第7章 地　下　水

1. Darcy の法則

一般に地下水[1]の流れとして取扱つてゐるものは，地下水が土砂の空隙[2]を滿たして壓力の差によつて流れてゐるものである。從つてその流線は平行線とはならないが，全體として定まつた流れの方向を有する故，その方向に垂直に $\triangle A$ の面積を取り，之を通過する流量を $\triangle Q$ とした時に $v=\dfrac{\triangle Q}{\triangle A}$ を $\triangle A$ の面の位置に於ける地下水の速度とする。

圖の樣な U 字管の底部に，A 及び B に細かい金網を張つてその中に土砂を滿たし，A，B の兩側に落差 h を與へる。A，B の距離を l とすれば，その間の動水勾配は $I=\dfrac{h}{l}$ である。この時に土砂を通過して流れる流量 Q は，實驗によれば

$$Q=kAI$$

但し k は常數，A は管の斷面積である。$v=\dfrac{Q}{A}$ であるから

$$v=kI=k\frac{h}{l}\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

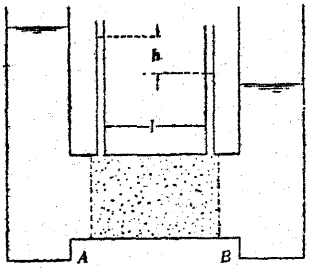

圖-145

之は地下水の抵抗を表す式であつて，Darcy（ダルシー）の法則と稱する。然し地下水でも速度が著しく大きい場合には

$$I=\alpha v+\beta v^2\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

の形の抵抗法則を用ひる必要がある。

廣い土砂層の中に或狀態の地下水流が存在する時は地下水は大體に於て定まつた流線を畫がいて流れる。即ち水分子は或厚さの層から外に出る事なく

---

1) Ground water.　2) Void.

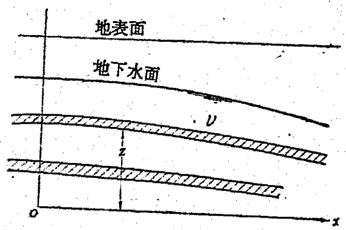

圖-146

平均方向に v の速度で流れる。この層に垂直の方向には $d\left(z+\frac{p}{w_0}\right)=0$ であるから，流線は

$$\varphi = z + \frac{p}{w_0} = \text{const.}$$

なる面に垂直である。故にこの面に垂直方向に測つた長さを n とすれば

$$I = -\frac{d\varphi}{dn} = -\frac{1}{dn}\left(z+\frac{p}{w_0}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

係數 k の値に關しては土砂の空隙の斷面積 dA を通る流量を dQ とすれば，毛管內の流れの實驗により

$$dQ = K\frac{w_0 I(dA)^2}{\mu} \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

K は斷面 dA の形によつて變化し，若し圓形斷面ならば Hagen-Poiseuille の法則[3]によつて $K=\frac{1}{8\pi}$ であるが，三角形斷面ならば $\frac{1}{20\sqrt{3}}$ になる。μ は水の粘性係數である。速度 v は $\sum(dA)$ の面積に就いてその平均値を取れば

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{w_0 I}{\mu}\frac{\sum\{K(dA)^2\}}{\sum(dA)} \\ \therefore\quad k &= \frac{w_0}{\mu}\frac{\sum\{(KdA)dA\}}{\sum(dA)} = \frac{w_0}{\mu}(KdA)_m \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(5)$$

$(KdA)_m$ は KdA を $\sum dA$ の面內で平均した値である。$\sum dA$ は土砂の或面積 $\sum A$ の中の空隙の部分であるから

$$\sum dA = \lambda\sum A, \quad (\lambda < 1)$$

である。k を滲透係數,[4] λ を空隙率[5]と稱する。

土砂を d なる一樣な直徑の小球が相接して排列してゐるものと考へれば，

3) 第2編第5章7に說明がある。 4) Coefficient of filtration.
5) Porosity.

3つの球で圍まれた類似三角形の面積は $0.031\,d^2$ である。從つて水が三角形斷面の細管を流れるものと假定すれば，$K=0.029$ であるから

$$k = \frac{w_0}{\mu}KdA = 0.0009\,d^2\frac{w_0}{\mu} \cdots(6)$$

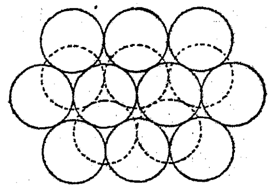
圖-147

Kozeny は之を一般化して土砂の平均體積を $\frac{\pi d_s^2}{4}$ で與へ，$w_0=1$ として次の公式を得た。

$$k = \frac{0.0084}{\mu}\frac{\lambda^3}{(1-\lambda)^2}d_s^2 \cdots\cdots(\text{cm/秒 單位}) \cdots\cdots\cdots(7)$$

又 Hazen は實驗に用ひた砂の中で d_e を徑とする球の體積よりも小さいものゝ合計が，全量の 10% だけある樣な d_e を有效徑とし，T°C の水に對して次の實驗式を與へた。

$$k = 116\,d_e^2(0.7+0.03\,T) \cdots\cdots(\text{cm/秒 單位}) \cdots\cdots\cdots(8)$$

又 Forchheimer によれば砂利の場合は (2) を用ひ，v が 0.0003～0.011 cm/秒 程度に對しては $\alpha=1.53$, $\beta=237$, v が 0.12～1.2 cm/秒 程度に對しては $\alpha=0.71$, $\beta=8$ の實驗公式がある。

土砂に對して普通に用ひられる k の値は次の程度である。

	粘土	深泥	細砂	中砂	粗砂	小砂利
d_e mm	0.002	0.025	0.15	0.35	0.7	2.0
λ %	60	40	35	35	35	38
k (m/時)	0.0001	0.016	0.56	3.1	12.2	100
k (cm/秒)	——	——	0.016	0.086	0.34	2.8

2. 地下水の運動に關する基本式

地下水の流れの中に dV の微小體積の部分を假想し，この水平に取つた x 及び y 方向の運動の方程式を作れば，速度が非常に遲いから速度成分を u, v, w として慣性の項 $\frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2g}$ 等は省略すれば

$$\rho dV\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}dV + fu\cdot dV$$ [6]

$$\rho dV\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y}dV + fv\cdot dV$$

定常運動の場合に $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}=0$ であつて，Darcy の法則に歸するのであるから，摩擦抵抗の係數 f は次の樣になる。

$$f=\frac{1}{u}\frac{\partial p}{\partial x},\quad \text{且}\quad u=kI=-\frac{k}{w_0}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\therefore\qquad f=-\frac{w_0}{k}=-\frac{\rho g}{k}$$

z 方向は鉛直上向きに取れば，x, y, z 方向の運動の基本式は

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{\partial u}{\partial t}&=-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\rho g}{k}u\\ \rho\frac{\partial v}{\partial t}&=-\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\rho g}{k}v\\ \rho\frac{\partial w}{\partial t}&=-\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\rho g}{k}w\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

(9) の第1式に $\frac{\partial x}{\partial s}$，第2式に $\frac{\partial y}{\partial s}$，第3式に $\frac{\partial z}{\partial s}$ を乘じて加へ，$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ として s 方向の合速度を v_s とすれば

$$\frac{\partial v_s}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}-\frac{g}{k}v_s-g\frac{\partial z}{\partial s}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

之は流線方向の運動の方程式である。

3. 掘　拔　井[7]

圖-148 の樣な厚さ a の含水層の中心位置に半徑 r_0 の掘拔井を掘つて，井の水面を基準面上 h_0 ならしめたものとする。含水層内の水面の高さ H は不變とし，基準面から動水勾配線までの高さを h とすれば (10) から

6) 第2章の (24) を導く時と同じ方法で得られる。
7) Artesian well.

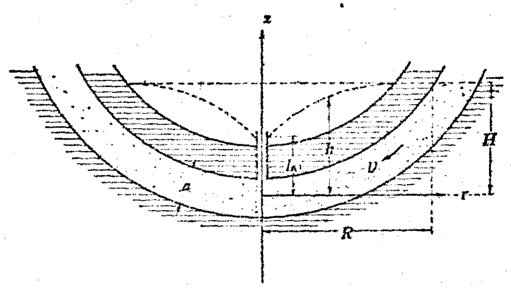

圖-148

$$-g\frac{dh}{dr}-\frac{g}{k}v=0,\qquad\therefore\quad v=-k\frac{dh}{dr}$$

連續性の方程式は $Q=-2\pi rav$ であるから

$$\frac{dh}{dr}=\frac{Q}{2\pi ka}\frac{1}{r},\qquad\therefore\quad h=\frac{Q}{2\pi ka}\log r+C$$

$r=R$ に於て $h=H$ であるから

$$H-h=\frac{Q}{2\pi ka}\log\frac{R}{r}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

又は井の水面 h_0 を與へた時の井からの流出量を求める式は

$$H-h_0=\frac{Q}{2\pi ka}\log\frac{R}{r_0}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

然し 圖-149 の樣に無限に廣い水平な含水層(厚さ a)が靜水壓 w_0H を受けてゐる時に，之に掘拔井を掘つて一定流量 Q を汲み出してゐる時の水面を考へれば，之が定常狀態を保つてゐるものとして

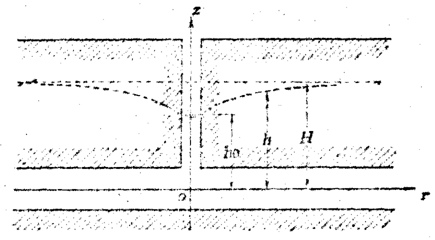

圖149

$r=r_0$ に於て $h=h_0$ の條件を用ひれば

$$h-h_0=\frac{Q}{2\pi ka}\log\frac{r}{r_0}$$

この式から與へられる h は $r\to\infty$ に對して $h\to H$ とならずに $h\to\infty$ となるから不合理である。即ちこの様な場合には含水層の廣さが有限で，$r=R$ に於て $h=H$ の條件が與へ得る場合でなければ定常狀態は保たれない。

從つてこの問題に對する運動の方程式は

$$\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{v}{k}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

連續性の方程式は流水斷面積に變化がないから，前と同じく $Q=-2\pi rav$ であるが Q は時間と共に變化する。1つの條件として $Q=Q(t)$ の形を與へれば

$$vr=-\frac{Q(t)}{2\pi},\quad v=-\frac{Q(t)}{2\pi r},\quad \frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{Q'(t)}{2\pi r}$$

從つて (13) から

$$\frac{\partial h}{\partial r}=\frac{1}{2\pi r}\left[\frac{Q(t)}{k}+\frac{Q'(t)}{g}\right]$$

$$\therefore\quad h=\frac{\log r}{2\pi}\left[\frac{Q(t)}{k}+\frac{Q'(t)}{g}\right]+C(t)$$

第2の條件として $t=0$, $r=r_0$ に於て $h=h_0$ とすれば

$$C(t)=h_0-\frac{\log r_0}{2\pi}\left[\frac{Q(0)}{k}+\frac{Q'(0)}{g}\right]=\text{const.}$$

$$\therefore\quad h-h_0=\frac{\log r}{2\pi}\left[\frac{Q(t)}{k}+\frac{Q'(t)}{g}\right]-\frac{\log r_0}{2\pi}\left[\frac{Q(0)}{k}+\frac{Q'(0)}{g}\right]\cdots\cdots(14)$$

之から動水勾配線の變化を計算する事が出來，從つて井の中の水深の變化も求められる。

4. 深井（不滲透層に達する井）

圖-150 の様な無限に廣く深さの一樣で自由表面のある地下水層を考へる。$r=0$ を中心として半徑 r_0 の井を掘つて水を汲み出し，井の中の水面を下げた時に，周圍の地下水面が下つて，一定流量 Q に對してこの面が安定してゐるものとすれば (10) から

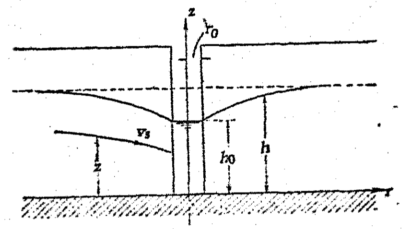

圖-150

$$v_s=-k\frac{d}{ds}\left(\frac{p}{\rho g}+z\right)$$

普通の流水では $\frac{p}{\rho g}+z$ が水深に等しくなるが，地下水流では必ずしも h に等しくないから之を φ と書けば $v_s=-k\frac{d\varphi}{ds}$ の形になる。$\varphi=\text{const.}$ の面は鉛直面とは一致しない。

地下水面の勾配の著しくない處に對して近似的に $v_s=-k\frac{dh}{dr}$, $Q=-2\pi rhv_s$ と考へれば

$$Q=2\pi rh\frac{dh}{dr}$$

$$\therefore\quad h^2=\frac{Q}{\pi k}\log r+C$$

$r=r_0$ にて $h=h_0$ を與へれば

$$h^2-h_0^2=\frac{Q}{\pi k}\log\frac{r}{r_0}$$

從つてこの場合も含水層の廣さが有限，即ち大體半徑 R の廣さであつて，周圍が H の水深の水域に續いてゐる樣な場合に限つて定常狀態を保ち得る。R が大きくなれば定常的に汲み出し得る水量 Q は非常に小さくなる。

含水層の廣さが無限に大きくなれば定常狀態とはなり得ないから，運動の基本式は

$$\frac{1}{g}\frac{\partial v_s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{p}{\rho g}+z\right)+\frac{v_s}{k}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(15)$$

地下水面では $p=0,\ z=h$ であるから

$$\frac{1}{g}\frac{\partial v_s}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial s}+\frac{v_s}{k}=0$$

又は $v_z=v_s\dfrac{\partial h}{\partial s}$ であるから

$$\frac{1}{2g}\frac{\partial v_s^2}{\partial t}+v_z+\frac{v_s^2}{k}=0,\quad (z=h) \cdots\cdots\cdots(16)$$

連續性の方程式は滲透層の空隙率を λ として

$$2\pi r\int_0^h v_r dz-2\pi r(r+dr)\int_0^{h+\frac{\partial h}{\partial r}dr}\left(v_r+\frac{\partial v_r}{\partial r}dr\right)dz$$
$$=\lambda\cdot 2\pi r\frac{\partial h}{\partial t}dr$$

$$\therefore\quad \lambda\frac{\partial h}{\partial t}+\int_0^h\left(\frac{v_r}{r}+\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)dz+\frac{1}{dr}\int_h^{h+\frac{\partial h}{\partial r}dr}v_r dz=0$$

之は近似的に次の様に書く事が出來る。

$$\lambda\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{1}{r}\int_0^h v_r dz+h\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_r\frac{\partial h}{\partial r}=0 \cdots\cdots\cdots(17)$$

1つの條件として井の湧出量 $Q=Q(t)$ を與へれば, $r=r_0$ に於て

$$-2\pi r\int_0^h v_r dz=Q(t)$$

$$\therefore\quad \left[\lambda\frac{\partial h}{\partial t}+h\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_r\frac{\partial h}{\partial r}\right]_{r=r_0}=\frac{Q(t)}{2\pi r^2} \cdots\cdots\cdots(18)$$

(15), (16), (17), (18) から問題を解くのであるが, 積分を可能ならしめる爲に地下水面の勾配はあまり大きくないと言ふ條件を用ひ

$$v_s\fallingdotseq v_r=v(r,\ t)$$

と書く。從つて運動及び連續の方程式は (15) 及び (18) から

$$\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{\rho g}\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{v}{k}=0 \cdots\cdots\cdots(19)$$

$$\lambda\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{h}{r}v+h\frac{\partial v}{\partial r}+v\frac{\partial h}{\partial r}=0 \cdots\cdots\cdots(20)$$

地下水面にて

$$\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{v}{k}+\frac{\partial h}{\partial r}=0 \cdots\cdots\cdots(21)$$

$r=r_0$ にて

$$\lambda\frac{\partial h}{\partial t}+h\frac{\partial v}{\partial r}+v\frac{\partial h}{\partial r}=\frac{Q(t)}{2\pi r_0} \cdots\cdots\cdots(22)$$

1つの例題として一定の湧出量を Q 汲み上げる時の地下水面の變化を計算するには, (20) に rdr を乗じて積分すれば

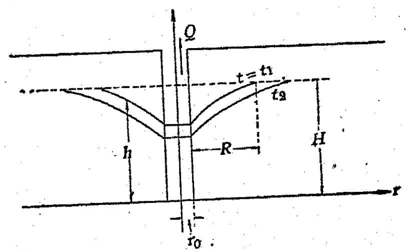

圖-151

$$\lambda\int_{r_0}^{\infty}r\frac{\partial h}{\partial t}dr+\int_{r_0}^{\infty}\frac{\partial(hrv)}{\partial r}dr=0$$

前に述べた様に水平層上の井の問題では $r=R$ に於て $h=H$ となり, $r>R$ の部分では未だ運動が起つて居らず, R が次第に擴大して運動が遠くに及んで行くのである。$r=R$ の圓壔面を考へれば, $r<R$ の部分の地下水面低下に伴なつてこの壔面は擴がつては行くが, 壔面からの流入はない。從つて

$$\lambda\int_{r_0}^{R}r\frac{\partial h}{\partial t}dr=\frac{Q}{2\pi} \cdots\cdots\cdots(23)$$

この兩邊を t にて微分すれば

$$\left[r\frac{\partial h}{\partial t}\right]_{r=R}\frac{dR}{dt}+\int_0^R r\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}dr=0 \cdots\cdots\cdots(24)$$

之は $\frac{dR}{dt}$ を與へる式であるが，之から次の様にして近似計算を行ふ。時間 t に於ける水面形を近似的に

$$\frac{Q}{\pi k}\log\left(\frac{R}{r_0}\right)=H^2-h_0^2$$

$$\therefore \quad R=r_0\exp\left\{\frac{\pi k}{Q}(H^2-h_0^2)\right\}^{8)}$$

を以て表し，$\frac{\partial h}{\partial t}$ は小さい値であるから之をほゞ一樣と考へれば，(23) から

$$\lambda(R^2-r_0^2)\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{Q}{\pi} \quad 且つ \quad \frac{\partial h}{\partial t}\fallingdotseq\frac{\partial h_0}{\partial t}$$

$$\therefore \quad -\frac{\partial h_0}{\partial t}=\frac{Q}{\lambda\pi}\cdot\frac{1}{r_0^2\left[\exp\left\{\frac{2\pi k}{Q}(H^2-h_0^2)\right\}-1\right]}$$

$$\therefore \quad \frac{Q}{4\pi k h_0}\exp\left\{\frac{2\pi k}{Q}(H^2-h_0^2)\right\}+h_0=\frac{Q}{\lambda\pi r_0^2}t+C$$

$t=0$ に於て $h_0=H$ とすれば

$$\frac{Q}{4\pi k}\left[-\frac{1}{H}+\frac{1}{h_0}\exp\left\{\frac{2\pi k}{Q}(H^2-h_0^2)\right\}\right]-(H-h_0)=\frac{Q}{\lambda\pi r_0^2}t \cdots\cdots\cdots(25)$$

之から $\frac{\partial h_0}{\partial t}$ が求められる。又 h_0 を知れば從つて R の增加する割合も計算する事が出來る。實際には (25) の $\exp\{\ \}$ の項が非常に大きくなるのが普通である。故に $H\fallingdotseq h_0$ の附近以外は次式でよい。

$$\frac{2\pi k}{Q}(H^2-h_0^2)=\log\frac{4h_0k}{\lambda r_0^2}t \cdots\cdots\cdots(26)$$

〔問題 1〕 $H=20$ m, $k=0{\cdot}00015$ (m/秒), $\lambda=0{\cdot}35$, $r_0=0{\cdot}5$ m, $Q=0{\cdot}1$ m³/秒 を與へて，井の水深 h_0 の減少を計算せよ。

8) $\exp x=e^x$

(解) (26) から $h_0=18, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10$ m に對して夫々に

$$\frac{2\pi k}{Q}(H^2-h_0^2)-\log h_0=x$$

を計算すれば，$x=-2{\cdot}174,\ -1{\cdot}417,\ -1{\cdot}060,\ -0{\cdot}719,\ -0{\cdot}390,\ -0{\cdot}073,\ 0{\cdot}232,\ 0{\cdot}522$ となる。

$$\frac{4k}{\lambda r_0^2}t=0{\cdot}00687\,t=e^x$$

であるから e^x を計算して t を求めれば

h_0	18	16	15	14	13	12	11	10
e^x	0·1136	0·2424	0·3465	0·4872	0·6771	0·9296	1·2611	1·6854
t(秒)	16·5	35·3	50·5	70·9	98·5	135·2	183·6	245·5

之を (25) によつて計算すれば

t(秒)	9·3	20·8	43·5	63·6	91·5	128·0	163·0	239·5

即ち h_0 が小さくなれば近似計算の誤差は小さくなる。

5. 堤體への滲透

土砂で作つた堤防，堰堤等で水を支へれば，水は地下水となつて堤體内に滲透する。この場合には一般に地下水の境界面が，地下水面，不滲透層面，水壓を受ける面の他に，圖-152 の BC の様に大氣中に滲透する面が考へられる。井の問題ではこの面を考へなかつたが，問題によつては矢張りこの面を考慮すべきである。

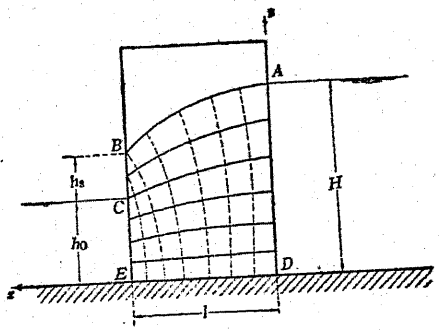

圖-152

この面上では $p=0$ であるが，BC は流線の一部にはなつ

てゐないから，その上での條件はこの面の傾きを α とすれば

$$k\sin\alpha + v_x\cos\alpha + v_z\sin\alpha = 0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

普通に行はれてゐる近似解法は $BC=0$ と假定し，尙地下水面の勾配が著しくないものとして $v_s = v_x = -k\dfrac{dh}{dx}$,　$Q = -hv_x$（但し Q は單位幅當りの流量である）と看做して

$$Q = kh\frac{dh}{dx}$$

之を積分して $x=0$ にて $h=H$, $x=l$ にて $h=h_0$ とすれば

$$H^2 - h_0^2 = \frac{2Q}{k}l \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

この問題も井の場合と同樣に l が無限に長くなれば眞の定常運動とはなり得ない。然し不滲透層が水平でなく流れの方向に或勾配 i があれば，近似的に

$$v = -k\left(i+\frac{dh}{dx}\right),\quad Q = kh\left(i+\frac{dh}{dx}\right)$$

$$\therefore\quad i\frac{dx}{dh} = \frac{kih}{Q-kih} = \frac{Q}{Q-kih} - 1$$

之を積分して $x=0$ にて $h=h_0$, $x=-\infty$ にて $h=H$ とすれば，

$$\left.\begin{aligned} -ix &= \frac{Q}{ki}\log\frac{Q-kih}{Q-kih_0} + (h-h_0)\\ Q &= kiH \end{aligned}\right\}. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

圖-152 の樣な場合に於ての計算は面倒な取扱ひを必要とするが，圖-153 に示す裝置によつて地下水面の AB の形を電氣的に定める事が出來る。

$AFED$ は堤體に相當する部分であつて，その間に $e_1 - e_2$ のポテンシアルの差を以て I の電流を通じ，各點のポテンシアルを測定してポテンシアルの等しい線を畫がき，之に直交する樣に流線の形を定めるのである。堤體に相當する材料の比抵抗を σ とすれば流量 Q は次の式で與へられる。

$$Q = \frac{k\rho g(H-h_0)}{\mu}\,\frac{\sigma I}{e_1-e_2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

この樣な方法で兩側の面が傾斜した堤體内の流線の形を求めれば圖-154 の樣になる。この流線の形は直接に着色液を流して觀測したものとも殆ど違はない。

又 Dachler によれば地下水面曲線 AB を2つの變曲點 C, D によつて3部分に分ち，各部分の上下端の高さの差を夫々 $\triangle H_1$, $\triangle H_2$, $\triangle H_3$ とした時に，圖-155 の記號を用ひれば

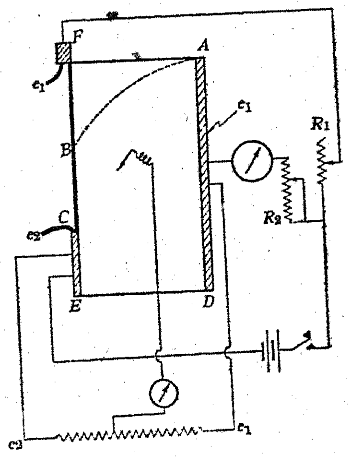

圖-153

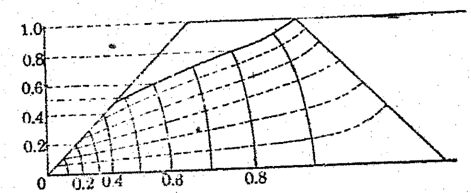

圖-154

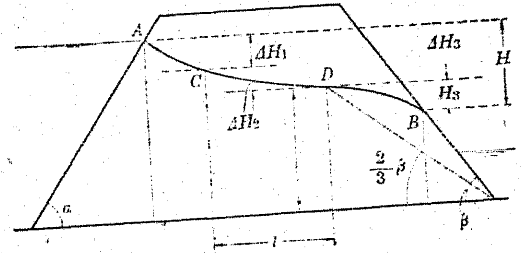

圖-155

$$\varepsilon_1 = \frac{Q}{\triangle H_1} = 1{\cdot}12 + 1{\cdot}93 \tan\alpha \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{Q}{\triangle H_2} = \frac{H_m}{l}, \quad (H_m \text{ は } CD \text{ 間の平均水深}) \cdots\cdots\cdots(32)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{Q}{\triangle H_3} = 0{\cdot}068\,\beta^\circ\left(0{\cdot}86 + 0{\cdot}39\frac{\triangle H_3}{H_3} - \sqrt{\frac{\triangle H_3}{H_3} + 0{\cdot}36}\right) \cdots(33)$$

6. 地下水面の振動

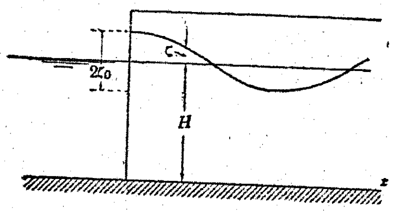

圖-156

海岸線近くの地下水面は潮汐の爲に振動して，その波が減衰しつゝ次第に奥の方へ傳播して行く。圖-156 の樣に不滲透層は水平で，$x < 0$ の部分に水域があつて，その水面が

$$h_0 = H + \zeta_0 \sin\sigma t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

の振動をしてゐるものとする。この時の地下水面の形は x 方向に進む波形となり，週期が長いから波長も相當に大きいと考へて，一鉛直斷面内の速度は一樣と看做す事が出來る。從つて運動の方程式は

$$\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{k} + \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

連續性の方程式は水面にある水分子の水平及び鉛直の變位を ξ 及び η，土砂の空隙率を λ とすれば

$$\lambda\zeta = -\frac{\partial}{\partial x}(\xi H), \quad v = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

然るに水面までの高さは不滲透層から h であるから，(35) と (36) から

$$\frac{H}{\lambda}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \frac{1}{g}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - \frac{1}{k}\frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

之は水面の振動の基本方程式であるが，境界條件から單弦運動[9] をなして

9) Simple harmonic motion.

ゐる事は明らかであるからこの1つの解を $\zeta_1 e^{i\sigma t}$ の實數部に等しいと置けば

$$\frac{d^2\zeta_1}{dx^2} + \frac{\lambda\sigma^2}{gH}\left(1 - \frac{ig}{\sigma k}\right)\zeta_1 = 0$$

更に $\dfrac{\lambda\sigma^2}{g}\left(1 - \dfrac{ig}{\sigma k}\right) = (m_1 - i m_2)^2$，(但し m_1, m_2 は實數) と置けば，結局 (37) は次の形になる。

$$\frac{d^2\zeta_1}{dx^2} + \frac{m^2}{H}\zeta_1 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

(38) の一般解は進行する波に對しては

$$\zeta = A\exp\left\{-\frac{m_2}{\sqrt{H}}x - i\left(\frac{m_1}{\sqrt{H}}x - \sigma t\right)\right\} \cdots\cdots\cdots(39)$$

但し A は複素變數であつて $A_1 + iA_2$ で表され ζ は右邊の實數部に等しい。之に (34) の條件を代入すれば

$$\zeta_0 \sin\sigma t = [A_1\cos\sigma t - A_2\sin\sigma t + i(A_1\sin\sigma t + A_2\cos\sigma t)]$$

右邊は實數部のみを取るのであるから

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -\zeta_0$$

$$\therefore \quad \zeta = \zeta_0\exp\left(-\frac{m_2}{\sqrt{H}}x\right)\sin\left(\sigma t - \frac{m_1}{\sqrt{H}}x\right) \quad \cdots\cdots\cdots(40)$$

之は $\exp\left(-\dfrac{m_2}{\sqrt{H}}x\right)$ を減衰率として x 方向に進行する波である。但し

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \sqrt{\frac{\lambda\sigma^2}{2g} + \frac{\lambda\sigma}{2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{g^2} + \frac{1}{k^2}}} \\ m_2 &= \sqrt{-\frac{\lambda\sigma^2}{2g} + \frac{\lambda\sigma}{2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{g^2} + \frac{1}{k^2}}} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

〔問題 2〕 $H = 5$ m, $\lambda = 0{\cdot}35$, $k = 0{\cdot}0016$ (m/秒)，潮汐の週期 12 時間を與へて，地下水面の波の進行速度を計算せよ。

(解) (41) から m_1 を計算する。 $\sigma = \dfrac{2\pi}{12 \times 60 \times 60} = \dfrac{1{\cdot}453}{10^4}$ であるから

$$m_1 = \sqrt{\frac{0{\cdot}35 \times 1{\cdot}453^2}{2 \times 9{\cdot}8 \times 10^8} + \frac{0{\cdot}35 \times 1{\cdot}453}{2 \times 10^4}\sqrt{\frac{1{\cdot}453^2}{9{\cdot}8^2} + \frac{1}{0{\cdot}0016^2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{3{\cdot}77}{10^{10}} + \frac{2{\cdot}58}{10^5}\sqrt{\frac{2{\cdot}20}{10^2} + 3{\cdot}91 \times 10^5}}$$

從つて

$$m_1 = \sqrt{\frac{\lambda\sigma}{2} \cdot \frac{1}{k}} = \sqrt{\frac{2{\cdot}38}{10^5} \times \frac{1}{0{\cdot}0016}} = 0{\cdot}122$$

波の進行速度は $\dfrac{\sqrt{H}}{m_1}\sigma$ であるから

$$\text{進行速度} = \frac{\sqrt{5}}{0{\cdot}122} \times \frac{1{\cdot}453}{10^4} = \frac{2{\cdot}66}{10^3}\ \text{m/秒}$$

$$= 7{\cdot}40\ \text{m/時}$$

即ち大體 1 時間に 7 m 程度であるから ζ_0 が 2～3 m 位ある時は海岸線の近くでは上の計算の假定は多少の誤差を含んでゐる。

〔練 習 問 題〕

1. Bernnoulli の定理を導入した場合の方法を用ひて (10) を直接に導入せよ。

2. 圖 150 の様な深井の周圍の壁が滲透係數 k' の物質から成り，その厚さが δ である場合に，近似解法

$$h^2 - h_0^2 = \frac{Q}{\pi k}\log\frac{r}{r_0}$$

に相當する公式を求めよ。

又その時に $H = 20$ m, $h_0 = 8$ m, $R = 420$ m, $r = 0{\cdot}5$ m, $k = 0{\cdot}015$, k'

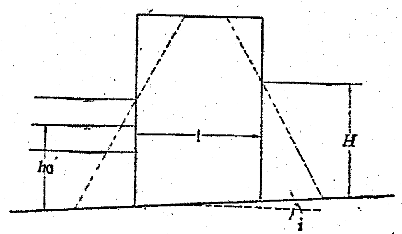

圖-157

$= 0{\cdot}0010$ (cm/秒), $\delta = 0{\cdot}05$ m として，井からの湧出流量を計算せよ。

3. 圖-149 の様な水平層の掘拔井に於て $H = 120$ m, $a = 2$ m, $Q = 2\ \text{m}^3$/秒 として井の中の水面の變化を計算せよ。

但し $k = 0{\cdot}002$ (m/秒) とする。

4. 圖-157 の形と假定出來る築堤に於て $h_0 = 1, 2, 3$ m の 3 種に變化させれば，それに對して滲透する流量は如何に變化するか。但し $H = 4$ m, $i = 1/_{100}$, $k = 0{\cdot}00016$ (m/秒), $l = 20$ m とする。

5. 圖-156 の様な地下水面の波動に對して， $H = 8$ m, $\lambda = 0{\cdot}38$, $k = 0{\cdot}0008$ (m/秒), $\zeta_0 = 1{\cdot}5$ m を與へて，最高及び最低地下水面曲線を描け。