

## 第6章 ターピュレント運動<sup>1)</sup>

### 1. 圓管内のターピュレント運動に関する實驗公式

管内の流れに於ては Reynolds 数  $\frac{ud}{\nu}$  ( $d$  は内徑) が  $2,000 \sim 2,300$  の間にある 1 つの限界値を越せば、ターピュレント運動になる。ターピュレント運動は元來不定常的なものであるが、1 つの場所に於ける測定値は時間的平均値を以て表される。圓管の場合に就いては實驗的に次の點が知られてゐる。即ち壓力勾配は Hagen-Poiseuille の法則に於ける様に断面内の平均速度  $u$  に比例せず、この速度の或累數に比例してゐる。又管の半徑には 1 と餘り違はずぬ累數を以て比例する。長さ  $l$  の間の壓力低下  $P$  と、平均速度  $u_m$ 、内徑及び粘性の關係は Blasius によつて次の形に與へられた。

$$\frac{P}{l} = \lambda \cdot \frac{\rho}{2} \frac{u_m^2}{d^4} \dots \dots \dots (1)$$

ラミナ運動の場合には  $\lambda = \frac{64}{R_e}$  であったが、ターピュレント運動の領域では Reynolds 数  $R_e \sim 2 \cdot 10^5$  位までは滑かな管に對し

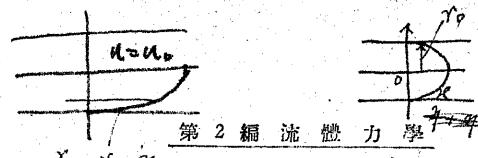
$$\lambda = 0.3164 R_e^{-\frac{1}{4}}$$

とおわれる。従つて

$$\frac{P}{l} = 0.3164 \cdot \frac{\rho}{2} \frac{u_m^{\frac{7}{4}} \nu^{\frac{1}{4}}}{d^4} \dots \dots \dots (2)$$

Kármán は壁面摩擦の強さ即ち壓力勾配が一定な場合には、粗い管内の速度分布曲線が滑らかな管内の分布曲線を平行に移動したものにほゝ等しい形(圖-177 の形)である事から  $(u_{max} - u)/\sqrt{\tau_0/\rho}$  を粗度に無關係に  $r/r_0$  ( $r_0$  は管の半徑即ち  $d/2$ ) のみの函數で表し、従つて速度  $u$  を次の形に假定した。

1) Turbulent motion.



$$\delta_0 - \delta = \eta$$

$$u = u_0 \varphi \left( \frac{r}{r_0} \right)$$

但し  $u_0$  は管中心線に於ける速度である。 $\tau_0$  を壁面摩擦の剪断應力、 $\eta = r_0 - r$  とし、ラミナ運動の場合に満足された形をターピュレントの場合まで延長すれば

$$u = \frac{\tau_0}{2\pi r_0} (2r_0\eta - \eta^2)$$

壁面の近く即ち  $\eta$  の小さい部分に對しては

$$u = f(\mu, \rho, \tau_0, \eta) = f_1(\mu, \rho, \tau_0) \eta^\kappa + \dots$$

の形で表されるから、級數の第1項のみを取り、兩邊のディメンションを比較して、且  $(\frac{\tau_0}{\rho})^{\frac{1}{2}}$  及び  $\frac{\nu}{\eta}$  が速度ディメンションを有する事を考へれば、Kármán の與へた唯一の可能な形として次式が得られる。

$$u = B \cdot \left( \frac{\tau_0}{\rho} \right)^{\frac{1+\kappa}{2}} \left( \frac{\eta}{\nu} \right)^\kappa$$

(2) から  $\tau_0$  は  $u$  の  $\frac{7}{4}$  乗に比例せねばならないから

$$\frac{1+\kappa}{2} = \frac{4}{7}, \quad \therefore \kappa = \frac{1}{7}$$

$$\therefore u = B \left( \frac{\tau_0}{\rho} \right)^{\frac{4}{7}} \left( \frac{\eta}{\nu} \right)^{\frac{1}{7}} \quad \dots \dots \dots (3)$$

之を  $\frac{1}{7}$  乗法則と言ひ、 $B$  は常数である。壁面に於ける剪断應力は

$$\tau_0 = \left( \frac{1}{4} \right) \rho \nu^{\frac{1}{4}} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left( \frac{u}{\eta} \right)^{\frac{7}{4}} \quad \dots \dots \dots (4)$$

常数  $B$  は滑らかな壁面に對しては一定の値を持つてゐる。その時の  $B$  の値を決定するには、(3) を管の中央まで延長出来るものと考へれば  $r = 0$  にて  $u = u_0$  であるから

$$u = u_0 \left( 1 - \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{7}} \quad \dots \dots \dots (5)$$

又壁面の近くでは簡単に  $f = \frac{u_0}{r_0^{\frac{1}{7}}}$  と書いて

$$u = f \cdot r^{\frac{1}{7}}$$

従つて (3) を用ひて  $\frac{\partial p}{\partial x}$  を計算すれば

$$B \cdot \left( \frac{fu^2}{8} \right)^{\frac{4}{7}} \nu^{-\frac{1}{7}} = u_0 r_0^{-\frac{1}{7}} = f$$

(5) から  $\frac{u_m}{u_0}$  を計算すれば 0.816 になり、従つて  $B$  の値は

$$B = 2^{\frac{1}{7}} \left( \frac{8}{0.816} \right)^{\frac{4}{7}} \cdot 0.816 = 8.57 \quad \dots \dots \dots (6)$$

(5) の代りに

$$u = u_0 \left\{ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^n \right\}^{\frac{1}{7}}, \quad (n = 1.25 \sim 2.00) \quad \dots \dots \dots (7)$$

とすれば 図-217 に示す様に更によく實驗に一致させ得る。又は實驗値に合ふ様に  $B = 8.7$  と取れば

$$u = 8.7 \left( \frac{\tau_0}{\rho} \right)^{\frac{4}{7}} \left( \frac{\eta}{\nu} \right)^{\frac{1}{7}} \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 0.0225 \rho \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[ u^2 \left( \frac{\nu}{u\eta} \right)^{\frac{1}{4}} \right] \\ &= 0.0225 \rho \nu^{\frac{1}{4}} f^{\frac{7}{4}} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (9)$$

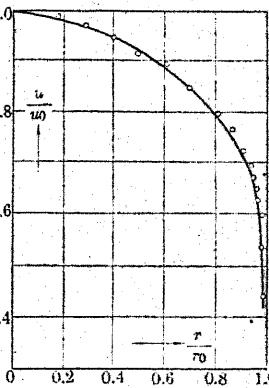


図-217 (Stranton)

その他の公式としては Jakob 及び Erk

が  $8 \cdot 10^4 < R_e < 4 \cdot 10^5$  に對してターピュレント流の  $\lambda$  の値を

$$\lambda = 0.00714 + 0.6104 R_e^{-3.5} \quad \dots \dots \dots (10)$$

の形で與へ、Schiller は自身の實驗によつて  $2 \cdot 10^4 < R_e < 2 \cdot 10^5$  の間の領域を通じて次の公式を與へた。

$$\lambda = 0.0054 + 0.396 R_e^{-0.3} \dots \dots \dots (11)$$

圖-218 は之等の實驗公式及び Hermann の實驗値等を比較したものである。

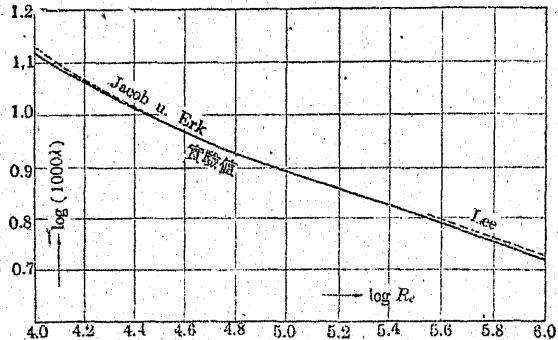


圖-218

## 2. ターピュレント運動のエネルギー

運動がラミナ状態からターピュレント状態に移る時の Reynolds 数の限界値は大體  $R_{ee} = 2,000$  位の程度であるが、實驗の方法によつては之よりも遙かに大きくなる事もある。 $R_e$  が充分大きくなり、ターピュレントの状態が完全に發達した後の問題に關しては、Reynolds が初めてエネルギーの立場から考へた。

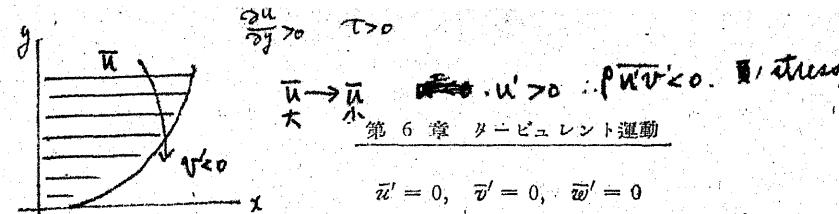
短い時間  $\tau$  を考へて

$$\bar{u} = \frac{1}{\tau} \int_{t-\frac{1}{2}\tau}^{t+\frac{1}{2}\tau} u dt, \quad \bar{v} = \frac{1}{\tau} \int_{t-\frac{1}{2}\tau}^{t+\frac{1}{2}\tau} v dt, \quad \bar{w} = \frac{1}{\tau} \int_{t-\frac{1}{2}\tau}^{t+\frac{1}{2}\tau} w dt$$

と書けば、 $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 、 $\bar{w}$  は點  $(x, y, z)$  に於けるその間の平均速度である。實際の速度を

$$\bar{u} = u + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w', \dots \dots \dots (12)$$

と書けば、 $u'$ 、 $v'$ 、 $w'$  はターピュレント運動の成分であつて、明らかに



Reynolds は第 5 章の (9) 式を次の形に書いた。(P276.)

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \rho X + \frac{\partial}{\partial x} (p_{xx} - \rho \bar{u} u) + \frac{\partial}{\partial y} (p_{yy} - \rho \bar{v} v) + \frac{\partial}{\partial z} (p_{zz} - \rho \bar{w} w) \dots \dots \dots (13)$$

(增加)

こゝに於て例へば 2 次元の運動の場合に  $\bar{u}$  が  $y$  方向に變化してゐるものとすれば、 $\bar{u}$  の大きい部分から  $\bar{u}$  の小さい部分に移動した流體の小塊では  $v' < 0$  であつて、之は多くの場合移つた後の位置に於ける  $\bar{v}$  よりも大きい  $v$  の値を持つてゐるから  $v' > 0$  である事が多い。反対に  $\bar{u}$  の小さい部分から  $\bar{u}$  の大きい部分に移動した流體の小塊は  $v' > 0$  であつて、之は多くの場合  $v' < 0$  である。従つてこの様な運動では見掛けの剪断應力として  $-\rho \bar{u} v'$  が存在してゐるのである。この事實から得た關係の正しい事が後に述べる處によつて明らかになる。

(13) は運動量の變化と外力の關係を示す式である。この式の各項に平均値を用ひて、且 (12) の關係を代入すれば

$$\bar{u}u = \bar{u}\bar{u} + \bar{u}'\bar{u}', \quad \bar{v}v = \bar{v}\bar{v} + \bar{v}'\bar{v}', \quad \bar{w}w = \bar{w}\bar{w} + \bar{w}'\bar{w}' = \bar{u}\bar{u} + 2\bar{u}'\bar{u}' + \bar{u}'\bar{u}'$$

であるから (13) は

$$\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \rho X + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_{xx} - \rho \bar{u}\bar{u} - \rho \bar{u}'\bar{u}') - \rho \bar{u}'\bar{v}' \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Reynolds} \\ - \rho \bar{u}'\bar{v}' \\ - \rho \bar{u}'\bar{w}' \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{stress} \\ + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p}_{yy} - \rho \bar{u}\bar{v} - \rho \bar{u}'\bar{v}') + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p}_{zz} - \rho \bar{u}\bar{w} - \rho \bar{u}'\bar{w}') \dots \dots \dots (14)$$

之に對する連續方程式は

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (15)$$

之から見れば應力成分

$$\bar{p}_{xx}' = -\rho \bar{u}'\bar{u}', \quad \bar{p}_{yy}' = -\rho \bar{u}'\bar{v}', \quad \bar{p}_{zz}' = -\rho \bar{u}'\bar{w}'$$

を附加すれば、ターピュレント運動の微分方程式は Navier-Stokes の運動

方程式と同形になる。(14) と (15) から

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho \bar{u} &= \rho X + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{xx} - \rho \bar{u}' \bar{u}') \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (\rho_{yx} - \rho \bar{u}' \bar{v}') + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_{xz} - \rho \bar{u}' \bar{w}') \end{aligned}$$

$-\rho \bar{u}' \bar{u}'$  等を Reynolds 應力と言ふ。之と同じ形の 3 つの式に夫々  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  を乗じて加へれば

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\rho}{2} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) = \rho (X\bar{u} + Y\bar{v} + Z\bar{w}) \\ &+ \bar{u} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_{xx} - \rho \bar{u}' \bar{u}') + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p}_{yx} - \rho \bar{v}' \bar{v}') + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p}_{xz} - \rho \bar{u}' \bar{w}') \right\} \\ &+ \bar{v} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_{xy} - \rho \bar{v}' \bar{u}') + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p}_{yy} - \rho \bar{v}' \bar{v}') + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p}_{yz} - \rho \bar{v}' \bar{w}') \right\} \\ &+ \bar{w} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_{xz} - \rho \bar{w}' \bar{u}') + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p}_{yz} - \rho \bar{w}' \bar{v}') + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p}_{zz} - \rho \bar{w}' \bar{w}') \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

外力がなく、且境界面の固定した閉曲面なる場合を考へれば

$$\begin{aligned} \frac{dT_0}{dt} &= - \iiint \phi_0 dx dy dz + \iiint \psi dx dy dz \\ \text{但し } T_0 &= \frac{\rho}{2} \iiint (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) dx dy dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \bar{p}_{xx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{p}_{yy} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{p}_{zz} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \bar{p}_{yz} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \\ &+ \bar{p}_{xy} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) + \bar{p}_{xz} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \\ &= \mu \left\{ 2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\psi = \rho \left\{ \bar{u}' \bar{u}' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}' \bar{v}' \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w}' \bar{w}' \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \bar{v}' \bar{w}' \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \right\}$$

$$+ \bar{w}' \bar{u}' \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) + \bar{u}' \bar{v}' \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \} \quad (17)$$

之はターピュレント運動中の平均運動のエネルギー変化の割合を表すものであつて、右邊の第1項は平均運動だけのエネルギーの消耗、第2項は附加應力  $\bar{p}_{xx}', \bar{p}_{yy}', \bar{p}_{zz}'$  等によるエネルギーの消費である。従つて實際の運動のエネルギーを  $T$  とし

$$T' = \frac{\rho}{2} \iiint (u'^2 + v'^2 + w'^2) dx dy dz$$

とすれば

$$\bar{T} = T_0 + T'$$

實際の運動エネルギー  $\bar{T}$  の變化の割合は、平均運動による消費と攪亂運動による消費との和であるから

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}}{dt} &= - \iiint \phi_0 dx dy dz - \iiint \psi dx dy dz \\ \text{但し } \phi' &= \mu \left\{ 2 \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

(17) と (18) を比較すれば

$$\frac{d\bar{T}'}{dt} = - \iiint \phi' dx dy dz - \iiint \psi dx dy dz \quad (19)$$

$\phi'$  は必ず正であるが、 $\psi$  の符號は狀態により一定しない。

Hagen-Poiseuille の流れの問題に就いて考へれば、運動方程式中の流れに反対に働く剪断應力は (19) により  $\psi$  の項即ち運動量の移動を表す項によつて  $\rho v' u'$  だけ小さくなる事を考へて直ちに次式が得られる。

但し

$$\left. \begin{aligned} \pi r^2 (\bar{P}_1 - \bar{P}_2) &= -2\pi r l (\tau_0 - \rho w' u') \\ \tau_0 &= \mu \frac{d\bar{w}}{dr} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

$\rho w' u' = J$ ,  $\bar{P}_1 - \bar{P}_2 = \bar{P}$  と書けば

$$\frac{\bar{P}}{l} r = -2\mu \frac{d\bar{w}}{dr} + 2J$$

$J$  は  $r$  の未知函数で管壁では常に零になる。又管壁  $r = r_0$  に於ては

$$\frac{\bar{P}}{l} r_0 = -2\mu \left( \frac{d\bar{w}}{dr} \right)_{r_0}$$

であるから、之を用ひて上式を積分すれば

$$\bar{w} = \frac{\bar{P}}{4\mu l} (r_0^2 - r^2) - \frac{1}{\mu} \int_r^{r_0} J dr \dots\dots\dots(21)$$

之から流量  $Q$  に對しては

$$Q = \frac{\pi r_0^4 \bar{P}}{8\mu l} - \frac{\pi}{\mu} \int_0^{r_0} r^2 J dr \dots\dots\dots(22)$$

### 3. Prandtl-Kármán の理論

ラミナ流中の抵抗は  $\tau = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$  の形で與へられるが、ターピュレント流に對しては Boussinesq は

$$\tau = \rho \varepsilon \frac{d\bar{u}}{dy} \dots\dots\dots(23)$$

の形を與へ、 $\varepsilon$  は時間と場所によつて變化する係數とした。この  $\varepsilon$  は [長さ] × [速度] のディメンションを有し、渦粘性係數<sup>2)</sup>と稱する。Prandtl は流體分子の自由運動距離に相當する長さ  $\lambda$  を考へ、平均運動方向に垂直な平均速度を  $v = \bar{v}'$  として

$$\varepsilon = v \lambda$$

を以て表した。即ち  $v$  は流體分子が違つた層の間を交流する速度であつて、Prandtl は之によつて各層の間で運動量  $\rho \bar{u}$  の輸送が行はれるものと考へ

2) Coefficient of turbulence (又は Coef. of eddy viscosity).

た。かく考へれば  $u'$  の變化は輸送運動量によるのであるから、流體塊が  $y_1$  から  $y_2$  に移る事により

$$\rho u' = \rho \{ \bar{u}(y_2) - \bar{u}(y_1) \} = \rho (y_2 - y_1) \frac{d\bar{u}}{dy}$$

$y_2 - y_1$  は流體塊の運動距離であるから  $l$  と置く事が出来る。

$$\therefore \rho u' = \rho l \frac{d\bar{u}}{dy}$$

又ターピュレント運動は等方性のものと假定すれば  $\bar{u}^2 = \bar{v}^2$  であり、又前に述べた様に  $u'$  と  $v'$  の符號の間には相關性があるから

$$\rho |u' v'| = \rho |\bar{u}^2| = \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$

$\tau = -\rho u' v'$  は  $\frac{d\bar{u}}{dy}$  と同符號を持つから (約束)

[ $\rho \bar{u} \bar{u} \ll \rho \bar{u} \bar{u}$ ]

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy} \dots\dots\dots(24)$$

即ち  $\varepsilon = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|$  となる。Taylor の理論に於ては  $\varepsilon$  によって輸送さ

れるのは運動量でなく渦動度  $\bar{v}'$  の様な量であるとして、(24) と同様な形を導いてゐる。

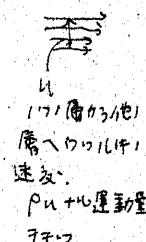
Nikuradse によればこの渦粘性係數  $\varepsilon$  は  $l$  即ち所謂混合距離<sup>3)</sup>の他に Reynolds 數によつて定まる。 $\tau$  は半徑方向に直線的に變化するものとし、半徑を  $a$ 、壁からの距離を  $y$  とすれば、

$$\tau = \tau_0 \left( 1 - \frac{y}{a} \right)$$

で表される。之から  $\tau$  が計算され、從つて (23) から  $\varepsilon$  が求められる。圖-219 はディメンションのない公式として

$$\frac{\varepsilon}{u_{max} a} = f \left( \frac{y}{a} \right)$$

3) Mixing length.



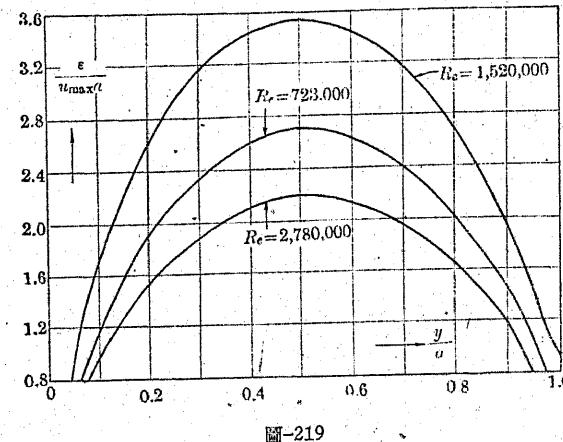


圖-219

の関係を求めたものである。渦粘性係数  $\epsilon$  は壁面では零で、そこから最大値まで昇り、更に管の中心では極小値まで下る。Reynolds 数と  $\epsilon$  の関係は  $R_e$  が大きくなる程その変化は小さい。

(24) から混合距離  $l$  を求めれば

$$l = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} : \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$

圖-220 は Nikuradse の実験値によつて  $l$  を計算し、 $\frac{l}{a}$  と  $\frac{y}{a}$  の関

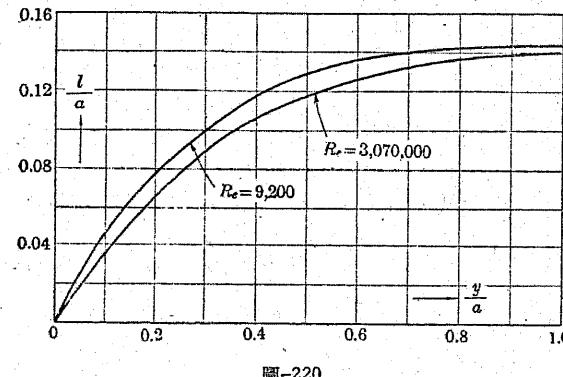


圖-220

係を示したものである。 $l$  は Reynolds 数には殆ど無関係で、壁面から中心に至るに従つて大きくなつてゐる。

Kármán は横運動にも力学的相似性があると假定して、粘性を無視して混合距離と速度分布の関係を次の式で表した。

$$l \cong \frac{d\bar{u}}{dy} / \frac{d^2\bar{u}}{dy^2}$$

之と (24) から

$$\frac{\tau}{\rho} = k^2 \frac{\left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^4}{\left( \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right)^2} \quad \dots \dots \dots (25)$$

但し  $k$  は常数である。

2つの平面壁の間の平面運動を考へれば、(25) から。

$$k^2 \frac{\left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^4}{\left( \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right)^2} = \frac{\tau_0 y}{\rho h}$$

但し  $y$  は中心線からの距離、 $h$  は壁面間隔である。之を積分すれば

$$\bar{u} = \bar{u}_{\max} + \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left\{ \log \left( 1 - \sqrt{\frac{y}{h}} \right) + \sqrt{\frac{y}{h}} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

Kármán は Dönsch 及び Nikuradse の實験と比較して常数  $k$  の値として 0.36 を得た。

圖-221 から見れば (26) から得られた速度分布曲線は實験と非常によく一致してゐる。

然し (26) を求める時には粘性を無視してゐるから壁面に沿つた薄いラミナ層即ちラミナ底

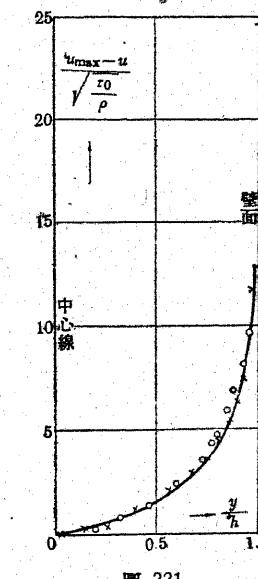


圖-221

層では満足されない。(3) から見れば壁面附近の速度分布は  $\tau_0$ ,  $\rho$  及び  $\nu$  のみに關係するから、壁面に沿つたラミナ底層の厚さ  $\delta$  はディメンション方程式から、次の様に定められる。

$$\delta = \text{const.} \frac{\nu}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}}$$

$y = \delta$  の位置に於ける速度も同様にして

$$\bar{u}_\delta \cong \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

そこで  $\bar{u}_\delta = A \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ ,  $\delta = B \frac{\nu}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}}$  として、 $\delta \ll h$  の時を考へ、(26)

に代入すれば

$$\dot{\bar{u}}_{\max} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[ \log \frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} h}{\nu} + C \right] \quad (27)$$

但し  $C = kA + \log 2 - 1 - \log B$

この式は  $C$  を適當に變化させれば圓管にも適用する事が出来る。即ち

$$(R_e)_{u \cdot \max} = \frac{\dot{\bar{u}}_{\max} d}{\nu}, \quad \Psi = \frac{2\tau_0}{\rho u_{\max}^2}$$

と置けば新しい抵抗の式として次の式が得られる。

$$\frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{\Psi}} = \log \{(R_e)_{u \cdot \max} \sqrt{\Psi}\} + C' \quad (28)$$

之を實驗値と比較すれば

$$k = 0.38, \quad C' = 1.14$$

となる。又之から (1) の  $\lambda(R_e)$  は次の形で與へられる。

$$\lambda = \frac{1}{(2.75 \log_{10}(R_e \sqrt{\lambda}) - 1.22)^2} \quad (29)$$

或は  $u \propto (\frac{y}{\nu})^{\frac{1}{2}}$  の法則の代りに之を Nikuradse の實驗に合ふ様に補正すれば

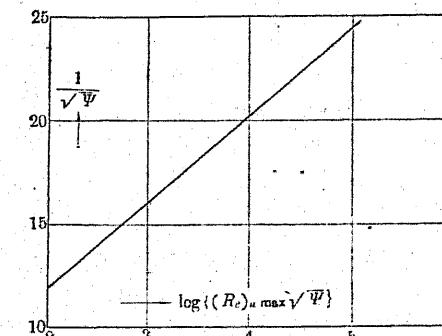


圖-222

$$\lambda = \frac{1}{(2.75 \log_{10}(R_e \sqrt{\lambda}) - 1.60)^2} \quad (30)$$

#### 4. 粗い壁を持つた管の流れ

半径  $a'$  なる管壁の粗度を表す量として或長さ  $\epsilon$  を用ひ、之を絶對粗度<sup>4)</sup>  $\frac{\epsilon}{a}$  を相對粗度<sup>5)</sup> と稱する。

圖-223 の様に  $\epsilon$  を壁面の凹凸の高さとすれば、ラミナ流の狀態にある間は

Hagen-Poiseuille の法則により<sup>6)</sup>

$$u_\epsilon = \frac{4p}{4\mu L} (a^2 - (a - \epsilon)^2) = \frac{4p}{4\mu L} (2ae - \epsilon^2)$$

$$\therefore u_\epsilon \cong \frac{4p}{4\mu L} \cdot 2ae \quad (31)$$

従つて壁面附近の流れに對する Reynolds 數は

$$R_{e\epsilon} = \epsilon \frac{4p}{4\mu L} \frac{2ae}{\nu} = \frac{\epsilon \rho u^2}{a R_e} \frac{as^2}{\mu L \nu} = 8 \left( \frac{\epsilon}{a} \right)^2 R_e \quad (32)$$

4) Absolute roughness. 5) Relative roughness.

6) 本節以下では  $\bar{u}$  は断面内の  $u$  の平均値を表す事とし、前2節の記號を用ひな

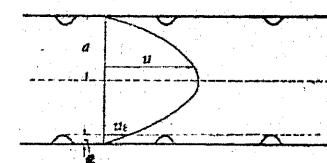


圖-223

$R_e$  は管全體としての Reynolds 数である。Wieselsberger の観測によれば、壁面に渦の出来初めるのは  $R_{e2} = 50$  前後である。従つてラミナ流からターピュレント流に移る限界は

$$\left(\frac{\epsilon}{a}\right)_c \approx \frac{4.95}{\sqrt{R_e}} \quad \dots \dots \dots (33)$$

例へば  $R_e = 2,000$  ならば  $\left(\frac{\epsilon}{a}\right)_c = 0.11$ ,  $R_e = 20,000$  ならば 0.035 になる。

次にターピュレント流の方から相対速度の限界値を求めれば、壁面に沿ふ薄いラミナ底層では：

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

然るに壁面摩擦はその断面の圧力低下の割合に等しいから

$$\mu \frac{du}{dy} \cdot 2\pi a = \frac{4\rho}{\lambda} \cdot \pi a^2 = \lambda \frac{\rho \bar{u}^2}{4a} \cdot \pi a^2$$

$$\frac{du}{dy} = \lambda \frac{\bar{u}^2}{8\nu}$$

$R_{e2}$  の限界値を 50 と置き、ラミナ底層内の速度分布を直線的と假定すれば

$$\begin{aligned} \left(\frac{\epsilon}{a} \cdot \frac{du}{dy} \cdot \frac{\epsilon}{\nu}\right)_c &= \left(\frac{\epsilon^2}{\nu} \cdot \frac{\lambda \bar{u}^2}{8\nu}\right)_c = 50 \\ \left(\frac{\epsilon^2}{a^2}\right)_c &= 400 \cdot \frac{\nu^2}{\lambda \bar{u}^2 a^2} = \frac{1,600}{\lambda R_e^2} \\ \left(\frac{\epsilon}{a}\right)_c &= \frac{400}{R_e \sqrt{\lambda}} \quad \dots \dots \dots (34) \end{aligned}$$

例へば  $R_e = 4,000$ ,  $\lambda = 0.04$  とすれば  $\left(\frac{\epsilon}{a}\right)_c = 0.05$  となる。

壁面の粗度が大きくなつて凹凸が壁面に沿ふラミナ底層の外まで出る様になると抵抗係数  $C$  が粗度に關係して来る。Nikuradse が圓管の内壁に砂粒

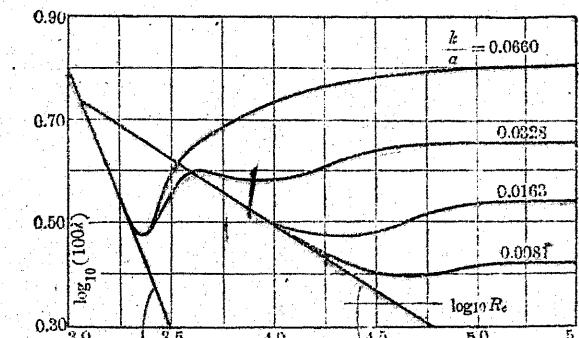


図-224 Laminar Re  $\sim R_e^{-\frac{1}{4}}$

を吹き付けて粗面にした管に就いて實験した結果は 図-224 の様になつた。但し  $\epsilon$  は砂粒の徑である。

### 5. 固體に及ぼす力

流體中を一様速度  $v$  を以て動く固體の受ける抵抗力  $W$  は次の形で表される。

$$W = cF \frac{\rho}{2} v^2 \quad \dots \dots \dots (35)$$

但し  $F$  は固體の運動方向への投影面積、 $c$  は抵抗係数である。

$c$  は Reynolds 数  $R_e$  の函数であつて、同時に固體の形によつて多少異なる値を取る。その大きさは大體 図-225 に示す様になる。

非常に薄い平板が無限に擴がつた流體中を平板の面内で運動する時の抵抗は摩擦抵抗であつて、境界層理論から計算される。

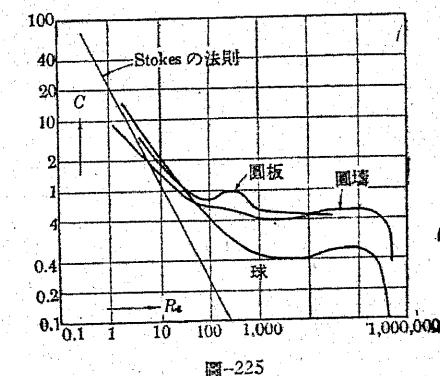


図-225

例へば境界層内の運動がラミナ運動と看做される場合に就いて考へれば、平板が静止して流體がその面に平行に一樣速度  $U$  を以て動くものとして、面内に  $x$  軸を取る。境界層内では  $\frac{\partial p}{\partial y}$  は非常に小さいから、結局この中でも壓力は一定であつて、第5章の(59)は

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \dots \dots \dots (36)$$

境界條件は  $y = 0$  で  $u = v = 0$ 、境界層の外側で  $u = U$  である。

Blasius は之を解いて、板の面での剪断應力

$$\tau = \left[ \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0}$$

を求め、幅  $l$ 、長さ  $b$  の平板に對して次の結果を得た。

$$W = \left[ 2\mu b \int_0^l \frac{\partial u}{\partial y} dx \right]_{y=0} = 1.327 b \sqrt{\mu \rho U^3 l} \quad \dots \dots \dots (37)$$

この時の抵抗係數  $c_f$  は

$$c_f = \frac{W}{2bl \frac{\rho}{2} U^2} = 1.327 \sqrt{\frac{\nu}{Ul}} = \frac{1.327}{\sqrt{R_e}} \quad \dots \dots \dots (38)$$

然し板が長くなれば境界層内でラミナ運動となつてゐるのは尖端部だけであつて、他の部分では境界層内部でもターピュレント運動である。Burgers 及び van der Hegge Zynen が圓管に就いて實驗した結果によれば、境界層内でターピュレント運動になるのは内徑  $d$  の圓管で  $R_e$  が  $1,650 \sim 3,500$  にある境界に達した時であり、Hansen が之を理論的に求めた處によればこの境界は  $R_e$  が 3,100 の處である。

Prandtl 及び Kármán は次の様にして境界層内でターピュレント運動の現れた時の抵抗を求めた。即ち (62) から  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  なる事によつて

$$-\frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy + U \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy = \nu \left( \frac{du}{dy} \right)_{y=0} \quad \dots \dots \dots (39)$$

この中の摩擦抵抗  $\mu \left( \frac{du}{dy} \right)_{y=0}$  を

$$\tau_0 = 0.0225 \rho \nu^{\frac{1}{4}} \left( \frac{u}{\delta} \right)^{\frac{7}{4}}$$

で置き換へ、境界層内の速度分布を

$$u = U \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}}$$

で表す。従つて

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta U^2 \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{2}{7}} dy - \rho U \frac{d}{dx} \int_0^\delta U \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} dy \\ = -0.0225 \rho U^2 \left( \frac{\nu}{U \delta} \right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

之を計算すれば

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = 0.0225 \left( \frac{\nu}{U \delta} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\delta^{\frac{1}{4}} d\delta = \frac{72}{7} \cdot 0.225 \left( \frac{\nu}{U} \right)^{\frac{1}{4}} dx$$

之を積分して  $x = 0$  で  $\delta = 0$  とすれば

$$\delta = 0.37 \left( \frac{\nu}{U} \right)^{\frac{1}{6}} x^{\frac{4}{5}} \quad \dots \dots \dots (40)$$

之を用ひて平板に働く抵抗力  $W$  を計算すれば

$$\begin{aligned} W = 2b \int_0^l \tau_0 dx &= 0.045 b \rho U^2 \left( \frac{\nu}{U} \right)^{\frac{1}{4}} \int_0^l \delta^{-\frac{1}{4}} dx \\ &= \frac{0.045}{0.37^{\frac{1}{4}}} b \rho U^2 \left( \frac{\nu}{U} \right)^{\frac{1}{6}} \int_0^l x^{-\frac{1}{5}} dx = 0.072 b (\rho^4 U^9 l^4 \mu)^{\frac{1}{6}} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (41)$$

従つてこの場合の抵抗係數  $c_f$  は

$$c_f = 0.072 \left( \frac{\nu}{U l} \right)^{\frac{1}{6}} = \frac{0.072}{\sqrt[5]{R_e}} \quad \dots \dots \dots (42)$$

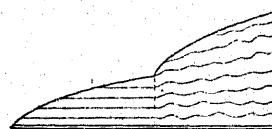


圖-226

尖端を有する平板では前端から或定まつた距離までラミナ運動になるから、この様な場合に對しては Prandtl は次の様に表した。

$$C_f = \frac{0.073}{\sqrt{\frac{R_e}{R}}} - \frac{1,600}{R} \quad \dots\dots(43)$$

### 6. Boussinesq の流水論-1

一般水理學に直接關係ある問題として Boussinesq の流水論の一部を述べる。定まつた方向を有する水流を考へて、第1編第2章3節の考へ方により Navier-Stokes の方程式を變形し、流れの方向を  $x$ 、その方向の速度を  $v$  として  $\frac{\partial}{\partial x} (\epsilon \frac{\partial v}{\partial x})$  の項を省略すれば

$$\frac{1}{g} \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\epsilon}{\rho g} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\epsilon}{\rho g} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + i - \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial x}$$

底勾配を  $i$  として、 $i - \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial x} = I$  と置けば

$$\frac{1}{g} \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\epsilon}{\rho g} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\epsilon}{\rho g} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + I \quad \dots\dots(44)$$

$\epsilon$  は  $\rho g \sigma_1 R v_b F \left( \frac{y}{R}, \frac{z}{R} \right)$  で與へられてゐるが、境界條件としては

$$\text{壁面 } S \text{ の上で } \epsilon \frac{\partial v}{\partial n} = - \rho g \sigma_2 v_b^2 f \left( \frac{y}{R}, \frac{z}{R} \right) \quad \dots\dots(45)$$

$$\text{自由表面で } \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \dots\dots$$

$f$  は粗度を示す函数である。 $\frac{y}{R} = \eta, \frac{z}{R} = \zeta$  と置けば  $\frac{1}{R} \frac{\epsilon}{\rho g}$

$= \frac{\sqrt{\sigma_2}}{k} v_b F(\eta, \zeta)$  であるから、(44) は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ F(\eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{v}{v_b} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ F(\eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{v}{v_b} \right) \right] \\ & + \frac{k}{\sqrt{\sigma_2}} \frac{RI}{v_b^2} = \frac{k}{\sqrt{\sigma_2}} \frac{R}{g v_b^2} \frac{Dv}{Dt} \quad \dots\dots(46) \end{aligned}$$

壁面では

$$F(\eta, \zeta) \frac{d}{d\nu} \left( \frac{v}{v_b} \right) = - k \sqrt{\sigma_2} f(\eta, \zeta) \quad \dots\dots(47)$$

但し  $\nu = \frac{y}{R}$  である。此處で  $\frac{Dv}{Dt} = v'$  と書き、各量の断面内の平均値を添字  $m$  を附けて表す事とする。(46) の兩邊に  $dA = R^2 d\eta d\zeta$  を乘じて全断面に亘つて積分すれば、第1項及び第2項から Green の定理により

$$R \int_S F(\eta, \zeta) \frac{d}{d\nu} \left( \frac{v}{v_b} \right) dS, \text{ 即ち } - k \sqrt{\sigma_2} A \int_S f(\eta, \zeta) \frac{dS}{S}$$

を得る。従つて

$$\sigma_2 v_b^2 \int_S f(\eta, \zeta) \frac{dS}{S} = R \left[ I - \int_A \frac{v'}{g} \frac{dA}{A} \right]$$

$$\therefore \sigma_2 v_b^2 f_m = R \left[ I - \frac{(v')_m}{g} \right] \quad \dots\dots(48)$$

但し  $f_m$  は  $f$  を全周邊に亘つて積分したものである。

先づ等流の場合に就いて考へれば  $\frac{\partial}{\partial t}$  及び  $\frac{\partial}{\partial x}$  は總べて零であるから、(48) から

$$\sigma_2 v_b^2 f_m = RI$$

従つて (46) を變形すれば

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ F(\eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{v}{v_b} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ F(\eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{v}{v_b} \right) \right] + k \sqrt{\sigma_2} f_m = 0$$

$v$  と  $v_b$  の關係を等流に對して次の様に表す。

$$\frac{v}{v_b} = 1 + k \sqrt{\sigma_2} F_1(\eta, \zeta) \quad \dots\dots(49)$$

之を上の關係式に代入すれば

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ F \frac{\partial F_1}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ F \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} \right] + f_m = 0 \quad \dots\dots(50)$$

壁面上で

$$F \frac{dF_1}{d\nu} = - f$$

断面の最底部で

$$F_1 = 0$$

平均速度は  $v_m = v_b(1 + k\sqrt{\sigma_2}) F_{1m}$  であるから

$$v_m = \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma_2 f_m}} + \frac{k F_{1m}}{\sqrt{f_m}} \right) \sqrt{Rf} \quad \dots\dots\dots\dots(51)$$

この右邊の括弧内を  $C$  と置けば Chézy の平均流速公式になる。更に壁面上の粗度が一様ならば  $f = 1$  としてよい。この時は

$$C = \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}} + k F_{1m} \quad (f = 1) \dots\dots\dots\dots(52)$$

又第 1 編第 2 章の (11) により幅の廣い矩形では  $F = 1$ , 半徑  $a$  の圓形又は半圓形断面では近似的に  $F = \frac{a}{r}$  で與へられてゐる。

故に幅の廣い水深  $h$  の矩形断面では  $R = h$ ,  $dr = d\zeta$  であるから (50) は

$$\frac{d^2 F_1}{d\zeta^2} + 1 = 0$$

$z = h$ , 即ち  $\zeta = 1$  に於ては

$$\frac{dF_1}{d\zeta} = -1 \text{ 及び } F_1 = 0$$

$z = 0$ , 即ち  $\zeta = 0$  に於ては

$$\frac{dF_1}{d\zeta} = 0$$

$$\therefore F_1 = \frac{1}{2}(1 - \zeta^2)$$

$$F_{1m} = \frac{1}{2} \left( 1 - \int_0^1 \zeta^2 d\zeta \right) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore C = \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}} + \frac{k}{3} \quad \dots\dots\dots\dots(53)$$

圓形又は半圓形断面の時は  $R = \frac{a}{2}$ ,  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ ,  $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$  と書けば,  $\frac{r}{a} = \lambda$  となつて  $F$  は補正項を附けて  $[\lambda + \psi(\lambda)]^{-1}$  の形を取る。(50) は

$$\frac{1}{4} \left[ 2F \frac{dF_1}{d\lambda} \frac{1}{\lambda} + \lambda \frac{d}{d\lambda} \left( F \frac{dF_1}{d\lambda} \frac{1}{\lambda} \right) \right] + 1 = 0$$

$$\therefore \frac{1}{4\lambda} \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{\lambda}{\lambda + \psi(\lambda)} \frac{dF_1}{d\lambda} \right] + 1 = 0 \quad \dots\dots\dots\dots(54)$$

壁面即ち  $\lambda = 1$  に於ては

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \psi(1)} \frac{dF_1}{d\lambda} = -1 \\ & F_1 = 0 \end{aligned} \right\}$$

及び

$$(54) \text{ を積分して } \Psi(\lambda) = 2 \int_0^\lambda \lambda \psi(\lambda) d\lambda \text{ と置けば}$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{2}{3}(1 - \lambda^3) - 2 \int_1^\lambda \lambda \psi(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{2}{3}(1 - \lambda^3) + \Psi(1) - \Psi(\lambda) \end{aligned}$$

之に  $\frac{dA}{A} = \frac{2r dr}{a^2} = d\lambda^2$  を乗じて積分すれば

$$F_{1m} = \frac{2}{5} \Psi(1) - 2 \int_0^1 \lambda \Psi(\lambda) d\lambda$$

$$\therefore C = \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}} + k \left[ \frac{2}{5} + \Psi(1) - 2 \int_0^1 \lambda \Psi(\lambda) d\lambda \right] \quad \dots\dots\dots\dots(55)$$

補正項  $\psi(\lambda)$  を零とすれば

$$C = \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}} + \frac{2}{5} k \quad \dots\dots\dots\dots(56)$$

Bazin の實驗によれば  $k$  の値は矩形断面の場合に約 41, 圆形断面の場合に約 44 であった。又他の實驗によれば各稱の断面に對して  $k$  の値は約 48 となつてゐる。

この結果から第 1 編に用ひた係數  $\alpha$  及び  $\eta$  を計算すれば

$$1 + \eta = \int_A \left( \frac{v}{v_m} \right)^2 \frac{dA}{A}, \quad \alpha = \int_A \left( \frac{v}{v_m} \right)^3 \frac{dA}{A}$$

であつて,  $f = 1$  の時は

$$\frac{v}{v_m} = \frac{1 + k \sqrt{\sigma_2} F_1}{1 + k \sqrt{\sigma_2} F_{1m}}$$

従つて幅の廣い矩形断面に對しては

$$1 + \eta = \int_0^1 \left[ 1 + \frac{k}{2C} \left( \frac{1}{3} - \zeta^2 \right) \right]^2 d\zeta = 1 + \frac{1}{45} \frac{k^2}{C^2}$$

$$\alpha = \int_0^1 \left[ 1 + \frac{k}{2C} \left( \frac{1}{3} - \zeta^2 \right) \right]^3 d\zeta = 1 + \frac{1}{15} \frac{k^2}{C^2} - \frac{2}{875} \frac{k^3}{C^3}$$

$C = 50$ ,  $k = 48$  とすれば  $\eta = 0.020$ ,  $\alpha = 1.058$  である。

圓形断面に對しては

$$1 + \eta = \int_0^1 \left[ 1 + \frac{2k}{2C} \left( \frac{2}{5} - \lambda^3 \right) \right]^2 2\lambda d\lambda = 1 + \frac{1}{25} \frac{k^2}{C^2}$$

$$\alpha = \int_0^1 \left[ 1 + \frac{2k}{2C} \left( \frac{2}{5} - \lambda^3 \right) \right]^3 2\lambda d\lambda = 1 + \frac{3}{25} \frac{k^2}{C^2} - \frac{4}{1,375} \frac{k^3}{C^3}$$

$C = 50$ ,  $k = 48$  とすれば  $\eta = 0.033$ ,  $\alpha = 1.097$  である。

## 7. Boussinesq の流水論—2

不定流の問題を取扱ふには速度及び断面積の變化が急激でないと假定する。

一般の場合の速度分布状態を

$$\frac{v}{v_b} = 1 + k \sqrt{\sigma_2} F_1(\eta, \zeta) + \frac{kR}{g \sqrt{\sigma_2} v_b^2} F_2(\eta, \zeta) \quad \dots \dots \dots (57)$$

を以て表し、之を (46) 代入して、且 (50) の関係を利用すれば

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ F \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ F \frac{\partial F_2}{\partial \zeta} \right] + gI - \frac{\sigma_2}{R} v_b^2 f_m = v'$$

従つて (48) から

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ F \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ F \frac{\partial F_2}{\partial \zeta} \right] - [v' - (v')_m] = 0 \quad \dots \dots \dots (58)$$

壁面では

$$\frac{dF_2}{dv} = 0 \quad \dots \dots \dots (59)$$

断面の最低部では

$$F_2 = 0 \quad \dots \dots \dots (60)$$

平均流速  $v_m$  は

$$\frac{v_m}{v_b} = 1 + k \sqrt{\sigma_2} F_{1m} + \frac{kR}{g \sqrt{\sigma_2} v_b^2} F_{2m} \quad \dots \dots \dots (61)$$

然るに

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ F_2 F \frac{\partial F_1}{\partial \eta} - F_1 F \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ F_2 F \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} - F_1 F \frac{\partial F_2}{\partial \zeta} \right] \\ + F_2 f_m + F_1 [v' - (v')_m] = 0 \end{aligned}$$

であるから、之に  $\frac{dA}{A}$  を乗じて積分し、Green の定理と

$$\int_S F F_1 \frac{dF_2}{dv} \frac{dS}{S} = 0, \quad \int_S F F_2 \frac{dF_1}{dv} \frac{dS}{S} = - \int_S f F_2 \frac{dS}{S}$$

なる關係を用ひて書き直せば

$$f_m F_{2m} + (F_1 v')_m - F_{1m} (v')_m = \int_S f F_2 \frac{dS}{S}$$

壁面附近では速度分布は定流状態と殆ど變らないものとすれば、壁面上で

$F_2 = 0$  である。

$$F_{2m} = \frac{1}{f_m} [F_{1m} (v')_m - (F_1 v')_m]$$

更に  $C = \frac{1}{\sqrt{\sigma_2 f_m}} + \frac{k F_{1m}}{\sqrt{f_m}}$  であるから (61) は、

$$\frac{v}{v_b} = C \sqrt{\sigma_2 f_m} \left\{ 1 + \frac{kR}{f_m C} \frac{F_{1m} (v')_m - (F_1 v')_m}{g \sqrt{\sigma_2 v_b^2 f_m}} \right\} \quad \dots \dots \dots (62)$$

括弧内の第2項は 1. に比して小さい量であるから、この式を書き直せば

$$\sigma_2 v_b^2 f_m = \frac{v^2}{C^2} - \frac{2R}{g} \left\{ \left( \frac{k}{C} \frac{F_1}{\sqrt{f_m}} \right)_m (v')_m - \left( \frac{k}{C} \frac{F_1 v'}{\sqrt{f_m}} \right)_m \right\}$$

等流の場合は (49) を書き直せば

$$\frac{v - v_b}{v_m} = k \sqrt{\sigma_2 F_1} \frac{1}{C \sqrt{\sigma_2 f_m}} = \frac{k F_1}{C \sqrt{f_m}}$$

であるから、之を上の關係式の第2項中に近似値として使用すれば

$$\sigma_2 v_b^2 f_m = \frac{v^2}{C^2} + \frac{R}{g} \left[ \frac{(v')_m^2}{v_m^2} - 2(v')_m \right] \quad \dots \dots \dots (63)$$

(63) の左邊は既に (48) によつて與へられてゐるから

$$I = \frac{v^2}{C^2 R} + \frac{1}{g} \left[ \frac{(v^2)_m'}{v_m} - (v')_m \right] \dots\dots\dots(64)$$

$(v')_m$ ,  $(v^2)_m'$  等を求める爲に,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  の或連續函数  $\phi$  を考へれば

$$\frac{D\phi}{Dt} = \phi' = \frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

但し  $v_y$ ,  $v_z$  は  $y$ ,  $z$  方向の速度成分である。連續方程式は

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

であるから、上の關係式を書き直せば

$$\phi' = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v\phi) + \frac{\partial}{\partial y} (v_y\phi) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z\phi)$$

$v_y$ ,  $v_z$  は  $v$  に比して小さいから之等を含む項を省略すれば

$$\int_A \phi' dA = \frac{\partial}{\partial t} \int_A \phi dA + \frac{\partial}{\partial x} \int_A v \phi dA$$

茲で順次に  $\phi = 1$ ,  $\phi = v$ ,  $\phi = r^2$  と置けば次の 3 式を得る。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (v_m A)}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(65)$$

$$A(v')_m = \frac{\partial (v_m A)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_A v^2 dA \dots\dots\dots(66)$$

$$A(v^2)_m' = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A v^2 dA + \frac{\partial}{\partial x} \int_A v^3 dx \dots\dots\dots(67)$$

(65) は開水路の様な断面積の變化し得る流れの連續方程式であつて、管では  $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$  となる。(66) 及び (67) を變化すれば

$$\left. \begin{aligned} A(v')_m &= \frac{\partial (v_m A)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{(1+\eta) v_m^2 A\} \\ A(v^2)_m' &= \frac{\partial}{\partial t} \{(1+\eta) v_m^2 A\} + \frac{\partial}{\partial x} \{\alpha x^3 A\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(68)$$

$\alpha$  及び  $\eta$  は常数と看做して差支へない。(68) を (64) に代入すれば水流の基本運動方程式として次の式が得られる。

$$-I + \frac{v^2}{C^2 R} + (2\alpha - 1 - \eta) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1+2\eta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\alpha - 1 - 2\eta}{g} \frac{v}{A} \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots(69)$$

この最後の項は小さいから一般には省略される。