第2編 流 體 力 學

第1章 完全流體の力學 (1)

1. 完全流體[1]

液體，氣體を通じて，流體運動を取扱ふ爲にはそれに關する微分方程式，卽ち運動方程式[2]が必要であるが，問題の完全な解を得る爲にはその他に質量不變則を表す連續方程式[3]を必要とする。

之等の方程式を解いて流體力學の問題を解決するに當り，先づ用ひられる假定は完全流體の假定である。之は流體に粘性がないと言ふ假定であつて，空氣又は水等の運動を取扱ふ時は之等の粘性は小さいから，この假定の許される場合も少くないのである。

この他に更に流體の非壓縮性[4]が假定される事が多い。特に水の場合は壓縮率は 20°C に於て 1 氣壓に對し約 49×10^{-6} であるから一般には非壓縮性と見てよい。

2. Euler の方程式

或任意の時間に流體中の1點に於ける運動を考へる事によつて求めた運動及び連續の方程式を Euler (オイラー) の方程式と言ふ。

任意の點 (x, y, z) に於ける流體の速度の各成分を時間 t に於て $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ とする。この時點 (x, y, z) にあつた流體分子は時間 $t+\delta t$ にては $(x+u\delta t, y+v\delta t, z+w\delta t)$ の位置に移つてゐて，その時の各速度成分は $u(x+u\delta t, y+v\delta t, z+w\delta t, t+\delta t)$, $v(x+u\delta t, y+v\delta t, z+w\delta t, t+\delta t)$, $w(x+u\delta t, y+v\delta t,$

1) Perfect fliud. 2) Equation of motion.
3) Equation of continuity. 4) Incompressibility.

$z+w\delta t,\ t+\delta t)$ となつてゐる。故に點 (x, y, z) に於ける時間 t の時の加速度の x 方向の成分は

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{u(x+u\delta t,\ y+v\delta t,\ z+w\delta t,\ t+\delta t)-u(x, y, z, t)}{\delta t}$$

$$=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}$$

y 及び z 方向の成分も同樣にして計算される。上の形は Stokes の記號によつて次の樣に書かれる。

$$\frac{Du}{Dt}=\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{局所的部分}}+\underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{定常的部分}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$\frac{Dv}{Dt}$, $\frac{Dw}{Dt}$ に就いても同じ形で表される。

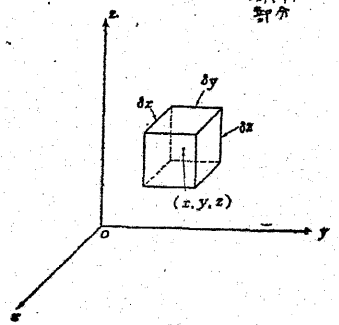


圖-158

圖-158 の樣に點 (x, y, z) を中心として各邊の長さが δx, δy, δz の小直六面體を考へれば，この六面體の運動量增加の割合は，x 方向に就いては ρ を流體の密度として $\rho\delta x\delta y\delta z\cdot\frac{Du}{Dt}$ で與へられる。之に對してこの六面體に働く外力は質量力[4]を X, Y, Z とすれば x 方向には $\rho\delta x\delta y\delta z\cdot X$ であり，その他に流體壓の分力がある。(x, y, z) に於ける流體壓の强さを p とすれば，この六面體には x の正の方向には $\left(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\right)\delta y\delta z$, 負の方向には $\left(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\right)\delta y\delta z$ の流體壓が働いてゐる。從つて結局 x 方向の運動に關する微分方程式は

$$\rho\delta x\delta y\delta z\cdot\frac{Du}{Dt}=\rho\delta x\delta y\delta z\cdot X-\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\delta y\delta z$$

y 及び z 方向にも同樣な關係が成立するから，結局

5) 質量に比例する力で例へば重力の如きもの。Body force.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}&=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(2)$$

之を Euler の運動方程式と稱する。次に連續方程式を求めるには，圖-158 の微小直六面體を考へれば，原點に近い方の $\delta y\delta z$ の面を通つて時間 δt の間にこの六面體の中に入る流體の量は

$$\left(\rho u-\frac{1}{2}\frac{\partial\rho u}{\partial x}\delta x\right)\delta y\delta z\delta t$$

之と反對側から出て行く量は

$$\left(\rho u+\frac{1}{2}\frac{\partial\rho u}{\partial x}\delta x\right)\delta y\delta z\delta t$$

從つてこの 2 つの面を通つて六面體中に入る差引きの量は

$$-\frac{\partial\rho u}{\partial x}\delta x\delta y\delta z\cdot\delta t$$

他の方向の面に就いても同樣であるから，全體の表面を通つて時間 δt の間にこの六面體に入る流體の全量は

$$-\left(\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}+\frac{\partial\rho w}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z\cdot\delta t$$

然るに微小六面體內の流體の最初の質量は $\rho\delta x\delta y\delta z$ であつて，之の δt の間の增加は體積は不變であるから

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\delta x\delta y\delta z\cdot\delta t$$

である。之は上に求めた表面を通しての流入量に等しいから，次の微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}+\frac{\partial\rho w}{\partial z}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

又は Stokes の記號を用ひて書き直せば

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(3) 又は (4) を Euler の連續方程式と言ふ。流體が非壓縮性と考へられる時は, $\rho=\text{const.}$ であるから

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

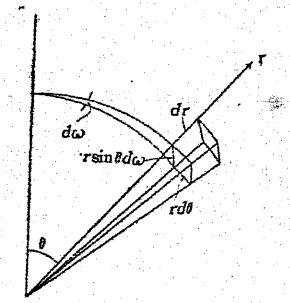


圖-159

〔問題 1〕 圖-159 の樣な極座標を用ひて Euler の運動及び連續の方程式を表せば次の形になる事を證明せよ。但し R, Θ, Ω は夫々に r, θ, ω 方向の質量力, u, v, w は $dr, rd\theta, r\sin\theta d\omega$ の方向の速度成分である。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{w}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \omega}-\frac{v^2+w^2}{r}\\
&\qquad=R-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{w}{r\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial \omega}-\frac{w^2\cot\theta}{r}+\frac{uv}{r}\\
&\qquad=\Theta-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{u}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}+\frac{w}{r\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \omega}+\frac{uw}{r}+\frac{vw}{r}\cot\theta\\
&\qquad=\Omega-\frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \omega}
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\rho u r^2)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v\sin\theta)}{\partial \theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho w)}{\partial \omega}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(7)$$

〔問題 2〕 Euler の方程式を 圖-160 の樣な圓壔座標に變換すれば次の形に

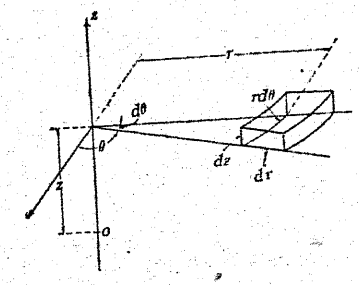


圖-160

なる事を證明せよ。但し R, Θ, Z 及び u, v, w は夫々 $dr, rd\theta, dz$ 方向の質量力及び速度成分である。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{v^2}{r}=R-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{uv}{r}=\Theta-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}+w\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \quad \cdots(8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho u r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v)}{\partial \theta}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

3. Lagrange の方程式

最初 (a, b, c) に在つた一流體分子が時間 t に (x, y, z) に移つたものと考へ, x, y, z を a, b, c 及び t の函數として表す事が出來れば運動は解決する。この考へで求めた運動及び連續の方程式を Lagrange (ラグランジュ) の方程式と言ふ。

この場合は x, y, z は 流體分子の位置を表す量で a, b, c, t の函數であるから, 加速度は $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ で表され, 圖-158 の微小直六面體の運動を考へる事により

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}=\frac{\partial p}{\partial a}\right)$$

この 3 式に夫々 $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial a}$, $\frac{\partial z}{\partial a}$ を乘じて加へれば

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a} = 0$$

同様にして

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial b} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial b} = 0\\ \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial c} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial c} = 0\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

之を Lagrange の運動方程式と言ふ。連續方程式を求めるには (a, b, c) を中心とし，δa, δb, δc を 3 邊の長さとする微小直六面體を考へ，之が時間 t の後に中心が (x, y, z) に移つたものとすれば，その形は歪んで各邊の長さの坐標軸上の射影は

$$\delta a \text{ が } \frac{\partial x}{\partial a}\delta a,\ \frac{\partial y}{\partial a}\delta a,\ \frac{\partial z}{\partial a}\delta a$$

$$\delta b \text{ が } \frac{\partial x}{\partial b}\delta b,\ \frac{\partial y}{\partial b}\delta b,\ \frac{\partial z}{\partial b}\delta b$$

$$\delta c \text{ が } \frac{\partial x}{\partial c}\delta c,\ \frac{\partial y}{\partial c}\delta c,\ \frac{\partial z}{\partial c}\delta c$$

從つて變形して平行六面體となつた時の體積は

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a}\\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b}\\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c}\end{vmatrix}\cdot\delta a\delta b\delta c = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)}\cdot\delta a\delta b\delta c$$

最初の流體の密度を ρ_0, t の後の密度を ρ とすれば質量不變の法則により

$$\rho\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \rho_0 \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

之を Lagrange の連續方程式と言ふ。非壓縮性の流體を考へる時は

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

4. 流　　線[6]

運動してゐる流體中の任意の一分子は一つの曲線軌道卽ち流跡線[7] を畫がいてゐる。次に或任意の時間に於て曲線上の點がそこの速度の方向を表してゐる樣な 1 つの曲線を考へると，之の群によつて空間內の總べての點に於けるその時の速度の方向を表す事が出來る。かゝる曲線を流線と稱する。圖-161 の曲線 $P_1P_2P_3P_4$ は流線を表す。

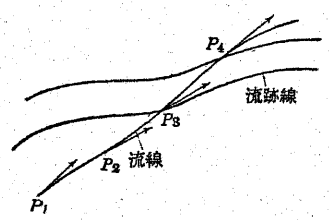


圖-161

總べての點に於ける運動の狀態が時間的に變化する事のない運動を定常運動[8] と言ひ，この場合は一分子の後にその流跡線上に來た他の分子は線上の何れの點に於ても前に行つた分子のその點に於ける速度の大きさ及び方向を持つのであるから，結局その分子は前の分子の流跡線から離れる事がない。卽ちこの時は流跡線と流線とが完全に一致してゐる。

5. 速度ポテンシアル[9] と Bernoulli の定理

流體力學の問題に於ては多くの場合速度 u, v, w は 1 つの單價函數によ

6) Stream line.　7) Path of particle.　8) Steady motion.
9) Velocity potential.

つて次の形に表す事が出來る。

$$u,\ v,\ w = -\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad -\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

この時 φ を速度ポテンシアルと稱する。1 つの流體分子によつて描かれる流跡線の方程式は

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

であるから，この曲線は $\varphi = \text{const.}$ なる面と垂直である。この面を等ポテンシアル面[10]と名付ける。又或點 (x, y, z) に於ける流體分子の運動の速度は

$$lu + mv + nw = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds} = -\frac{d\varphi}{ds}$$

但し s は運動の方向に測つた長さであつて，從つて速度は運動の方向の φ の減少率に當る。

外力も質量力ならば多くの場合ポテンシアルを有し，このポテンシアルを Ω で表せば

$$X,\ Y,\ Z = -\frac{\partial\Omega}{\partial x},\quad -\frac{\partial\Omega}{\partial y},\quad -\frac{\partial\Omega}{\partial z}$$

從つて (2) を書き直せば

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial\Omega}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial\Omega}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial\Omega}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

この 3 式に夫々 $dx,\ dy,\ dz$ を乘じて加へたものを積分し，[11] $u^2 + v^2 + w^2 = q^2$ と書き，$F(t)$ を t の任意の函數とすれば

10) Equipotential surface.
11) 流線に沿つて積分した事になる。

$$\int\frac{dp}{\rho} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \Omega - \frac{1}{2}q^2 + F(t) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

從つて非壓縮性流體で速度ポテンシアルが存在する時の運動及び連續の方程式は次の形になる。

$$\left.\begin{aligned} &\frac{p}{\rho} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \Omega - \frac{1}{2}q^2 + F(t) \\ &\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{又は} \quad \nabla^2\varphi = 0 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

この場合に更に定常運動の條件を加へ，外力を重力のみとして，oz 軸を鉛直下向きに取れば

$$\Omega = -gz$$

從つて (16) の運動方程式は

$$\frac{p}{\rho} = gz - \frac{1}{2}q^2 + \text{const.} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

之は Bernoulli の定理である。

6. 衝 擊 力[12]

流體に衝擊力が作用するか，或は境界面の一部の急激な動きによつて衝擊壓が加へられた時の流體内の速度變化を求める。

$\tilde{\omega}$ を衝擊壓，$X',\ Y',\ Z'$ を點 (x, y, z) に於ける衝擊質量力とし，u, v, w 及び $u',\ v',\ w'$ を夫々衝擊作用の前及び後のこの點に於ける速度とする。衝擊力はそれによつて起る運動量の變化によつて測る事が出來るから，(x, y, z) を中心とする微小直六面體 $\delta x\delta y\delta z$ を考へれば

$$\rho(u' - u)\,\delta x\delta y\delta z = \rho X'\delta x\delta y\delta z - \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x}\,\delta x\delta y\delta z$$

$$\therefore \qquad \rho(u' - u) = \rho X' - \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x}.$$

12) Impulse

$$\left.\begin{aligned}\rho(v'-v)&=\rho Y'-\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial y}\\ \rho(w'-w)&=\rho Z'-\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial z}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

〔問題 3〕 或質量の流體が半徑 a の球を圍み，その外周は之と共心の半徑 b の球でその上で Π の一定壓力を受け；その他の外力はない。內球が俄に共心の小球に縮少した場合に，よつて起る流體の運動及びその小球への衝擊作用を計算せよ (Ramsey)。

(解) 時間 t に中心から r' の距離の壓力を p，速度を v' とすれば，運動及び連續方程式は

$$\frac{\partial v'}{\partial t}+v'\frac{\partial v'}{\partial r'}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r'}$$

及び $$\frac{\partial(r'^2v')}{\partial r'}=\text{const.}\qquad \text{即ち}\quad r'^2v'=F(t)$$

從つて $$\frac{1}{r'^2}\frac{dF}{dt}+v'\frac{\partial v'}{\partial r'}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r'}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i})$$

時間 t に於ける外及び內の境界面の半徑を R 及び r とし，その速度を V 及び v とすれば，之等は何れも t のみの函數であつて

$$V=\dot{R}\qquad v=\dot{r}$$

(i) を r' に關して $r'=r$ から $r'=R$ まで積分すれば

$$-\frac{dF}{dt}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)+\frac{1}{2}(v^2-V^2)=\frac{\Pi}{\rho}$$

然るに $$F(t)=r^2v=R^2V$$

$$\therefore\quad \frac{dF}{dt}=2rv\dot{r}+\dot{r}^2\frac{dv}{dr}\dot{r}$$

$$=2rv^2+r^2v\frac{dv}{dr}$$

從つて $$-\left(2rv^2+r^2v\frac{dv}{dr}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)+\frac{1}{2}v^2\left(1-\frac{r^4}{R^4}\right)=\frac{\Pi}{\rho}$$

之に $2r^2$ を乘じて，$R^3-r^3=b^3-a^3=c^3$ なる關係を入れゝば

$$\frac{2\Pi r^2}{\rho}=-\left\{\frac{1}{r}-\frac{1}{(r^3+c^3)^{\frac{1}{3}}}\right\}\frac{d}{dr}(v^2r^4)+v^2r^4\left\{\frac{1}{r^2}-\frac{r^2}{(r^3+c^3)^{\frac{4}{3}}}\right\}$$

之を積分すれば

$$\frac{2}{3}\frac{\Pi}{\rho}\frac{(a^3-r^3)}{r^4}=v^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)$$

r' の位置では速度 0 から急に v' になつたのであるから，之による衝擊壓を $\tilde{\omega}$ とすれば (18) から

$$d\tilde{\omega}=-\rho v'dv'=-\rho\frac{r^2v^2dr'}{r'^2}$$

然るに $r'=R$ では $\tilde{\omega}=0$ であるから，之を積分すれば

$$\frac{\tilde{\omega}}{\rho}=r^2v\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)$$

之は $r'=r$ に於ける衝擊壓であつて，球への全衝擊は

$$4\pi r^2\tilde{\omega}=4\pi\rho r^3v\frac{R-r}{R}$$

この時失はれた全運動量は

$$\int_r^R 4\pi r'^2\rho v'dr'=4\pi\rho r^2v(R-r)$$

速度 v を求めるには，運動エネルギー

$$T=\frac{1}{2}\int_r^R 4\pi r'^2\rho v'^2dr'$$

$$=2\pi\rho\int_r^R\frac{r^4v^2}{r'^2}dr'=2\pi\rho r^4v^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)$$

及び外力によつて爲された仕事

$$W=\int_b^R 4\pi R^2\Pi(-dR)$$

$$=\frac{4}{3}\pi\Pi(b^3-R^3)=\frac{4}{3}\pi\Pi(a^3-r^3)$$

の 2 つを等しいと置く事により

$$v=\left\{\frac{2\Pi(a^3-r^3)}{3\rho r^4\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

7. Helmholz の方程式

流體分子が 1 つの軸の周りに回轉速度を有する時，その 3 成分を ξ, η, ζ とすれば之等に起因する線速度はその點を原點に取つて，

ξ による線速度	0,	$-\xi z$	ξy
η 〃	ηz	0	$-\eta x$
ζ 〃	$-\zeta y$,	ζx,	0

$$\therefore \quad u=\eta z-\zeta y,\quad v=\zeta x-\xi z,\quad w=\xi y-\eta x$$

$$\therefore \quad 2\xi=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\quad 2\eta=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$2\zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

之を用ひて (2) の第 1 式を書き直せば

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}\right)-2(\zeta v-\eta w)=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

然るに

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{v^2}{2}+\frac{w^2}{2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial q^2}{\partial x}-2(\zeta v-\eta w)=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial q^2}{\partial y}-2(\xi w-\zeta u)=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial q^2}{\partial z}-2(\eta u-\xi v)=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(20)$$

之は流體分子の回轉を含む運動方程式であつて，Helmholz（ヘルムホルツ）の方程式と言ふ。

8. 境界面での方程式

固定境界面では之に垂直な速度が零であるから，面への垂線の方向餘弦を l, m, n とすれば，境界面上の總べての點に於て

$$lu+mv+nw=0$$

固體が流體中を運動する樣な場合には，固體面上ではその面への垂直速度は固體自身のその方向の速度成分に等しい。又流體中の如何なる面も定まつた流體分子の膜から成つて居り，他の流體分子と入れ換る事がない。從つて面に垂直な速度は近接した流體分子の同じ方向の速度に等しい。即ち面への垂線の微小長 PP' (P は面上の點) を $d\nu$ とし，面の方程式を

$$F(x,y,z,t)=0$$

とする。P の座標は x, y, z であるから，P' の座標は $x+ld\nu$, $y+md\nu$, $z+nd\nu$ である。但し l, m, n は PP' の方向餘弦で，夫々に $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ に比例する。時間 $t+dt$ に於て P' がこの面上に來るものとすれば

$$F(x+ld\nu,\ y+md\nu,\ z+nd\nu,\ t+dt)=0$$

$$\therefore \quad \left(l\frac{\partial F}{\partial x}+m\frac{\partial F}{\partial y}+n\frac{\partial F}{\partial z}\right)d\nu+\frac{\partial F}{\partial t}dt=0$$

然るに一方に於て

$$lu+mv+nw=\dot{\nu}$$

$$\therefore \quad lu+mv+nw=-\frac{\partial F}{\partial t}\Big/\left(l\frac{\partial F}{\partial x}+m\frac{\partial F}{\partial y}+n\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

尙

$$l,\ m,\ n=\frac{\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial z}}{\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

の關係があるから，之を上式に代入すれば結局

$$\frac{\partial F}{\partial t}+u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}+w\frac{\partial F}{\partial z}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

之が境界面での微分方程式である。

9. 回轉運動[13]と非回轉運動[14]

運動する流體内の 1 點 (x, y, z) に於ける速度を u, v, w とすれば，この點と $(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z)$ との間の相對速度は

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z$$

$$\delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\delta z$$

$$\delta w = \frac{\partial w}{\partial x}\delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\delta z$$

玆に

$$a = \frac{\partial u}{\partial x},\quad b = \frac{\partial v}{\partial y},\quad c = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$2f = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},\quad 2g = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},\quad 2h = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},\quad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},\quad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

と書けば上の式は次の形になる。

$$\left.\begin{aligned}\delta u &= a\delta x + h\delta y + g\delta z + (\eta\delta z - \zeta\delta y)\\ \delta v &= h\delta x + b\delta y + f\delta z + (\zeta\delta x - \xi\delta z)\\ \delta w &= g\delta x + f\delta y + c\delta z + (\xi\delta y - \eta\delta x)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

即ち (x, y, z) を中心とする微小流體の運動は次の 3 つから成る事を知る。その第 1 は速度 u, v, w を以て流體が全體的に移動するものであり，第 2 は (22) の相對運動の最初の 3 項を以て表されるものであつて，之は a, b, c なる伸びと f, g, h なる變形より成り，純歪みと稱せられる。第 3 のものは (22) の最後の 2 項を以て表されるもので，之は既に述べた樣に 1 つの軸の周りの回轉[15]である。

13) Rotational motion. 14) Irrotational motion. 15) Rotation.

運動する流體内を通じて ξ, η, ζ が零，即ち流體中の各部分の相對運動が純歪みのみで回轉のない時は，之を非回轉運動と言ひ，回轉を含んでゐる運動を回轉運動と言ふ。

非回轉運動では $\xi = \eta = \zeta = 0$，即ち

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

從つて必ず速度ポテンシアルが存在してゐる。

10. 流れ[16]と循環[17]

或曲線分 $ABCD$ に沿つて $\int_A^D (udx + vdy + wdz)$ なる積分を考へる時に，之を A より D までのこの曲線に沿ふ流れと名付け，$I(ABCD)$ にて表す。A と D が一致して閉曲線となつた時はこの積分は循環と稱せられる。

流れ又は循環の性質としては

$$I(ABCD) = -I(DCBA)$$

$$I(ABCD) = I(AB) + I(BC) + I(CD)$$

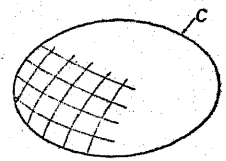


圖-162

又 1 つの閉曲線にて圍まれた部分を 圖-162 の樣に 2 群の曲線で多數の小部分に分ち，その各部分毎にその周圍に沿ふ循環を求めて之を總計したものは，最初の閉曲線 C に沿ふ循環に等しい。之は閉曲面内に引いた線に沿ふ流れに對しては必ず之と反對方向の流れが存在して互に消し合ふ事になるからである。

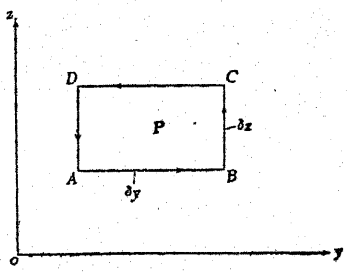


圖-163

次に yz 面上に 圖-163 の樣な P を中心とする微小矩形 $ABCD$ を考

16) Flow. 17) Circulation.

へる。この兩邊の長さを δy, δz とし，周邊に沿ふ矢印の方向の流れを考へれば

$$I(AB)=\left(v-\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z}\delta z\right)\delta y,\quad I(BC)=\left(w+\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\delta y\right)\delta z$$

$$I(CD)=-\left(v+\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z}\delta z\right)\delta y,\quad I(DA)=-\left(w-\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\delta y\right)\delta z$$

$$\therefore\qquad I(ABCDA)=\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\delta y\delta z$$

從つて座標面に平行な小面積 dS_x, dS_y, dS_z の境界に沿ふ循環は夫々

$$2\xi dS_x,\quad 2\eta dS_y,\quad 2\zeta dS_z$$

である。更に 圖-164 の様な任意の傾きを持つた面 ABC の周りの循環を考へれば

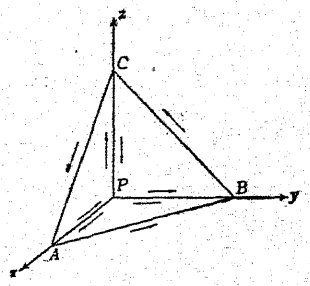


圖-164

$$I(ABCA)=I(PBCP)+I(PCAP)+I(PABP)$$
$$=2\xi l\triangle+2\eta m\triangle+2\zeta n\triangle$$

但し $\triangle$ は三角形 ABC の面積，l, m, n はその方向餘弦である。故に任意の微小面積 δS の周りの循環は

$$2(l\xi+m\eta+n\zeta)\delta S$$

となり，之は面積に比例する事がわかる。尙循環の符號は圍まれた面が流れの方向に見て曲線の左側にある時を正と定める。

2 點 A, B の間の流れを考へた時に，この 2 點を結ぶ 2 つの經路 ACB 及び ADB を畫がけばこの 2 曲線は閉曲線 $ACBDA$ を作る。若しこの流れの場[18]が單一連結[19]であるならば，即ち A, B 間の曲線に沿ふ積分の値が積分經路に關係しないならば

$$I(ACB)=I(ADB)\quad 又は\quad I(ACBDA)=0$$

單一連結

然し 圖-165 の b, c の様な 2 重連結又は 3 重連結の面では非回轉運動で

18) Field. 19) Simply-connected.

あつても

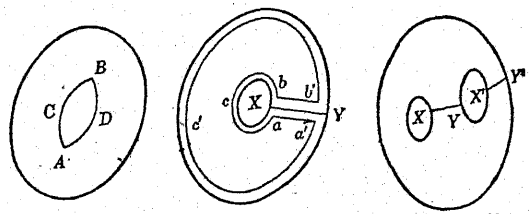
$$I(ACB)\neq I(ADB)\quad 又は\quad I(ACBDA)\neq 0$$

となる事が出來る。

非回轉運動の流體中に定點 A から移動する點 P までの流れを取り，之を $-\varphi$ で表せば

$$\varphi=-\int_A^P(udx+vdy+wdz)$$

AP が x 軸に平行で且その長さが微小になる様に P を動かせば



(a) 單一連結 (b) 二重連結 (c) 三重連結

圖-165

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=u$$

同様にして $\quad -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=v,\quad -\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=w$

從つて φ は速度ポテンシアルである事がわかる。多重連結の場合に於ては φ は多價函數であるが，P を x 軸に平行に δx だけ動かした時に φ が $\delta\varphi$ だけ增したものとすればやはり

$$-\frac{\delta\varphi}{\delta x}=u$$

となつて，φ は多價函數の速度ポテンシアルである。

2 重連結の場合を考へて，圖-165 の b の様に 1 つの柵 XY を設けて全體の場を單一連結とし，その中に取つた閉曲線 $ad'c'b'bc$ の周りの循環を作る。

$$I(aa'c'b'bc) = 0$$

$$\therefore \quad I(aa') + I(a'c'b') + I(b'b) + I(bca) = 0$$

然るに aa' と bb' を充分近くに取れば $I(aa') = I(bb')$ であるから

$$I(acb) = I(a'c'b')$$

即ち内部境界を圍む2つの閉曲線 acb 及び $a'c'b'$ に沿ふ循環は曲線の位置に關係なく等しい。この循環値を κ とし，之を循環常數[20]と言ふ。n 重連結の領域に對しては同樣にして $n-1$ 個の柵が必要であり，$n-1$ 個の循環常數が得られる。

11. 流束[21]，流管[22]及び運動エネルギー

流體内の或面を通る垂直分速度の面積分を流束と言ふ。之はその面を通る流體の量を表すものであつて，非回轉運動では 流量に相当する

$$-\iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS$$

この面が閉曲面であつて，その中が流體で充たされた時は流束の總和は一般に零であるから

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

或小面積を通る流線群は1つの管，即ち流管を作る。流管の斷面積 σ とその部分の速度 q の積はこの管の何れの部分でも等しい。流體全體を $q\sigma$ の等しい無數の流管より成るものと考へれば，或面を通る速度は之を通る流管數の密度に比例する。又 (23) から見れば流管又は流線は流體内の1點に初まり，又は終止する事は出來ない。

非回轉運動の運動エネルギーは次の形になる。

$$T = \frac{1}{2}\iiint \rho \left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} dxdydz$$

この全流體を包む面上の任意の點に於ける面の方向餘弦を l, m, n とし，

20) Cyclic constant. 21) Flux. 22) Tube of flow.

2つの函數 φ, φ' を考へる。又この面への垂線の方向を ν とすれば

$$l\varphi\frac{\partial \varphi'}{\partial x} + m\varphi\frac{\partial \varphi'}{\partial y} + n\varphi\frac{\partial \varphi'}{\partial z} = \varphi\frac{\partial \varphi'}{\partial \nu}$$

Green の定理[23]により

$$\iint \varphi\frac{\partial \varphi'}{\partial \nu}\, dS = -\iiint\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \varphi'}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \varphi'}{\partial z}\right) dxdydz$$

$$-\iiint \varphi\nabla^2\varphi' dxdydz \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

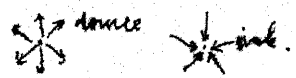
此處で $\varphi = \varphi'$ と置き，且 φ を速度ポテンシアルとして，非壓縮性流體を考へれば $\nabla^2\varphi = 0$ であるから

$$\iiint \left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} dxdydz = -\iint \varphi\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\, dS$$

從つて非壓縮性流體の運動エネルギーは

$$T = -\frac{\rho}{2}\iint \varphi\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\, dS \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

12. 流出點[24]と流入點[25]



流出點とは流體がその點より總べての方向に一樣に流れ出る樣に考へられる點であつて，その點を圍む小さい閉曲面を通る流束が m なる時は m をこの流出點の强さ[26]と言ふ。反對に流體が1點に向つて流入するものと考へられる時はこの點を流入點と稱する。

無限遠では靜止してゐる流點中の1つの流出點のみによる運動の，任意の點の速度ポテンシアルは，流出點からの距離を r とすれば

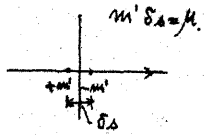
$$\varphi = \frac{m}{4\pi r}$$

又流出點を中心とする球面 S を考へれば

23) U, V, W を有限單價函數とすれば

$$\iint (lU + mV + nW)\, dS = -\iiint\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) dxdydz$$

24) Source. 25) Sink. 26) Strength.



$$-\iint \frac{\partial\varphi}{\partial r}\,dS = m = \text{const.}$$

次に $+m'$ 及び $-m'$ の強さを有する流出點と流入點が δs だけ離れて存在し，δs は非常に小さく m' は非常に大きな値を有し，而も $m'\delta s$ は有限なる値 μ に等しい時に，之を強さ μ の出入點[27]と言ひ，$-m'$ から $+m'$ に向ふ方向をその軸と稱する。

定點 (x', y', z') に在つて軸の方向が l, m, n なる出入點 μ による速度ポテンシアルを見出すには，或任意の函數 f を考へれば

$$f(x'+l\delta s,\ y'+m\delta s,\ z'+n\delta s)-f(x', y', z')$$
$$=\left(l\frac{\partial}{\partial x'}+m\frac{\partial}{\partial y'}+n\frac{\partial}{\partial z'}\right)f(x', y', z')\cdot\delta s$$

であるから，(x', y', z') 點に $-m'$ の流入點，$(x'+l\delta s, y'+m\delta s, z'+n\delta s)$ に $+m'$ の流出點があるものとすれば，點 (x, y, z) に於ける速度ポテンシアルは上の式で

$$f(x', y', z')=\frac{m'}{4\pi r}$$

$$r=\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{\frac{1}{2}},$$

と置いたものである。即ち

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=\frac{\mu}{4\pi}\left(l\frac{\partial}{\partial x'}+m\frac{\partial}{\partial y'}+n\frac{\partial}{\partial z'}\right)\frac{1}{r}\\&=-\frac{\mu}{4\pi}\left(l\frac{\partial}{\partial x}+m\frac{\partial}{\partial y}+n\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(26)$$

$$\therefore\quad \varphi=\frac{\mu}{4\pi}\,\frac{\cos\vartheta}{r^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

ϑ は (x, y, z) と (x', y', z') を結ぶ直線が出入點の軸となす角である。

13. 鏡　　像[28]

流體中に1つの面を考へた時に，この面を通る流れが零になるならば，この面の兩側にある流出點，流入點又は出入點の2群はこの面に關して互に鏡像であると言ふ。この様な面は之を固體壁で置き換へて，その一方の流體を全然取り去つても，他の側の運動には何等の變化が起らない。

27) Double source 又は Doublet.　28) Image.

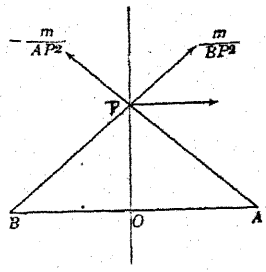


圖-166

例へば1つの流出點の一平面に關する鏡像を求めて見る。平面 OP の兩側で面から等距離の處に相對する點 A 及び B に強さ m の等しい流出點があるものとすれば，P に於ける平面に垂直な速度は

$$-\frac{m}{4\pi AP^2}\cos OAP+\frac{m}{4\pi BP^2}\cos OBP=0$$

即ちこの面 OP を通る流れは零であつて，OP はこの2つ流出點をそれ自身に關して鏡像ならしめる面を表す。

〔問題 4〕 1つの流出點の1つの球面に關する鏡像を求めよ。

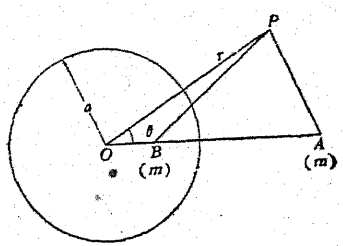


圖167

(解) 圖-167 の A に強さ m の流出點があるものとし，OA の長さを f，球の半徑を a，A の球に關する鏡像を B とする。

$P(r, \theta)$ に於ける速度ポテンシアルの中で，A の流出點によるものを φ_1，B の流出點によるものを φ_2 とする。

$$4\pi\varphi_1=\frac{m}{AP}=\frac{m}{\sqrt{r^2+f^2-2rf\cos\theta}}$$
$$=\frac{m}{f}\left\{1+\sum_1^\infty\frac{r^n}{f^n}P_n(\mu)\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(i)$$

但し $\mu=\cos\theta$，P_n は n 次の Legendre 函數である。φ_2 は B の位置が不明であるから直接に形を定める事が出來ない。唯 $\nabla^2\varphi_2=0$ を滿

足する事は明らかであるから,[29] 次の様な球函數の級數を以て表す事が出來る筈である。

$$4\pi\varphi_2 = \sum_0^\infty A_n \frac{a^n}{r^{n+1}} P_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

然るに球面上ではそれに垂直な分速度は零であるから, $r=a$ にて $\frac{\partial}{\partial r}(\varphi_1+\varphi_2)=0$, 即ち

$$\frac{m}{f}\sum_1^\infty \frac{na^{n-1}}{f^n} P_n - \sum_1^\infty (n+1)\frac{A_n}{a^n} P_n = 0$$

之が θ の總べての値に對して成立する爲には

$$A_0 = 0, \quad A_n = \frac{nma^{n+1}}{(n+1)f^{n+1}}$$

$$\therefore \quad 4\pi\varphi_2 = m\sum_1^\infty \frac{n}{n+1}\cdot\frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}f^{n+1}} P_n$$

$$= m\sum_1^\infty \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}f^{n+1}} P_n - m\sum_1^\infty \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}f^{n+1}}\cdot\frac{P_n}{n+1}$$

〔練 習 問 題〕

1. Boyle の法則に從ふ流體が一樣な直線管内を運動してゐる。重力を無視し, 速度は管斷面を通じて一樣で管軸に平行と假定すれば, 時間 t に於て定點から r の距離の速度は次の方程式から定まる事を證明せよ。 (Ramsey)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(2v\frac{\partial v}{\partial t} + v^2\frac{\partial v}{\partial r}\right) = k\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$$

2. AB は一樣な小さい管で, 中心 O 半徑 a の四分の一圓の形を成して居り, OA が水平 OB が鉛直である。之が密度 ρ の流體で滿され B 端は閉ぢてゐる。今 B 端を突然に開けば, A から角距離 θ だけ離れた點の壓力は直ちに大氣壓上 $\rho g a\left(\sin\theta - \frac{2\theta}{\pi}\right)$ に下り, 且流體面が中心角 β の位置に來た時は

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{1}{a\beta}\left(2g\sin^2\frac{1}{2}\beta\right)$$

になる事を證明せよ。 (Green)

29) 非壓縮性流體と考へてゐる。

3. 圖-167 に於て B が A の反點の位置, 即ち $OB = c = \frac{a^2}{f}$ なる時には, A にある流出點 m の鏡像は B に於ける强さ $\frac{ma}{f}$ の流出點と, O から B までの間の單位長さにつき $-\frac{m}{a}$ の强さの線狀流入點列 (流入線) の和となる事を證明せよ。