第4章 波　　動

1. 長　　波[1]

自由表面を有する水域中に重力の作用の下に起る波動の中で，水分子の鉛直加速度が水平加速度に比し遙かに小さく，水深が波の波長[2]に比し大きくない場合にはこの波動を長波と稱する。之に反して鉛直加速度は無視出來ないが水深が充分に大きい場合を表面波と言ふ。何れの場合にも水は非壓縮性であると考へる。

先づ2次元の場合，即ち水路内を長波が傳播する場合を考へる。座標軸を圖-197 の様に取り靜水面までの水深を h，靜水面からの水面の上昇を ζ とする。尙水路幅を b，水分子の x 方向の變位を ξ，波の週期[3]を T とすれば，Euler の運動方程式によつて

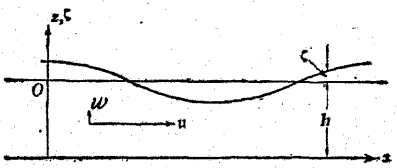


圖-197

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ \frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然るに假定によつて w を含む項は微小量と看做されるなら，(1) の第 2 式は

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=-g$$

之を積分して水面 $z=h+\zeta$ にて $p=0$ と置けば

$$p=\rho g(h+\zeta-z)$$

---

1) Long wave.　2) Wave length, 相次ぐ二波頂間の距離。
3) Period.

$$\therefore \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

之を (1) に代入して更に $u\dfrac{\partial u}{\partial x}$ の項を省略すれば

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

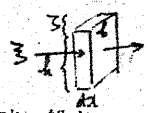
ζ は x, t のみの函數で z に關係しないから，u も z には無關係になり，從つて 1 鉛直斷面內では水平速度は水面から底まで等しい。x 方向の變位を ξ とすれば (2) 式は

運動方程式

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

連續方程式を求めるには δx の距離にある 2 斷面を取り，或時間の中に兩斷面の間の部分に流入する水量を考へれば，之は

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\xi h b)\cdot\delta x$$



$\zeta b\,dx$
入: $\xi b h$
出: $\xi b h + \frac{\partial}{\partial x}(\xi b h)dx$

である。水面の水分子が或基準面より水平に ξ だけ移動する時に鉛直には ζ だけ移動するものとすれば，同じ時間內に水面上昇によつてこの 2 斷面間に貯へられる水量は $\zeta b\delta x$ であるから，連續方程式は

連續方程式

$$\zeta b = -\frac{\partial}{\partial x}(\xi h b) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

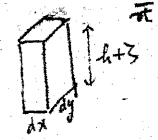
h 及び b は t に無關係であるから，(4) を微分して (3) に代入し，ξ を消去すれば

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(bh\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) - \frac{b}{g}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(3) と (4) から ζ を消去すれば

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - g\left\{\frac{1}{b}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\xi h b) - \frac{1}{b^2}\frac{db}{dx}\frac{\partial}{\partial x}(\xi h b)\right\} = 0 \cdots\cdots\cdots(6)$$

次に長波が x 方向のみならず，y 方向にも傳播する時は，運動方程式には $u\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 等の慣性の項を省略して



$\frac{\partial}{\partial t}(h+\zeta)\delta t$
入: $uh\,dy$ $\quad v\,h\,dx$
出: $uh\,dy + \frac{\partial}{\partial x}(uh\,dy)x$, $\quad v\,h\,dx + \frac{\partial}{\partial y}(v\,h\,dx)dy$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\ &-g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

この最後の式から $p = \rho g(h + \zeta - z)$ が得られるから

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial y} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

連續方程式を求めるには水平斷面が $\delta x\delta y$ なる鉛直柱體を考へ，單位時間にこの中に流入する水量を，水面の上昇によつてこの中に貯へられる水量に等しいと置けば

$$\frac{\partial}{\partial x}(uh\delta y)\delta x + \frac{\partial}{\partial y}(vh\delta x)\delta y = -\frac{\partial}{\partial t}\{(\zeta + h)\delta x\delta y\}$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

(h = const)

$$= -\left(\frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y}\right)$$

($h \neq$ const)

(8) と (9) から u, v を消去すれば

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - gh\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right) = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

2. 一樣水路內の長波

(5) と (6) に於て b = const., h = const. と置けば

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = gh\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

玆に $c = \sqrt{gh}$ とおけば (11) は次の形の解を有する。

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= F_1(x - ct) + F_2(x + ct) \\ \xi &= G_1(x - ct) + G_2(x + ct) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

F_1, F_2, G_1, G_2 は何れも任意の形の函數である。而して連續方程式は $\zeta = -h\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$ であるから，

$$F_1(x - ct) + F_2(x + ct) = -h[G_1'(x - ct) + G_2'(x + ct)]$$

$F_1(x - ct)$ 及び $G_1(x - ct)$ は c の速度を以て $+x$ 方向に傳播する波動を表し，$F_2(x + ct)$ 及び $G_2(x + ct)$ は c の速度を以て $-x$ 方向

に傳播する波動を表して居り，之等の波は傳播と共に變形する事がない。而て ζ 又は ξ はかかる 2 種の波の組合はせより成るものである。

波動運動をしてゐる水中に $\delta x \cdot 1 \cdot \delta z$ の量を考へれば，その有する位置エネルギーは $\rho g z \delta x \delta z$，運動エネルギーは $\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 \delta x \delta z$ である。從つて單位幅の波の有する位置エネルギーは一波長 L につき

$$\int_L dx \int_0^{\zeta} \rho g z dz = \underbrace{\frac{1}{2}\rho g \int_L \zeta^2 dx}_{\text{波ノモチノ P.E.}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho g h^2 L}_{\text{靜水ノ位置 energy}}$$

同じ波の有する運動エネルギーは

$$\int_L dx \int_0^h \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 dz = \frac{1}{2}\rho h \int_L \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 dx$$

然るに或一方にのみ傳播する波に於ては $\xi = G(x \pm ct)$ の形で表されるから

$$\zeta = \mp h \frac{\partial G}{\partial x} = \pm \frac{h}{c}\frac{\partial G}{\partial t} = \pm \frac{h}{c}\frac{\partial \xi}{\partial t}$$

從つて一波長間の水面を基準とした位置エネルギーと運動エネルギーは等しい事が知られる。

〔問題 1〕 長さ l の一樣水路内の水が單弦運動[4]で表される長波の運動をしてゐる。この時の ξ, ζ の形を定めよ。但し水路兩端の振幅は常に零とする。

（解） 單弦運動であるから

$$\xi \propto \cos(\sigma t + \varepsilon), \qquad (\sigma,\ \varepsilon \text{ は常數})$$

$\xi = \xi_1(x)\cos(\sigma t + \varepsilon)$

$\frac{d^2\xi_1}{dx^2} + \frac{\sigma^2}{c^2}\xi_1 = 0$

の形で表される。從つて

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\sigma^2}{c^2}\cdot\xi = 0$$

$$\therefore \quad \xi = \left(A \sin\frac{\sigma}{c}x + B\cos\frac{\sigma}{c}x\right)\cos(\sigma t + \varepsilon)$$

4) Simple harmonic motion.

$$\zeta = \frac{h\sigma}{c}\left(A\sin\frac{\sigma}{c}x + B\cos\frac{\sigma}{c}x\right)\sin(\sigma t + \varepsilon)$$

$x = 0$ で $\zeta = 0$ であるから，$B = 0$ なる事が必要で

$$\zeta = A_1 \sin\frac{\sigma}{c}x \sin(\sigma t + \varepsilon), \qquad \text{但し} \quad A_1 = \frac{h\sigma}{c}A$$

次に $x = l$ に於て $\zeta = 0$ になる爲には

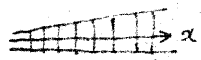
$$\frac{\sigma}{c}l = n\pi, \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

でなければならない。從つて ζ に對する解は無數にあり

$$\zeta = A_n \sin\frac{n\pi c}{l}x \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t + \varepsilon\right)$$

之は水面の自由振動[5]を表すものであつて，振動の節[6]は $x = 0$ 及び $\frac{l}{nc}$ にある。

3. 斷面の變化する水路内の長波



先づ水深は一樣で幅が直線的に變化する水路内の長波を考へる。水路幅を $b = b_0 \frac{x}{a}$ ($x \leqq 0$ を考慮せず) とすれば (5) により

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{gh}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0$$

更に此處で運動を單弦運動と考へ

$$\zeta = \zeta_1(x)\cos(\sigma t + \varepsilon)$$

又は實部を R で表し $\zeta = R[C\zeta_1(x)e^{i\sigma t}]$

の形で書けば，次の式は次の樣になる。

$$\frac{d^2\zeta_1}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\zeta_1}{dx} + \frac{\sigma^2}{c^2}\zeta_1 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

之は零次の Bessel 微分方程式であるが，進行性の波を表す爲にその一般解を Hankel 函數を用ひて表す。

5) Free oscillation. 6) Node.

$$\zeta = \left[A_1 H_0^1\left(\frac{\sigma}{c}x\right) + B_1 H_0^2\left(\frac{\sigma}{c}x\right)\right] R e^{i\sigma t} \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

但し A_1, B_1 は常數で

$$H_0^1(x) = J_0(x) + iY_0(x), \quad H_0^2(x) = J_0(x) - iY_0(x)$$

$J_0(x)$ 及び $Y_0(x)$ は第 1 種及び第 2 種の Bessel 函數で，次の關係がある。

$$Y_n(x) = \lim_{n\to\text{整數}} \frac{1}{\sin n\pi}\{\cos n\pi J_n(x) - J_{-n}(x)\}$$

$H_0^1\left(\frac{\sigma}{c}x\right)$ と $H_0^2\left(\frac{\sigma}{c}x\right)$ は總べての點に於て絕對値が等しく偏角は大きさ等しく符號が反對である。故にその何れかと $e^{i\sigma t}$ の積が進行波を表す事を知れば，他のものと $e^{i\sigma t}$ の積は逆行波である。然るに $H_0^2\left(\frac{\sigma}{c}x\right)$ を $x\to\infty$ に對して漸近展開を行へば

$$H_0^2\left(\frac{\sigma}{c}x\right)e^{i\sigma t} \sim \sqrt{\frac{2c}{\pi\sigma x}}\, e^{i\left(\frac{\sigma}{c}x-\frac{\pi}{4}\right)}\left\{P_0\left(\frac{\sigma}{c}x\right) - iQ_0\left(\frac{\sigma}{c}x\right)\right\} e^{i\sigma t}$$

$$\sim \sqrt{\frac{2c}{\pi\sigma x}}\left\{P_0\left(\frac{\sigma}{c}x\right) - iQ_0\left(\frac{\sigma}{c}x\right)\right\} e^{-i\left(\frac{\sigma}{c}x-\sigma t-\frac{\pi}{4}\right)}$$

但し $P_n(x)$ 及び $Q_n(x)$ は n 次の Legendre の球函數である。之から $H_0^2\left(\frac{\sigma}{c}x\right)e^{i\sigma t}$ は x の大きい處では進行波を表す事が知られる。而して連續函數で表された波が x の相當大きい處で進行波ならば，總べての x に於て進行波でなければならない。故に一般解は

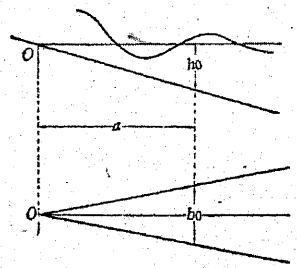


圖-198

$$\left.\begin{aligned} &\text{進行波} \quad \zeta = B_1 H_0^2\left(\frac{\sigma}{c}x\right)e^{i\sigma t} \\ &\text{逆行波} \quad \zeta = A_1 H_0^1\left(\frac{\sigma}{c}x\right)e^{i\sigma t} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

A_1, B_1 は境界條件から定められる。

次は幅と水深が共に直線的に變化する場合には，圖-198 の樣に幅を $b = b_0\frac{x}{a}$. 水深

を $h = h_0\frac{x}{a}$ にて表せば，(5) から

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d\zeta_1}{dx}\right) + \frac{a\sigma^2}{gh_0}x\zeta_1 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

但し單弦運動を假定してゐる。$2\sigma\sqrt{\frac{a}{gh_0}} = \kappa$, $\sqrt{x} = X$ と置けば

$$\frac{d^2\zeta_1}{dX^2} + \frac{3}{X}\frac{d\zeta_1}{dX} + \kappa^2\zeta_1 = 0$$

此處で更に $\zeta_1 = \frac{Z}{X} = \frac{Z}{\sqrt{x}}$ と置けば

$$\frac{d^2Z}{dX^2} + \frac{1}{X}\frac{dZ}{dX} + \left(\kappa^2 - \frac{1}{X^2}\right)Z = 0$$

之は一次の Bessel 微分方程式であるが，前と同じく一般解は Hankel 函數を用ひて次の樣に書く。

$$Z = [A_2 H_1^1(\kappa X) + B_2 H_1^2(\kappa X)]$$

$$\therefore \quad \zeta = [A_2 H_1^1(\kappa\sqrt{x}) + B_2 H_1^2(\kappa\sqrt{x})]\frac{e^{i\sigma t}}{\sqrt{x}} \cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

この時も $H_1^2(\kappa\sqrt{x})\frac{e^{i\sigma t}}{\sqrt{x}}$ が進行波を，$H_1^1(\kappa\sqrt{x})\frac{e^{i\sigma t}}{\sqrt{x}}$ が逆行波を表す事が證明される。從つて

$$\left.\begin{aligned} &\text{進行波} \\ &\quad \zeta = B_2 H_1^2(\kappa\sqrt{x})\frac{e^{i\sigma t}}{\sqrt{x}} \\ &\text{逆行波} \\ &\quad \zeta = A_2 H_1^1(\kappa\sqrt{x})\frac{e^{i\sigma t}}{\sqrt{x}} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

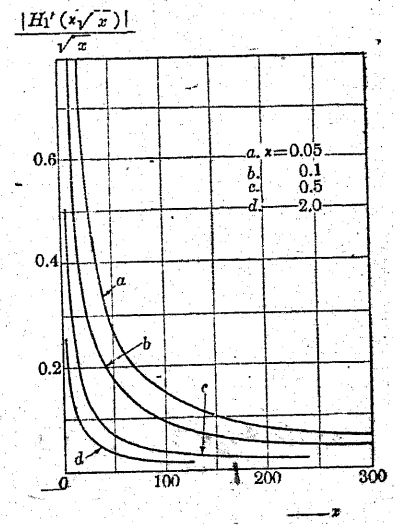
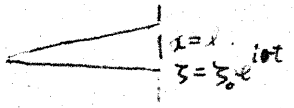


圖-199



$x=l$ にて $\zeta=\zeta_0 e^{i\sigma t}$ なる境界條件を與へれば

$$B_2=\frac{\zeta_0\sqrt{l}}{H_1^2(\kappa\sqrt{l})},\quad A_2=\frac{\zeta_0\sqrt{l}}{H_1^1(\kappa\sqrt{l})}$$

この場合の振幅の變化は $|H_1^1(k\sqrt{x})|/\sqrt{x}$ を以て表され，その狀態は 圖-199 に示す樣になる。

4. 振幅の比較的大きい長波

水面の上昇 ζ が水深 h に比して小さいと看做し難い時は，波の各部分で傳播速度の差が大きくなり，從つて波形は傳播と共に變化する。摩擦抵抗を無視した運動方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

連續方程式は水路の斷面形を矩形と考へれば

$$\frac{\partial}{\partial x}\{(h+\zeta)u\}=-\frac{\partial\zeta}{\partial t}$$

$$\therefore\quad\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}=-(h+\zeta)\frac{\partial u}{\partial x}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

この兩邊に $f'(\zeta)$ を乘じて (19) に加へる。但し $f(\zeta)$ は ζ の或函數である。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)\{f(\zeta)+u\}=-(h+\zeta)f'(\zeta)\frac{\partial u}{\partial x}-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}$$

玆に於て $(h+\zeta)\{f'(\zeta)\}^2=g$ となる樣に $f(\zeta)$ を定めれば

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)\{f(\zeta)+u\}=-(h+\zeta)f'(\zeta)\frac{\partial}{\partial x}\{f(\zeta)+u\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

之が波動の基本式であつて，$f(\zeta)$ は次の形で與へられる。

$$f(\zeta)=2c_0\left\{\sqrt{1+\frac{\zeta}{h}}-1\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

但し $c_0=\sqrt{gh}$ である。玆で

$$P=f(\zeta)+u,\quad Q=f(\zeta)-u$$

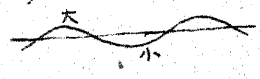
と書けば (21) から次の關係式を得る。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial P}{\partial t}+(u+v)\frac{\partial P}{\partial x}=0,\quad\frac{\partial Q}{\partial t}+(u-v)\frac{\partial Q}{\partial x}=0\\&v=(h+\zeta)f'(\zeta)=c_0\sqrt{1+\frac{\zeta}{h}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(23)$$

$P(x,t)$ は $\Phi\{x-(u+v)t\}$ の形を持つ事は (23) から明らかである故，之は $u+c_0\sqrt{1+\frac{\zeta}{h}}$ の傳播速度で x 方向に進む波を表す。同樣にして Q は $c_0\sqrt{1+\frac{\zeta}{h}}-u$ の傳播速度で $-x$ の方向に進む波を表してゐる。

例へば或瞬間に $a<x<b$ の部分に 1 つの波が起り，他の部分は靜止してゐるものとすれば，この波の中で P を以て表されるものと Q を以て表されるものが互に反對の方向に傳速して行く。從つてこの 2 つの波の間の部分は再び靜止に還る事になる。進行波に於ては $Q=0$ であるから

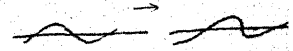
$$u=f(\zeta),\quad\therefore\quad P=2u=4c_0\left(\sqrt{1+\frac{\zeta}{h}}-1\right)$$



波の傳播速度は

$$u+c_0\sqrt{1+\frac{\zeta}{h}}=c_0\left(3\sqrt{1+\frac{\zeta}{h}}-2\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

傳播速度は ζ の大きい部分程大きいから，波の前面の勾配は次第に急となり，反對に波の脊面の勾配は次第に緩やかとなる。



5. 圓形水域內の長波

(10) を圓壔座標 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を以て書き改めれば，單弦運動の假定を用ひる事により

$$\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\zeta_1}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial\theta}+\frac{\sigma^2}{c^2}\zeta_1=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

$c=\sqrt{gh}$ であつて 水深を一樣にすれば ζ_1 は

$$f(r)\left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}s\theta, \qquad (s \text{ は零又は正の整數})$$

を一般項とする Fourier 級數に展開される。故に (25) は

$$f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)+\left(k^2-\frac{s^2}{r^2}\right)f(r)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

但し $k=\frac{\sigma}{c}$ である。之は s 次の Bessel 微分方程式であるが，$r=0$ に於て ζ は有限値を持たねばならないから，Fourier 級數の一般項で表される振動は

$$\zeta=A_sJ_s(kr)\left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}s\theta\cos(\sigma t+\varepsilon) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

更に境界條件として水域の周圍 $r=a$ にて $\frac{\partial\zeta}{\partial r}=0$ を與へれば

$$J_s'(ka)=0$$

之により s の或値に相應する振動の σ の値が決定されるのであつて，之は圓形水域の自由振動を表す。

〔問題 2〕 $s=0$ で與へられる波の週期及び振動の節の位置を求めよ。

（解） 波形は原點を中心とする圓形であつて

$$J_0'(ka)=0 \quad 即ち \quad J_1(ka)=0$$

この根は小さい方から

$$\frac{ka}{\pi}=1{\cdot}2197,\ 2{\cdot}2330,\ \cdots\cdots$$

$$\therefore \quad \frac{\sigma a}{c}=3{\cdot}832,\ 7{\cdot}016,\ \cdots\cdots$$

之から主振動及び副振動の週期が決定される。その時の振動の節の位置は $J_0(kr)=0$ から

$$\frac{kr}{\pi}=0{\cdot}7655,\ 1{\cdot}7511\ \cdots\cdots$$

によつて與へられる。

〔問題 3〕 $s=1$ で與へられる自由振動を考察せよ。

（解） この時は直徑方向に 1 つの節を生じ，之に $J_1(k_mr)=0$ によつて與へられる圓形の節が加はる。但し k_m は $J_1'(k_ma)=0$ から決定される。即ち

$$\zeta=AJ_1(kr)\cos\theta\cos(\sigma t+\varepsilon)$$

であつて，$J_1'(ka)=0$ の根は

$$\frac{ka}{\pi}=0{\cdot}586,\ 1{\cdot}697,\ \cdots\cdots$$

$$\therefore \quad \frac{\sigma a}{c}=1{\cdot}841,\ 5{\cdot}332,\ \cdots\cdots$$

振動の節は $\theta=\frac{\pi}{2}$ 及び $J_1(kr)=0$ で與へられる。

次にこの水域が非常に廣いものとして，その中心の附近に或範圍内に氣壓の變化が起り，その爲に波が起つて周圍に傳播する場合を考へる。氣壓を p_0 とすれば運動方程式は (7) に

$$p=p_0+\rho g(h+\zeta-z)$$

と置いたものであるから

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_0}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial t}=-g\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_0}{\partial y}\cdots\cdots\cdots(28)$$

連續方程式は

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

(28) は速度ポテンシアル φ を用ひて書き直せば

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=g\zeta+\frac{p_0}{\rho}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

(29) と (30) から

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=gh\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_0}{\partial t}$$

之を圓壔座標に改めて，$\varphi=\varphi_1\cdot Re^{i\sigma t}$，$c=\sqrt{gh}$ と書けば

Cf. Lamb.

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}+k^2\varphi_1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

但し $k=\frac{\sigma}{c}$ である。$r=0$ に於て

$$\lim_{r\to 0}\left(-2\pi r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=f(t)$$

の強さの流出點を假定すれば，$f(t)=\cos\sigma t$ に對して

$$\varphi=\frac{1}{4}\{J_0(kr)\sin\sigma t-Y_0(kr)\cos\sigma t\}$$

kr の大きい値に對しては

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{8\pi kr}}\exp\left\{i\sigma\left(t-\frac{r}{c}\right)-\frac{1}{4}i\pi\right\}^{7)} \cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

6. 太洋に於ける潮波

太洋に於ける潮波は水深に比して波長の非常に大きい長波であるが，外力として重力の他に天體からの引力による起潮力[8] の作用を受けてゐる。この力の x, z 方向の加速度成分を X, Z とすれば

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=Z-g$$

之を積分して $z=h+\zeta$ にて $p=0$ とすれば

$$\frac{p}{\rho}=(g-Z)(h+\zeta-z)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=(g-Z)\frac{\partial\zeta}{\partial x}-(h+\zeta-z)\frac{\partial Z}{\partial x}$$

然し鉛直分力 Z は g に比すれば小さく，$\zeta\frac{\partial Z}{\partial x}$ は X に比して省略される。その時の運動方程式は

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

7) $\exp x=e^x$.　8) Tide producing force.

$$\therefore\quad \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=X-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}$$

連續方程式は $\zeta=-h\frac{\partial\xi}{\partial x}$ であるから $c=\sqrt{gh}$ として

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+X \cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

例へば起潮力が $X=f_0\cos(\sigma t+\varepsilon)$ で與へられる時は之は一種の强制振動であるから，$\xi=\xi_1\cos(\sigma t+\varepsilon)$ の形になる。從つて

$$\frac{\partial^2\xi_1}{\partial x^2}+\frac{\sigma^2}{c^2}\xi_1=-\frac{f_0}{c^2}$$

この一般解は次の式で與へられる。

$$\xi_1=-\frac{f_0}{\sigma^2}+A\sin\frac{\sigma x}{c}+B\cos\frac{\sigma x}{c}$$

潮波の成因及びその運動に關しては數多の理論があるが，玆には總べて省略する。

7. 表 面 波[9]

既に述べた樣に表面波とは運動方程式中で鉛直加速度の項を無視出來ないが，水深は波長に比して充分大きいと看做し得るものであつて，此處に扱ふものは總べて重力による波である。表面波に就いては水分子の運動は水面以下で急速に減少するから水底の摩擦は全く考へる必要がない。

2 次元の場合を考へて x を水平軸，z を鉛直軸とする。運動は靜止の狀態から或原動力によつて起されるのであるから無渦運動と見做してよく，速度ポテンシアルを φ とすれば

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

水域を圍む壁面での境界條件は $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$ である。

座標原點を靜水面上に取り，oz 軸を鉛直上向きに取れば，運動が小さい

9) Surface wave.

から速度の 2 乘の項を無視し，外力のポテンシアルを $\Omega = gz$ と書いて，運動方程式を積分すれば

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - gz + F(t) \quad \cdots\cdots(35)$$

ζ を時間 t に於て $(x\ o)$ の點の水面分子が靜水面より上昇する高さとすれば，水面では $p = 0$ であるから，任意の函數 $F(t)$ は $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ の中に含まれるものとして

$$\zeta = \frac{1}{g}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_{z=\zeta}$$

ζ は水深に比して非常に小さいから，上の式は大體次の樣に書いて差支へない。

$$\zeta = \frac{1}{g}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]_{z=0} \quad \cdots\cdots(36)$$

水面の鉛直速度は

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]_{z=0} \quad \cdots\cdots(37)$$

(36) と (37) から ζ を消去すれば，水面 $z = 0$ に於て滿足さるべき式として次式が得られる。

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \qquad (z = 0) \quad \cdots\cdots(38)$$

$\varphi = \varphi_1(x, z)\cos(\sigma t + \varepsilon)$ の單弦運動では水面の條件は

$$\sigma^2\varphi_1 = g\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}, \qquad (z = 0) \quad \cdots\cdots(39)$$

波が x 及び之と垂直な y の 2 方向に傳播する時は，速度ポテンシアルは $\nabla^2\varphi = 0$ を滿足せねばならないが，周壁及び水面に於ける條件は $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ 及び (37), (38) の諸式がそのまゝ用ひられる。

8. 表面波の定常波[10]と進行波

2 次元の場合に就いて考へ，先づ最も簡單な例として φ が x の正弦又

10) Stationary wave.

は餘弦函數になつてゐる時は

$$\varphi = P(z)\cos kx\cos(\sigma t + \varepsilon) \quad \cdots\cdots(40)$$

$$\therefore \qquad \frac{d^2P}{dz^2} - k^2P = 0$$

$$\therefore \qquad P = Ae^{kz} + Be^{-kz}$$

水底 $z = -h$ に於ては $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$ であるから C を常數として

$$Ae^{kh} = Be^{-kh} = \frac{C}{2}$$

$$\therefore \qquad \varphi = C\cosh k(z + h)\cos kx\cos(\sigma t + \varepsilon)$$

σ の値は表面の條件 (39) から決定される。即ち

$$\sigma^2 = gk\tanh kh$$

尙 φ を (36) に代入すれば水面形の形を得る。

$$\zeta = \frac{\sigma C}{g}\cosh kh\cos kx\sin(\sigma t + \varepsilon) \quad \cdots\cdots(41)$$

又は $a = -\frac{\sigma C}{g}\cosh kh$ と書き

$$\zeta = a\cos kx\sin(\sigma t + \varepsilon) \quad \cdots\cdots(42)$$

之は波長 $\lambda = \frac{2\pi}{k}$，振幅 a の定常波を表してゐる。この時の流函數 ψ は

$$\psi = \frac{ga}{\sigma}\frac{\sinh k(z + h)}{\cosh kh}\sin kx\cos(\sigma t + \varepsilon) \quad \cdots\cdots(43)$$

今任意の一水分子がその平均位置 (x, z) から動く變位を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}$ とすれば

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{d\boldsymbol{z}}{dt} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

であるから，之に上に求めた値を代入して積分すれば

$$\left.\begin{aligned} x &= -a\frac{\cosh k(z+h)}{\sin kh}\sin kx\sin(\sigma t+\varepsilon) \\ z &= a\frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh}\cos kx\sin(\sigma t+\varepsilon) \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(44)$$

波長 $\frac{2\pi}{k}$ が水深に比して非常に小さければ，kh は非常に大きいから $\tanh kh = 1$ となり，(44) は

$$\left.\begin{aligned} x &= -ae^{kz}\sin kx\sin(\sigma t+\varepsilon) \\ z &= ae^{kz}\cos kx\sin(\sigma t+\varepsilon) \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(45)$$

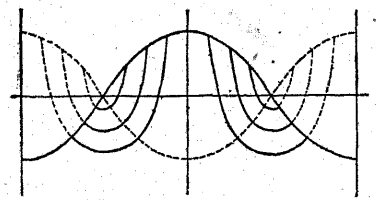


圖-200

但しこの時は $\sigma^2 = gk$ である。又之で表される水分子の運動軌跡は圖-200 の様な形である。

一般の表面波の運動は (40) を一般項とする様な Fourier 級數で表す事が出來るが，次に簡單な進行波の例を示す。

$$\zeta = \zeta_1 \pm \zeta_2$$

と置き，右邊の各項は

$$\zeta_1 = a\sin kx\cos\sigma t,\quad \zeta_2 = a\cos kx\sin\sigma t$$

を以て表される定常波であるとすれば，

$$\zeta \doteqdot a\sin(kx \pm \sigma t)$$

之は無限に續く進行波の例であつて，傳播速度 c は

$$c = \frac{\sigma}{\kappa} = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh kh}$$

波長が水深に比して著しく小さければ $c = \sqrt{\frac{g}{k}}$ であるが 波長が h に比して比較的大きければ $\tanh kh \doteqdot kh$ となり $c = \sqrt{gh}$ を得る。

今進行波のみに就いて考へれば $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$ であるから，水分子の變位は

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 - x_2 = a\frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh}\cos(kx-\sigma t) \\ z &= z_1 - z_2 = a\frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh}\sin(kx-\sigma t) \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(46)$$

この時の水分子運動の軌道は楕圓であつて，その水平軸及び鉛直軸の長さは

$$2a\frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh},\quad 2a\frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh}$$

であつて，何れも水底 $z = -h$ では零になる。又之より見れば波は進行しても水分子は進行しない。

水深が波長に比して非常に大きければ

$$\left.\begin{aligned} x &= ae^{kz}\cos(kx-\sigma t) \\ z &= ae^{kz}\sin(kx-\sigma t) \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(47)$$

故にこの時は水分子は圓形軌道運動をなし，軌道の半徑は $\frac{a}{2}e^{kz}$，水分子の角速度は $\sigma = \sqrt{2\pi\frac{g}{\lambda}}$ である。

xz 面に平行な單位長さの距離にある 2 鉛直面の間の定常波の有するエネルギーを計算する。1 波長の間の位置エネルギーは長波の場合と同じく $\frac{1}{2}\rho g\int_0^\lambda \zeta^2 dx$ で表す事が出來るから，之を計算すれば

$$\frac{1}{2}\rho g\int_0^\lambda a^2\cos^2 kx\sin^2(\sigma t+\varepsilon)\,dx = \frac{1}{4}\rho g a^2\lambda\sin^2(\sigma t+\varepsilon)$$

1 波長の長さの波の有する運動エネルギーは第 1 章の (25) 式から

$$\frac{1}{2}\rho\int_0^\lambda\left[\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]_{z=0}dx = \frac{\rho}{2}\int_0^\lambda[g\cos^2 kx\cos^2(\sigma t+\varepsilon)]\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\rho g a^2\lambda\cos^2(\sigma t+\varepsilon)$$

從つて 1 波長間にある全エネルギーは單位幅につき $\frac{1}{4}\rho g a^2\lambda$ であつて，水面の單位面積當りの有するエネルギーは $\frac{1}{4}\rho g a^2$ である。

進行波のエネルギーは同様にして計算すれば，1 波長間の全エネルギーが $\frac{1}{2}\rho g a^2 \lambda$ になる。

9. 群　　波

比較的水深の大きい水面を波長の等しい表面波の 1 群が並行して進む時は，この群波の全體としての傳播速度はその中の箇々の波の傳播速度よりも小さい。從つて 1 つの波に就いて見れば，之は群波の中を進行して最前端に出れば消え，最後端の波が進行した跡には新しい波が發生する。この群波全體としての傳播速度を群速度[11]と言ふ。

この現象は次の様にして説明される。一般の單弦運動をなす波動は無限に並ぶ波であつて，群波はかゝる波の組合はせによつて生じたものと考へる事が出來る。最も簡單に群波を得るには，振幅が同じで波長が僅かに異なる 2 つの波を組合はせればよい。この様な水面の形は

$$\zeta = a\sin(kx - \sigma t) + a\sin(k'x - \sigma' t)$$

$$= 2a\cos\left\{\frac{1}{2}(k - k')x - \frac{1}{2}(\sigma - \sigma')t\right\}\sin\left\{\frac{1}{2}(k + k')x - \frac{1}{2}(\sigma + \sigma')t\right\}$$

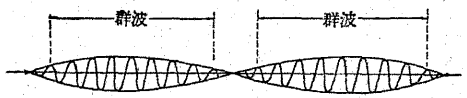


圖-201

k と k' の差は僅かであるからこの中の cos の項は殆ど x に無關係である。從つて波形は 圖-201 の様な帶狀水面に境された群波の連續である。この群速度を U とすれば

$$U = \frac{\sigma - \sigma'}{k - k'} \quad \text{或は} \quad U = \frac{d\sigma}{dk} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(48)$$

然るに箇々の波の波長は $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ であるから，その傳播速度 c を用ひて表せば

11) Group velocity.

$$U = \frac{d(kc)}{dk} = c - \lambda\frac{dc}{d\lambda}$$

この種の波に於ては $c = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh kh}$ であるから

$$U = \frac{1}{2}c\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(49)$$

$\frac{U}{c}$ は水深が非常に大きければ $\frac{1}{2}$ となり，水深が波表に比して小さくなければ 1 に近付く。然るに水深 h の水路を進行する波のエネルギーの傳播量は單位時間に

$$\frac{1}{4}\rho g a^2 c\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right)$$

になるから，エネルギー傳播の速度は群速度 $\frac{d(kc)}{dk}$ に等しい事がわかる。

10. Cauchy-Poisson の波動

Cauchy-Poisson (コーシー・ポアソン) の波動問題には 2 種あつて，1 つは靜水面に局部的上昇が與へられた場合，第 2 は靜水面に局部的衝擊が與へられた場合である。此處には第 1 の場合のみに就いて述べる。

靜水中に起る波の基本形は $\zeta = \cos\sigma t\cos kx$, $\varphi = g\frac{\sin\sigma t}{\sigma}e^{kz}\cos kx$ であるから，一般の波形 $f(x)$ は Fourier の 2 重積分を用ひて次の様に表す事が出來る。

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dk\int_{-\infty}^\infty f(\alpha)\cos k(x - \alpha)\,d\alpha \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(50)$$

初期條件は

$$\zeta = f(x), \qquad \varphi_0 = 0$$

とする。但し添字 0 を附けたものは水面 $z = 0$ に於ける値なる事を示す。從つて求める波は

$$\zeta=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\sigma t\,dk\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\cos k(x-\alpha)\,d\alpha \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(51)$$

$$\varphi=\frac{g}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\sigma t}{\sigma}e^{kz}dk\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\cos k(x-\alpha)\,d\alpha \quad\cdots\cdots(52)$$

與へられた局部的上昇が原點の極めて近い部分に限るものとすれば，$f(\alpha)$ は α の微小値以外では零になる。そこで

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\,d\alpha=1$$

と假定すれば

$$\varphi=\frac{g}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\sigma t}{\sigma}e^{kz}\cos kx\,dk$$

$$=\frac{gt}{\pi}\int_0^\infty\left\{1-\frac{gt^2}{3!}k+\frac{(gt^2)^2}{5!}k^2-\cdots\cdots\right\}e^{kz}\cos kx\,dk\cdots\cdots(53)$$

但し $\sigma^2=gk$ である。更に $-z=r\cos\theta$, $x=r\sin\theta$ と書けば水中では z は負であるから

$$\int_0^\infty e^{kz}\cos kx\,k^n dk=\frac{n!}{r^{n+1}}\cos(n+1)\theta$$

$$\therefore\quad \varphi=\frac{gt}{\pi}\left\{\frac{\cos\theta}{r}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}gt^2\right)\frac{\cos 2\theta}{r^2}+\frac{1}{3\cdot5}\left(\frac{1}{2}gt^2\right)\frac{\cos 3\theta}{r^2}\cdots\cdots\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(54)$$

ζ は之を (36) に代入し $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ と置く事によつて定まる。即ち $x>0$ に對しては

$$\zeta=\frac{1}{\pi x}\left\{\frac{gt^2}{2x}-\frac{1}{3\cdot5}\left(\frac{gt^2}{2x}\right)^3+\frac{1}{3\cdot5\cdot7\cdot9}\left(\frac{gt^2}{2x}\right)^5-\cdots\cdots\right\}\quad\cdots(55)$$

この形は收斂が惡く不便であるが，次の樣にして更に便利な形が得られる。

$$\varphi_0=\frac{g}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\sigma t}{\sigma}\cos kx\,dk$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^\infty \sin\left(\frac{\sigma^2x}{g}+\sigma t\right)d\sigma-\int_0^\infty \sin\left(\frac{\sigma^2x}{g}-\sigma t\right)d\sigma\right\}$$

此處で $\eta=\sqrt{\frac{x}{g}}\left(\sigma\pm\frac{gt}{2x}\right)$ と置けば

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{\sigma^2x}{g}+\sigma t\right)d\sigma=\sqrt{\frac{g}{x}}\int_\omega^\infty \sin(\eta^2-\omega^2)\,d\eta$$

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{\sigma^2x}{g}-\sigma t\right)d\sigma=\sqrt{\frac{g}{x}}\int_{-\omega}^{\infty} \sin(\eta^2-\omega^2)\,d\eta$$

但し $\omega=\sqrt{\frac{gt^2}{4x}}$ である。從つて

$$\varphi_0=-\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{g}{x}}\int_0^\omega \sin(\eta^2-\omega^2)\,d\eta\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(56)$$

$$\therefore\quad \zeta=\frac{t}{\pi x}\sqrt{\frac{g}{x}}\int_0^\omega \cos(\eta^2-\omega^2)\,d\eta$$

$$=\frac{t}{\pi x}\sqrt{\frac{g}{x}}\left\{\cos\omega^2\int_0^\omega \cos\eta^2 d\eta+\sin\omega^2\int_0^\omega \sin\eta^2 d\eta\right\}\cdots(57)$$

$\frac{gt^2}{4\pi}$ が大きくなれば (57) は近似的に

$$\zeta=\frac{t}{2x}\sqrt{\frac{g}{2\pi x}}\left(\cos\frac{gt^2}{4x}+\sin\frac{gt^2}{4x}\right)$$

從つて Cauchy 及び Poisson は次の形の解を與へた。

$$\zeta=\frac{t}{2x}\sqrt{\frac{g}{2\pi x}}\left(\cos\frac{gt^2}{4x}+\sin\frac{gt^2}{4x}\right)$$

$$-\frac{1}{\pi x}\left\{\frac{2x}{gt^2}-3\cdot5\left(\frac{2x}{gt^2}\right)^3+3\cdot5\cdot7\cdot9\left(\frac{2x}{gt^2}\right)^5-\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots\cdots(58)$$

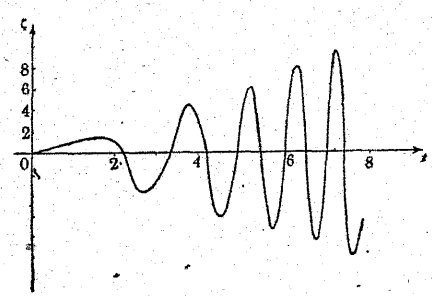


圖-202

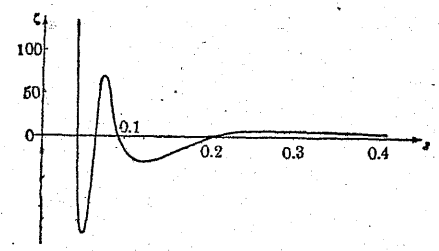


圖-203

圖-202 の横軸の目盛は $\sqrt{\frac{2\pi}{g}}$ を單位に取り，縱軸は $\frac{Q}{\pi x}$ を單位に取る。但し Q は最初の水面上昇の斷面積である。又 圖-203 の横軸の目盛は $\frac{1}{2}gt^2$ を單位に取り，縱軸は $\frac{2Q}{\pi g t^2}$ を單位に取つてゐる。

11. 船 跡 波

充分に深い海上を船が一定速度で走る場合の様に，壓力變化が一定速度で進む問題を考へる。圖-204 に於て壓力點が x 軸上を速度 c を以て $-x$ 方向に進むものとすれば，その點が O に達する時の點 P に於ける水面上昇は x 軸上の無數の點に加へられた微小衝擊の影響の總和である。この様な波の一系の中で P に相當の影響を與へ得るのは P に於ける位相を定常的にする様な點 Q の附近に起つたものゝみである。壓力點が Q から O に達するまでの時間を t とすれば，Q から傳はつた波の P に於ける位相は

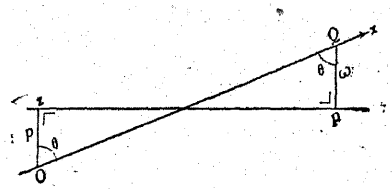


圖-204

$$\frac{gt^2}{4w}+\frac{\pi}{2}{}^{12)},\quad 但し\quad w=QP$$

この波が定常的になる爲の條件は

12) 平面的に傳播する波は $\zeta=-A\left(\frac{t^3}{w^4}\right)\sin\frac{gt^2}{4w}$ で與へられる。

$$\dot{w}=\frac{2w}{t}$$

之から O と P との關係は

$$\dot{w}=c\cos\theta,\qquad 但し\quad \theta=\angle OQP$$

$$\therefore\qquad OQ=ct=2w\sec\theta$$

P の極めて近い點で P と同じ位相にあるものは PQ に垂直な線上に在る。圖-204 で $OZ=p$ とすれば $p=w$ 且つ

$$PZ=-\frac{dp}{d\theta}$$

$$\therefore\qquad 2p=-\frac{dp}{d\theta}\cot\theta$$

$$p=a\cos^2\theta,\qquad (a\ は常數)\cdots\cdots\cdots\cdots(59)$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad x&=p\cos\theta-\frac{dp}{d\theta}\sin\theta=\frac{a}{4}(5\cos\theta-\cos 3\theta)\\ y&=p\sin\theta+\frac{dp}{d\theta}\cos\theta=-\frac{a}{4}(\sin\theta+\sin 3\theta)\end{aligned}\right\}\cdots(60)$$

この波の形は 圖-205 の様になる。

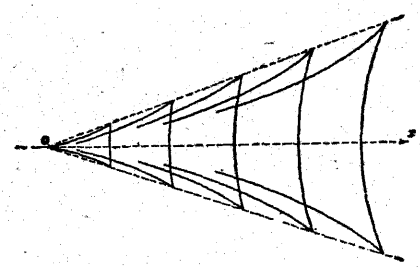


圖-205

12. Trochoid 波

1 つの水分子の運動を表すのにその分子の畫がく軌道の中心の座標 (a, c) を用ひ，この點からの變位を ξ, ζ で表せば $x=a+\xi$, $z=c+\zeta$ であ

るから，Lagrange の連續方程式は次の形になる。

$$\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c}-\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a}=\text{const.}$$

$$\therefore\quad \left(1+\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)\left(1+\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)-\frac{\partial\xi}{\partial c}\frac{\partial\zeta}{\partial a}=\text{const.}\quad (t\text{ に無關係})$$

本節では便宜上 z 軸を鉛直下向きに取り，從つて ζ も下向きを正とする。水深 h が著しく大きくない時は前に述べた樣に水分子は楕圓軌道上を運動する。そこで軌道中心 a, c に相應する軌道の表軸半徑を r, 短軸半徑を r' として次の運動を考へる。

$$\left.\begin{aligned} x&=a-r\sin(ka-\sigma t)\\ z&=c-r'\cos(ka-\sigma t)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(61)$$

r 及び r' は (44) と同樣にして r_0 を常數として

$$r=r_0\frac{\cosh k(h-c)}{\sinh kh},\quad r'=r_0\frac{\sinh k(h-c)}{\sinh kh}$$

之を Lagrange の運動方程式に代入すれば，小さい項を無視して

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(-\frac{p}{\rho}+gz\right)=-\sigma^2r_0\frac{\cosh k(h-c)}{\sinh kh}\sin(ka-\sigma t)$$

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(-\frac{p}{\rho}+gz\right)=\sigma^2r_0\frac{\sinh k(h-c)}{\sinh kh}\cos(ka-\sigma t)$$

この第 1 式に da, 第 2 式に dc を乘じて加へ，之を積分すれば

$$\frac{p}{\rho g}=c-\frac{r_0}{\sinh kh}\left[\sinh k(h-c)\right.$$
$$\left.-\frac{\sigma^2}{gk}\cosh k(h-c)\right]\cos(ka-\sigma t)+\text{const.}$$

$c=0$ にて $p=0$ となる爲には const. は零になり，且

$$\sinh k(h-c)-\frac{\sigma^2}{gk}\cosh k(h-c)=0,\qquad (c=0)$$

$$\therefore\qquad \tanh kh=\frac{\sigma^2}{gk}$$

從つて波の傳播速度は

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sigma}{k}&=\sqrt{\frac{g}{k}\tanh kh}\\ \text{波の週期は}\quad T&=\frac{2\pi}{\sigma}\sqrt{\frac{\pi^2}{gk}\coth kh}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(62)$$

尙之は非回轉運動ではない事が證明される。波の壓力は

$$\frac{p}{\rho g}=c+\left(\frac{c^2}{gk}r-r'\right)\cos(ka-\sigma t)\cdots\cdots\cdots\cdots(63)$$

(61) で表される水面の形狀は楕圓トロコイド[13]曲線と言ふ。之は半徑 $R=\frac{L}{2\pi}$ の圓がその中心が $z=c$ の直線に沿つて轉動する時に，之と同じ中心を有する楕圓が之に伴なつて水平移動するものとする。圓の 1 つの半徑は一樣な角速度で回轉して各位置で楕圓と交る。その交點の軌跡が楕圓トロコイドである。水深 h が非常に大きくなれば楕圓は圓となつて，水面は普通のトロコイド曲線となる。

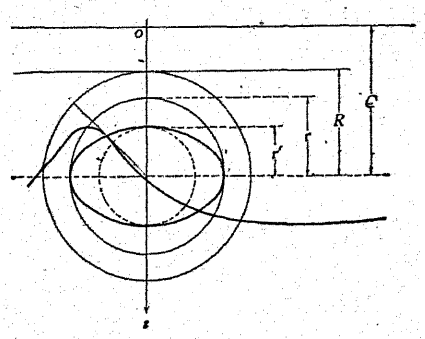


圖-206

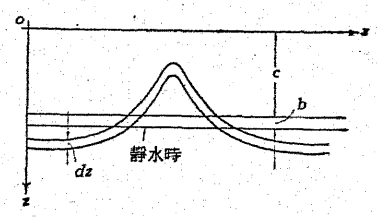


圖-207

水分子の靜水時の位置と分子軌道の中心の高さの差を b とすれば，後者の方が上にあつて

$$\frac{\lambda}{2}(b+c)=\int_0^{\frac{\lambda}{2}}zdx=\int_0^{\frac{\lambda}{2}}z\frac{\partial x}{\partial a}da^{14)}=\frac{\lambda c}{2}+\frac{\pi rr'}{2}$$

13) Elliptic trochoid.　　14) $c=$ const. の線上で積分する。

$$\therefore \quad b = \frac{\pi r r'}{\lambda} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(64)$$

水面に於ては

$$(r')_{c=0} = r_0 = \frac{1}{2} \times (\text{波高})$$

$$(r)_{c=0} = r_0 \coth kh$$

$$\therefore \quad (b)_{c=0} = \frac{k r_0^2}{2} \coth kh$$

Trochoid 波は水深が大きくて $r=r'$ となれば，運動方程式の嚴密解である。

〔練 習 問 題〕

1. $x=0$ に於て $\zeta = \zeta_0 \cos \sigma t$ で表される長波が一樣水路内を進行して，$x=L$ に在る垂直壁に當つて反射する時の合成波の形を求めよ。

2. 一樣な水深 h の海底を直線狀の地震波が通過し，その爲に海底が $a \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$ の隆起をしたものとする。a は非常に小さいものとして，生ずる表面波の振幅が次の式で與へられる事を證明せよ。

$$a\left[\left(1 - \frac{V^2}{v^2}\right)\cosh \frac{2\pi h}{\lambda}\right]^{-1}, \quad \text{但し} \quad V^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}$$

(Green)

3. 水平と 45° 傾いた平面狀の海岸の定常波に對する速度ポテンシアルは

$$b\left[e^{kz}(\cos kx - \sin kx) + e^{-kz}(\cos kz + \sin kz)\right] \times \cos\left[\frac{t}{\sqrt{gk}} + \alpha\right]$$

で表される事を證明せよ。但し b, k, α は何れも常數，z 軸は鉛直上向，x 軸は水面上に海に向つて取る。 (Green)

4. トロコイド波のエネルギーを計算せよ。