく知られた

ものに次の二つがある。

- I. 一弾性體に作用する外力がこれに弾性變形を生ずる場合一外力の働點に於ける變位は其物體中に成された抵抗働を其外力に就て一回微分したものに等しい
- II. 力それ自身が何等仕事を成さざる如く撰ばれた不靜定力に就て抵抗働を偏微分したものは零に等しい。

此二つは“カスチリアノ氏の働の法則”として熟知のもので不靜定力及力の働點に於ける變位を見出すに用ひられる應用廣いものである。此中第二法則は第一法則の自然結果として出てくるもので外力の働點に變位を生ぜざる特別構造に對して應用せられる

III. 最小働の原理

カスチリアノ氏の働に關する第二法則は

“力それ自身が何等仕事を成さざる如く撰ばれた不靜定力に就て抵抗働を偏微分したものは零に等しい”

といふことである。即ち此法則は外力の働點に變位の生じない特別構造に對して應用せらるゝもので此條件を満足すべき力を不靜定反力に撰ぶ時は

此反力を含んで表はされる内働を此反力に就て一度偏微分し之れを零に等しく置くことになる。

換言すれば此法則は數學的意味に於て二様な場合をもつて居る。即ち不静定反力は其内働を(1)最小ならしむる如く生ずるか(2)最大ならしむる如く生ずるか。

此中何れであるかを決定する爲め再度其力に就て之を微分して見るに常にそれが正量である爲め上述の二つの場合の中最小ならしむる如く生ずるといふことが明白する。

此結果として

一弾性構造に働く多力系の仕事は平衡持續に必要な最小程度のもので餘分に働くものではない。

といふことになる。換言すれば

自己の大きさを調整し得る反力は構造内部の全内働を最小ならしむる如く内力を誘導する様に反力それ自身を調整するものである。

といふことになる。

此原理から自然界にも節約の大方針を以つて經濟の大法則が實行せられつゝあることが肯定される。

此法則は不静定構造の解法に極めて應用廣いもので取扱ふ不静定力が變位をなさざるか内力とし

て働く場合に用ひられる。

今求めんとする不静定力を n 個とし之れを

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$$

で表はし内働を ω で表はす時は ω は $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の項で表はされるから

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial X_1} = 0, \\ \frac{\partial \omega}{\partial X_2} = 0, \\ \frac{\partial \omega}{\partial X_3} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial \omega}{\partial X_n} = 0. \end{cases}$$

の n 個の式から n 個の未知量を聯立に求めることが出来る。

此原理を最小働の原理といふ

IV. 單一荷重を基礎に置く解法

架構に荷せられる荷重は多くの場合部材に對し直角方向を持つものが多く従つて水平部材に對しては垂直荷重であり垂直部材に對しては水平荷重である場合が多い。而して其荷重の分布状態も等布的であるか等變的即ち三角形状又は竝行對邊の

梯形状をなして働く場合が多い。(Fig. 7)

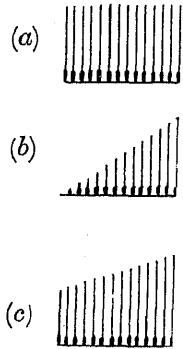


Fig. 7.

今是等の分布荷重がビーム又は架構に荷せられる場合を考へるに之に對する不静定應力又は反力の解法を是等の荷重に對して直接求めることは計算をして紛糾せしむる。故に先づ單一荷重に就て之を求め然る後其結果に積分法を應用するか又は荷重が集中荷重の集合より成る場合には之に求和法を應用して與へられた問題を解決することが有利と思はれる。

今 Fig. 8 (a) に於て單一荷重 P が一水平部材の左端より a , 右端より b の點に荷せられ此荷重に對して未知反力又は應力が求められたものとする。

此反力又は應力を U とすれば U は P, a, b 等の函數として求められる。而して多くの場合 U は次式の如き形を持つものである。

$$U = PF(a, b)$$

而して部材の長さが l なる場合には $b = l - a$ であるから上式は單に次式の如き形をとることになる。

$$(9) \quad U = Pf(a)$$

若し P なる集中荷重が水平部材の左端より x なる距離に於て長素 dx の上に強度 p を以て分布すると考ふる場合には(9)式を直接應用して次式が得られる。

$$U = pf(x)dx$$

(a) 従つて等布荷重の場合には $U = p \int f(x)dx$

で與へられる。又同様な理由によつて Fig. 8 (c) の場合に對しては

$$(10) \quad U = \int_{a_1}^{a_2} yf(x)dx$$

又 Fig. 8 (d) の如き一群の集中荷重に對しては

$$(11) \quad U = \sum_{r=1}^n P_r f(a_r)$$

一群の集中荷重と分布荷重との同時作用の場合には (Fig. 8 (e))

$$(12) \quad U = \sum_{r=1}^n P_r f(a_r) + \int yf(x)dx$$

で與へられる。

此考察は撓角撓度法の荷重

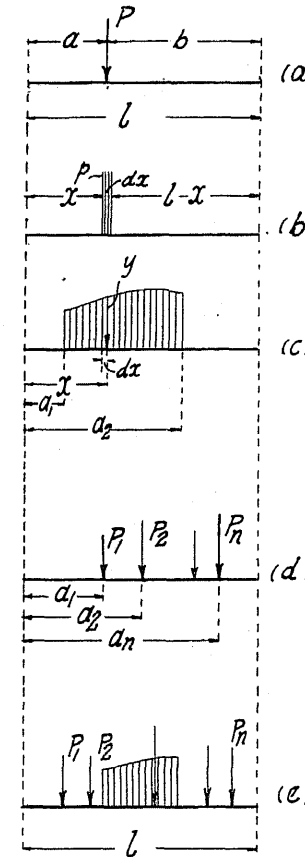


Fig. 8.



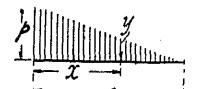
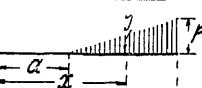


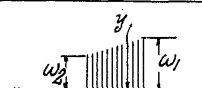
項を決定する場合にも應用せられる。

之を要するに任意垂直荷重に對して單一荷重の計

算結果を基礎に置いて複雑な問題を簡単に解決せんとするものである。

Table 2 は Fig. 7 に示す如き簡単な等布竝に等變荷重の y と x との關係を示すもので (10) 式の應用に便利である。

Table 2.

荷重條件	y
	p
	$\frac{p}{c}(a+c-x)$
	$\frac{p}{c}(c-x)$
	$\frac{p}{c}(x-a)$
	$\frac{p}{c}x$
	$\frac{1}{c}\{c\omega_1+a(\omega_1-\omega_2)-x(\omega_1-\omega_2)\}$ 若し $a=0$ ならば, $y=\frac{1}{c}\{c\omega_1-x(\omega_1-\omega_2)\}$
	$\frac{1}{c}\{x(\omega_1-\omega_2)-a(\omega_1-\omega_2)+c\omega_2\}$ 若し $a=0$ ならば, $y=\frac{1}{c}\{x(\omega_1-\omega_2)+c\omega_2\}$

V. 架構の解法に應用したる

單一荷重に依る考察

1. 架構の解法に應用せらるゝ働の表式

既に述べた様に最小働の原理もカスチリアノ氏の法則と其據るところは同一なもので架構の解法には此兩者何れに依るも隨意である。

今前述の内働の式を總括し多少變形する時は次式が得られる。

$$(13) \quad \omega = \int \frac{M^2}{2EI} dx + \int \frac{N^2}{2EA} dx + \int a \frac{Q^2}{2GA} dx$$

此式中右邊第一項は彎曲のモーメントに因る内働第二項は直應力に因る内働第三項は應剪力に因る内働である。

従つて不靜定力の働點が變位を爲さざる場合或は内力として之れが働く場合には此不靜定未知量を $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ とし是等の X により ω を偏微分して零に置く時は

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial X_1} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X_1} dx + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial X_1} dx + \int a \frac{Q}{GA} \frac{\partial Q}{\partial X_1} dx = 0, \\ \frac{\partial \omega}{\partial X_2} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X_2} dx + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial X_2} dx + \int a \frac{Q}{GA} \frac{\partial Q}{\partial X_2} dx = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial \omega}{\partial X_n} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X_n} dx + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial X_n} dx + \int a \frac{Q}{GA} \frac{\partial Q}{\partial X_n} dx = 0. \end{cases}$$

若し應剪力の影響が彎曲のモーメント及直應力の影響に比して省略し得る場合には

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial X_1} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X_1} dx + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial X_1} dx = 0, \\ \frac{\partial \omega}{\partial X_2} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X_2} dx + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial X_2} dx = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial \omega}{\partial X_n} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X_n} dx + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial X_n} dx = 0. \end{cases}$$

更に又直應力の影響をも彎曲モーメントの影響に對して省略し得る場合には

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial X_1} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X_1} dx = 0, \\ \frac{\partial \omega}{\partial X_2} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X_2} dx = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial \omega}{\partial X_n} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X_n} dx = 0. \end{cases}$$

此 (15) 式及 (16) 式は最も應用廣いものである。

2. 架構の解法に應用したる單一荷重を基礎に置く方法

a. 垂直荷重をもつ鉸脚矩形架構

Fig. 9 に示す如き單徑間の鉸脚架構に於ては其鉸脚に働く垂直反力は單桁の場合と同様に簡単に之を見出すことが出来るが水平反力の H は不靜定

性のものでカステリアノ氏の法則又は最小働の原理によつて之を定める。

今 Fig. 9 (a) に示す鉸脚矩形架構が垂直單一荷重を任意點に荷せられた場合を考へるに應剪力の影響を考へない時は (15) 式から

$$\frac{\partial \omega}{\partial H} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} dx + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial H} dx = 0$$

今柱 AB 及 CD の慣性モーメント並に斷面積を I_1 及 A_1 で表はし横材 BC の慣性モーメント並に斷面積を夫々 I_2 及 A_2 で表はす時は上式から水平反力の H が次の様に得られる。(補綴編参照)

$$(17) \quad \begin{cases} H = \frac{Pa(l-a)}{2hl \left(1 + \frac{2}{3}n + \frac{r^2}{h^2} \right)}, \\ \text{茲に } n = \frac{I_2}{I_1} \frac{h}{l}, \\ r^2 = \frac{I_2}{A_2}. \end{cases}$$

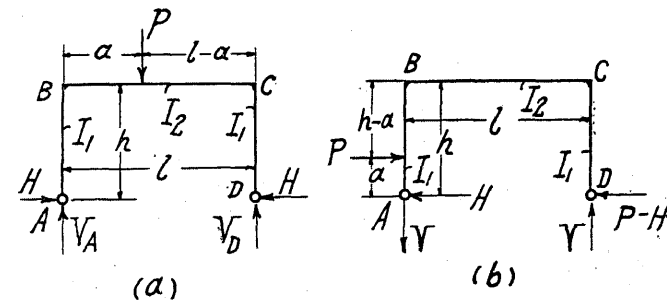


Fig. 9.

然るに直應力に因る影響は多くの場合彎曲モーメントに因る影響に比して省略し得る微量であるから (17) 式に於て $\left(\frac{r}{h}\right)^2$ を省略する時は

$$(18) \quad H = \frac{Pa(l-a)}{2hl\left(1 + \frac{2}{3}n\right)}$$

(18) 式は垂直單荷重に對する簡単な表式であるが極めて重要な意味をもつもので m 個の集中荷重 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_m$ が B 點より $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ なる距離に荷せられる場合には H は次式から見出される。

$$(19) \quad H = \frac{\sum_{r=1}^m P_r a_r (l - a_r)}{2hl\left(1 + \frac{2}{3}n\right)}$$

若し又荷重が垂直分布荷重である場合には本編IVに考へた様に (18) 式右邊に於て

$$P = y \, dx, \quad a = x.$$

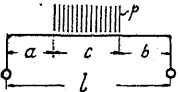
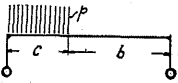
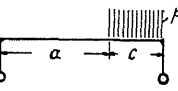
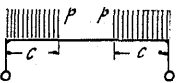
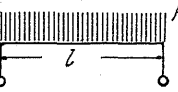
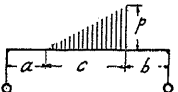
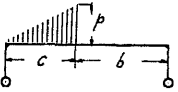
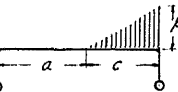


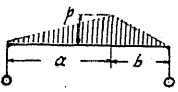
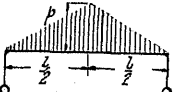
と置き H は次式から見出される。

$$(20) \quad H = \frac{\int yx(l-x)dx}{2hl\left(1 + \frac{2}{3}n\right)}$$

種々の荷重に對する y と x とに關しては Table 2 が参照として便利である。

(20) 式右邊に於て

Table 3.

	積分ノ形	F_1	H
	$p \int_a^{a+c} x(l-x) dx$	$\frac{pc}{6} \{6ab + 3cl - 2c^2\}$	$\frac{pc}{4hl} \frac{\{6ab + 3cl - 2c^2\}}{(3+2n)}$
	$p \int_0^c x(l-x) dx$	$\frac{pc^2}{6} \{3l - 2c\}$	$\frac{pc^2}{4hl} \frac{\{3l - 2c\}}{(3+2n)}$
	$p \int_a^l x(l-x) dx$	$\frac{pc^2}{6} \{3l - 2c\}$	$\frac{pc^2}{4hl} \frac{\{3l - 2c\}}{(3+2n)}$
	$2p \int_0^c x(l-x) dx$	$\frac{pc^2}{3} \{3l - 2c\}$	$\frac{pc^2}{2hl} \frac{\{3l - 2c\}}{(3+2n)}$
	$p \int_0^l x(l-x) dx$	$p \frac{l^3}{6}$	$\frac{pl^2}{4h(3+2n)}$
	$\frac{p}{c} \int_a^{a+c} (x-a)x(l-x) dx$	$\frac{p}{12c} \left\{ \begin{aligned} &4(l+a)[(a+c)^3 - a^3] \\ &- 6al[(a+c)^2 - a^2] \\ &- 3[(a+c)^4 - a^4] \end{aligned} \right\}$	$p \left\{ \frac{4(l+a)[(a+c)^3 - a^3] - 6al[(a+c)^2 - a^2] - 3[(a+c)^4 - a^4]}{8hlc(3+2n)} \right\}$
	$\frac{p}{c} \int_0^c x^2(l-x) dx$	$\frac{pc^2}{12} (l+3b)$	$\frac{p^2}{8hl} \frac{(l+3b)}{(3+2n)}$
	$\frac{p}{c} \int_a^l (x-a)x(l-x) dx$	$\frac{pc^2}{12} (l+a)$	$\frac{pc^2(l+a)}{8h(3+2n)}$
	$\frac{p}{l} \int_0^l x^2(l-x) dx$	$\frac{pl^3}{12}$	$\frac{pl^2}{8h(3+2n)}$
	$\frac{p}{l} \int_0^l \{l + (\alpha-1)x\} x(l-x) dx$	$\frac{pl^3}{12} (1+\alpha)$	$\frac{pl^2(1+\alpha)}{8h(3+2n)}$
	$\frac{p}{a} \int_0^a x^2(l-x) dx + \frac{p}{b} \int_0^b x^2(l-x) dx$	$\frac{p}{12} \{a^2(l+3b) + b^2(l+3a)\}$	$\frac{p(l^2 + lb - b^2)}{8h(3+2n)}$
	$\frac{4p}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2(l-x) dx$	$\frac{5pl^3}{48}$	$\frac{5pl^2}{32h(3+2n)}$

$$\int y x(l-x) dx = F_1$$

と置けば此値は種々の荷重に對し豫め計算し置くことを得るもので Table 3 は之を示すものである。又 H が定まれば B 點及 C 點に於ける彎曲モーメントは

$$(21) \quad M_B = M_C = -H \cdot h = -\frac{F_1}{l \left\{ 1 + \frac{2}{3}n \right\}}$$

而して單一荷重に對しては

$$(22) \quad M_B = M_C = -\frac{Pa(l-a)}{2l \left\{ 1 + \frac{2}{3}n \right\}}$$

又横材の B 點と荷重の間に於ては

$$(23) \quad M_x = \frac{P(l-a)}{l}x + M_B$$

荷重と C 點との間に於ては

$$(24) \quad M_x = \frac{Pa}{l}x + M_C$$

最大の彎曲モーメントは荷重點に生じ

$$(25) \quad M_{max} = \frac{Pa(l-a)}{2l} \frac{(3+4n)}{(3+2n)}$$

である。

b. 水平荷重をもつ鉸脚矩形架構

Fig. 9 (b) に示す鉸脚矩形架構が水平単荷重を一側の柱に荷せられた場合を考へるに應剪力竝に直應力の影響を彎曲モーメントに因る影響に比較して省略し得るものとすれば (16) 式から

$$\frac{\partial \omega}{\partial H} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} dx = 0$$

今柱の慣性モーメントを I_1 で表はし横材の慣性モーメントを I_2 で表はす時は上式から水平反力の H が得られる。(補綴編参照)

$$(26) \quad \begin{cases} H = P \frac{n(a^3 - 3ah^2 + 4h^3) + 3h^2(2h - a)}{6h^3 \left(1 + \frac{2}{3}n\right)}, \\ \text{茲に } n = \frac{I_2}{I_1} \frac{h}{l}. \end{cases}$$

(26) 式は水平単荷重に對する表式であるが m 個の集中水平荷重 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_m$ を脚部 A より $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ なる高さに於てもつ場合には H は次式から求まる。

$$(27) \quad H = \frac{\sum_{r=1}^m P_r \{n(a_r^3 - 3a_r h + 4h^3) + 3h^2(2h - a_r)\}}{6h^3 \left(1 + \frac{2}{3}n\right)}.$$

若し又荷重が水平分布荷重である場合には第一編 IV に考へた方法により (26) 式右邊に於て

$$P = y dx, \quad a = x$$

即ち P と a とを變數と考へ H は次式から得られる。

$$(28) \quad \begin{cases} H = \frac{1}{6h^3 \left(1 + \frac{2}{3}n\right)} F_2 \\ \text{茲に} \\ F_2 = \int y \{nx^3 - 3x(1+n)h^2 + h^3(6+4n)\} dx \end{cases}$$

此特別な場合として柱 AB が其全長に亙つて水平等布荷重をもつ場合の H を求めて見る。

此條件に對して y は一定値 p であり積分は零より高さ h まで集めることとなる。

故に (28) 式に於て

$$\begin{aligned} F_2 &= p \int_0^h \{nx^3 - 3x(1+n)h^2 + h^3(6+4n)\} dx \\ &= \frac{pl^4}{4} \{18 + 11n\} \end{aligned}$$

此値を (28) 式に入れば

$$H = \frac{ph(18 + 11n)}{8(3 + 2n)}.$$

若し又柱 AB の受ける荷重が下方に向つて増加する三角形の水平荷重である場合には

$$y = \frac{p(h-x)}{h}$$

但し p は脚部 A に於ける水平荷重の強度

故に (28) 式に於て

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{p}{h} \int_0^h (h-x) \{n x^3 - 3x(1+n)h^2 + h^3(6+4n)\} dx \\ &= \frac{5}{2} p h^4 \left(1 + \frac{31}{50} n\right) \end{aligned}$$

従つて H の値は

$$H = \frac{5}{12} p h \frac{\left(1 + \frac{31}{50} n\right)}{\left(1 + \frac{2}{3} n\right)}$$

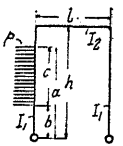
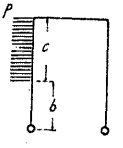
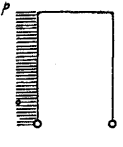
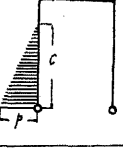
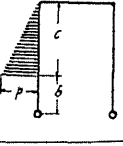
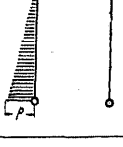
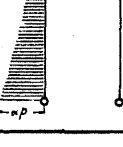
Table 4 は種々の水平荷重に對する F_2 及 H を示すものである

c. 垂直荷重をもつ鉸脚弧形架構

一徑間の鉸脚架構に於ては横材が弧形をなす場合も不靜定反力は水平推力の H のみである。今 Fig. 10 (a) に示す弧形架構に於て弧形部材の E 及 I が一定値であり且つ弧形の曲半徑が適當に大きく $dx=ds$ と考へ得る場合には(補綴編參照)

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} H &= \frac{\mathfrak{A}h + \mathfrak{B}}{h^2 l \left\{ 1 + \frac{2}{3} n + \left(\frac{r}{h} \right)^2 \right\} + 2 \{ \mathfrak{C}h + \mathfrak{M} \}} \\ \text{茲に } n &= \frac{I_2 h}{I_1 l}, \quad r^2 = \frac{I_2}{A_2}, \\ \mathfrak{A} &= \int_0^l M_0 dx, \end{aligned} \right.$$

Table 4.

	$f(x) = nx^3 - 3x(1+n)h^2 + h^3(6+4n), \quad n = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l}$		
	積分ノ形	F_2	H
	$p \int_b^a f(x) dx$	$\frac{pc}{4} \{n[(a^2 + b^2)(a+b) - 6h^2(a+b) + 16h^3] - 6h^2(a+b) + 24h^3\}$	$\frac{pc}{8h^3} \cdot \frac{n\{(a^2 + b^2)(a+b) - 6h^2(a+b) + 16h^3\} - 6h^2(a+b) + 24h^3}{3+2n}$
	$p \int_b^c f(x) dx$	$\frac{pc}{4} \{n(8h^3 + 4hc^2 - c^3) + 6h^2(2h+c)\}$	$\frac{pc}{8h^3} \cdot \frac{n(8h^3 + 4hc^2 - c^3) + 6h^2(2h+c)}{3+2n}$
	$p \int_0^l f(x) dx$	$\frac{ph^4}{4} \{18 + 11n\}$	$\frac{ph}{8} \cdot \frac{18 + 11n}{3+2n}$
	$\frac{p}{c} \int_0^c (c-x)f(x) dx$	$\frac{pc}{20} \{n(40h^3 - 10h^2c + c^3) + 60h^3 - 10h^2c\}$	$\frac{pc}{40h^3} \cdot \frac{n(40h^3 - 10h^2c + c^3) + 60h^3 - 10h^2c}{3+2n}$
	$\frac{p}{c} \int_b^c (h-x)f(x) dx$	$\frac{pc}{20} \{n(20h^3 + 15hc^2 - 4c^3) + 10h^2(3h+2c)\}$	$\frac{pc}{40h^3} \cdot \frac{n(20h^3 + 15hc^2 - 4c^3) + 10h^2(3h+2c)}{3+2n}$
	$\frac{p}{h} \int_0^l (h-x)f(x) dx$	$\frac{ph^4}{20} \{50 + 31n\}$	$\frac{ph}{40} \cdot \frac{50 + 31n}{(3+2n)}$
	$\frac{p(x-1)h^4}{h} \int_0^c (h-x)f(x) dx$ $+ p \int_0^c f(x) dx$	$\frac{p(x-1)h^4}{20} \{50 + 31n\}$ $+ \frac{ph^4}{4} \{18 + 11n\}$	$\frac{ph}{40} \cdot \frac{x(50 + 31n) + 8(5 + 3n)}{3+2n}$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{B} &= \int_0^l M_0 y \, dx, \\ \mathfrak{F} &= \int_0^l y \, dx, \\ \mathfrak{M} &= \frac{1}{2} \int_0^l y^2 \, dx. \end{aligned} \right.$$

式中 M_0 は BC を単桁と考へた場合の彎曲モーメントである

若し弧形部材 BC が

$$(a) \quad y = \frac{4f}{l^2} \{lx - x^2\}$$

の如き拋物線形をなし單一荷重 P をもつ場合には

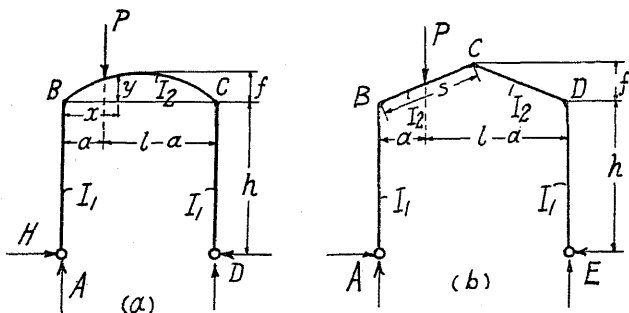


Fig. 10.

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{M} &= \int_0^l M_0 \, dx = \frac{1}{2} Pa(l-a), \\ \mathfrak{B} &= \frac{4f}{l^2} \int_0^l M_0 (lx - x^2) \, dx = \frac{Pa(l-a)f}{3l^2} \{l^2 + al - a^2\}, \\ \mathfrak{F} &= \frac{4f}{l^2} \int_0^l (lx - x^2) \, dx = \frac{2}{3} fl, \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \mathfrak{M} = \frac{8f^2}{l^4} \int_0^l (lx - x^2)^2 dx = \frac{4}{15} f^2 l. \right.$$

故に是等の値を (29) 式に入れ且つ直應力の影響を彎曲モーメントの影響に比較して微量と考へ之を省略すれば次式が得られる

$$(30) \quad H = Pa(l-a) \frac{5\{3hl^2 + 2f(l^2 + al - a^2)\}}{2l^3\left\{15h^2\left(1 + \frac{2}{3}n\right) + 4f(5h + 2f)\right\}}$$

従つて任意の垂直分布荷重に對しては

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} H = \frac{5}{2l^3\left\{15h^2\left(1 + \frac{2}{3}n\right) + 4f(5h + 2f)\right\}} F_1, \\ \text{茲に} \\ F_1 = \int yx(l-x)\{2f(l^2 + xl - x^2) + 3hl^2\} dx. \end{array} \right.$$

で與へられる。

(31) 式に於て $f=0$ と置けば (20) 式が得られる。

d. 垂直荷重をもつ鉸脚尖頂架構

Fig. 10. (b) に示す如き鉸脚尖頂架構の頂部材 BC が急傾斜をなさざるものに對しては前節に述べた弧形架構の曲線部が直線となれる特例と見做し多少の考慮を施すことによつて解くことが出来る。即ち此種の架構に於ては

$$x : y = \frac{l}{2} : f$$

であるから y は次式から求まる。

$$(a) \quad y = \frac{2f}{l} x$$

従つて垂直單荷重をもつものに對しては

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} = \int_0^l M_0 dx = \frac{P}{2} a(l-a), \\ \mathfrak{B} = \int_0^l M_0 y dx = \frac{1}{12l} Paf(3l^2 - 4a^2), \\ \mathfrak{C} = \int_0^l y dx = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} y dx = \frac{fl}{2}, \\ \mathfrak{M} = \frac{1}{2} \int_0^l y^2 dx = \int_0^{\frac{l}{2}} y^2 dx = \frac{f^2 l}{6}. \end{array} \right.$$

今直應力の影響を省略し得るものとするれば前節の (29) 式に是等の値を入れ次式が得られる。

$$(32) \quad H = \frac{Pa}{4l^2} \frac{6hl(l-a) + f(3l^2 - 4a^2)}{3h^2\left(1 + \frac{2}{3}n\right) + f(3h + f)}$$

此 (32) 式に於て P と a とに變數の考へを入れ適當に積分を施せば任意垂直荷重に對する水平推力の H が求まる。

此特例として等布荷重 p が BC 間に一樣にかゝる場合には

$$p \int_0^{\frac{l}{2}} x \{6hl(l-x) + f(3l^2 - 4x^2)\} dx = \frac{p}{16} (8h + 5f) l^4$$

であるから (32) 式から

$$(33) \quad H = \frac{pl^2}{64} \frac{8h+5f}{3h^2\left(1+\frac{2}{3}n\right)+f(3h+f)}$$

若し又 BCD 間に強度 p の等布荷重が一様に荷せられる場合には H は (33) 式の與へる値の二倍となり次式の如くである。

$$(34) \quad H = \frac{pl^2}{32} \frac{8h+5f}{3h^2\left(1+\frac{2}{3}n\right)+f(3h+f)}$$

H が求めれば他の任意點の彎曲モーメントは容易に之を求めることが出来る。

e. 垂直荷重をもつ固定脚矩形架構

Fig. 11 (a) に示す如き單層單徑間の固定脚矩形架構が其横材上に垂直荷重をもつ場合の不靜定應力の計算は單荷重 P を横材上の任意點にもつものに就て行へば他の任意の垂直荷重に對するものは此結果より積分又は求和法により求めることが出来る。

今

$$(a) \quad \begin{cases} k = \frac{I_2 h}{I_1 l} \\ \xi = \frac{a}{l} \end{cases}$$

と置く時は未知反力は次の様になる。(補綴編参照)

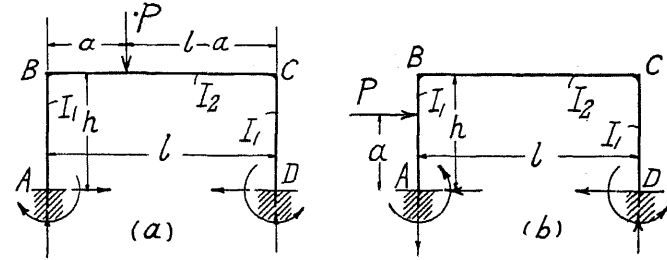


Fig. 11.

固定點 A に於ては

$$(35) \quad \begin{cases} M_A = \frac{Pa(l-a)}{2l} \frac{\{5k-1+2\xi(2+k)\}}{(2+k)(1+6k)}, \\ H_A = \frac{3Pa(l-a)}{2hl(2+k)}, \\ V_A = \frac{P(l-a)}{l} \frac{\{1+6k+\xi-2\xi^2\}}{1+6k}. \end{cases}$$

固定點 D に於ては

$$(36) \quad \begin{cases} M_D = \frac{Pa(l-a)}{2l} \frac{\{3+7k-4\xi-2k\xi\}}{(2+k)(1+6k)}, \\ H_D = \frac{3Pa(l-a)}{2hl(2+k)}, \\ V_D = \frac{Pa}{l} \frac{\{6k+3\xi-2\xi^2\}}{1+6k}. \end{cases}$$

若し又荷重が Fig. 8 (c) に示す如き最も一般的な垂直荷重である場合には (35) 式及 (36) 式より

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_A = \frac{\int_0^l yx(l-x) \left\{ 5k - 1 + 2(2+k) \frac{x}{l} \right\} dx}{2l(2+k)(1+6k)}, \\ H_A = H_D = \frac{3 \int_0^l yx(l-x) dx}{2hl(2+k)}, \\ V_A = \frac{\int_0^l y(l-x) \left\{ 1 + 6k + \frac{x}{l} - 2 \frac{x^2}{l^2} \right\} dx}{l(1+6k)}, \\ M_D = \frac{\int_0^l yx(l-x) \left\{ 3 + 7k - 4 \frac{x}{l} - \frac{2k}{l} x \right\} dx}{2l(2+k)(1+6k)}, \\ V_D = \frac{\int_0^l yx \left\{ 6k + 3 \frac{x}{l} - \frac{2x^2}{l^2} \right\} dx}{l(1+6k)}. \end{array} \right.$$

此特例として強度 p なる等布荷重が横材全部に荷せられる場合には (37) 式に於て $y=p$ であり積分は 0 より l 迄行ふこととなり次式が得られる。

$$\int_0^l x(l-x) \left\{ 5k - 1 + 2(2+k) \frac{x}{l} \right\} dx = \frac{l^3(1+6k)}{6},$$

$$\int_0^l x(l-x) dx = \frac{l^3}{6},$$

$$\int_0^l (l-x) \left\{ 1 + 6k + \frac{x}{l} - \frac{2x^2}{l^2} \right\} dx = \frac{l^2(1+6k)}{2},$$

$$\int_0^l x(l-x) \left\{ 3 + 7k - 4 \frac{x}{l} - \frac{2k}{l} x \right\} dx = \frac{l^3(1+6k)}{6},$$

$$\int_0^l x \left(6k + \frac{3x}{l} - \frac{2x^2}{l^2} \right) dx = \frac{l^2(1+6k)}{2}.$$

是等の値を (37) 式に入れる時は

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_A = M_D = \frac{pl^2}{12(2+k)}, \\ H_A = H_D = \frac{pl^2}{4l(2+k)}, \\ V_A = V_D = \frac{pl}{2} \end{array} \right.$$

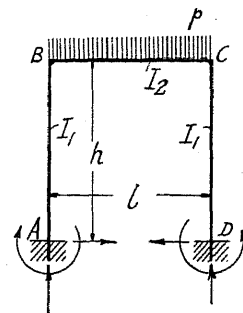


Fig. 12.

若し又 Fig. 7 (b) に示す如き三角形の等変荷重が横材全部に互つて荷せられる場合には (37) 式に於て

$$y = \frac{p}{l}x \quad \text{但し } p \text{ は右端に於ける荷重強度}$$

而して積分は 0 より l 迄行ふこととなり次式が得られる。

$$\frac{p}{l} \int_0^l x^2(l-x) \left\{ 5k - 1 + 2(2+k) \frac{x}{l} \right\} dx = \frac{pl^3}{60} \{7 + 31k\},$$

$$\frac{p}{l} \int_0^l x^2(l-x) dx = \frac{pl^3}{12},$$

$$\frac{p}{l} \int_0^l x(l-x) \left\{ 1 + 6k + \frac{x}{l} - \frac{2x^2}{l^2} \right\} dx = \frac{pl^2}{20} \{3 + 20k\},$$

$$\frac{p}{l} \int_0^l x^2(l-x) \left\{ 3 + 7k - 4 \frac{x}{l} - \frac{2k}{l} x \right\} dx = \frac{pl^3}{60} \{3 + 29k\},$$

$$\frac{p}{l} \int_0^l x^2 \left(6k + \frac{3x}{l} - \frac{2x^2}{l^2} \right) dx = \frac{pl^2}{20} \{7 + 40k\}.$$

是等の値を (37) 式に入れる時は

$$(39) \quad \begin{cases} M_A = \frac{pl^2(7+31k)}{120(2+k)(1+6k)}, \\ H = \frac{pl^2}{8h(2+k)}, \\ V_A = \frac{pl(3+20k)}{20(1+6k)}, \\ M_D = \frac{pl^2(3+29k)}{120(2+k)(1+6k)}, \\ V_D = \frac{pl(7+40k)}{20(1+6k)}. \end{cases}$$

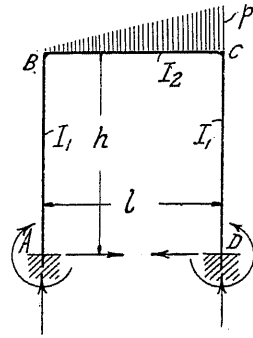


Fig. 13.

f. 水平荷重をもつ固定脚矩形架構

Fig. 11 (b) に示す如き固定脚矩形架構が柱 AB に単荷重 P を水平に荷せられた場合の未知反力は次の如くである。(補綴編参照)

$$(40) \quad \begin{cases} M_A = -\frac{Pa\delta}{2} \left\{ \frac{2}{\delta} - \frac{3+2k-\delta(1+k)}{2+k} - \frac{3k}{1+6k} \right\}, \\ H_A = P - H_D, \\ V_A = -V_D, \\ M_D = \frac{Pa\delta}{2} \left\{ \frac{3+2k-\delta(1+k)}{2+k} - \frac{3k}{1+6k} \right\}, \\ H_D = \frac{P\delta^2}{2(2+k)} \{ 3(1+k) - \delta(1+2k) \}, \\ V_D = \frac{3Pk\delta a}{l(1+6k)}. \end{cases}$$

茲に $\delta = \frac{a}{h}, \quad k = \frac{I_2}{I_1} \frac{h}{l}$

若し又荷重が Fig. 8 (c) に示す如き最も一般的なもの
が水平に荷せられる場合には (40) 式から

$$(41) \quad \begin{cases} M_D = \frac{1}{2h} \int yx^2 \left\{ \frac{h(3+2k)-x(1+k)}{h(2+k)} - \frac{3k}{1+6k} \right\} dx, \\ H_D = \frac{1}{2h^2(2+k)} \int yx^2 \{ 3h(1+k) - x(1+2k) \} dx, \\ V_D = \frac{3k}{lh(1+6k)} \int yx^2 dx, \\ M_A = M_D + V_D l - \int yx dx, \\ H_A = \int y dx - H_D, \\ V_A = -V_D. \end{cases}$$

此特例として強度 p なる等布荷重が一側の柱全部に水平に荷せられる場合には (41) 式に於て $y=p$ であり積分は 0 より h 迄行ふこととなり次式が得られる。

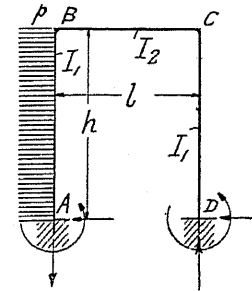


Fig. 14.

$$\begin{cases} M_D = \frac{p}{2h} \int_0^h x^2 \left\{ \frac{h(3+2k)-x(1+k)}{h(2+k)} - \frac{3k}{1+6k} \right\} dx \\ = \frac{ph^2}{24} \left\{ \frac{9+5k}{2+k} - \frac{12k}{1+6k} \right\}, \\ H_D = \frac{p}{2h^2(2+k)} \int_0^h x^2 \{ 3h(1+k) - x(1+2k) \} dx \end{cases}$$

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} &= \frac{ph}{8} \cdot \frac{(3+2k)}{(2+k)}, \\ V_D &= \frac{3kp}{lh(1+6k)} \int_0^h x^2 dx = \frac{pkh^2}{l(1+6k)}, \\ M_A &= M_D + V_D l - p \int_0^h x dx \\ &= -\frac{pk^2}{24} \left\{ 12 - \frac{9+5k}{2+k} - \frac{12k}{1+6k} \right\}, \\ H_A &= \frac{ph}{8} \cdot \frac{(13+6k)}{(2+k)}, \quad V_A = -V_D. \end{aligned} \right.$$

若し又 Fig. 15 に示す如き三角形の等変荷重が柱の全長に亙つて水平に荷せられる場合には (41) 式に於て

$$y = \frac{p}{h}(h-x),$$

但し p は最下端の荷重強度而して積分は 0 より h 迄行ふこととなり次式が得られる

$$\left\{ \begin{aligned} M_D &= \frac{p}{2k^2} \int_0^h (h-x)x^2 \left\{ \frac{h(3+2k)-x(1+k)}{h(2+k)} - \frac{3k}{1+6k} \right\} dx \\ &= \frac{pk^2}{120} \left\{ \frac{12+7k}{2+k} - \frac{15k}{1+6k} \right\}, \\ H_D &= \frac{p}{2h^2(2+k)} \int_0^h (h-x)x^2 \{ 3h(1+k) - x(1+2k) \} dx \end{aligned} \right.$$

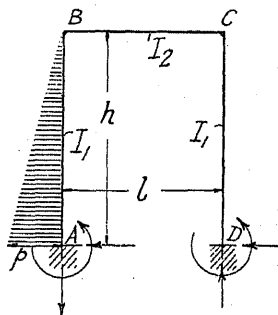


Fig. 15.

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} &= \frac{ph}{40} \cdot \frac{(4+3k)}{(2+k)}, \\ V_D &= \frac{3pk}{lh^2(1+6k)} \int_0^h (h-x)x^2 dx = \frac{pkh^2}{4l(1+6k)}, \\ M_A &= M_D + V_D l - \frac{p}{h} \int_0^h (h-x)x dx \\ &= -\frac{pk^2}{120} \left\{ 20 - \frac{12+7k}{2+k} - \frac{15k}{1+6k} \right\}, \\ H_A &= \frac{p}{h} \int_0^h (h-x) dx - H_D \\ &= \frac{ph}{40} \cdot \frac{36+17k}{(2+k)}, \\ V_A &= -V_D \end{aligned} \right.$$

結 論

架構の解法は其構造と荷重とが簡単な場合でも問題に當初直面した時其複雑性を豫想せしめ tedious な感を惹起さすのが普通である。故に複雑な問題は一層簡単になる様其問題を幾つかに分解し其個々に就て獨立して考へることが出来れば好都合な理である。即ち斯くの如き考察の下に問題を分けて考へることが出来るならば

個々の問題の取扱が簡明平易となる。

計算に誤謬あつた場合其發見が比較的容易であり且つ誤謬の餘波が及ぶ範圍が比較的狭く

てすむ。

規則的に計算の順序が成立する爲誤謬の起る可能性が減する。

此意味に於て單一荷重に就て第一段の計算を行ひ其結果を應用して他の任意の荷重に對する計算を第二段として行ふ。

贅言を要しないことであるが單一荷重による計算は其他の荷重に對する計算よりも簡單であり且つ動荷重の影響線を査定するにも應用せられる。

斯くの如く任意點に荷せられた單一荷重に因る解法は計算の基礎的意味をもつものとして重要である。