

第 5 章 粘性流體の力學

1. 粘性流體内の應力

第 1 編で述べた様に静止してゐる流體內では粘性の影響は全然現れない。即ち粘性による流體内部の摩擦力は、その作用する面の兩側にある流體部分の相對速度によるもので、その大きさは相對速度に比例し $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ で與へられる。 μ のディメンションは $[MTL^{-2}]$ であつて、動粘性係數 ν のディメンションは $[L^2T^{-1}]$ になる。

運動してゐる粘性流體内の 1 點 P に於て之を通り x 軸に垂直な面を考へ、各軸の方向に作用するこの面への應力¹⁾を夫々 p_{xx} , p_{xy} , p_{xz} とする。同様に y 及び z 軸に垂直な面に働く各應力を夫々 p_{yx} , p_{yy} , p_{yz} 及び p_{zx} , p_{zy} , p_{zz} とすれば、弾性體の場合と同じく剪斷應力の間には次の關係がある。

$$p_{yz} = p_{zy}, p_{zx} = p_{xz}, p_{xy} = p_{yx}$$

原點の共通な 2 組の座標軸の各軸のなす角に

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

の關係があるものとする。即ち x' 軸と y 軸のなす角の方向餘弦は m_1 である。斯くすれば第 1 章 9 の記號を用ひて伸び a , b , c は次の様に表される。

1) Stress.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(l_1 \frac{\partial}{\partial x'} + l_2 \frac{\partial}{\partial y'} + l_3 \frac{\partial}{\partial z'} \right) (l_1 u' + l_2 v' + l_3 w')$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= a = l_1^2 a' + l_2^2 b' + l_3^2 c' \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= b = m_1^2 a' + m_2^2 b' + m_3^2 c' \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= c = n_1^2 a' + n_2^2 b' + n_3^2 c' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)^2$$

同様に

$$\therefore a + b + c = a' + b' + c'$$

又変形 f, g, h も同様にして

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} &= f = 2(m_1 n_1 a' + m_2 n_2 b' + m_3 n_3 c') \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= g = 2(n_1 l_1 a' + n_2 l_2 b' + n_3 l_3 c') \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= h = 2(l_1 m_1 a' + l_2 m_2 b' + l_3 m_3 c') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

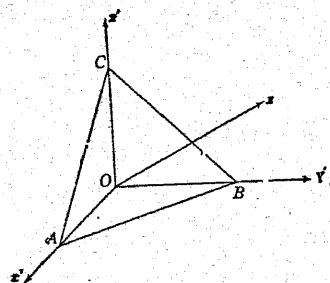


図-208

座標軸 x', y', z' を適当に擇んでその座標面上では剪断應力が總べて零になる様にした時の、之等の面に働く直應力を p_1, p_2, p_3 とすれば、之等は主應力であつて、點 P に極めて近く x 軸に垂直な三角形 ABC (面積 A) への直應力は

$$p_{xx} A = p_1 l_1 A \cdot l_1 + p_2 l_2 A \cdot l_2 + p_3 l_3 A \cdot l_3$$

従つて他の軸に對しても同様にして

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= p_1 l_1^2 + p_2 l_2^2 + p_3 l_3^2 \\ p_{yy} &= p_1 m_1^2 + p_2 m_2^2 + p_3 m_3^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

$$2) \quad a' = \frac{\partial u'}{\partial x'}, \text{ etc.}$$

$$p_{zz} = p_1 n_1^2 + p_2 n_2^2 + p_3 n_3^2$$

$$\therefore p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = p_1 + p_2 + p_3 \dots\dots\dots(4)$$

三角形 ABC に働く剪断應力も四邊形 $PABC$ を考へる事により

$$\left. \begin{aligned} p_{yz} &= p_1 m_1 n_1 + p_2 m_2 n_2 + p_3 m_3 n_3 \\ p_{zx} &= p_1 n_1 l_1 + p_2 n_2 l_2 + p_3 n_3 l_3 \\ p_{xy} &= p_1 l_1 m_1 + p_2 l_2 m_2 + p_3 l_3 m_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

(4) から見れば或點を通る3つの互に垂直な面への直應力の和、従つてその平均は一定であるから之を $-p$ で表す。即ち平均壓力の強さを p とする。 p_1, p_2, p_3 と p との相異は歪みのみによるものであるが、歪みは總べて a', b', c' を以て表されるから次の様に假定出来る。

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -p + \lambda(a' + b' + c') + 2\mu a' \\ p_2 &= -p + \lambda(a' + b' + c') + 2\mu b' \\ p_3 &= -p + \lambda(a' + b' + c') + 2\mu c' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

λ, μ は常數であつて、之を (3) 及び (5) に代入すれば

$$\begin{aligned} p_{xx} &= -p + \lambda(a + b + c) + 2\mu a \\ p_{yy} &= -p + \lambda(a + b + c) + 2\mu b \\ p_{zz} &= -p + \lambda(a + b + c) + 2\mu c \\ p_{yz} &= \mu f, \quad p_{zx} = \mu g, \quad p_{xy} = \mu h \end{aligned}$$

然るに $p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = -3p$ であるから

$$3\lambda + 2\mu = 0$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} p_{xx} &= -p - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ p_{yy} &= -p - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ p_{zz} &= -p - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = p_{zy} \\ p_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = p_{xz} \\ p_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = p_{yx} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

xy 面内の2次元の運動を考へれば $p_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ になるから、この μ は粘性係数である事がわかり、同時に p_{xy} 即ち τ がその働く面に垂直方向の速度変化の割合に比例すると言ふ関係が證明された。

2. Navier-Stokes の運動方程式

Euler の運動方程式を導入した場合と同様にして 圖-208 の様な小直六面體を考へれば、之に作用する x 方向の外力は質量力 $\rho \delta x \delta y \delta z \cdot X$ の他に、直應力によるものは正の方向に $\left(p_{xx} + \frac{1}{2} \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z$, 負の方向に $\left(p_{xx} - \frac{1}{2} \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z$, 合計して $\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$ である。又剪断應力によるものは $\delta z \delta x$ の面の上では正の方向に $-\left(p_{yz} - \frac{1}{2} \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} \delta y \right) \delta z \delta x$ 及び $\left(p_{yz} + \frac{1}{2} \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} \delta y \right) \delta z \delta x$ であつて、その合計は $\frac{\partial p_{yz}}{\partial y} \delta x \delta y \delta z$, $\delta x \delta y$ の面の上では同じく正の方向に $-\left(p_{zx} - \frac{1}{2} \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \delta z \right) \delta x \delta y$ 及び $\left(p_{zx} + \frac{1}{2} \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \delta z \right) \delta x \delta y$ であつて、その合計は $\frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \delta x \delta y \delta z$ になる。従つて粘性流體の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= \rho X + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho Y + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= \rho Z + \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

之に (7) と (8) を代入し、體積變化を $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ と書けば

3) p_{xx} は張力を正としてゐるので Euler の式の場合と符號が違ふ。

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

非壓縮性流體では $\theta = 0$ である。(10) を Navier-Stokes (ナビエ-ストークス) の運動方程式と言ふ。又 (10) を Helmholtz の方程式の形に書けば $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ を用ひて

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial q^2}{\partial x} - 2(\zeta v - \eta w) &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial q^2}{\partial y} - 2(\xi w - \zeta u) &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial q^2}{\partial z} - 2(\eta u - \xi v) &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

3. 粘性流體の運動の相似律

(10) の第1式から

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \nu \nabla^2 u$$

之にディメンションのない量を導入する項は次の様に書く。

$$\begin{aligned} x &= l\bar{x}, \quad y = l\bar{y}, \quad z = l\bar{z}, \quad u = U\bar{u}, \quad v = U\bar{v}, \quad w = U\bar{w} \\ t &= \frac{l}{U}\bar{t} \end{aligned}$$

但し l 及び U は長さ及び速度の或標準量を表したものである。故に横線を付けたものは何れもディメンションのない量である。更に特別に外力のない場合で且非壓縮性流體とすれば

$$\frac{U^2}{l} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right] = - \frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + \frac{\nu U}{l^2} \nabla^2 \bar{u}$$

更に壓力に對しては $p = \frac{\mu U}{l}$ になる様な量を導入すれば、之もディメンションのない量であつて

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{\nu}{Ul} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{Ul} \nabla^2 \bar{u}$$

此處で $R_s = \frac{Ul}{\nu}$ と書き、之を Reynolds 數⁴⁾と稱して、之もディメンションのない量である。

完全流體では或面積に作用する全壓力は

$$P = c\rho U^2 l^2$$

の形で表され、 c はディメンションのない係數となるが、粘性流體ではこの關係は成立しない。即ち2つの運動の間に力學的相似が成立する爲には幾何學的相似の他に、 R_s の値が等しくなつてゐる事を必要とする。即ち2つの比較する状態に於て U_1, l_1, ν_1 及び U_2, l_2, ν_2 が夫々の對比する速度、長さ、粘性の値とすれば

$$\frac{U_1 l_1}{\nu_1} = \frac{U_2 l_2}{\nu_2}$$

が満足されてゐる事が力學的相似の必要條件である。故に幾何學的にのみ相似の時は係數 c は R_s の函數であつて P は次の様に表される。

$$P = c(R_s) \rho U^2 l^2$$

尙外力として重力が考へられる時は第1編に述べた様に2つの運動が力學的に相似になる爲には Froude 數 F_r も共通にならねばならない。然し同一の流體の2つの運動状態の間では R_s と F_r が同時に共通な値を取る事は不可能である。

4. 内部摩擦力による仕事

粘性流體の運動ではその内部摩擦の爲にエネルギーの損失を伴ふ。或瞬間に (x, y, z) を中心とした小直六面體 $\delta x \delta y \delta z$ が外力に對して爲した仕

4) Reynolds' number.

$$R_e = \frac{\text{慣性項 (例 } \mu \frac{\partial u}{\partial x})}{\text{粘性項 (例 } \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})}$$

事は單位時間に

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} (p_{xx}u + p_{xy}v + p_{xz}w) + \frac{\partial}{\partial y} (p_{yx}u + p_{yy}v + p_{yz}w) + \frac{\partial}{\partial z} (p_{zx}u + p_{zy}v + p_{zz}w) \right\} \delta x \delta y \delta z$$

この中で運動勢力となるもの及び外力に對してなされるものは

$$\left\{ \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right) u + \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right) v + \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) w \right\} \delta x \delta y \delta z$$

であつて、 $\delta x \delta y \delta z$ の體積及び形の變化に費されるものは

$$(p_{xx}a + p_{yy}b + p_{zz}c + p_{yz}f + p_{xz}g + p_{xy}h) \delta x \delta y \delta z$$

之に 1. の中で求めた p_{xx} 等を代入すれば、之は

$$\left[-p(a+b+c) + \left\{ -\frac{2}{3} \mu (a+b+c)^2 + \mu (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + f^2 + g^2 + h^2) \right\} \right] \delta x \delta y \delta z$$

流體の密度が不變の時はこのエネルギーは

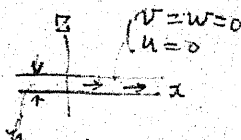
$$\mu (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + f^2 + g^2 + h^2) \delta x \delta y \delta z$$

従つて流體全體に亙つての至みの爲のエネルギーの損失は單位時間につき

$$2F = \iiint \Phi dx dy dz \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi = & \mu \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

非同轉運動の場合は境界面への垂線の方を n 、境界面の面積を S とすれば $2F$ は次の形になる。

$$2F = -\mu \int_S \frac{\partial q^2}{\partial n} dS \dots \dots \dots (13)$$

5. 2つの平面壁の間の定常ラミナ運動⁵⁾

吾々が之までに取扱つた流體運動の様に流線が規則的な線を畫がいてゐるものをミラナ運動と稱し、實際には Reynolds 數 R_0 が比較的小さい運動即ち速度が小さく粘性係数の大きい運動でなければ現れない。之に對して Reynolds 數の大きい時は所謂タービュレント運動⁶⁾となるのであつて、流體分子の運動方向は混亂し不規則となつて、唯平均して或流線の方に動くに過ぎない。この2つの状態の限界は第1編に述べた様に不連続的である。尙本章でも暫くはタービュレント運動は考へず、總べてラミナ運動をするものと考へる。

今 z 軸に垂直な總べての面内で一樣に x 方向に向ふラミナ運動を考へれば、 u は z のみに關係し、 $v = w = 0$ となり、運動方程式は

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 u}{dz^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

但し外力はなく、流體は非壓縮性とする。

$z = 0$ 及び $z = h$ の2つの面が壁面であるとして、この間の運動を考へ、且定常運動と假定すれば

$$\mu \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots\dots\dots(15)$$

p は z には無關係であるから

$$\mu u = Ax + Bz + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{z^2}{2} \quad \dots\dots\dots(16)$$

壁面 $z = 0$ は固定、 $z = h$ は速度 u_0 を以て第1の壁面に平行に動くものとする。壁面には流體分子は附着してゐるから、第1の面上では $u = 0$ 、第2の面上では $u = u_0$ である。之を附着の條件⁷⁾と稱してゐる。この條件から

5) Laminar motion. 6) Turbulent motion.

7) Haftungsbedingung (獨).



$$A = 0, \quad B = \frac{\mu u_0}{h} - \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\therefore u = \frac{u_0}{h} z - \frac{z(h-z)}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots\dots\dots(17)$$

流れの方向に垂直に取つた面積を通る流量は單位幅當りに

$$Q = \int_0^h u dz = \frac{h u_0}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

之から平均速度は

$$u_m = \frac{1}{h} \int_0^h u dz = \frac{u_0}{2} - \frac{h^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

運動する境界面が受ける抵抗は單位面積當り $\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0}$

$$\tau_{xz} = - \left(\mu \frac{u_0}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad \dots\dots\dots(18)$$

6. 薄い流體層の定常平面運動

2つの極めて近距離にある水平面の間で流體が x 及び y の兩方向の速度成分を有する時は、その運動方程式は、 z 軸を鉛直下向きに取つて

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad \rho g - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots(19)$$

但し定常ラミナ運動であつて速度は小さいと假定する。従つて u, v の x, y に関する微分係数は z に関する微分係数に比して無視出来る。又 w は全然無視した。(19) から壓力 p は

$$p = \rho g z + f(x, y)$$

を以て表される。従つて $\frac{\partial p}{\partial x}$ 及び $\frac{\partial p}{\partial y}$ は z に無關係であつて、(19) の第1及び第2式を z に関して積分する時に常數と看做される。

2つの壁面の位置を夫々 $z = h$ 及び $z = -h$ 、間隔を $2h$ とすれば、壁面に於ける附着の條件から

$$u = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2\mu} (h^2 - z^2), \quad v = -\frac{\partial p}{\partial y} \frac{1}{2\mu} (h^2 - z^2) \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\left[\begin{array}{l} w=0 \\ \text{stationary} \\ \text{外力}=0 \end{array} \right] \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad x=0$$

之から平均速度は

$$u_m = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^2}{3\mu} p(x, y) \right], \quad v_m = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{h^2}{3\mu} p(x, y) \right] \dots (21)$$

従つてこの場合には平均速度に関しては速度ポテンシアル

$$\phi = \frac{h^2}{3\mu} p(x, y)$$

を考へる事が出来る。即ち $p(x, y) = \text{const.}$ の線が等ポテンシアル曲線になる。Hele-Shaw は之を應用して水平に置いた2枚のガラス板の間に高さ $2h$ の圓嚢その他の模形を置き、その周りの平行ラミナ流の歪みを平均運動の観測によつて研究した。

次にこの2つの平面が極めて小さい角 α を以て交つて居り、之を2等分する平面が水平な場合を考へる。この水平面を xy 面に、2つの壁面の交點を x 軸に取り、 z 軸は鉛直下向きに取れば、任意の位置に於ける壁面の間隔 h は、 $h = \alpha y$ である。この場合の連続方程式は y, h, x の間嚢座標を用ひる事により

$$\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y} = 0 \dots (22)$$

α は極めて小さいから運動方程式は (19) をそのまま用ひれば (21) が得られる。之を (22) に代入すれば壓力の微分方程式は

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{3}{y} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \dots (23)$$

流函數 Ψ を

$$u = -\frac{1}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{1}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

を満足するものとすれば、 Ψ に對する微分方程式は

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{3}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \dots (24)$$

(24) の一般解は次の形を有する。



$$\Psi = (A \cosh kx + B \sinh kx) \phi(y)$$

$$\text{但し} \quad \phi''(y) - \frac{3}{y} \phi'(y) + k^2 \phi(y) = 0$$

故に $\phi = y^2 Z(ky)$ と置けば

$$Z'' + \frac{1}{ky} Z' + \left(1 - \frac{4}{k^2 y^2}\right) Z = 0$$

故に Z は2次の Bessel 函数であつて、結局 (24) の一般解は次の形を有する事になる。

$$\Psi = \sum_{k=0}^{\infty} (A \cosh kx + B \sinh kx) y^2 J_2(ky) \dots (25)$$

(23) の解も同じ形になる。一例として流體が2つの壁面の他に半径 a の球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ によつて境されてゐる場合の x 方向の平行流を考へて見る。この條件を満足する流函數は

$$\Psi = c \left(1 - \frac{a^5}{r^5}\right) y^4 = c \left(1 - \frac{a^5}{r^5}\right) r^4 \sin^4 \varphi \dots (26)$$

$r = a$ にて $\Psi = 0$ とすれば

$$u = -\frac{cy^2}{\alpha} \left[4 \left(1 - \frac{a^5}{r^5}\right) + \frac{5y^2 a^5}{r^5}\right], \quad v = \frac{5cy^3}{\alpha} \cdot \frac{xa^5}{r^7} \dots (27)$$

球面から遠く離れば $v = 0$ となり、球の影響のない處では

$$u = -\frac{4c}{\alpha} y^2$$

7. Hagen-Poiseuilleの法則

流體が或壓力差を以て眞直な管内を流れる時は、流れがラミナ運動で總べての流體分子の運動軌道が管軸に平行であると假定し、 z 軸を管軸方向に取れば、 $u = v = 0$ であるから運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w &= 0 \\ X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

円管の場合は円筒座標を用いて r 方向の速度を u , z 方向の速度を w とすれば連続方程式は

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial(rw)}{\partial z} = 0$$

之から $ru = \text{const.}$ となるが, $r=0$ でも u は有限なる事が必要であるから $ru=0$, 従つて $u=0$ となる。この時の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) &= 0 \\ R - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \Theta - \frac{\partial p}{r \partial \theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

管が水平に置かれてゐれば $\theta=0$ の線を水平に取り

$$R = -g \sin \theta, \quad \Theta = -g \cos \theta$$

$$p = -\rho g r \sin \theta + f(z) \dots\dots\dots(30)$$

之を z 方向の運動方程式に代入すれば

$$-\frac{1}{\rho} f'(z) + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0 \dots\dots\dots(31)$$

然るに一様な管では $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, 即ち w は z に無関係であり, 従つて $f'(z) = \text{const.}$ である。管の長さ l の間で圧力が p_1 から p_2 に下るものと假定すれば, $p_1 - p_2 = P$ と書いて

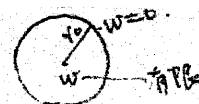
$$f'(z) = \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{p_1 - p_2}{l} = -\frac{P}{l}$$

之を (31) に代入して積分すれば

$$\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = -\frac{P}{l}$$

$$w = -\frac{P}{4\mu l} r^2 + B \log r + C \dots\dots\dots(32)$$

圧力勾配。
(微小管では流体の粘性による速度分布)



$r=0$ では w は有限で, $r=r_0$ では流体が壁面へ附着するものと假定すれば

$$w = \frac{F}{4\mu l} (r_0^2 - r^2) \dots\dots\dots(33)$$

壁面の単位面積當りに作用する摩擦力は

$$\tau_0 = -\mu \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=r_0} = -\frac{Pr_0}{2l} \dots\dots\dots(34)$$

管を通る全流量及び平均速度は

$$\left. \begin{aligned} Q &= \int_0^{r_0} w \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi r_0^4}{8\mu} \cdot \frac{P}{l} \\ w_m &= \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{r_0^2 P}{8\mu l} = \frac{1}{2} w_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

但し w_0 は管の中心線上の速度である。又この式から

$$\frac{P}{l} = w_m \cdot \frac{8\mu}{r_0^2} \dots\dots\dots(36)$$

即ち圧力勾配は平均速度に比例し, 半径の2乗と逆比例する。之を Hagen-Poiseuille

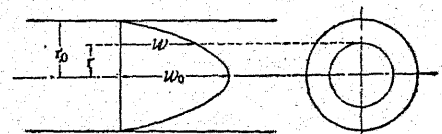


圖-209

(ハーゲン-ポアシユユ) の法則と稱する。

この法則の説明に用ひた假定の中で壁面附着の假定は實驗的にも差支へない事が明らかにされてゐるが, 壓力差 P を圖-210 の様な場合に, A , B の水槽の水位差で測る時は其處に補正が必要になつて来る。Erk は次の様にしてその補正項を求めた。

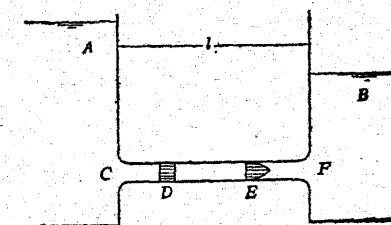


圖-210

單位時間に管断面を通じて流れ
る量の運動エネルギーは拋物線形速度分布の場合には

$$\int_0^{r_0} 2\pi r dr \cdot w \cdot \frac{\rho w^2}{2} = \pi \rho r_0^2 w_m^3$$

従つて単位体積當りのエネルギーは ρw_m^2 である。一様の速度分布に對しては之が $\frac{\rho w_m^2}{2}$ であるから、流體が C から D まで流れる間に $\frac{\rho w_m^2}{2}$ に相當する壓力が必要であるのみならず、更に D から E まで流れる間に、又 $\frac{\rho w_m^2}{2}$ に相當する壓力差が必要である。更に管壁の摩擦等に消費されるエネルギーに對しても壓力差が必要であり、之も ρw_m^2 に比例するものと考へれば、圖-210 の A, B 間の壓力差を P とした時には、 P は Hagen-Poiseuille の法則から必要とされる量以外に以上の様な $\lambda \rho w_m^2 (\lambda > 1)$ の壓力を含んでゐる。従つて

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{8\mu Ql}{\pi r_0^4} + \lambda \rho w_m^2 \\ \mu &= \frac{\pi r_0^4 P}{8Ql} \left(1 - \frac{\lambda \rho Q^3}{\pi^3 P} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

この第2式の括弧の中の第2項は所謂 Hagenbach の補正項と稱するもので、 λ の値は Boussinesq が理論的に求めたものは 1.12, Riemann が實驗的に求めたものは 1.124 ± 0.006 である。Hagen-Poiseuille 法則ヲ用テ λ 補正項ヲ必要トスル

8. 圓嚢の周りの遅い定常流

粘性流體と U なる直線的相對速度を有する圓嚢によつて起される流體運動の問題は、その第1近似解を得る爲に先づ Reynolds 數の小さい事、即ち速度が遅く粘性の大きい事を假定するのが好都合である。Navier-Stokes の方程式中の慣性項は $\frac{(\text{速度})^2}{(\text{長さ})}$ の大きさを有し、粘性抵抗の項は $\frac{\nu(\text{速度})}{(\text{長さ})^2}$ の大きさを有するから、その比は $\frac{(\text{長さ})(\text{速度})}{\nu}$ 即ち R_e で表される大きさであつて、 R_e の小さい事を假定すれば慣性項は省略される。従つて運動方程式は

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 u = 0$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v &= 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

z 軸に平行な無限に長い圓嚢の周圍に x 方向に速度 U の平行流のある時は、(37) から積分せず一旦 Helmholtz の方程式 (11) から p を消去する。但しこの場合は X, Y, Z 及び θ は零である。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (\zeta v - \eta w) - \frac{\partial}{\partial x} (\xi w - \zeta u) = \nu \nabla^2 \zeta \dots\dots\dots (38)$$

この問題では定常運動で z 方向には一様であるから、 $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$, ξ , η 及び w は零である。故に

$$\zeta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu \nabla^2 \zeta \dots\dots\dots (39)$$

此處で線運動による慣性項を省略すれば

$$u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu \nabla^2 \zeta \dots\dots\dots (40)^8$$

之に流函數 Ψ を用ひれば

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial y} &= \nu \nabla^4 \Psi \\ u &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)^9$$

但し

此處で $x + iy = z$, $x - iy = \bar{z}$, $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = -\frac{i}{2}(z - \bar{z})$ と書けば $z, \bar{z}$ 等の微係数は次の形になる。

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

8), 9) 之等の式の中の ∇^2, ∇^4 は z の微係数を含まない。

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)$$

従つて $\nabla^2 \Psi = 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial \bar{z}}$ なる事から, (41) は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial^3}{\partial z \partial \bar{z}^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^2 \partial \bar{z}} &= -i \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z \partial \bar{z}} \\ &= 2i\nu \frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

更に速度に対しては

$$\left. \begin{aligned} u + iv &= 2i \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}}, \quad u - iv = -2i \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ u &= -i \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} \right), \quad v = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

速度の遅い運動では (42) の左邊, 即ち同轉運動の慣性項も右邊に比して高項である事がわかるから, 之を省略すれば結局遅い運動に対しては

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0 \dots\dots\dots (44)$$

になる。之は (37) と同じ意味を持つ式である。(44) の一般解は次の形になる。

$$\Psi = \frac{i}{8} [zF_2(\bar{z}) - \bar{z}F_1(z)] + F_3(z) + F_4(\bar{z}) \dots\dots\dots (45)$$

但し F は正則函数である。今圓嚢の半径を 1 とすれば Ψ の満足すべき境界條件は周邊 $z\bar{z} = x^2 + y^2 = 1$ に対して $u = v = 0$ である。又流體が半径 R の共心圓嚢によつて外部を圍まれてゐるものとすれば第2の境界條件は $z\bar{z} = R$ に対して $u = U, v = 0$ である。

流れは x 軸に關して對稱であるから Ψ は y の正負によつて符號を變へねばならない。即ち

$$2i\Psi = zF(\bar{z}) - \bar{z}F(z) + f(z) - f(\bar{z})$$

の形になればよい。従つて之から速度は次の形で表される。

$$\left. \begin{aligned} u + iv &= 2i \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} = zF'(\bar{z}) - F(z) - f'(\bar{z}) \\ u - iv &= -2i \frac{\partial \Psi}{\partial z} = zF'(z) - F(\bar{z}) - f'(z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

従つて次の方程式がパラメータ t の總べての値に對して満足される時に境界條件が満足される。

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{1}{t} F'(t) - F\left(\frac{1}{t}\right) - f'(t) \\ U &= \frac{R^2}{t} F'(t) - F\left(\frac{R^2}{t}\right) - f'(t) \end{aligned} \right\}$$

之から $f'(t)$ を消去すれば

$$U = (R^2 - 1) \frac{F'(t)}{t} - F\left(\frac{R^2}{t}\right) + F\left(\frac{1}{t}\right)$$

此處で上式を満足し得る様な形として $F(t) = \alpha t^2 + \beta \log t$ と置けば係数の比較により α, β の値は次の様に定まる。

$$\alpha = \frac{\beta}{R^2 + 1} = - \frac{U}{2(R^2 + 1) \log R - 2(R^2 + 1)}$$

$$f'(t) = 2\alpha + \frac{\alpha R^2}{t^2} + \alpha(R^2 + 1) \log t$$

$$\therefore f(t) = 2\alpha t = \frac{\alpha R^2}{t} + \alpha(R^2 + 1)t(\log t - 1)$$

$$2i\Psi = \alpha(z - \bar{z}) \left[(R^2 + 1) \log(z\bar{z}) - z\bar{z} + \frac{R^2}{z\bar{z}} - (R^2 - 1) \right] \dots\dots\dots (47)$$

之を極座標を用ひて表せば

$$\Psi = -U \sin \varphi \frac{2(R^2 + 1)r \log r - r^2 + \frac{R^2}{r} - (R^2 - 1)}{2[(R^2 + 1) \log R - (R^2 - 1)]} \dots\dots\dots (48)$$

$R = 10$ と假定すれば流線の方程式は

$$\psi = \frac{c}{202 \log r + \frac{100}{r^2} - r^2 - 99}$$

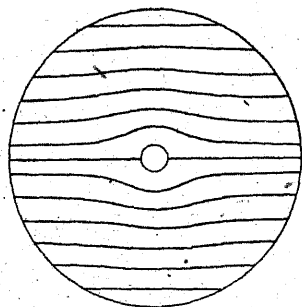


図-211

で表され、その形は 図-211 の様になる。尚 (48) は R の大きさを無限に大きくする事は出来ない。

9. 圓環の周りの流れに対する Lamb-Oseen の解法

前節に行つた様に Navier-Stokes の方程式の中の慣性項を直ちに省略せず、圓環が動くものと考えて u の代りに $u - U$ とおく。Oseen は $U \frac{\partial u}{\partial x}$ の項が必ずしも $\nu \nabla^2 u$ に比して省略出来る大さでない事を証明した。従つて運動方程式は次の形になる。

$$-U \frac{\partial u}{\partial x} - 2(\zeta v - \eta w) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial q^2}{\partial x} + \nu \nabla^2 u$$

この中で $\eta w = 0$ であり、2 次の項 ζv を省略すれば Oseen の運動方程式が得られる。

$$U \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial q^2}{\partial x} + \nu \nabla^2 u = 0 \quad \dots\dots\dots (49)$$

又は更に速度の2乗の項 $\frac{\partial q^2}{\partial x}$ を省略する。(49) は Reynolds 数の小さい運動の基礎となる方程式であつて、之を變形すれば

$$\left(\nabla^2 + \frac{U}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} \right) u = \frac{1}{\rho \nu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \left(\nabla^2 + \frac{U}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} \right) v = \frac{1}{\rho \nu} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (50)$$

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ なる事から $\nabla^2 \phi = 0$ が得られる。尚ポテンシャル函数 ϕ は $\nabla^2 \phi = 0$ を満足するから (50) の特解は

$$p = -\rho U \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (51)$$

(50) の一般解は之に回轉運動を合成したものと考へられるから

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + u_1, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} + v_1$$

と書かれる。之を (50) に代入して $\frac{U}{\nu} = 2k$ と書けば

$$\left. \begin{aligned} \left(\nabla^2 + 2k \frac{\partial}{\partial x} \right) u_1 &= 0, & \frac{\partial u_1}{\partial x} &= 0 \\ \left(\nabla^2 + 2k \frac{\partial}{\partial x} \right) v_1 &= 0, & \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (52)$$

然るに

$$\nabla^2 u_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = -2k \frac{\partial u_1}{\partial x} = -2 \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

$$\nabla^2 v_1 = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = -2k \frac{\partial v_1}{\partial x} = 2 \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

更に $2\zeta = -\frac{\partial \chi}{\partial y}$ とおけば上の式から

$$v_1 = \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial y}$$

$$\therefore 2\zeta = -\frac{\partial \chi}{\partial y} = \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{1}{2k} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right) - \frac{\partial u_1}{\partial y}$$

$$\therefore u_1 = \chi + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial x}$$

之等を (52) の兩式に代入して加へれば χ に對する微分方程式が得られる。

$$\left(r^2 + 2k \frac{\partial}{\partial x}\right) \chi = 0 \quad \dots\dots\dots (53)$$

Φ の形に就いては, $r^2 \Phi = 0$ の解は

$$\Phi = - \left(A_0 \log r + A_1 \frac{\partial}{\partial x} \log r + \dots\dots \right)$$

を以て表されるが, 最初の2項だけを取る。 χ の形は (43) の解を求める爲に

$$\chi = X(x) \cdot R(r)$$

と置いて極座標を用ひれば

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} + 2k \frac{\partial \chi}{\partial r} \cos \varphi = 0$$

$X(x) = e^{-kx} = e^{-kr \cos \varphi}$ と置けば零次の Bessel 微分方程式になる。

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - k^2 R = 0$$

この微分方程式の解の中で無限遠で零になるものは次の様な Hankel 函数である。

$$H_0^1(ikr) \quad \left(\text{又は之を } \frac{2}{i\pi} K_0(kr) \text{ と書く} \right)$$

之を展開すれば

$$H_0^1(ikr) = \frac{2}{i\pi} \left[-I_0(kr) \log \frac{r}{2} kr + \frac{(kr)^2}{2^2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{(kr)^4}{2^2 \cdot 4^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{(kr)^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots\dots \right]$$

$$\text{但し} \quad I_0(kr) = 1 + \frac{1}{2^2} (kr)^2 + \frac{(kr)^4}{(2 \cdot 4)^2} + \dots\dots$$

$I_n(kr)$ は $i^{-n} J_n(ikr)$ であつて, γ は常数 1.7811 である。

$kr = \frac{U}{2\nu} r = \frac{1}{4} R_0$ が小さい時は近似値として

$$H_0^1(ikr) \sim \frac{2}{i\pi} \left[-\log \frac{1}{2} krr \right]$$

この Hankel 函数を用ひれば (53) の特解は次の様になる。

$$\chi = C e^{-kr \cos \varphi} H_0^1(ikr)$$

従つて (50) の厳密な解は

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial}{\partial x} \left[A_0 \log r + A_1 \frac{\partial}{\partial x} \log r + \frac{C}{2k} e^{-kr \cos \varphi} H_0^1(ikr) \right] \\ &\quad + C e^{-kr \cos \varphi} H_0^1(ikr) \\ v &= \frac{\partial}{\partial y} \left[A_0 \log r + A_1 \frac{\partial}{\partial x} \log r + \frac{C}{2k} e^{-kr \cos \varphi} H_0^1(ikr) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots (54)$$

之は無限遠での條件は満足するから, 圓嚢の周りの條件たる $r = a$ で $u = -U$, $v = 0$ を満足させればよい。之は kr の値即ち R_0 が小さい場合には

$$\left. \begin{aligned} u &= A_0 \frac{\cos \varphi}{r} - A_1 \frac{\cos 2\varphi}{r^2} - \frac{1}{2} C \log \frac{1}{2} rkr \\ &\quad - \frac{C}{2kr} \cos \varphi (1 - kr \cos \varphi) \\ v &= A_0 \frac{\sin \varphi}{r} - A_1 \frac{\sin 2\varphi}{r^2} - \frac{C}{2kr} \sin \varphi (1 - kr \cos \varphi) \end{aligned} \right\} \dots\dots (55)$$

境界條件を満足する様な係数の値は

$$C = \frac{2U}{\frac{1}{2} - \log \frac{\gamma ka}{2}}, \quad A_0 = -\frac{C}{2k}, \quad A_1 = \frac{1}{4} Ca^2$$

圓嚢に作用する壓力は (51) に $\Phi = - \left(A_0 \log r + A_1 \frac{\partial}{\partial x} \log r \right)$ を代入し, 境界條件から定めた A_0 及び A_1 を用ひれば

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} C \rho u_0 \left[\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \log r - \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log r \right] \\ &= \frac{1}{4} C \rho u_0 \left[\frac{2}{k} \frac{\cos \varphi}{r} + a^2 \frac{\cos 2\varphi}{r^2} \right] \end{aligned}$$

抵抗を計算するには

$$p_{rx} = p_{xx} \cos \varphi + p_{xy} \sin \varphi = \left(-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos \varphi + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \sin \varphi$$

を圓錐の周圍に沿つて積分すれば

$$W = a \int_0^{2\pi} p_{rx} d\varphi$$

壓力の入つた項の積分は

$$-a \int_0^{2\pi} p \cos^2 \varphi d\varphi = -C\mu \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = -C\mu\pi$$

他の項の積分は

$$2\mu a \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{r=a} \cos \varphi d\varphi = -2\mu C \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = -\frac{1}{2} C\mu\pi$$

$$\begin{aligned} \mu \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \sin \varphi d\varphi &= \mu C \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) d\varphi \\ &= -\frac{1}{2} C\mu\pi \end{aligned}$$

従つて kr 即ち Reynolds 数の小さい場合の C の値を用ひれば

$$W = -2\pi\mu C = -\frac{4\pi\mu U}{\frac{1}{2} - \log \frac{rka}{2}} \dots\dots\dots (56)$$

$$R_e = \frac{2aU}{\nu} \text{ と書けば}$$

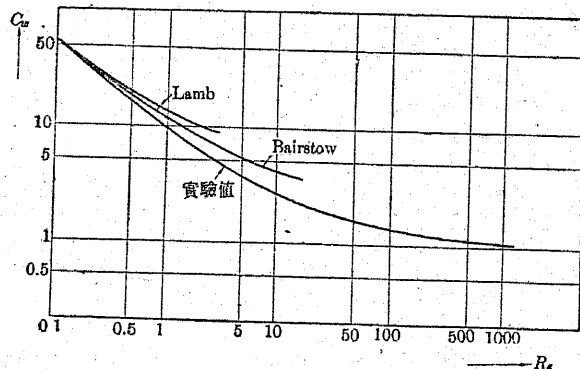


圖-212

$$\left. \begin{aligned} W &= -\frac{8\pi\rho \frac{a}{R_e} U^2}{\frac{1}{2} - \log \frac{1.7811 R_e}{8}} \\ c_w &= \frac{W}{2a \cdot \frac{\rho}{2} U^2} = \frac{8\pi}{R_e (2.002 - \log R_e)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (57)$$

圖-212 はこの計畫の結果と實驗値とを比較したものであつて、Bairdow の曲線は同氏が更に嚴密な理論によつて得た式

$$v_r = -\frac{Ca^2}{4} \frac{\cos \varphi}{r^2} + \frac{C}{2} \cos \varphi \left(1 - \log \frac{rkr}{2} \right)$$

から計算したものである。

10. Reynolds 数の大きい運動 (境界層理論)¹⁰⁾

流体運動の中で工學的に重要な意味を持つのは水又は空氣の様な粘性係数の小さい流体中での、速度の相當大きい運動であるから、Reynolds 数の大きい運動が實際には重要になつて来る。

流体の内部摩擦と固體壁面に於ける流体の附着の2つの基本的性質から、粘性が如何に小さくとも、壁面への附着は起つてゐると考へねばならない。従つて Reynolds 数の大きい運動では壁面の近くで面に垂直に著しい速度勾配を生じ、従つてこの部分に於ける剪斷應力は他の部分に比して比較にならぬ程大きなものとなる。故にこの剪斷應力の大きい壁面に沿つた薄層部を境界層¹¹⁾と稱して、この中では Navier-Stokes の運動方程式が用ひられるが、その外部では Euler の運動方程式が満足されるポテンシャル運動をなすものと考へる。

圖-213 の様な 嚮狀體の周りの流れを考へれば、之は薄い境界層に包まれて居り、

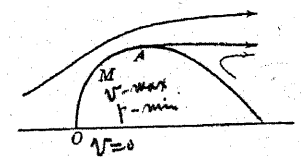


圖-213

10) Grenzschichttheorie (獨). 11) Grenzschicht.

O は流れの分岐点, M はポテンシャル流の相対的の速度が固体に沿つて最大となる点, A は図の様に流線が固体から離れる点とする。

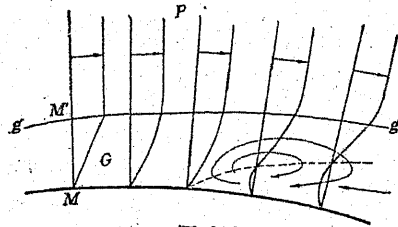


図-214

壩状体が静止の状態から動き始めるものとすれば, 初めの中は速度分布は 図-214 の境界層 G の中で, 表面から gg の線までの間に O からポテンシャル流の速度まで増加する。後に述べる様に

境界層理論では表面への垂線に沿つての圧力勾配は無視出来るものと假定してある。即ち MM' 上では圧力は一定と考へる。図-213 の OM の間では速度が O から M に向つて増加するから, 圧力は M に於ける最小値まで下る。然るに M から A に向つては速度が低下するから圧力が高くなるが, 境界層内の抵抗の爲にエネルギーが失はれて居り, 固体表面では Bernoulli の定理から必要とされる丈の速度が起らない。その結果固体表面では流れの方向と反対な圧力勾配が著しくなり過ぎて, 或定點 A から先では境界層の下部に反流が現れて, 図-214 の様に境界層が表面から離れる様になる。この現象は境界層理論によつて初めて説明する事が出来る。

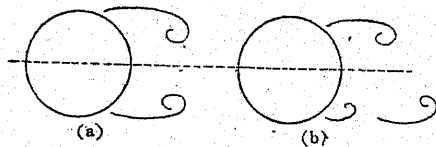


図-215

圓壩が動く場合には初めは 図-215 の (a) の様に背後に於て對稱に境界層の分離が起り, 對稱の渦運動となるが, 間もなく第3章で述べた様な

圖-(b) の形の渦運動となる。

11. 境界層に對する微分方程式

圖-214 の様な場合に壩状体表面に沿つて x 軸を取り, 之に垂直方向に y 軸を取る。但し運動方程式中で彎曲の影響による求心力の項は無視出来る

ものとする。従つて直角座標による運動方程式と同じ形になる。

境界層の厚さを δ とすれば之は極めて小さい量である。更に境界層外の運動から定まる量

$$u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial p}{\partial x}$$

を量の標準に取り, 之等を 1 に比較し得る大きさの量とすれば, 連続方程式から

$$\frac{\partial v}{\partial y} \sim 1$$

従つて表面附近では v は 1 よりも程度の小さい量 ε に比較し得る大きさである。又 x は小さくはないから

$$\frac{\partial v}{\partial x} \sim \varepsilon, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \varepsilon$$

又 δ は ε の程度の大きさとすれば

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\varepsilon^2}$$

之等の關係から Navier-Stokes の方程式の各項の境界層中に於ける大きさを比較すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots (58)$$

(58) の第1式から $\nu \sim \varepsilon^2$ が必要であり, 従つて境界層の厚さは $\sqrt{\nu}$ 即ち $\sqrt{\frac{1}{Re}}$ に比例する程度のものである。又 (58) の第2式から $\frac{\partial p}{\partial y}$ は ε の程度の大きさであつて, 従つて之は $\frac{\partial p}{\partial x}$ に對して無視出来る。即ち前に用ひ



$$\delta \sim \sqrt{\nu} \quad Re = \frac{U \ell}{\nu}$$

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\ell}{Re}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim \varepsilon$$

た表面への法線方向の壓力勾配が無視出来ると言ふ假定の正當である事が證明された。

(58) の第1式中の右邊の第2項は省略出来るから

境界層内ノ式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (59)$$

最後の項は $\frac{1}{R_s} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ と書く事もある。ポテンシャル運動の領域との境に於ける速度を U とすれば、 $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ であるから、Bernoulli の定理 $p + \frac{1}{2} \rho U^2 = \text{const.}$ によつて

$$\frac{dp}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx} \quad (60)$$

従つて定常状態にある境界層内の運動方程式は

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (61)$$

(59) 及び (61) は境界層に對する Prandtl の運動方程式である。

境界層の運動方程式を y に就いて 0 から δ まで積分すれば一般の運動量積分式が得られる。即ち境界層の微小部分に働く力の總和は單位時間の運動量の變化に等しいと言ふ結果になる。この運動量變化は内部の流體によるもの

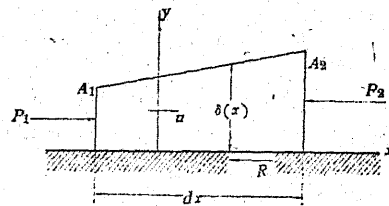


図-216

と境界層断面及び表面を通る運動

量の移動との和となる。單位時間内に面 A_2 と A_1 を通る運動量の差は

$$J_2 - J_1 = \rho dx \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u^2 dy$$

表面 $y = \delta(x)$ の面から入る流體の量は A_2 及び A_1 から出入する量の

$$\rho u^2 \rightarrow \rho(u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx)$$

差に等しいから、 $\rho dx \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u dy$ であつて、之による運動量變化は

$$J_3 = -U \rho dx \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u dy \quad R = T_0 dx = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} dx$$

摩擦力

運動量變化の割合と外力との關係式は

$$J_1 + J_2 + J_3 = P_1 - P_2 - R$$

(59) の両方積分

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\delta u dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u^2 dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u dy \\ = -\delta \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (62) \end{aligned}$$

に代入する

之を、v. Kármán の運動量積分方程式と言ひ、定常運動の時は第1項が零になる。

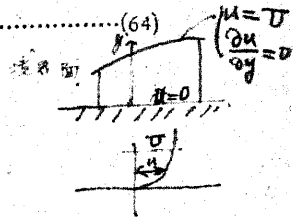
$$u = U - q(x, y)$$

と置いて之を上式に代入すれば、定常運動の場合には次式が得られる。

$$-2 \frac{dU}{dx} \int_0^\delta q dy - U \frac{d}{dx} \int_0^\delta q dy + \frac{d}{dx} \int_0^\delta q^2 dy = -\nu \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (63)$$

q の満足する境界條件は、 $y=0$ に於ては $u=0$, $q(x, y)=U$; $y=\delta$ に於ては $q(x, y)=0$ である。壁面 $y=0$ では (61) は次の様になる。

$$U \frac{dU}{dx} + \nu \left[\frac{\partial^2 (U-q)}{\partial y^2} \right]_{y=0} = 0 \quad (64)$$



【練習問題】

1.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

を以て與へられる楕圓形断面の管内に粘性流體が定常的に流れる場合に、速度分布は

$$A \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

を以て表される事を示し、 A を a, b, μ 及び壓力勾配の項を以て表せ。

(Green)

2. 平行な 2 つの平面 $y=0, y=h$ の間を粘性流体が定常運動をしてゐる。 $y=0$ の面は速度 U を以て x 方向に動き、 $y=h$ は固定してゐて、2 つの面は何れも多孔質で一方から z は一様に流体が噴出し、一方へは一様に吸込まれる。この時の解は

$$u = \frac{(Ue^{\frac{h}{a}} + Ah) - (U + A)e^{\frac{y}{a}}}{e^{\frac{h}{a}} - 1} + Ay, \quad v = \frac{\nu}{a}$$

の形となる事を證明し、 A と a を決定せよ。 (Ramsey)

3. 長さ l の平板が一様流の中に流れの方向に置かれてゐる時、Kármán の積分方程式中に

$$u = U\gamma(2\delta - y) \cdot \frac{1}{\delta^2}$$

なる假定を用ひれば

$$\delta = \sqrt{\frac{30 \mu x}{\rho U}}, \quad \text{摩擦抵抗} = 8 \sqrt{\frac{\mu \rho l U^3}{30}}$$

となる事を證明せよ。 (v. Kármán)