

第5章 水衝作用と調壓水槽

(水槽)

1. 管路の中の壓力波の傳播

等流の状態にある管路の下流端の瓣を急に閉塞すれば、瓣の上流側は急激な速度の減少の爲に水圧は俄に上昇して壓力波を生じて、之が上流に傳播する。この波は管内を往復して管に衝撃を與へるので、その作用を水衝作用¹⁾と言ふ。瓣の開きを俄に増せば負の水衝作用が起る。

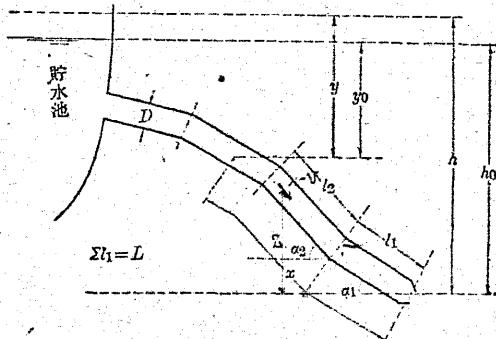


図-111

先づ水衝作用に關する Allievi(アリエビ)の理論を述べる。この問題では水圧が極めて大きい爲に摩擦損失は之に比して省略出来るが、管壁の弾性変形を考慮する必要がある。瓣の位置に原點を取り管軸に沿つて x 軸を取れば、 x 方向の流速は $-v$ ($v > 0$) であるから運動方程式は摩擦抵抗を無視して

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(z + \frac{p}{\omega_0} \right) + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} \right) - \frac{1+\eta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

管の傾斜角を α とすれば $\frac{\partial z}{\partial x} = \sin \alpha$ である。水の壓縮性を無視すれば $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = 0$ であつて、この場合は之は零ではないが非常に小さい

1) Water hammer.



量になるから省略し、又 γ も省略する。従つて

$$\sin \alpha + \frac{1}{w_0} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

茲で $p = w_0 y = w_0 \left[h - \int_0^x \sin \alpha dx \right]$ 、但し y は圧力ヘッド、 h は瓣の高さにある水平管の圧力ヘッド²⁾である。水衝作用による圧力増加は常に圧力ヘッドを夫々 y_0 , h_0 とすれば $y - y_0 = h - h_0$ である。 $\frac{\partial p}{\partial x}$ を計算すれば

$$\frac{\partial p}{\partial x} = w_0 \left[\frac{\partial h}{\partial x} - \sin \alpha \right]$$

之を (2) に代入すれば

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{運動方程式} \quad \dots \dots \dots (3)$$

従つて傾斜した管では瓣の高さの水平管に就いて計算し、圧力のみは上の関係式から求めればよい。

水も管の壁體も共に弾性體であるから、圧力が變化すれば變形し、圧力 p の時に dx の長さの或水柱は壓力が $p + dp$ となれば $dx - \delta$ に縮小する。この δ の中で水の壓縮に原因するものを δ_1 、管經の増大によるものを δ_2 とすれば $\delta = \delta_1 + \delta_2$ である。水の彈性率を E_w とすれば

$$\delta_1 = \frac{dx}{E_w} \frac{\partial p}{\partial t} dt$$

管徑を D 、管壁の厚さを d とする時に、管壁の張應力の強さ σ は壓力の增加 $\frac{\partial p}{\partial t} dt$ によつて $\sigma + \Delta \sigma$ に増加するものとすれば

$$2d \Delta \sigma = D \frac{\partial p}{\partial t} dt$$

管壁材料の彈性率を E とすれば

2) 即ち動水勾配線の高さを表す。

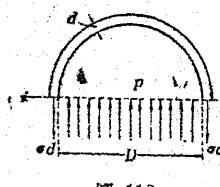


圖-112

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta \sigma}{E} \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) = \frac{D}{2dE} \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \frac{\partial p}{\partial t} dt$$

但し m は Poisson の係数である。管斷面積の増加 ΔA は

$$\Delta A = \frac{\pi D}{2} \cdot \Delta D = \frac{\pi D^3}{4dE} \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \frac{\partial p}{\partial t} dt$$

従つて管徑の増大による水柱の長さの減少 δ_2 は $(A + \Delta A)(dx - \delta_2) = A \cdot dx$ なる事から

$$\delta_2 = \frac{\Delta A \cdot dx}{A} = \frac{D dx}{d \cdot E} \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \frac{\partial p}{\partial x} dt$$

$$\therefore \delta = \left[1 + \frac{D}{d} \frac{E_w}{E} \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \right] \frac{dx}{E_w} \frac{\partial p}{\partial t} dt \quad \dots \dots \dots (4)$$

管の長さ dx の中の容積は時間 dt の間に $A\delta$ だけ増加するから

$$A \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dt - Av dt = A\delta \quad \begin{array}{l} \text{運動方程式} \\ \text{容積増加} \end{array}$$

$$\therefore \frac{\partial v}{\partial x} = \left[1 + \frac{D}{d} \frac{E_w}{E} \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \right] \frac{1}{E_w} \frac{\partial p}{\partial t} \quad \dots \dots \dots (5)$$

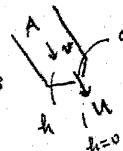
此處で $\frac{w_0}{g} \left[1 + \frac{D}{d} \frac{E_w}{E} \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \right] \frac{1}{E_w} = \frac{1}{\omega^2}$ と置けば

$$\frac{\partial v}{dx} = \frac{g}{\omega^2} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{g}{\omega^2} \frac{\partial h}{\partial t} \quad \begin{array}{l} \text{運動方程式} \\ \text{容積増加} \end{array} \quad \dots \dots \dots (6)$$

(3) と (6) は運動の基本方程式であつて、之から h と v は次の形で表される事を知る。即ち h_0 及び v_0 を常數として

$$\left. \begin{aligned} h &= h_0 + F \left(t - \frac{x}{\omega} \right) + f \left(t + \frac{x}{\omega} \right) \\ v &= v_0 - \frac{g}{\omega} \left[F \left(t - \frac{x}{\omega} \right) - f \left(t + \frac{x}{\omega} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (7)$$

F 及び f は任意の形の函数であつて $F \left(t - \frac{x}{\omega} \right)$ は x 方向に、 f は $-x$ 方向に何れも ω の速度で傳播する波を表してゐる。尚眞の壓力ヘッド y は $h - \frac{1}{w_0} \int_0^x \sin \alpha dx$ であるから、 h と同じ形で與へられる。貯水池が無限に大きく其處の水位が一定と考へられる時は、 $x = L$ に於



$$h + \frac{\omega}{g} v = h_0 + \frac{\omega}{g} v_0 = \text{const.}$$

瓣から流出する速度を v とすれば、断面積 A の管が瓣の爲に a に縮少された時の瓣の直上の速度は $v = \frac{a}{A}$ である。之を $v\phi(t)$ と置けば

$$v^2 - [v\phi(t)]^2 = 2gh \quad \dots\dots\dots(11)$$

且 (9) 及び (10) の第1式から瓣の直上に對しては

$$h = h_0 + F(t), \quad v\phi(t) = v_0 - \frac{g}{\omega} F(t) \quad \dots\dots\dots(12)$$

(11) と (12) から v と $F(t)$ を消去すれば

$$\left. \begin{aligned} h^2 - 2h \left[h_0 + \frac{\omega}{g} v_0 + \lambda(t) \right] + \left(h_0 + \frac{\omega}{g} v_0 \right)^2 = 0 \\ \lambda(t) = \frac{\omega^2}{g} \frac{\phi^2(t)}{1 - \phi^2(t)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

但し

(12) から瓣を閉ぢてゐる間の h 、従つて v の値が計算出来る。但し (12) の2つの根の中で $h_0 + \frac{\omega^2 v_0}{g}$ よりも小さい方を取らねばならない。

瓣を閉ぢる時間が非常に遅く、 $2T > \tau > T$ になれば、閉ぢ始めてから T までの間は前と同じであるが、その後は (9) 及び (10) の夫々第2式の状態になる。この兩式から F_2 を消去すれば

$$h - h_0 + \frac{\omega}{g} (v - v_0) = -2F_1 \quad \dots\dots\dots(13)$$

瓣の直上では $v = v\phi(t)$ であるから、之を (13) に代入して、更に (11) を用ひてを消去すれば

$$h^2 - 2h \left[h_0 + \frac{\omega}{g} v_0 - 2F_1 + \lambda(t) \right] + \left(h_0 + \frac{\omega}{g} v_0 - 2F_1 \right)^2 = 0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

$2T < \tau < 3T$ になれば F_1 の代りに F_2 とすればよい。

瓣が閉ぢて後は $\phi(t) = 0$ 、従つて $\lambda(t) = 0$ であるから、 $\tau < T$ ならば $h = h_0 + \frac{\omega}{g} v_0$ 、 $T < \tau < 2T$ ならば $h = h_0 + \frac{\omega}{g} v_0 - 2F_1$ になる。

以上は $x = 0$ に於ける壓力を與へるものであるが、 x の位置を考へる時は壓力波が ω の速度で傳播するのであるから、 x 方向の波は $x = 0$ の位置よりも $\frac{x}{\omega}$ だけ遅れ、 $-x$ 方向の波は $\frac{x}{\omega}$ だけ早く到着する。従つて $t \leq \frac{2L - x}{\omega}$ の間は

$$\left. \begin{aligned} h &= h_0 + F\left(t - \frac{x}{\omega}\right) \\ v &= v_0 - \frac{g}{\omega} F\left(t - \frac{x}{\omega}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

$\frac{2L - x}{\omega} < t < \frac{2L + x}{\omega}$ となれば

$$\left. \begin{aligned} h &= h_0 + F\left(t - \frac{x}{\omega}\right) \\ &\quad - F\left(t - \frac{2L - x}{\omega}\right) \\ v &= v_0 - \frac{g}{\omega} \left[F\left(t - \frac{x}{\omega}\right) \right. \\ &\quad \left. + F\left(t - \frac{2L - x}{\omega}\right) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

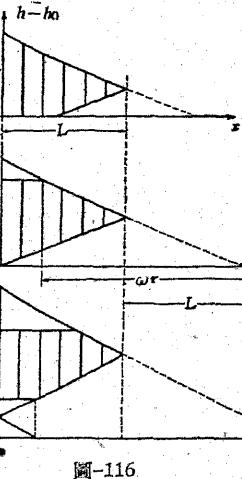


圖-116

$\frac{2L + x}{\omega} < t < \frac{4L - x}{\omega}$ ならば

$$\left. \begin{aligned} h &= h_0 + F\left(t - \frac{x}{\omega}\right) - F\left(t - \frac{2L - x}{\omega}\right) - F\left(t - \frac{2L + x}{\omega}\right) \\ v &= v_0 - \frac{g}{\omega} \left[F\left(t - \frac{x}{\omega}\right) + F\left(t - \frac{2L - x}{\omega}\right) - F\left(t - \frac{2L + x}{\omega}\right) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

この様にしてその状態は 図-116 に示す様に變化する。但し 図-116 は $\tau < T$ の場合であるが、 $\tau > T$ に對しても同様に書がく事が出来る。

〔問題1〕 $L = 400$ m, $\omega = 1,000$ m/秒, $h_0 = 90$ m, $v_0 = 2.5$ m/秒, $\tau = 3$ 秒を與へて、 $x = 0, 200, 400$ m の3點に於ける壓力上昇を計算せよ。但し瓣は一様速度で閉ぢる。

(解) $T = \frac{2L}{\omega} = 0.8$ 秒、又 $3 = 0.8 \times 3 + 0.6$ であるから瓣が閉ぢ

る間に壓力波が管を3往復して尚0.6秒ある。故に $t_1 = 0.6$ 秒, $t_1 + T = 1.4$ 秒, $t_1 + 2T = 2.2$ 秒, $t_1 + 3T = 3$ 秒に就いて夫々に h を計算する。瓣の閉じる速度が一様であるから

$$\psi(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \psi(0), \quad \psi(0) = \frac{v_0}{u_0} = \frac{2.5}{\sqrt{2gh_0}} = 0.0595$$

$$\psi_1 = \psi(0.6) = \left(1 - \frac{0.6}{3}\right) \times 0.0590 = 0.0476$$

ψ_1 の値は1に比して小さいから $\lambda_1(t) = \frac{\omega^2}{g} \psi_1(t)$ と見て差支へない。

従つて $\lambda_1 = 0.0476$ である。以下も同様に $\lambda = \frac{\omega^2}{g} \psi^2$ と見做す。

$$\psi_2 = \left(\frac{g}{\omega^2} \lambda_2\right)^{\frac{1}{2}} = \psi(1.4) = \left(1 - \frac{1.4}{3}\right) \times 0.0595 = 0.0317$$

$$\psi_3 = \left(\frac{g}{\omega^2} \lambda_3\right)^{\frac{1}{2}} = \psi(2.2) = \left(1 - \frac{2.2}{3}\right) \times 0.0595 = 0.0159$$

$$\psi_4 = \lambda_4 = \psi(3) = 0$$

$$h_0 + \frac{\omega v_0}{g} = 90 + 254.8 = 344.8, \quad \frac{\omega^2}{g} = \frac{1,000,000}{9.8} = 102,000$$

之等を先づ(12)に代入して $h_0 + \frac{\omega}{g} v_0$ に近い根を取れば

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \left(h_0 + \frac{\omega}{g} v_0 + \frac{\omega^2}{g} \psi_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - \sqrt{\left(h_0 + \frac{\omega}{g} v_0 + \frac{\omega^2}{g} \psi_1^2\right)^2 - \left(h_0 + \frac{\omega}{g} v_0\right)^2} \\ &= 344.8 + 231 - \sqrt{575.8^2 - 344.8^2} = 114.6 \text{m} \end{aligned}$$

$$\therefore F_1 = h_1 - h_0 = 114.6 - 90 = 24.6$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \left(h_0 + \frac{\omega}{g} v_0 - 2F_1 + \frac{\omega^2}{g} \psi_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - \sqrt{\left(h_0 + \frac{\omega}{g} v_0 - 2F_1 + \frac{\omega^2}{g} \psi_2^2\right)^2 - \left(h_0 + \frac{\omega}{g} v_0 - 2F_1\right)^2} \\ &= 344.8 - 2 \times 24 + 102.4 - \sqrt{398^2 - 295.6^2} = 131.5 \text{m} \end{aligned}$$

$$F_2 = F_1 + h_2 - h_0 = 66.1$$

$$\begin{aligned} h_3 &= \left(h_0 + \frac{\omega}{g} v_0 - 2F_2 + \frac{\omega^2}{g} \psi_3^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - \sqrt{\left(h_0 + \frac{\omega}{g} v_0 - 2F_2 + \frac{\omega^2}{g} \psi_3^2\right)^2 - \left(h_0 + \frac{\omega}{g} v_0 - 2F_2\right)^2} \\ &= 238.4 - \sqrt{238.4^2 - 212.6^2} = 130.7 \text{m} \\ \therefore F_3 &= F_2 + h_3 - h_0 = 106.8 \end{aligned}$$

同様にして計算すれば $h_4 = 131.2 \text{m}$

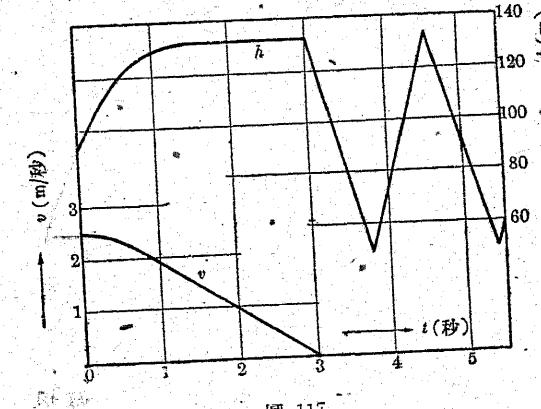


圖-117

従つて $t = \tau$ の時の壓力の上昇は $h_4 - h_0 = 41.2 \text{m}$ で、瞬間に閉じた時は $\frac{\omega}{g} v_0 = 254.8 \text{m}$ であるから、その約 $\frac{1}{4}$ になる。速度は

$$v_1 = v_0 - \frac{g}{\omega} (h_1 - h_0) = 2.259 \text{m/秒}$$

$$v_2 = v_0 - \frac{g}{\omega} (F_1 + F_2) = 1.611 \text{m/秒}$$

$$v_3 = v_0 - \frac{g}{\omega} (F_2 + F_3) = 0.811 \text{m/秒}$$

$$v_4 = 0$$

之等の計算は $x = 0$ に於ける h 及び v の値であつて、その関係は圖-117に示す。

$$x = 200 \text{ m} \quad \text{に對しては, } \frac{x}{\omega} = 0.2, \quad \frac{2L - x}{\omega} = 0.6,$$

$$\frac{2L+x}{\omega} = 1.0, \quad \frac{4L-x}{\omega} = 1.4, \quad \frac{4L+x}{\omega} = 1.8,$$

$$\frac{6L - x}{\omega} = 2.2, \quad \frac{6L + x}{\omega} = 2.6, \quad \frac{8L - x}{\omega} = 3.0$$

従つて $0 \sim 0.2$ 秒の間は $\mu = \mu_0$, その後 0.6 秒までは $x = 0$ の波よりも 0.2 秒だけ遅れ、 $0.6 \sim 1.0$ 秒の間では (16) の様に F_2 は $\mu_1 - 0.2$ としたもの、 F_1 は $\mu_1 + 0.2$ としたものになる。 1.0 秒後も同様にして計算出来る。

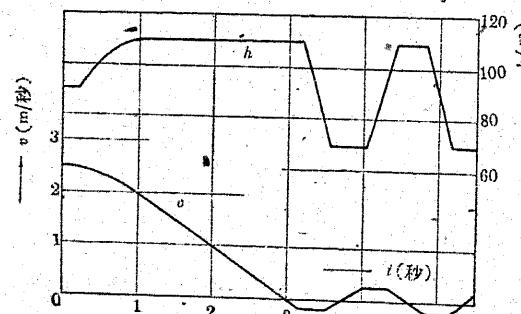
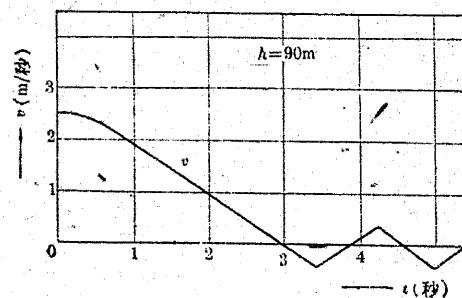


圖-1



-11

$x = 400 \text{ m}$ に對しては η は常に 90 m であつて、 φ を前と同様に計算すればよい。之等の結果を 図-118 及び 図-119 に示す。

3. 最大上昇壓力

$$\zeta_i^2 = \frac{h_i}{h_0}, \quad \rho = \frac{\omega v_0}{2gh_0} \quad \dots \dots \dots \quad (18)$$

と置いて、之を (9) と (10) の第 1 式から得られる関係式に代入する。

$$\zeta_1^2 - 1 = 2\rho \left(1 - \frac{z_1}{z_{l_0}}\right) \dots \dots \dots \quad (19)$$

瓣の閉ぢる割合を $\frac{\psi(t)}{\psi(0)} = \eta(t)$ と置けば

$$\left. \begin{aligned} v_i &= \eta_i v_0 \sqrt{\frac{h_i}{h_0}} \\ \eta_i &= \frac{v_i}{v_0} \cdot \frac{1}{\epsilon_i} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (20)$$

$i = \frac{t}{T}, \quad \theta = \frac{\pi}{T}$ と書けば、一様の速さで瓣を閉ぢれば

又(19)を書き直せば

$$\zeta_1^2 - 1 = 2\rho(\eta_0\zeta_0 - \eta_1\zeta_1)$$

$\zeta_0 = 1, \eta_0 = 1$ であるから

$$\zeta_1^2 - 1 = 2\rho(1 - \eta_1\zeta_1)$$

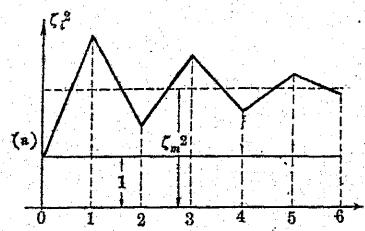
同様にして $\zeta_2^2, \zeta_3^2, \zeta_4^2, \dots, \zeta_n^2$ を計算する事が出来る。而して Allievi は之等が 1 つの極限値 ζ_m^2 に近付いて行く事を示した。この ζ_m^2 を求めるには (9) と (10) から

$$\zeta_{i-1}^2 - \zeta_i^2 - 2 = 2\rho(\eta_{i-1}\zeta_{i-1} - \eta_i\zeta_i)$$

之に $\zeta_{i-1} \cong \zeta_i \cong \zeta_m$, $\eta_{i-1} - \eta_i = \frac{1}{\theta}$ を代入すれば

$$\zeta_m^2 - 1 = \frac{\rho}{\theta} \zeta_m$$

$$\zeta_m = \frac{\rho}{2\theta} + \sqrt{\left(\frac{\rho}{2\theta}\right)^2 + 1} \quad \dots \dots \dots (23)$$



さが ζ_m に近付いて行くのには図-120 に示す様な 3 種がある。図の (a) は $\rho < 1$ の場合で $\zeta_1 > \zeta_m$, $\zeta_2 < \zeta_m$, $\zeta_3 > \zeta_m$, ..., であつて, ζ_1 が最大になる。故に最大上昇圧力は

$$h_1 = \zeta_1^2 h_0 \quad \dots \dots \dots (24)$$

図の (b) は ρ が 1 よりもかなり大きい場合で、図では $\rho = 2$ になつてゐる。この場合は $\zeta_1 < \zeta_m$, $\zeta_2 < \zeta_m$, $\zeta_3 > \zeta_m$, $\zeta_4 < \zeta_m$, $\zeta_5 > \zeta_m$, であつて、 ζ_3 が最大であるが、之は ζ_m と殆ど變らない。図の (c) は

図-120

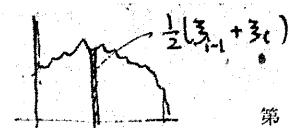
ρ の非常に大きい場合であつて、之等の場合には最大上昇圧力は

$$h_m = \zeta_m^2 h_0 \quad \dots \dots \dots (25)$$

から計算してよい。

4. Gibson の流量測定法

Gibson (ギブソン) は管内の水衝作用による上昇圧力を測定して流量を知る方法を考案した。長さ L の管を瓣によつて閉ぢ始めてから iT だけ経過した時の上昇圧力ヘッドを ξ_i とし、それから T だけ前の水衝圧力ヘッドを ξ_{i-1} とすれば、 T の間の平均圧力ヘッドは $\frac{1}{2}(\xi_{i-1} + \xi_i)$ で、各時刻に相當する速度を v_i , v_{i-1} とすれば、 T の間の速度變化は $v_{i-1} - v_i$ であ



第5章 水衝作用と調壓水槽

るから、平均の加速度は $\frac{1}{T}(v_{i-1} - v_i)$ 即ち $\frac{\omega}{2L}(v_{i-1} - v_i)$ である。管の断面積を A とすれば、 $A\rho g \frac{1}{2}(\xi_{i-1} + \xi_i)$ の圧力によつてこの加速度を生ずるのであるから

$$A\rho g \frac{1}{2}(\xi_{i-1} + \xi_i) = \frac{\omega}{2L}(v_{i-1} - v_i) A\rho L$$

$$\frac{\xi_{i-1} + \xi_i}{2} \times \frac{2L}{\omega} = \frac{L}{g}(v_{i-1} - v_i) \quad \dots \dots \dots (26)$$

(26) の左邊は ξ を縦軸に t を横軸に取つた曲線と横軸の間の時間 T の間の面積には等しい。特に

$$\sum_0^i \frac{\xi_{i-1} + \xi_i}{2} \times \frac{2L}{\omega} = \sum_0^i \frac{L}{g}(v_{i-1} - v_i) \quad \dots \dots \dots (27)$$

の様に書けば $\frac{2L}{\omega}$ は一般に小さいから誤差は小さくなる。最後の速度 v が零になるまで瓣は閉ぢ続ける。故に全體の時間は必ずしも T の整數倍にならないが、その時は全時間を $(i+\epsilon)T$, (但し $0 \leq \epsilon < 1$) として

$$\sum_0^{i+\epsilon} \frac{\xi_{i-1} + \xi_i}{2} \times \frac{2L}{\omega} = \sum_0^{i+\epsilon} \frac{L}{g}(v_{i-1} - v_i) \quad \dots \dots \dots (28)$$

(28) の右邊は $v_{i+\epsilon} = 0$ であるから $\frac{L}{g} v_0$ になる。従つて左邊の面積を求めれば v_0 を知る事が出来る。全時間が T に比して相當大きければ上に述べた ξ 曲線の面積を測れば大體正確な v_0 が求められる。

Gibson の考案した ξ 曲線

を求める裝置は図-121 の様な

ものであつて、管 P に瓣の上流の處で壓力測定用の水銀柱の入つた細管 BDE を連結する。

D の部分は硝子管で此處に D と E の水銀の高さ、従つて P の中の壓力を示す。この水銀柱

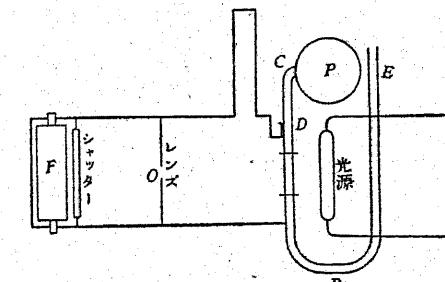


図-121

の高さを光学装置によつて装置の左端にある回転圓盤に取付けたフィルム上に記録する。DとEの管徑を一定にして置けば兩管の水銀柱の高さの差はD内の高さのみで表す様に出来る。

5. 調 壓 水 槽³⁾

調壓水槽は貯水池から出た給水隧道が壓力鐵管⁴⁾に移る處に設ける。壓力鐵管の下流端にある發電所内の水ターピンの負荷が急に減少すれば、即ち流

出流量が急に減少すれば管内には壓力波を生じ、之が調壓水槽に達すれば水槽内の水面が上昇して壓力波は一部分だけ反射し、貯水池と水槽の間には水面の運動を伴なふ振動が起り隧道内の摩擦抵抗により減衰する。ターピンの負荷が急に増加した場合

は、管末端の瓣を急に開放した場合に當り、管内には負の壓力波（大氣壓以下壓力零までの波）を生ずるが、この時は調壓水槽内の水面は先づ下つて後に減衰振動を起す。

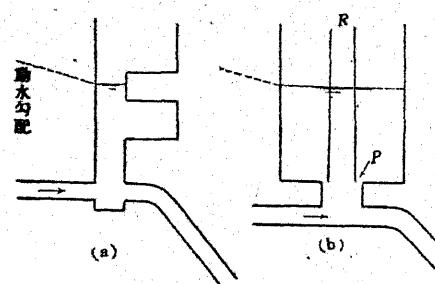


図-122

図-122に示す様な水平断面の一様な調壓水槽を單式調壓水槽⁵⁾と言ふ。調壓水槽の断面は壓力鐵管からの水を受け入れ、又は之に供給する爲に相當の大きさを必要とするが、之が大きければ水面の動きは緩慢になつて壓力波の反

3) Surge tank. 4) Penstock. 5) Simple surge tank.

射が大きくなり水衝作用を減衰させる事が遅くなる。

圖-123に示す形はこの缺點を是正する爲に考案されたものであつて、(a)は水室調壓水槽⁶⁾と稱し、水面の上下し初める部分の断面は小さくして水の加速度を大きくし、附屬した水槽によつて水の貯溜、供給をなし、且振動の振幅を小さくする。圖の(b)は差働調壓水槽⁷⁾と稱し、水槽内にライザー⁸⁾と稱する管が立つてある。又ライザーの周囲の水と管との間は狭い孔、ポート⁹⁾によつて連絡されてゐる。正の壓力波が來れば先づライザー内の水面が昇り、ポートから水槽に入るには抵抗が大きい爲に入口の水壓が昇つて、隧道からの水の速度を減する。反対に負の壓力波が來ればライザー内の水面が下り、ポートの下の水壓は下つて隧道からの水の速度を増す。又正の壓力波の場合の水面振動の振幅を小さくする爲に、ライザーの高さを或程度に止めて、それ以上になれば溢流する様にして置く。

之等の他にも差働式でライザーのないもの、その他の形が考案されてゐる。

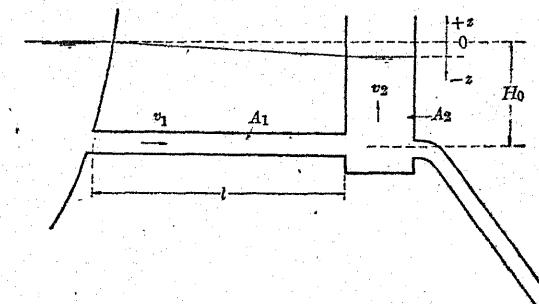


図-123

6. 単式調壓水槽

隧道の断面積を A_1 、その中の速度を v_1 、調壓水槽の水平断面積を A_2 、その中の水面上昇速度を v_2 、壓力鐵管への流下流量を Q とすれば、連續性の

6) Chamber surge tank. 7) Differential surge tank.

8) Riser.

9) Port.

方程式は

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 + Q \quad \dots \dots \dots (29)$$

水槽内の水面を貯水池水面の高さを基準として、上方に $+z$ とすれば $v_2 = \frac{dz}{dt}$ であるから、(29) を t にて微分すれば

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{A_2}{A_1} \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{A_1} \frac{dQ}{dt} \quad \dots \dots \dots (30)$$

定流状態にある時の水槽内の水面は $-h_r$ の處にある。隧道の長さを l 、内徑を D_1 、平均流速係数を C とすれば h_r は

$$h_r = \frac{4l}{C^2 D_1} v_1^2 \quad \dots \dots \dots (31)$$

水槽内の水面が或高さだけ昇つて、その爲に水槽と貯水池の間で水の振動が起つた場合は、貯水池の水面積は非常に廣いものとすれば第3章の(19)に於て $A_2 = \infty$, $\eta = 0$, $c \frac{A_1}{a} \frac{dz_1}{dt} = \frac{4v_1^2}{C^2 D_1}$ とおき、 z_1 を z , a を A_1 , A_1 を A_2 と書き、更に左邊に水槽内の水の加速度に相當する項 $\frac{H_0 + z}{gl} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}$ を加へる。但し H_0 は水槽の静水面から隧道中心線までの深さである。又(19)の第1項は $\frac{1}{g} \frac{A_1}{a} \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{1}{g} \frac{dv_1}{dt}$ であるが、この場合はその代りに(30)の關係が成立してゐるのであるから、加速度は $\frac{dv_1}{dt}$ のまゝを用ひる。かくして運動の方程式は

$$\frac{1}{g} \frac{dv_1}{dt} + \frac{H_0 + z}{gl} \frac{d^2 z}{dt^2} \pm \frac{4v_1^2}{C^2 D_1} + \frac{z}{l} = 0$$

中の - 符號は隧道内を逆流する場合である。故に $v_1 > 0$ の時を考へてこの第1項に(30)を代入すれば

$$\left(1 + \frac{H_0 + z}{l} \frac{A_1}{A_2}\right) \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{A_1}{A_2} \frac{g}{l} \left(z + \frac{4l}{C^2 D_1} v_1^2\right) + \frac{1}{A_2} \frac{dQ}{dt} = 0 \quad \dots \dots \dots (32)$$

水槽内の加速度の項を省略する時は

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{A_1}{A_2} \frac{g}{l} \left(z + \frac{4l}{C^2 D_1} v_1^2\right) + \frac{1}{A_2} \frac{dQ}{dt} = 0 \quad \dots \dots \dots (33)$$

但し何れの場合にも v_1 は(29)から

$$v_1^2 = \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{dz}{dt} + \frac{Q}{A_1}\right)^2 = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{2A_2 Q}{A_1^2} \frac{dz}{dt} + \left(\frac{Q}{A_1}\right)^2 \quad \dots \dots \dots (34)$$

$Q = 0$ となつて後の振動は第3章の(23)によつて與へられる。(32)又は(33)を積分して z と t の關係を求める事は不可能であるから、普通には或時間 t に於ける z 及び v_1 の値を與へて、(32)又は(33)は z , v_1 及び $\frac{dv_1}{dt}$ を含む式として置き、之と(34)から時間 Δt の間の増加量 Δv_1 , Δz を計算して、 $t + \Delta t$ に於ける値を近似的に定めて行く。即ち(33)の形ならば

$$\frac{l}{g} \frac{dv_1}{dt} = -z \mp \frac{4l}{C^2 D_1} v_1^2 \quad \dots \dots \dots (35)$$

$$A_2 \frac{dz}{dt} = A_1 v_1 - Q \quad \dots \dots \dots (36)$$

この左邊を夫々 $\frac{\Delta v_1}{\Delta t}$, $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ と書き、 \mp は $v_1 < 0$ になれば + を取るのである。

[問題2] 全落差 100 m, $D_1 = 4$ m, $l = 3,000$ m, $A_2 = 40 A_1$, $C = 60$ を與へて、急に發電所が運轉を開始して $Q = 35$ m³/秒 となつた時の調應水槽内の水面の振動を計算せよ。

(解) $A_1 = \pi \times 2^2 = 12.57$ m², $A_2 = 40 \times 12.57 = 50.28$ m², $Q = 35$ m³/秒 に相當する v_1 の値は

$$v_1 = \frac{35}{12.57} = 2.78 \text{ m/秒}$$

$$\frac{4l}{C^2 D_1} v_1^2 = \frac{4 \times 3,000}{60^2 \times 4} v_1^2 = 0.833 v_1^2 = 6.43 \text{ m}$$

之は定流状態になつた時の水面の位置である。 $\Delta t = 10$ 秒 と取れば

$$\frac{\Delta v_1}{\Delta t} = - \frac{9.8}{3,000} (z + 0.833 v_1^2)$$

$$\Delta v_1 = -0.0327 z_1 - 0.0276 v_1^2$$

負荷が一定に保たれる爲には (有效落差) × (流量) が一定になればよいのであるから、任意の時間の Q は

$$(100 - 6.43) \times 35 = (100 + z) \times Q$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{1}{502.8} \left(12.57 v_1 - \frac{3277}{100 + z} \right)$$

$$\Delta z = 0.250 v_1 - \frac{65.2}{100 + z}$$

$t = 0$ では $z = 0, v_1 = 0$ であるから

$$\Delta v_1 = 0, \quad \Delta z = -0.652 \text{ m}$$

近似的に $t = 10$ 秒で $z = -0.652 \text{ m}, v_1 = 0$ とすれば

$$\Delta v_1 = 0.0213 \text{ m/秒} \quad \Delta z = -0.656 \text{ m}$$

同様にして $t = 20$ 秒では $z = -1.308 \text{ m}, v_1 = 0.0213 \text{ m/秒}$

$$\Delta v_1 = 0.0269 \text{ m/秒}, \quad \Delta z = -0.656 \text{ m}$$

$t = 30$ 秒では $z = -1.964 \text{ m}, v_1 = 0.0482 \text{ m/秒}$

$$\Delta v_1 = 0.0641 \text{ m/秒},$$

$$\Delta z = -0.654 \text{ m}$$

$t = 40$ 秒では $z = -2.618 \text{ m}$

$$v_1 = 0.0910 \text{ m/秒}$$

$$\Delta v_1 = 0.0854 \text{ m/秒}$$

$$\Delta z = -0.647 \text{ m}$$

$t = 50$ 秒では $z = -3.265 \text{ m}$,

$$v_1 = 0.1764 \text{ m/秒}$$

$$\Delta v_1 = 0.1058 \text{ m/秒}$$

$$\Delta z = -0.630 \text{ m}$$

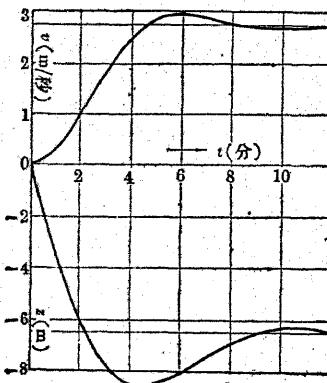


図-125

$$t = 60 \text{ 秒} \text{ では } z = -3.890 \text{ m}, \quad v_1 = 0.2822 \text{ m/秒}$$

同様の計算を v_1 が 2.78 m/秒 ,

z が -6.43 m に漸近的に近付く様になるまで續ければ、 v_1 及び z の曲線は 図-125 の様になる。

7. 振動安定の條件

(35) の v_1 及び Q に (34) 及び $Q(H_n + z) = \text{const.} = E$ の條件を入れる。但し H_n は全落差である。

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{A_1}{A_2} \frac{g}{l} z + \frac{A_1}{A_2} \frac{g}{l} \frac{4l}{C^2 D_1} \left[\left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{2A_2}{A_1^2} \frac{E}{H_n + z} \frac{dz}{dt} + \frac{1}{A_1^2} \frac{E^2}{(H_n + z)^2} \right] \\ - \frac{1}{A_2} \frac{E}{(H_n + z)^2} \frac{dz}{dt} = 0 \end{aligned}$$

之を書き直せば

$$\begin{aligned} (A_2 H_n^2 + 2A_2 H_n z + A_2 z^2) \frac{d^2z}{dt^2} + \left[-E + \frac{A_1 g}{l} \frac{4l}{C^2 D_1} \right. \\ \left. + \frac{2A_2}{A_1^2} E (H_n + z) \right] \frac{dz}{dt} + \frac{A_1 g}{l} (H_n^2 + 2H_n z + z^2) z \\ + \frac{A_1 g}{l} \frac{4l}{C^2 D_1} \frac{E^2}{A_1^2} + \frac{A_1 g}{l} \frac{4l}{C^2 D_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 (H_n^2 + 2H_n z \\ + z^2) \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = 0 \quad \dots \dots \dots (37) \end{aligned}$$

今定常運動の状態の時の z を z_0 とし、之を上下する小さい振動を考えて $z = z_0 + \epsilon$ と置く。 ϵ は変化する小さい量であるから $\epsilon^2, \epsilon \left(\frac{d\epsilon}{dt} \right)$, $\left(\frac{d\epsilon}{dt} \right)^2$ 等は零と看做し

$$z = z_0 + \epsilon, \quad z^2 = z_0^2 + 2z_0 \epsilon, \quad z^3 = z_0^3 + 3z_0^2 \epsilon$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2\epsilon}{dt^2}, \quad z \frac{dz}{dt} = z_0 \frac{d\epsilon}{dt}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} z = \frac{d^2\epsilon}{dt^2} z_0, \quad \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = 0, \quad \frac{d^2z^2}{dt^2} z^2 = \frac{d^2\epsilon^2}{dt^2} z_0^2$$

として、之等を(37)に代入すれば

$$\begin{aligned} & (A_2 H_n^2 + 2A_2 H_n z_0 + A_2 z_0^2) \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \left[-E + \frac{8g A_2^2}{C^2 D_1 A_1} EH_n \right. \\ & \quad \left. + \frac{8g A_2}{C^2 D_1 A_1} Ez_0 \right] \frac{de}{dt} + \frac{A_1 g}{l} (H_n^2 + 4H_n z_0 + 3z_0^2) \varepsilon \\ & \quad + \frac{A_1 g}{l} (H_n^2 z_0 + 2H_n z_0^2 + z_0^3) + \frac{A_1 g}{l} \frac{4l}{C^2 D_1} \frac{E^2}{A_1^2} = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

(38)の最後の2項に $z_0 = -\frac{4l}{C^2 D_1} v_1^2$, $E = (H_n + z_0) A_1 v_1$ を代入すれば零になる。故に(38)の一般解は

$$\varepsilon = C_1 e^{w_1 t} + C_2 e^{w_2 t}$$

の形であつて、 w_1 及び w_2 は次の式の根である。

$$\begin{aligned} w^2 + \frac{1}{A_2 (H_n + z_0)^2} \left[\left(-1 + \frac{8g A_2}{C^2 D_1 A_1} \right) E + \frac{8g A_2}{C^2 D_1 A_1} Ez_0 \right] w \\ + \frac{A_1 g}{A_2 (H_n - z_0)^2 l} (H_n^2 + 4H_n z_0 + 3z_0^2) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

一般に $H_n^2 + 4H_n z_0 + 3z_0^2 > 0$ であるから(39)の根が

$$w = -p \pm iq, \quad (p_1 \text{ は正の実数}, q \text{ は正又は零})$$

の形を持つ爲には第2項の [] 内が正になる事が必要であつて、この時は振動は減衰振動である。反対に [] の中が負になれば

$$w = p \pm iq$$

の形になつて、振幅は次第に増大する。故に水槽内の振動が安定なる爲に必要な條件は

$$-1 + \frac{8g A_2}{C^2 D_1 A_1} H_n + \frac{8g A_2}{C^2 D_1 A_1} z_0 > 0$$

即ち

$$\frac{8g}{C^2 D_1} \frac{A_2}{A_1} (H_n - z_0) > 1 \quad (40)$$

(40)は水槽の振動安定の爲の條件であつて、之を Thoma (トーマ) の條件と言ふ。

8. 水室調壓水槽

水室調壓水槽には上下の2水室があり、上のものは瓣の急閉塞の時の水量を収容し、下のものは瓣の急開放の時の水量の不足を補ふ爲の水を貯へる。

運動の方程式は(35)と同じ

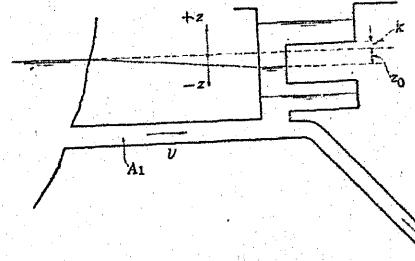


図-126

$$\frac{l}{g} \frac{dv_1}{dt} = -z \mp \frac{4lv_1^2}{C^2 D_1} \quad (41)$$

であるが、水槽に對する連續の方程式は

$-z_0 < z < k$ の間では

$$A_2 \frac{dz}{dt} = A_1 v_1 - Q \quad (42)$$

$z > k$ に對しては水室の表面積を A_k とすれば

$$A_k \frac{dz}{dt} = A_1 v_1 - Q \quad (43)$$

圖-127 の様に堰を越えて水室に流入する場合

には、堰の溢流幅を b とすれば

$$A_2 \frac{dz}{dt} = A_1 v_1 - Q - m \sqrt{2gb} (z - k)^{\frac{3}{2}} \quad (44)$$

但し m は堰の溢流係数である。

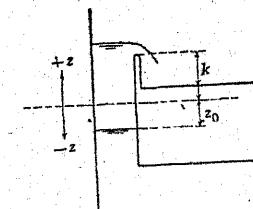


図-127

之等の式を解くには普通は前に示した様な數値積分を行ふか、又は圖式計算法を用ひる。水槽水面の下る場合、或は更に形の變化した調壓水槽に就いての計画も同様である。

9. 差動式調壓水槽

A_2 を水槽外室の断面積、 a をライザーの断面積とすれば、 a は A_2 に比

して小さい。又貯水池水面から測つたライザーの水面の高さを z_r 、水槽外室の水面の高さを z_t 、ポートの断面積を A_p 、之から水槽に流入する水量を Q_p とすれば

$$Q_p = c A_p \sqrt{2g(z_r - z_t)}$$

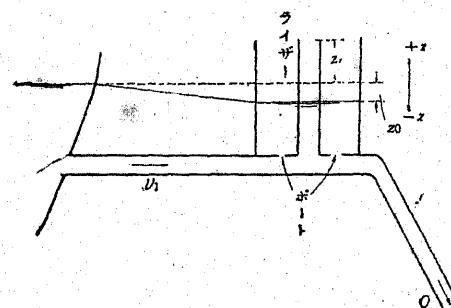


図-128

但し c は流量係数であつて、ポートから管に向つて流出する時は

$$Q_p = -c A_p \sqrt{2g(z_t - z_r)} \text{ である。}$$

この時の運動の方程式は前と同じく

$$\frac{l}{g} \frac{dv_1}{dt} = -z_r \mp \frac{4l v_1^2}{C^2 D_1} \quad \dots \dots \dots (45)$$

であるが、ライザー及び水槽外室に対する連続の方程式は

$$a \frac{dz_r}{dt} = A_1 v_1 - Q - Q_p \quad \dots \dots \dots (46)$$

$$A_1 \frac{dz_t}{dt} - Q_p \text{ 又は } A_2 \frac{dz_t}{dt} = Q_p - Q_u \quad \dots \dots \dots (47)$$

(47) の第2式中にある Q_u は水槽が溢流頂を有する場合の溢流量である。

ライザーが溢流し始めれば、この溢流量を Q_{ur} として

$$Q_{ur} = \delta (z_r - Z_r)^{\frac{3}{2}}$$

但し δ は係数、 Z_r は溢流頂の貯水池面上の高さである。この時は (46) 及び (47) の代りに次の2式になる。

$$a \frac{dz_r}{dt} = A_1 v_1 - Q - Q_p - Q_{ur} \quad \dots \dots \dots (48)$$

$$A_2 \frac{dz_t}{dt} = Q_p - Q_u + Q_{ur} \quad \dots \dots \dots (49)$$

之等の式から計算する時も一般に數値積分を用ひるが、差動式調壓水槽の考案者たる Johnson は次の3つの假定を用ひて之を解いた。

- i) ライザーの断面を非常に小さいと看做して、その水位は瞬間にその極點に達する。
- ii) ライザー内の水面がその極點に達するまで水槽内の水面が變化しない様にポートの抵抗が作用する。
- iii) 負荷の変化が起つた瞬間に達したライザーの水位と水槽の水位の極限が一致する様に水槽の大きさを定める。

$t = 0$ に於てライザー内の水面は最高値に達し、その後は逆流になるから

(45) から

$$\frac{l}{g} \frac{dv_1}{dt} = -z_r + \frac{4l v_1^2}{C^2 D_1}$$

$\sqrt{\frac{4l}{C^2 D_1}} = \varepsilon$ と置き、 z_r が最高水位を保つてゐるものとして上式を積分すれば

$$t = \frac{l}{2g\varepsilon v_1 z_r} \log \frac{\varepsilon v_1 - \sqrt{z_r}}{\varepsilon v_1 + \sqrt{z_r}} + C_1$$

t は負荷が Q_0 から Q に変化する時間であつて、その時に v_1 は v_{10} から v_1 に変化するものとすれば

$$t = \frac{l}{2g\varepsilon v_1 z_r} \log \frac{(\varepsilon v_1 - \sqrt{z_r})(\varepsilon v_{10} + \sqrt{z_r})}{(\varepsilon v_1 + \sqrt{z_r})(\varepsilon v_{10} - \sqrt{z_r})} \quad \dots \dots \dots (50)$$

その間の水槽水面の上昇量を y とすれば

$$Q_1 - A_1 \int_0^t v_1 dt + y A_2 = 0$$

$$\text{或は} \quad Ql - \frac{A_1 l}{g} \int_{v_{10}}^{v_1} \frac{v_1 dv_1}{\epsilon v_1^2 - z_r} + \gamma A_2 = 0$$

$$\therefore \quad y = \frac{l}{2geA_2} \left[\frac{A_1}{\epsilon} \log \frac{\epsilon v_1^2 - z_r}{\epsilon v_{10}^2 - z_r} - \frac{Q}{\sqrt{z_r}} \log \frac{(\epsilon v_1 - \sqrt{z_r})(\epsilon v_{10} + \sqrt{z_r})}{(\epsilon v_1 + \sqrt{z_r})(\epsilon v_{10} - \sqrt{z_r})} \right] \quad \dots \dots \dots (51)$$

水槽の水位が溢流頂に達すれば y はほぼ一定になる。

10. 圖式計算法

何れの形の調壓水槽でも (35) の形の微分方程式を解く事になるから、之を圖式によつて解く方法を述べる。

$$\frac{4\epsilon v_1^2}{C^2 D_1} = \epsilon^2 v_1^2 = h$$

と置けば (35) は

$$-z = \frac{l}{g} \frac{dv_1}{dt} \pm h, \quad (\pm \text{は } v_1 > 0 \text{ の時に } +)$$

水槽水面の昇降速度 v_2 は單式調壓水槽の例に就いて考へれば

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2 + \frac{Q}{A_1}$$

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_1}{dz} \frac{dz}{dt} = \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{dv_2}{dz} + \frac{1}{A_1} \frac{dQ}{dz} \right) v_2$$

従つて之を上の關係式に代入すれば

$$-z = \frac{lA_2}{gA_1} \left(v_2 \frac{dv_2}{dz} + \frac{v_2}{A_1} \frac{dQ}{dz} \right) \pm h$$

$$\therefore \frac{dv_2}{dz} = \frac{gA_1}{lA_2} \cdot \frac{-z \mp h}{v_2} - \frac{1}{A_2} \frac{dQ}{dz} = -\tan \alpha \quad \dots \dots \dots (52)$$

$\frac{dQ}{dz} = -\frac{E}{(H_n + z)^3}$ と書けば、 α は v_2 と z の關係を示す曲線の方向を示すものである。この圖計算を行ふには $\frac{dv_2}{dz}$ を $\frac{\Delta v_2}{\Delta z}$ と書き

$$\Delta v_2 = -\tan \alpha \cdot \Delta z = -\frac{gA_1}{lA_2} \cdot \frac{z \pm h}{v_2} \Delta z + \frac{E \cdot \Delta z}{A_2 (H_n + z)^2} \quad \dots \dots \dots (53)$$

$t = 0$ にて $z = -h = z_0$, $v_2 = v_{20}$ とすれば、この狀態から z が最低に達するまでの間は Δv_2 の符號は $+$ を取り、その後最高に達するまで $-$ を取る。 Δz を與へて (53) から順次に Δv_2 を計算して行き、圖-129 の曲線を作るのであるが

$$h = \frac{4\epsilon v_1^2}{C^2 D_1} = \frac{4l}{C^2 D_1} \left(\frac{A_2}{A_1} v_2 \right)^2$$

であるから h と v_2 の關係を表す曲線は豫め作つて置く。 Δv_2 が零になれば最高位に達したのであるから摩擦抵抗の項の符號を變へて計算を進める。

圖-129 から更に圖-130 の様にして z 及び v_2 の時間的の變化を示す曲線に改める事が出来る。

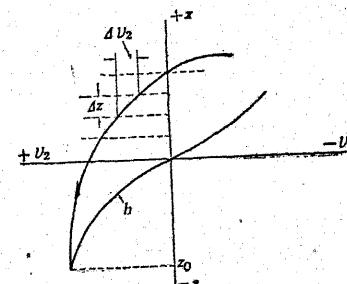


圖-129

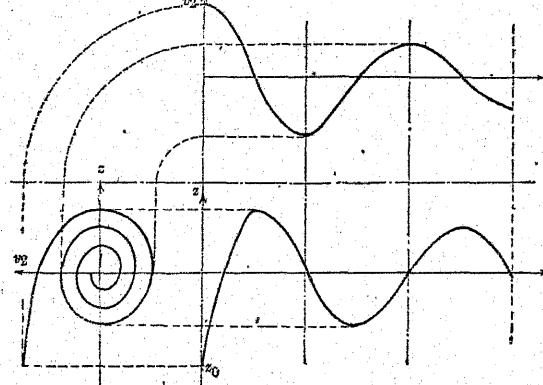


圖-130

〔練習問題〕

1. 直径 3 m, 管壁の厚さ 0.9 cm の鋼鐵管内の水衝作用の壓力波傳播速度を計算せよ。但し $E_{\infty} = 0.20 \times 10^8 \text{ gr/cm}^2$, $E = 20 \times 10^8 \text{ gr/cm}^2$, $m = 5$ とする。
2. 壓力鐵管の長さ 500 m, 壓力波の傳播速度 850 m/秒, 貯水池から管口までの落差 120 m, 最初の管内速度 3.7 m/秒, 開閉塞に要する時間 4 秒を與へて, 管内の壓力上昇を計算せよ。但し管は水平であつて, 開の閉ずる速度は一様と假定する。
3. 上の問題に於て管が水平と 30° 傾いてゐるものとして管内の壓力上昇を求めよ。
4. 上の問題で貯水池から管口までの落差が 40 m, 80 m, 120 m の 3 つの場合を考へ, 他の條件は變らずとして夫々の場合の最大壓力上昇を計算せよ。
5. 全落差 120 m, トンネルの内徑及び長さを 5 m 及び 4,500 m, 粗度係数 n を 0.020, 水槽の面積を 600 m^2 として, $Q = 50 \text{ m}^3/\text{秒}$ の流量を急に半分に減じた時の水槽内の振動を, 單式調壓水槽として計算せよ。
6. 上の問題を断面積 60 m^2 のライザーを持つた差動調壓水槽として, 水槽外室の必要断面積及び水面の振動を計算せよ。但し溢流頂はないものとし, ポートの面積は 3 m^2 とする。
7. 5 の問題に於て振動安定の條件上必要な水槽の最小面積を求めよ。