

### 第 3 章 完全流體の力學 (3)

#### (渦 運 動)

##### 1. 一般の渦運動<sup>1)</sup>(回轉運動)

回轉運動を又渦運動と稱する。回轉速度の成分は既に述べた様に

$$\xi = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \eta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \zeta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \dots\dots\dots(1)$$

渦運動をする流體の各部分の回轉の軸をつなぐ曲線を渦線<sup>2)</sup>と言ひ、その方程式は

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} \quad \dots\dots\dots(2)$$

流體内の小閉曲線上の各點を通る渦線を引き得る時は之は1つの管状となる。之を渦管<sup>3)</sup>と言ひ、この中に含まれる流體を渦<sup>4)</sup>又は渦糸<sup>5)</sup>と稱する。

1つの渦管の2断面  $ABC$  及び  $A'B'C'$  を取り、 $AA'$  を結んで  $ABCAA'C'B'A'A$  を通る循環を考へれば、第 1 章の 10 に述べた様に、之は

$$\begin{aligned} & \int (u dx + v dy + w dz) \\ & = 2 \iint (\xi + m\eta + n\zeta) dS \end{aligned}$$

である。然るにこの面上では總べての點に於て  $\xi + m\eta + n\zeta = 0$  であるから、この循環は零になり、

$$I(ABCA) + I(AA') + I(A'C'B'A') + I(A'A) = 0$$

$$\therefore I(ABCA) = I(A'B'C'A')$$

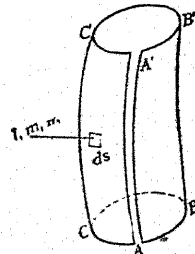


圖-187

1) Vortex motion.    2) Vortex line.    3) Vortex tube.    4) Vortex.  
5) Vortex filament.

従つて1つの渦管の断面の周りの循環は總べて等しい。而してこの循環は第1章で述べた様に断面積  $\sigma$  と  $\xi, \eta, \zeta$  の合回轉速度との積の2倍であるから、 $\sigma$  を小さく取れば循環量は  $2\omega\sigma$  となる。但し  $\omega$  は  $(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{1}{2}}$  である。この  $2\omega\sigma$  を渦の強さと名付けてゐる。

尙上述の結果から渦管は流體中に始まり又は終止する事が出来ない事が知られる。

閉曲線に沿ふ循環が  $2 \iint (\xi^2 + m\eta + n\zeta) dS$  である事から、或面上の總べての閉曲線に沿ふ循環が常に零であるなら、この面は渦線と交る事がないと言へる。即ちこの面に出會ふ渦線は完全にこの面上にある。時間  $t$  に於て渦線から成る面  $S$  を考へれば、その上の閉曲線  $C$  に沿ふ循環は零である。時間  $t + \delta t$  に於ては  $S$  上にあつた流體分子が  $S'$  にあり、 $C$  は分子と共に  $S'$  上に動いてそれに沿ふ循環は零である。之は  $S'$  上の總べての閉曲線に對しても言へる故  $S'$  も又渦線から成るものである。即ち渦線から成る面は運動しても依然渦線から成つてゐる。この種の面の2つが交る線が渦線であるから、渦線も又運動と共に動いて行く。之を Helmholtz の定理と言ふ。

渦の短い部分を考へれば、それは運動しても常に同じ流體分子から成つてゐるから、その長さ及び断面積が  $ds_1$  及び  $\sigma_1$  から  $ds_2$  及び  $\sigma_2$  に變化すれば

$$\rho_1 \sigma_1 ds_1 = \rho_2 \sigma_2 ds_2$$

然るに  $\omega_1 \sigma_1 = \omega_2 \sigma_2$  であるから

$$\frac{\rho_1 ds_1}{\omega_1} = \frac{\rho_2 ds_2}{\omega_2} = \text{const.} \dots\dots\dots(3)$$

非壓縮性流體では

$$\frac{ds_1}{\omega_1} = \frac{ds_2}{\omega_2} = \text{const.} \dots\dots\dots ;$$

即ち渦の長さが伸びれば回轉速度が大きくなる。

### 2. 渦による速度

空間の有限な部分だけに  $\xi, \eta, \zeta$  及び體積變化

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

が存在してゐる時に之等による速度  $u, v, w$  を定める。 $(x', y', z')$  にある流體部分  $\delta x' \delta y' \delta z'$  が  $\theta'$  の體積變化をした爲の  $(x, y, z)$  に於ける速度は  $\theta' \delta x' \delta y' \delta z'$  の強さの流出點によるものと同じであるから

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \theta}{\partial x}, & v &= -\frac{\partial \theta}{\partial y}, & w &= -\frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \theta &= \frac{1}{4a} \iiint \frac{\theta'}{r} dx' dy' dz' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

但し  $r = \{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\}^{\frac{1}{2}}$  で積分は  $\theta' = 0$  でない全空間に亘つて行ふ。

次に體積變化のない場合を考へ、渦による速度を求める。1つの閉曲面を通る流束が線積分  $\int (Fdx + Gdy + Hdz)$  の形にて表されるものと假定すれば第1章の10と同じ方法により

$$u = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \dots\dots(6)$$

$$\therefore \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) - \nabla^2 F$$

更に之と同型の2式を得る。(6)中の  $F, G, H$  は夫々に  $\frac{\partial \chi}{\partial x}, \frac{\partial \chi}{\partial y}, \frac{\partial \chi}{\partial z}$  なる任意の函数を加へても上の關係に相違がないから、 $\chi$  の形を適當に擇んで

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

を満足する様な  $F, G, H$  を定める。従つて

$$\nabla^2 F = -2\xi, \quad \nabla^2 G = -2\eta, \quad \nabla^2 H = -2\zeta$$

之等の微分方程式の特解は

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\xi'}{r} dx' dy' dz', & G &= \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\eta'}{r} dx' dy' dz', \\ H &= \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{\zeta'}{r} dx' dy' dz' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi} \iiint \left\{ \xi' \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{1}{r} \right) + \eta' \frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{1}{r} \right) + \zeta' \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{1}{r} \right) \right\} dx' dy' dz' = 0$$

之が成立する爲には Green の定理によつて、總べての點で  $\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$ , 渦の表面で  $l\xi + m\eta + n\zeta = 0$ , 無限遠で  $\xi = \eta = \zeta = 0$ , が成立してゐる事が必要である。

渦と體積變化の兩方による速度は

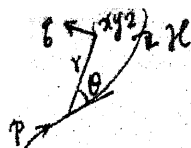
$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \\ v &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \\ w &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

無限に擴がつた非壓縮性流體中の唯1條の渦による速度を求めるには、微小體積  $\delta x' \delta y' \delta z'$  の代りに  $\sigma' ds'$  を用ひる。但し  $ds'$  は渦の小部分の長さ、 $\sigma'$  は斷面積である。非壓縮性流體であるから  $\theta = 0$ , 従つて  $\phi = 0$  となる。

$$\xi' = \omega' \frac{\partial x'}{\partial s'}, \quad \eta' = \omega' \frac{\partial y'}{\partial s'}, \quad \zeta' = \omega' \frac{\partial z'}{\partial s'}$$

であるから、 $\kappa = 2\omega'\sigma'$  と置けば  $\rightarrow$  strength

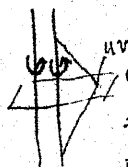
$$F = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{dx'}{r}, \quad G = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{dy'}{r}, \quad H = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{dz'}{r}$$



一本の渦 = 渦の長さ  $\kappa$   
 $\phi = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{\sin \theta ds'}{r^2}$   $\phi \perp \Delta$  Biot-Savart 法則

$$\therefore \left. \begin{aligned} u &= \frac{\kappa}{4\pi} \int \left( \frac{dy'}{ds'} \frac{z-z'}{r} - \frac{dz'}{ds'} \frac{y-y'}{r} \right) \frac{ds'}{r^2} \\ v &= \frac{\kappa}{4\pi} \int \left( \frac{dz'}{ds'} \frac{x-x'}{r} - \frac{dx'}{ds'} \frac{z-z'}{r} \right) \frac{ds'}{r^2} \\ w &= \frac{\kappa}{4\pi} \int \left( \frac{dx'}{ds'} \frac{y-y'}{r} - \frac{dy'}{ds'} \frac{x-x'}{r} \right) \frac{ds'}{r^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(9)$$

3. 2次元の渦の問題



渦が總べて  $z$  軸に平行な直線状をなす場合には、運動は  $xy$  面内の2次元の問題と考へる事が出来る。この場合は速度成分  $w$  は零となり、 $u, v$  は  $x, y$  のみの函数であつて、従つて  $\xi = 0, \eta = 0$  となる。かゝる渦運動を直線渦<sup>6)</sup>と稱する。この時は (8) は次の形になる。

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \dots\dots\dots(10)$$

$\phi$  及び  $\psi$  は次の關係を満足する。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\theta, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 2\zeta \dots\dots\dots(11)$$

非壓縮性流體の場合には

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \dots\dots\dots(12)$$

$\zeta$  は渦糸に沿つて或値を有してゐるが、それ以外では零である。(11)の第2式の解は

$$\phi = \frac{1}{\pi} \iint \zeta' \log r dx' dy' + \phi_0$$

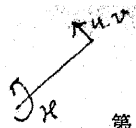
但し  $\zeta'$  は  $(x', y')$  に於ける  $\zeta$  の値、 $r$  は  $\{(x-x')^2 + (y-y')^2\}^{\frac{1}{2}}$  に等しく、 $\phi_0$  は  $\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} = 0$  を満足せしめる函数である。之から

(12) を書き直せば

$$u = -\frac{1}{\pi} \iint \zeta' \frac{y-y'}{r^2} dx' dy', \quad v = \frac{1}{\pi} \iint \zeta' \frac{x-x'}{r^2} dx' dy' \dots\dots(13)$$

従つて  $(x', y')$  にある強さ  $\kappa$  にの渦による  $(x, y)$  に於ける速度成分は

6) Rectilinear vortex.



$$v = -\frac{\kappa}{2\pi} \frac{y-y'}{r^2}, \quad u = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{x-x'}{r^2}$$

であつて、合速度はこの2點を結ぶ直線に垂直になり、その大きさは  $\frac{\kappa}{2\pi r}$  である。従つて又唯1つの渦による  $\psi$  の値は

$$\psi = \frac{\kappa}{2\pi} \log r \dots\dots\dots(14)$$

であつて、有限個の渦 (a, b) による速度は

$$u = -\sum \frac{\kappa}{2\pi} \cdot \frac{y-b}{r^2}, \quad v = \sum \frac{\kappa}{2\pi} \cdot \frac{x-a}{r^2}$$

次に  $\iint u \zeta dx dy$  を流體全體に亘つて計算すれば

$$\iint u \zeta dx dy = -\frac{2}{\pi} \iiint \zeta \zeta' \frac{y-y'}{r^2} dx dy dx' dy'$$

この積分では  $\zeta \zeta' \frac{y-y'}{r^2} dx dy dx' dy'$  に対して必ず  $\zeta \zeta' \frac{y-y'}{r^2} dx dy dx' dy'$  が存在するから

$$\iint u \zeta dx dy = 0$$

同様にして

$$\iint v \zeta dx dy = 0$$

之は結局  $\sum \kappa u = 0, \sum \kappa v = 0$  なる式を示すものである。各渦の強さは時間と共に變る事はないから

$$\bar{x} = \frac{\sum \kappa x}{\sum \kappa}, \quad \bar{y} = \frac{\sum \kappa y}{\sum \kappa} \quad (\text{但し } \sum \kappa \neq 0)$$

で與へられる點  $(\bar{x}, \bar{y})$  の運動を考へれば、この點は渦運動を通じて不動である。この點を渦運動の中心と稱し、各渦の位置に  $\kappa$  に比例する質量がある時の全體の重心の位置に當る。

4. 双渦

強さ  $\kappa_1, \kappa_2$  の2つの平行な直線渦が存在する場合を考へる。各々の渦の

7) Vortex pair.

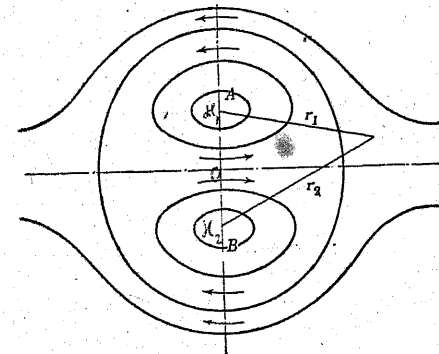


圖-188

中心を A, B とし、全體としての中心を O とする。各渦は互に他の渦によつて動かされるのであるから、速度は AB に垂直になり、従つて之等の互の距離は變化する事なく、同じ角速度で O の周りを運動する。その爲には

$$AO = \frac{\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} AB$$

なる事が必要であるから、角速度は

$$\frac{\kappa_2}{2\pi \cdot AB} \cdot \frac{1}{AO} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2\pi \cdot AB^2}$$

2つの渦の同轉が同じ方向ならば O は A と B の間にあるが、之が反對ならば O はこの直線の延長上にある。更に  $\kappa_1 = -\kappa_2$  なる時は O は無限の遠くにあり、A, B は共に速度  $\frac{\kappa_1}{2\pi \cdot AB}$  を以て AB に垂直に動く。かゝる場合を特に双渦と言ひ、この時の流線の形は圖-188 の様な曲線群である。渦の周りの運動は渦自身も移動してゐるのであるから、渦との相對速度は各渦の中心の位置を  $(\pm a, 0)$  とした時にその流函数が次の形になる。

$$\psi = \frac{\kappa_1}{2\pi} \left( \frac{x}{2a} + \log \frac{r_1}{r_2} \right) \dots\dots\dots(15)$$

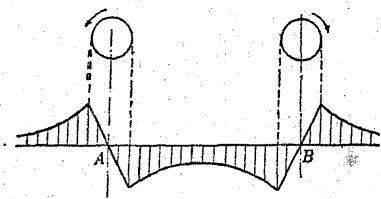


圖-189

その時の直線 AB 上の速度分布は 圖-189 に示し、之は渦と外部との速度分布の特性を表す。

〔問題 1〕 4 つの渦の中心が夫々矩形 ABCD の 4 隅にあり、D 及び B の渦は強さ  $\kappa$ 、A 及び C の渦は強さ  $-\kappa$  なる時の渦の運動を考察せよ。

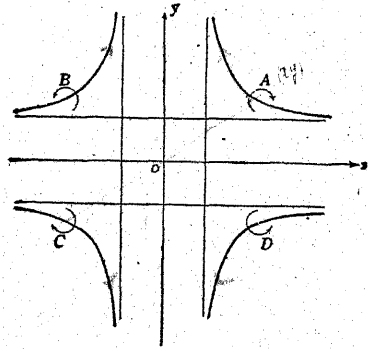


圖-190

(解) A, D にある双渦の爲に B, C は離れ、同時に BC に垂直な速度を減少する。然し 圖-190 の座標軸は常に運動の對稱軸となつてゐる。A の座標を  $x, y$  とすればその速度は

$$u = \frac{dx}{dt} = -\frac{\kappa}{2\pi \cdot AD^2} + \frac{\kappa}{2\pi \cdot AC^2} \cdot \frac{AD^2}{AC^2} = -\frac{\kappa}{4\pi} \cdot \frac{x^2}{y(x^2+y^2)}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{\kappa}{2\pi \cdot AB^2} - \frac{\kappa}{2\pi \cdot AC^2} \cdot \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{\kappa}{4\pi} \cdot \frac{y^2}{x(x^2+y^2)}$$

$$\therefore \frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3} = 0 \text{ 又は } a^2(x^2+y^2) = 4x^2y^2 \dots\dots(16)$$

$a$  は任意の常数であつて、(16) は渦の動く経路を示す式である。

5. 行 列 渦

強さ  $\kappa$  の無数の等しい渦が  $x$  軸上に  $a$  の間隔で配列してゐる場合は、その周りの非同轉運動を考へるには、先づ原点にある 1 つの渦による速度ポテンシャル及び流函数を求めれば第 2 章の 4 b) により

$$\varphi = -\frac{\kappa}{2\pi} \theta, \quad \psi = \frac{\kappa}{2\pi} \log r$$

$$w = \frac{i\kappa}{2\pi} \log z$$

従つて總べての渦の影響の總和を取れば

$$w = \frac{i\kappa}{2\pi} \left[ \log z + \log(z+a) + \log(z-a) + \log(z+2a) + \log(z-2a) + \dots \right]$$

$$= \frac{i\kappa}{2\pi} \log \sin \frac{\pi z}{a}$$

然るに  $u - iv = -\frac{dw}{dz}$

$$= -\frac{i\kappa}{2a} \cot \frac{\pi z}{a}$$

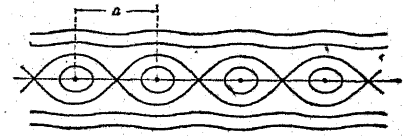


圖-191

$$\therefore \left. \begin{aligned} u &= -\frac{\kappa}{2a} \frac{\sinh \frac{2\pi y}{a}}{\cosh \frac{2\pi y}{a} - \cos \frac{2\pi x}{a}} \\ v &= \frac{\kappa}{2a} \frac{\sin \frac{2\pi x}{a}}{\cosh \frac{2\pi y}{a} - \cos \frac{2\pi x}{a}} \end{aligned} \right\} \dots\dots(17)$$

原点では  $u=0, v=0$  であり、即ち渦は動かない。

次に強さ  $\kappa$  なる渦の行列と平行に之と相對して  $b$  の距離に強さ  $-\kappa$  なる渦の行列が存在する時は、双渦の場合と同じく渦全體が平行に移動する。

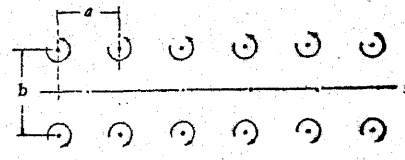


圖-192

$(\pm na \frac{b}{2})$  に於ける  $\kappa$  の渦と  $(\pm na - \frac{b}{2})$  に於ける  $-\kappa$  の渦による運動は

8) 公式  $\sin \theta = \theta \left\{ 1 - \left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2 \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2 \right\} \dots\dots$  による。

$$w = \frac{i\kappa}{2\pi} \log \frac{-\left(\frac{z - ib/2}{na}\right)^2}{-\left(\frac{z + ib/2}{na}\right)^2}$$

従つて全體の渦による運動は

$$w = \frac{i\kappa}{2\pi} \log \left[ \frac{z - \frac{ib}{2}}{z + \frac{ib}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \left(\frac{z - ib/2}{na}\right)^2}{1 - \left(\frac{z + ib/2}{na}\right)^2} \right]$$

$$= \frac{i\kappa}{2\pi} \log \frac{\sin \frac{\pi(z - ib/2)}{a}}{\sin \frac{\pi(z + ib/2)}{a}} \dots\dots\dots(18)$$

$(0, \frac{b}{2})$  に於ける渦の速度を  $U_1, V_1$  とすれば

$$U_1 - iV_1 = -\left(\frac{dw'}{dz}\right)_z = i\frac{b}{2}$$

但し  $w' = w - \frac{i\kappa}{2\pi} \log(z - \frac{ib}{2})$  である。(18) から

$$\frac{dw'}{dz} = \frac{i\kappa}{2a} \left[ \cot \frac{\pi(z - ib/2)}{a} - \frac{a}{\pi(z - ib/2)} - \cot \frac{\pi(z + ib/2)}{a} \right]$$

$$= \frac{i\kappa}{2a} \left[ \cot \alpha - \frac{1}{\alpha} - \cot \frac{\pi(z + ib/2)}{a} \right]$$

但し  $\alpha = \frac{\pi(z - ib/2)}{a}$  であつて、 $\alpha \rightarrow 0$  とすれば

$$\cot \alpha - \frac{1}{\alpha} \rightarrow \left(1 - \frac{a^2}{2} + \dots\dots\right) \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \rightarrow 0$$

従つて

$$U_1 - iV_1 = \frac{i\kappa}{2a} \cot \frac{i\pi b}{a} = \frac{\kappa}{2a} \coth \frac{\pi b}{a}$$

$$\therefore U_1 = \frac{\kappa}{2a} \coth \frac{\pi b}{a}, \quad V_1 = 0 \dots\dots\dots(19)$$

他の渦も總べて之と同じ速度で動く。

圖-193 の様に第 2 の行列が第 1 のものと相對する位置になく、各渦の位置が  $\frac{a}{2}$  だけ遅れてゐる時は、渦全體が平行に運動する事は同じであるが、

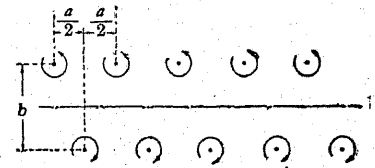


圖-193

(18) の代りに

$$w = \frac{i\kappa}{2\pi} \log \left[ \frac{z - \frac{ib}{2}}{z - \frac{a}{2} + \frac{ib}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \left\{ \frac{1}{na} \left( z - \frac{ib}{2} \right) \right\}^2}{1 - \left\{ \frac{1}{na} \left( z - \frac{a}{2} + \frac{ib}{2} \right) \right\}^2} \right] \dots\dots(20)$$

となり、渦の運動の速度は

$$U_2 = \frac{\kappa}{2a} \tanh \frac{\pi b}{a}, \quad V_2 = 0 \dots\dots\dots(21)$$

Kármán (カルマン) は之等の渦の行列に就いてその安定を調べ、その結果圖-192 の様なものは常に不安定、圖-193 の様なものは  $\cosh \frac{2b}{a} \pi = 2$ 、即ち  $\frac{b}{a} = 0.281$  なる時に限り安定なる事を知つた。

6. 渦面<sup>9)</sup>及び不連続面

流體中に 1 つの面を考へ、その面上で面への垂直速度成分は連続的に變化してゐるが、切線速度成分は面の兩側で違つた値を取る様な状態を想像する。

この面の兩側に相對して長さ  $ds$  の線分を取り、その兩端は面に垂直な長さ  $dn$  の極めて微小な直線を以てつなく。この  $ds$  を面の兩側の相對速度の方向に取れば、勿論之は面への切線方向で、相對速度の大きさは

$$\{(u - u')^2 + (v - v')^2 + (w - w')^2\}^{\frac{1}{2}}$$

但し  $u, v, w$  及び  $u', v', w'$  は面の兩側に於ける速度成分である。従つて長さ  $ds$  及び  $dn$  の線分から成る矩形の周邊に沿ふ循環は

$$\{(u - u')^2 + (v - v')^2 + (w - w')^2\}^{\frac{1}{2}} ds$$

9) Vortex sheet.

之はこの面内にあつて軸が相對速度の方向と垂直な渦の集つた層によるものと看做す事が出来る。即ちこの點に於ける回轉速度を  $\omega$  とすれば循環は  $2\omega ds dn$  であるから

$$2\omega dn = \{(u-u')^2 + (v-v')^2 + (w-w')^2\}^{\frac{1}{2}}$$

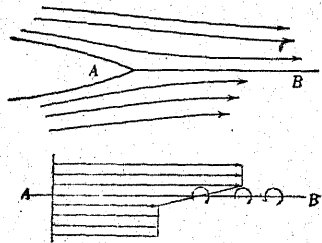
$\omega$  の各成分を  $\xi, \eta, \zeta$ , 面への垂線の方向餘弦を  $l, m, n$  とすれば次の條件式が出来る。

$$\xi(u-u') + \eta(v-v') + \zeta(w-w') = 0$$

$$l\xi + m\eta + n\zeta = 0$$

$dn$  は無限小であるが  $\xi dn, \eta dn, \zeta dn$  は有限値となるのであるから,  $\xi, \eta, \zeta$  は無限大の値を有するものである。

例へば 圖-194 の様な尖つた物體の上下に違つた速度の流れがある時を考



• 圖-194

へれば,  $AB$  の様な不連続面を生ずるが, 之は上述の様な渦の集つた面と考へる事が出来る。この様な面を渦面と稱する。

渦面内の回轉速度は完全流體では無限大である事を要するが, 少しでも粘性のある流體ならば回轉速度は有限となる事が出来るのである。

7. 不連続面の生成

圖-194 の様な不連続面の他に, 圖-195 (d) の様な所謂分離面と稱する不連続面がある。Prandtl (プラントル) によれば粘性の小さい流體内に渦が発生するのは, 多くは前節に述べた様な速度の異なる流れの合流とそれによつ

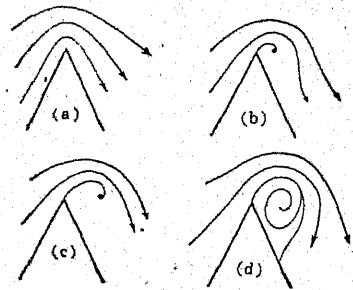


圖-195

て不連続面の出来る事によるものである。圖-195 の様な尖つた物體の角の周りの流れに於て渦の生成する順序は, 初めポテンシャルを持つ流れであるが, 後に述べる様に流體の僅かな粘性の爲にでも物體の表面附近の速度は遅くなり, 従つて角の部分には流體が集積して圖 (b) の様になる。更に進めば角の背後に渦を生じ, 渦と外側の流れの間に不連続面を生ずる。之が即ち分離面であつて, 分離面の外側はポテンシャル流 (完全流體の流れ) と見て差支へない。又渦の發生の爲には粘性が必要である事がわかる。

渦の生成は不連続面の両側に相對速度がなくなるまで續く。航空機の翼が靜止流體中を動く時は, 初めその周圍にはポテンシャル流が出来, それが圖-196 (a) の様になり, 生じた渦は不連続面の上下の速度が等しくなるまで成長して定常状態となる。

この事實から翼の周りの流れが平行流と循環の組合はせである事が知られる。即ち 圖-196 (b) の様に翼を圍む充分に大きい積分路を  $ABCD A$  を取れば

$$I(ABCD A) = 0$$

翼の後尾に直線  $E$  を引いて積分路を  $ABEDA$  と  $EBCDE$  に分ければ

$$I(ABEDA) + I(EBCDE) = 0$$

第2の循環は渦を含むから零とならない。従つて第1の翼の周りの循環は之と大きさが等しく方向反對のものである。即ち流れが定常状態に達して後に翼の周りには循環が存在する。

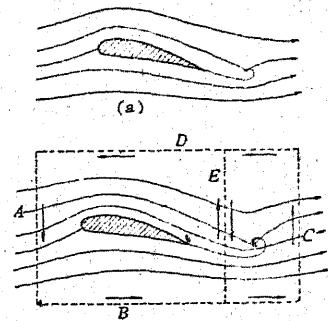


圖-196

## 〔練 習 問 題〕

1.  $z = 1, e^{\pm 2i\frac{\pi}{3}}$  に何れも強さ  $\kappa$  の渦があり,  $z = -1, e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$  に何れも強さ  $-\kappa$  の渦がある。各渦の運動の速度を求めよ。(Green)
2.  $y = 0$  の面に一致する壁面で境された無限に擴がる流體中に, 強さ  $m$  で  $z$  軸に平行な無限に長い直線渦がある。若し外方がなければ流體中の等壓面の方程式は次の形になる事を證明せよ。

$$\{(x-a)^2 + (y-b)^2\}\{(x-a)^2 + (y+b)^2\} = C\{y^2 + b^2 - (x-a)^2\}$$

但し  $(a, b)$  は渦の位置,  $C$  は常數である。(Ramsey)

3. 3 つの面  $x = 0, x = a, y = 0$  で囲まれ  $y$  の正の方向に無限に延びる空間に一様な非壓縮性流體が満たされてゐる。 $z$  軸に平行な 1 つの直線渦が  $(x', y')$  の位置にある時の流體の運動を計算し, 渦の運動の経路は次式で與へられる事を證明せよ。

$$\cot^2 \frac{\pi x}{a} + \coth^2 \frac{\pi y}{a} = \text{const.} \quad (\text{Ramsey})$$

4. 同じ強さ  $\kappa$  の  $n$  個の直線渦が半径  $a$  の圓壩の母線の位置に對稱に配列してゐる。その時の無限に擴がつた流體の運動は

$$w = \frac{i\kappa}{2\pi} \log(z^n - a^n)$$

で定められる事を證明せよ。但し座標原點は圓壩中心の上にある。

(Green)