

第 4 章 開 水 路

1. 不 等 流¹⁾

一般に不等流と稱してゐるのは定流の中で等流以外のものゝ總稱であつて、時間的の變化はないが、流れの方向には水深、幅等が變化する流れである。従つて不等流の運動及び連續性に關する基本方程式は第 2 章の (28) 及び (30) から

$$-i + \frac{dh}{dx} + f_1 v^2 + \alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$v \frac{dA}{dx} + A \frac{dv}{dx} = 0 \dots\dots\dots(2)$$

(1) の第 3 項は摩擦抵抗を表すものであるから長さ dx の部分を等流と考へて Chézy の公式を應用すれば

$$f_1 = \frac{1}{C^2 R}$$

であつて、 C を適當な公式によつて興へればよい。

(2) を積分して流量 Q を興へれば

$$vA = Q = \text{const.} \dots\dots\dots(3)$$

之等の關係を (1) に代入すれば

$$-i + \frac{dh}{dx} + \frac{Q^2}{C^2 R A^2} + \alpha \frac{Q^2}{2g} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A^3} \right) = 0 \dots\dots\dots(4) \quad \text{不等流基本方程式}$$

(4) は不等流の基本方程式である。例へば幅の廣い矩形断面では $A = bh$ 、 $R = h$ であるが、更に幅が一様と考へれば $b = \text{const.}$ であるから、(4) を變形すれば

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - \frac{Q^2}{C^2 h^3 b^2}}{1 - \alpha \frac{Q^2}{g b^2 h^3}} \dots\dots\dots(5)$$

1) Non-uniform flow.

限界水深を h_c 、等流の水深を h_0 とすれば $v_0 = C_1 \sqrt{h_0 i}$ であるから

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{g b^3}}, \quad h_0 = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{C^2 b^3 i}}$$

不等流では C は常数ではなく、等流に対する C の値と異なつた値を取るが、近似的に之を常数と考へ、等流不等流を通じて同じ値を考へれば、(5) を變形する事により

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{h^3 - h_0^3}{h^3 - h_c^3} \dots\dots\dots(6)$$

幅の廣い矩形以外の断面に対しては、物部博士の方法により断面積 A 及び潤邊の長さ S を近似的に次の様に表す。

$$A = ah^s, \quad S = bh^k \quad (\alpha, b, s, k \text{ は常數})$$

$$\therefore R = \frac{A}{S} = \frac{a}{b} h^{s-k}$$

之を (4) に代入して、 C は Manning 又は Forchheimer の公式を用ひ

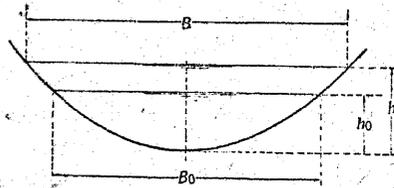


圖-84

れば一般の断面形に対しても積分可能な形の基本方程式が得られる。

例へば幅の廣い、拋物線形の断面に対しては、水面幅を B 、最大水深を h として、等流の時

之等の値を B_0, h_0 とすれば

$$B = B_0 \left(\frac{h}{h_0}\right)^{0.5}, \quad A = \frac{2}{3} B h = \frac{2}{3} B_0 h \left(\frac{h}{h_0}\right)^{0.5}$$

$$R = \frac{2}{3} h$$

即ち $a = \frac{2}{3} \frac{B_0}{\sqrt{h_0}}, \quad s = 1.5, \quad k = 0.5$ である。又

$$v_0 = C_0 \sqrt{\frac{2}{3} h_0 i}, \quad Q = A_0 v_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^{1.5} C_0 B_0 h_0^{1.5} \sqrt{i}$$

但し C_0 は等流の時の C の値で上述の廣い矩形の場合には $C = C_0$ と考へたが、此處では暫く $C \neq C_0$ として置く。この場合の限界水深は

$$A_c^3 = \frac{\alpha Q^2 B_c}{g} \quad \therefore h_c^4 = \frac{h_0}{\left(\frac{2}{3}\right)^3 B_0} \frac{\alpha Q^2}{g}$$

之等の關係を (4) に代入すれば

$$-i + \frac{dh}{dx} + \frac{C_0^2}{C^2} \frac{h_0^4}{h^4} i - \frac{h_c^4}{h^4} \frac{dh}{dx} = 0 \dots\dots\dots(7)$$

前と同様に $C_0 = C$ と見做せば幅の廣い拋物線形断面では

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{h^4 - h_c^4}{h^4 - h_0^4} \dots\dots\dots(8)$$

C に Manning 等の公式を用ひれば之と多少違つた形となる。

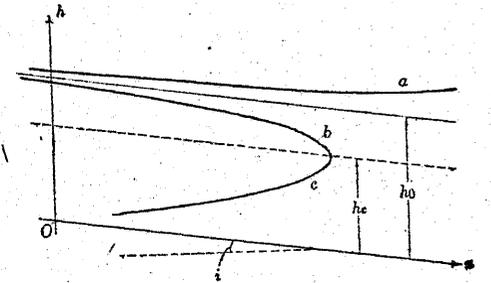


圖-85

2. 背水曲線²⁾

開水路の或箇所堰上げ等によつて水位に變化を生ぜしめた時にその影響が上流側に無限に及ぶ現象を背水と言ひ、その水面の縦斷曲線を背水曲線と稱する。この現象は等流が常流状態となる様な勾配、即ち $i < g/\alpha C^2$ の場合に限つて起る。

圖-85 の様な $i < g/\alpha C^2$ の場合を考へ、底勾配 i 及び幅 b 又は B は一定とする。この場合は断面形は矩形でも拋物線形でも $h_0 > h_c$ である。

2) Backwater curve.

圖の様に $h = h_0$ 及び $h = h_c$ の2直線を引き、先づ $h > h_0$ の範囲に就いて考へれば、(6) 又は (8) から $i > 0$ に取れば $\frac{dh}{dx} > 0$ であつて、水深は下流に向つて増加する。又 $h \rightarrow h_0$ の時に $\frac{dh}{dx} \rightarrow 0$ であるからこの時の背水曲線は $h = h_0$ の線を漸近線とする曲線で圖-85 の a の様になる。次に $h_0 > h > h_c$ の範囲を考へれば此處では $\frac{dh}{dx} < 0$ であつて、水深は下流に向つて減少し、 $h \rightarrow h_0$ の時に $\frac{dh}{dx} \rightarrow 0$ 、 $h = h_c$ の時に $\frac{dh}{dx} = \infty$ であるから、背水曲線は圖の b の様な曲線になる。 $h > h_c$ の範囲では $\frac{dh}{dx} > 0$ であるが $h \rightarrow \infty$ で $\frac{dh}{dx} \rightarrow i$ であるから漸近線は水平線で、 $h = h_c$ では $\frac{dh}{dx} = \infty$ であるから圖の c の様な曲線になる。

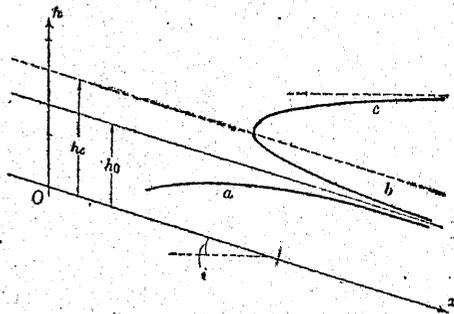


圖-86

之等の曲線の中で a は堰等で水流を堰き上げた時の背水曲線を表し、 b は瀑等があつて局部的の水面低下のある時の背水曲線で低下背水³⁾と稱する。 c は底勾配の小さい水路に水門等を設けて扉を少し開けた時に、扉の下から射出する水の水面曲線を表す。

$i < 0$ 即ち逆勾配の場合にはこの様に簡単に性質を定める事は出来ない。

底勾配が急で等流が射流状態にある場合には $i > g/aC^2$ であつて、こ

3) Sinking backwater.

の時は $h_0 < h_c$ である。この場合の水面曲線は背水曲線とは言はれないが、前と同様にしてその一般性質を見る。前と同様に底勾配及び幅は一定とする。この場合は $h_0 > h_c$ であつて、圖-86 の様に $h = h_0$ 及び $h = h_c$ の2直線を引き、先づ $h < h_0$ の範囲を考へれば、 $i > 0$ であるから $\frac{dh}{dx} > 0$ であつて、水深は下流に向つて増加する。又 $h \rightarrow h_0$ の時に $\frac{dh}{dx} \rightarrow 0$ であるからこの時の水面曲線は $h = h_0$ の線を漸近線とし、圖-86 の a の様になる。次に $h_0 < h < h_c$ の範囲を考へれば、此處では $\frac{dh}{dx} < 0$ であつて水深は下流に向つて減少し、 $h \rightarrow h_0$ の時に $\frac{dh}{dx} \rightarrow 0$ 、 $h = h_c$ の時に $\frac{dh}{dx} = \infty$ であるから水面曲線は圖の b の様な曲線になる。又 $h > h_c$ の範囲では $\frac{dh}{dx} > 0$ であるから水面曲線は圖の c の様になり、 $h \rightarrow \infty$ に對して $\frac{dh}{dx} \rightarrow i$ である事からこの曲線は水平線を漸近線としてゐる。

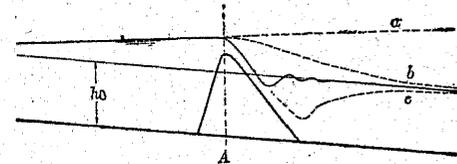


圖-87

之等の曲線の中で a, b は水門の扉の下から射出する水の水面で、扉の開きが h_0 以下及び以上の場合に相當する。又 c は射流が堰等を越える時の水面曲線を表してゐる。(常流)

今圖-87 の様に $i < g/aC^2$ の開水路の或断面 A に於て堰を設けて水面を或高さまで堰き上げたものとする。この時堰より上流側に背水曲線が現れる事は明らかであるが、堰の下流側では如何なる水面曲線が現れるかを考へて見る。圖-85 から見れば圖中の點線 a の様にならねばならないが、之では下流の方で水深が無限に大きくなって行くから實際には現れ得ない。實

際には下流に向つて $h = h_0$ の線に近付いて行き直線 b 又は c の曲線の様になるべきであるが、圖-85 から見ればこの兩曲線は何れも現れ得ない。結局堰より下流側では之等の何れの種類の曲線も實現不可能で、唯一の實現し得る水面形は $h = h_0$ の直線である。従つて上下流を通じての水面形は圖の實線の様になる。

(漸進)

同様にして圖-87 の様な $i > g\alpha C^2$ の開水路を堰き上げれば、その影響は下流の方にのみ及んで、上流側は影響がなく $h = h_0$ が水面の形になる。

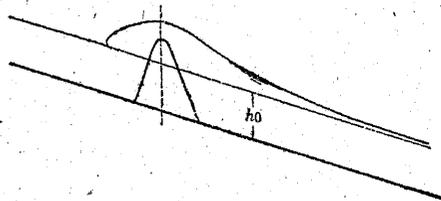


圖-88

要するに堰き上げの場合でも、水面低下の場合でも、常流では水面變化の影響は上流にのみ及び、射流ではその影響が下流にのみ及ぶのである。

之等の不等流の水面曲線の中で最も多く應用されるのは背水曲線 2 種であつて、之等に對しては公式及びその計算の爲の數値表がある。例へば幅の広い矩形断面に就いては (6) を變形して

$$i \frac{dx}{dh} = 1 + \frac{h_0^3 - h_c^3}{h^3 - h_0^3}$$

$$\therefore \frac{ix}{h_0} = \frac{h}{h_0} - \frac{h_0^3 - h_c^3}{h_0^3} \left[\frac{1}{6} \log \frac{h^2 + hh_0 + h_0^2}{(h + h_0)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2h_0 + h_0}{\sqrt{3} h_0} \right] + C \dots\dots\dots (9)$$

(9) の各邊の括弧内を $\phi\left(\frac{h_0}{h}\right)$ を以て表せば

$$\frac{ix}{h_0} = \frac{h}{h_0} - \frac{h_0^3 - h_c^3}{h_0^3} \phi\left(\frac{h_0}{h}\right) + C$$

$x = 0$ にて $h = h_1$ とし、常流に對しては上流側のみ即ち常に $x < 0$ を考へるのであるから、 $x = -l$ と書けば

幅の広い矩形断面

$$\frac{il}{h_0} = \frac{h_1 - h}{h_0} + \frac{h_0^3 - h_c^3}{h_0^3} \left[\phi\left(\frac{h_0}{h}\right) - \phi\left(\frac{h_0}{h_1}\right) \right] \dots\dots\dots (10)$$

之を Grashof-Bresse (グラスホフ・ブレス) の公式と言ひ、 $\phi\left(\frac{h_0}{h}\right)$ の値は堰上背水の場合の $\frac{h_0}{h}$ の種々の値に對して計算してある。又低下背水の場合には $\phi\left(\frac{h_0}{h}\right)$ の代りに $\psi\left(\frac{h}{h_0}\right)$ と書いて、 ψ と $\frac{h}{h_0}$ の關係が計算してある。この函数 ϕ 及び ψ の數値表は附表 1 及び 2 にある。

幅の広い拋物線形の断面では (8) を前と同様に變形して積分すれば

$$\frac{ix}{h_0} = \frac{h}{h_0} - \frac{h_0^4 - h_c^4}{h_0^4} \left[\frac{1}{4} \log \frac{h + h_0}{h - h_0} + \frac{1}{2} \arctan \frac{h}{h_0} \right] + C \dots\dots (11)$$

此處で $\frac{h}{h_0} - \left[\frac{1}{4} \log \frac{h + h_0}{h - h_0} + \frac{1}{2} \arctan \frac{h}{h_0} \right] = F\left(\frac{h}{h_0}\right)$ と置けば

$$\frac{ix}{h_0} = \frac{h}{h_0} \left(\frac{h_c}{h_0}\right)^4 + \left(1 - \frac{h_c^4}{h_0^4}\right) F\left(\frac{h}{h_0}\right) + C$$

$x = 0$ にて $h = h_1$ とし、 $x = -l$ と書けば

幅の広い拋物線形断面

$$\frac{il}{h_0} = \frac{h_1 - h}{h_0} \left(\frac{h_c}{h_0}\right)^4 + \left(1 - \frac{h_c^4}{h_0^4}\right) \left[F\left(\frac{h_1}{h_0}\right) - F\left(\frac{h}{h_0}\right) \right] \dots\dots\dots (12)$$

之を Tolkmitt (トルクミット) の公式と言ひ、堰上及び低下背水の時の函数 $F\left(\frac{h}{h_0}\right)$ の數値表は附表 3 及び 4 にある。

水路幅 b の餘り廣くない矩形断面の場合にも次の様にして基本方程式を積分する事が出来る。等流の時の潤邊の長さ S_0 は $b + 2h_0$ 、斷面積は $h_0 b$ であるから、之を (4) に代入すれば

$$-i + \frac{dh}{dx} + \frac{Q^2(b+2h)}{C^2(bh)^3} - \frac{\alpha Q^2}{gb^3 h^3} \frac{dh}{dx} = 0$$

$$\therefore -i + \frac{dh}{dx} + i \frac{h_0^3(b+2h)}{h^3(b+2h_0)} - \alpha i \frac{C^2 h_0^3 b}{gh^3(b+2h)} \frac{dh}{dx} = 0$$

即ち C は等流不等流を通じて一定と考へてゐる。更に $\alpha C^2 i/g = \beta$ と置けば

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{h^3(b+2h_0) - h_0^3(b+2h)}{h^3(b+2h_0) - \beta h_0^3 b}$$

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{h^3 - h_0^3 + \frac{2}{b} h h_0 (h^2 - h_0^2)}{h^3 - \beta h_0^3 + \frac{2}{b} h^3 h_0} \dots\dots\dots(13)$$

Dupuit 及び Masoni は、 $3 - 8 \frac{h_0}{S_0}$ 即ち $3b > 2h_0$ なる条件の下に (13) を積分して次の公式を得た。

$$\frac{ix}{h_0} = \frac{h}{h_0} + \frac{1}{2} \frac{1 - \beta + 2\beta \frac{h_0}{S_0}}{3 - 2 \frac{h_0}{S_0}} \log \frac{(h - h_0)^2}{h^2 + h_0 h + h_0^2 - 2 \frac{h_0^3}{S_0}} + \frac{1}{3 - 2 \frac{h_0}{S_0}}$$

$$\times \frac{-3 + 3\beta + 12 \frac{h_0}{S_0} - 6\beta \frac{h_0}{S_0} - S \left(\frac{h_0}{S_0}\right)^2}{\sqrt{3 - 8 \frac{h_0}{S_0}}} \arctan \frac{2h + h_0}{h_0 \sqrt{3 - 8 \frac{h_0}{S_0}}} + C \dots\dots\dots(14)$$

一般の断面形に対する物部博士の方法は既に述べた様に、等流の時の量には總べて添字 0 を附けて、

$$\frac{A}{A_0} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^s, \quad \frac{S}{S_0} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^k, \quad \frac{R}{R_0} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{s-k}$$

と置く。但し h は断面の最大水深である。(4) の第 3 項を $Q = b h_0^{m_2} 0.5$ と書けば⁴⁾

$$\frac{Q^3}{C_1^2 A^2 R^{2m}} = i \left(\frac{h}{h_0}\right)^{-2s-2m(k-k)}$$

(4) の第 4 項は

$$\alpha \frac{Q^2}{2g} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A^2}\right) = -\alpha s \frac{C_1^2 R_0^{2m} i}{g} \left(\frac{h}{h_0}\right)^{-2s-1} \frac{d}{dx} \left(\frac{h}{h_0}\right)$$

4) 之までは $C_1 R_0^m$ の代りに $C R_0^{0.5}$ と書いて C を常數と看做した。

故に $\alpha s \frac{C_1^2 R_0^{2m} i}{g h_0} = K'$ と置けば (4) は

$$-i + \frac{dh}{dx} + i \left(\frac{h}{h_0}\right)^{-2s-2m(s-k)} - K h_0 \left(\frac{h}{h_0}\right)^{-2s-1} \frac{d}{dx} \left(\frac{h}{h_0}\right) = 0 \dots\dots(15)$$

堰上げの場合は $\frac{h}{h_0} = y (> 1)$ と置けば (15) は次の形となる。

$$\frac{i}{h_0} \frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 - y^{-2s-2m(s-k)}} = \frac{K y^{-2s-1}}{1 - y^{-2s-2m(s-k)}} \dots\dots\dots(16)$$

$2s + 2m(s - k)$ は流速公式の形と断面形とによつて定まるから、之を r と置けば

$$\frac{i}{h_0} \frac{dx}{dy} = \frac{y^r}{y^r - 1} - K' \frac{y^{r-2s-1}}{y^r - 1} \dots\dots\dots(17)$$

$$\Phi_1 \left(\frac{h}{h_0}\right) = \int \frac{y^r}{y^r - 1} dy, \quad \Phi_2 \left(\frac{h}{h_0}\right) = \int \frac{y^{r-2s-1}}{y^r - 1} dy$$

と置けば (17) の積分形は

$$\frac{i}{h_0} x = \Phi_1 \left(\frac{h}{h_0}\right) - K \Phi_2 \left(\frac{h}{h_0}\right) + C$$

$x = 0$ にて $h = h_1$ とし、前と同じく $-x = l$ と書けば

$$\frac{il}{h_0} = \Phi_1 \left(\frac{h_1}{h_0}\right) - \Phi_1 \left(\frac{h}{h_0}\right) - K \left[\Phi_2 \left(\frac{h_1}{h_0}\right) - \Phi_2 \left(\frac{h}{h_0}\right) \right] \dots\dots\dots(18)$$

低下背水の場合には $\frac{h_0}{h} = \frac{1}{y} = z (> 1)$ と置けば (15) から

$$\frac{i}{h_0} \frac{dx}{dz} = \frac{z^{-2}}{z^r - 1} - K \frac{z^{2s-1}}{z^r - 1} \dots\dots\dots(19)$$

$$\Psi_1 \left(\frac{h_0}{h}\right) = \int \frac{z^{-2}}{z^r - 1} dz, \quad \Psi_2 \left(\frac{h_0}{h}\right) = \int \frac{z^{2s-1}}{z^r - 1} dz$$

と置き、 $x = 0$ にて $h = h_2$ の条件を用ひ、 $-x = l$ と書けば

$$\frac{il}{h_0} = \Psi_1 \left(\frac{h_0}{h_2}\right) - \Psi_1 \left(\frac{h_0}{h}\right) - K \left[\Psi_2 \left(\frac{h_0}{h_2}\right) - \Psi_2 \left(\frac{h_0}{h}\right) \right] \dots\dots(20)$$

物部博士は $1 < r < 6, 0.5 < s \leq 2.0$ の範囲で種々の r, s の値に對す

る $\phi_1, \phi_2, \Psi_1, \Psi_2$ の値を計算して圖表とした。⁵⁾ 従つて之を用ひて種々の断面形の水路に於ける背水曲線を計算する事が出来る。

〔問題 1〕 圖-89 の様な支川を有する河川の

水面曲線を計算せよ。但し

$$Q_1 = 1,000 \text{ m}^3/\text{秒}, Q_2 = 300 \text{ m}^3/\text{秒}$$

$$b_1 = 200 \text{ m}, b_2 = 25 \text{ m}, b = 210 \text{ m}$$

$$i_1 = 1/800, i_2 = 1/200, i = 1/1,000$$

$$C_1 = 50, C_2 = 35, C = 50,$$

$$L = 3,000 \text{ m}$$

且河口の水深を $h_1 = 5 \text{ m}$ とする。

(解) 本川及び支川の等流の水深及び限

界水深は

$$\text{本川 (合流前)} \quad h_0 = 2.00 \text{ m}, h_c = 1.41 \text{ m}$$

$$\text{支川} \quad h_0 = 2.82 \text{ m}, h_c = 2.53 \text{ m}$$

$$\text{本川 (合流後)} \quad h_0 = 2.48 \text{ m}, h_c = 1.56 \text{ m}$$

断面形は總べて幅の広い矩形と假定して、河口から計算して行く。

i) 本川 (合流點以下), $h = 4 \text{ m}$ として計算すれば

$$\frac{h_c}{h_0} = 0.629, \quad \frac{h_0}{h} = 0.620, \quad \frac{h_0}{h_1} = 0.496$$

Grashof-Bresse 公式の數表により

$$\phi\left(\frac{h_0}{h}\right) = 0.2138, \quad \phi\left(\frac{h_0}{h_1}\right) = 0.1296$$

之等を (10) に代入して計算すれば

$$l = 1,176 \text{ m}$$

$h = 3 \text{ m}$ として同様の計算をすれば

5) 物部長穂, 水理学, 参照

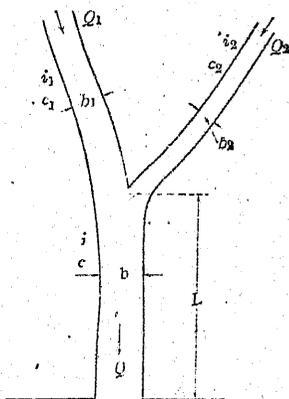


圖-89

$$l = 2,630 \text{ m}$$

同様に $h = 2.9 \text{ m}$ ならば $l = 2,843 \text{ m}$, $h = 2.8 \text{ m}$ ならば $l = 3,091 \text{ m}$ である。故に合流點たる $l = 3,000 \text{ m}$ の處では

$$h = 2.8 + 0.1 \times \frac{91}{3,091 - 2,843} = 2.84 \text{ m}$$

ii) 本川 (合流點以上), この部分では $l = 0$ の處で $h_1 = 2.84 \text{ m}$ である。(10) によつて種々の h に対する l の値を計算すればよいが、一例として $h = 2.5 \text{ m}$ の場合を計算して見る。

$$\frac{h_c}{h_0} = 0.705, \quad \frac{h_0}{h} = 0.800, \quad \frac{h_0}{h_1} = 0.704$$

$$\phi\left(\frac{h_0}{h}\right) = 0.4198, \quad \phi\left(\frac{h_0}{h_1}\right) = 0.2926$$

之等を (10) に代入すれば $l = 404 \text{ m}$ になる。

iii) 支川, 此處でも $l = 0$ に於て $h_1 = 2.84 \text{ m}$ であるが, $h_0 = 2.86 \text{ m}$ であるから低下背水になる。一例として $h = 2.85 \text{ m}$ の位置を計算すれば

$$\frac{h_c}{h_0} = 0.885, \quad \frac{h}{h_0} = 0.997, \quad \frac{h_1}{h_0} = 0.993$$

$$\psi\left(\frac{h}{h_0}\right) = 1.8162, \quad \psi\left(\frac{h_1}{h_0}\right) = 1.5324$$

之等を (10) に代入すれば $l = 485 \text{ m}$ になる。

3. 幅又は底勾配變化の影響

断面形は幅の広い矩形と假定し、先づ底勾配は一定で幅 b が變化してゐる場合を考へる。この時は (1) 及び (2) から次の形が得られる。

$$-i + \frac{dh}{dx} + \frac{Q^2}{C^2 b^2 h^3} - \alpha \frac{Q^2}{g} \frac{1}{b^2 h^2} \left(\frac{1}{h} \frac{dh}{dx} + \frac{1}{b} \frac{db}{dx} \right) = 0 \dots (21)$$

又は

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - \frac{Q^2}{C^2 b^2 h^3} + \frac{\alpha Q^2}{g h^2 b^2} \frac{db}{dx}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g h^2 b^2}} \dots (22)$$

之を (5) と比較すれば分子の第 3 項が加はつた事となり、 $\frac{db}{dx} > 0$ 即ち下流に向つて幅が擴がる時は、水面勾配 $\frac{dh}{dx}$ は一様幅の時よりも小さくなり、反対に幅が下流に向つて小さくなつて行く水路では水面勾配は一様幅の時よりも急になる。(22) を書き直せば

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{h^3 - h_0^3 + h_0^3 \frac{h}{b} \frac{db}{dx}}{h^3 - h_0^3} \dots\dots\dots(23)$$

$\frac{db}{dx}$ は水路の平面形によつて定まつてゐるから、(23) は容易に數値積分を行ふ事が出来る。此處で

$$\begin{cases} h^3 - h_0^3 + h_0^3 \frac{h}{b} \frac{db}{dx} = 0 \\ h^3 - h_0^3 = 0, \therefore h = h_0 \end{cases}$$

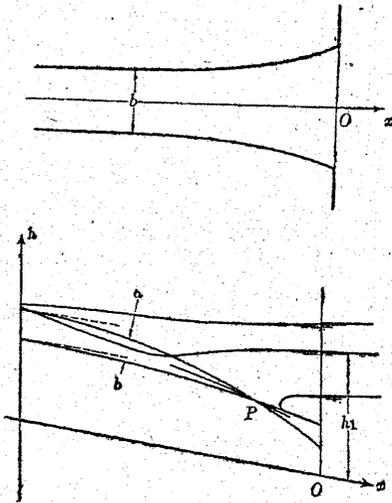


圖-90

の兩式を満足する $h(x)$ の曲線を畫がけば 圖-90 の a, b の様になり時にはこの兩曲線が交る事がある。この兩曲線が交る時にはその交點 P より下流では $h = h_0$ の曲線 b が a よりも上に出て、水面曲線は背水曲線でも h_1 の大小によつて圖の曲線で示した様な色々な形を呈し、中には P よりも下流で b の曲線よりも下になり、従つて部分的な射流を生ずる事がある。

底勾配の變化する場合には連続的な變化ならば第 2 章の (31) によつて計算すればよく、その影響もあまり大きくはない。

今 1 つの例として一定の底勾配 i_1 の水路の途中に、一部分だけ勾配の急な i_2 の部分が入つてゐる場合を考へる。問題を 3 つに分け

- (a) $i_1 < i_2 < g/\alpha C^2$
- (b) $i_1 < g/\alpha C^2 < i_2$
- (c) $g/\alpha C^2 < i_1 < i_2$

の場合に就き夫々に考へる。基本方程式は (6) であつて、 $h = h_0$ の線を a 、 $h = h_c$ の線を b と名づければ、 a と b の中間の部分では $\frac{dh}{dx} < 0$ で、その他の部分では $\frac{dh}{dx} > 0$ である。

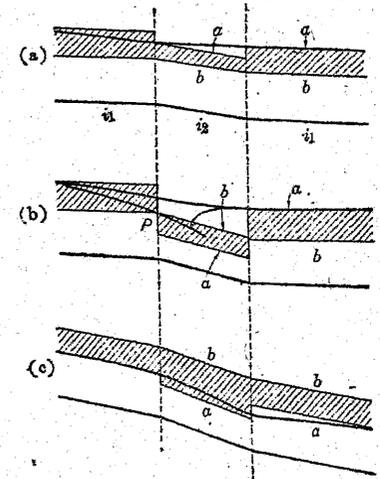


圖-91

水路は無限に長く、上流及び下流では等流になつてゐるものとすれば、途中に i_2 のある事の影響は (a) 及び (b) の場合は上流に、(c) の場合には下流に及ぶ。その水面形は (a) の場合は普通の背水及び低下背水曲線の連続であるが、(b) の場合は a と b の交點を生ずる爲に、その 1 つの交點 P から下流の部分には局部的な射流を生ずる事がある。(c) の場合は總べて射流の水面曲線の連続である。

4. 鉛直速度成分を考へた不等流の問題

この場合の基本方程式は第 2 章の (31) であつて、底勾配を一様とすれば、廣い矩形断面では

$$-i + \frac{dh}{dx} + \frac{v^2}{C^2 h} + \alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{hv^2}{3g} \frac{d^3 h}{dx^3} = 0 \dots\dots(24)$$

連続性の方程式から $\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{h} \frac{dh}{dx}$ であるから

$$i - \frac{v^2}{C^2 h} = \left(1 - \frac{\alpha}{g} \frac{v^2}{h} \right) \frac{dh}{dx} + \frac{hv^2}{3g} \frac{d^3 h}{dx^3}$$

流量を $Q = bq$ と書けば

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{q^2}{C^2 i}}, \quad h_c = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}} = h_0 \sqrt[3]{\frac{\alpha i C^2}{g}}$$

之等を代入して順次に變形すれば

$$(h^3 - h_0^3) i = (h^3 - h_c^3) \frac{dh}{dx} + \frac{h^3 h_0^2 C^2 i}{3g} \frac{d^3 h}{dx^3}$$

$$\therefore \frac{3g}{C^2 h_0^3} \cdot \frac{h^3 - h_0^3}{h^3} = \frac{3\alpha}{h_0^2} \left(\frac{g}{\alpha C^2 i} - 1 + \frac{h^3 - h_0^3}{h^3} \right) \frac{dh}{dx} + \frac{d^3 h}{dx^3}$$

然るに h と h_0 の差が著しく大きくない部分を考へれば

$$\frac{h^3 - h_0^3}{h^3} = \frac{h - h_0}{h} \cdot \frac{h^2 + h h_0 + h_0^2}{h^2} \approx \frac{3(h - h_0)}{h_0}$$

之を上式の代入し、且底勾配 i は $g/\alpha C^2$ にあまり近い値を取らない様な場合を考へれば、 $\frac{3(h - h_0)}{h_0}$ を $\frac{g}{\alpha C^2 i} - 1$ に比して省略する事により、次の式が得られる。

$$\frac{d^3 h}{dx^3} - \frac{3\alpha}{h_0^2} \left(1 - \frac{g}{\alpha C^2 i} \right) \frac{dh}{dx} - \frac{9gf}{C^2 h_0^3} (h - h_0) = 0 \dots\dots\dots(25)$$

Boussinesq に従つて (25) の最後の項に、補正の係数として f (約 1.1 の値を持つ) を乗じ、この一般解を次の形に假定する。

$$\frac{h - h_0}{h_0} = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x}$$

従つて (25) から m_1, m_2, m_3 は次の3次方程式の根である。

$$m^3 - \frac{3\alpha}{h_0^2} \left(1 - \frac{g}{\alpha C^2 i} \right) m - \frac{9gf}{C^2 h_0^3} = 0 \dots\dots\dots(26)$$

(26) には實根が少くも1つは存在するからそれを m_1 で表せば、他の2根 m_2, m_3 は

$$m^2 + m_1 m + 9 \frac{fg}{m_1 C^2 h_0^3} = 0 \dots\dots\dots(27)$$

の根である。即ち

$$\left. \begin{aligned} m_2, m_3 &= -\frac{m_1}{2} \pm i\nu \\ \nu &= \sqrt{\frac{9fg}{m_1 C^2 h_0^3} - \frac{m_1^2}{4}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

ν が實数になるのは $m_1^2 C^2 h_0^3 \leq 36fg$ の場合、即ち (26) の根の判別式から

$$\left(\frac{9}{2} \frac{fg}{C^2 h_0^3} \right)^2 - \left\{ \frac{\alpha}{h_0^2} \left(1 - \frac{g}{\alpha C^2 i} \right) \right\}^3 < 0$$

$$\therefore \frac{g}{C^2 i} < \alpha - \left(\frac{9}{2} \frac{fg}{C^2} \right)^{\frac{2}{3}} \dots\dots\dots(29)$$

(29) の兩邊を等しくする様な i の値を i_0 とすれば、 $i > i_0$ ならば ν は實数になる。而も (29) の最後の項は一般に1よりも遙かに小さいから i_0 は常流と射流の限界をなす勾配に近く、且射流を與へる勾配である。

m_1 の値は最も近似的には (25) の $\frac{d^3 h}{dx^3}$ の項を省略する事により

$$m_1 = \frac{1}{\alpha C^2 h_0} \frac{3fg}{\left(\frac{g}{\alpha C^2 i} - 1 \right)}$$

之を (26) から變形した次の式の右邊に代入する。

$$m_1 = \frac{1}{\alpha C^2 h_0} \frac{3fg}{\left(\frac{g}{\alpha C^2 i} - 1 \right) + \frac{h_0^2 m_1^2}{3\alpha}} \dots\dots\dots(30)$$

先づ $i < i_0$ の場合を考へれば m_2, m_3 は共軛な虚根であつて、水深は次の形で表される。

$$h = h_0 \left[1 + C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{\left(-\frac{m_1}{2} + i\nu \right) x} + C_3 e^{\left(-\frac{m_1}{2} - i\nu \right) x} \right]$$

従つて水面には $\frac{2\pi}{\nu}$ を波長とする定常波が現れ、圖-92 の (a) 又は (b) の様にな

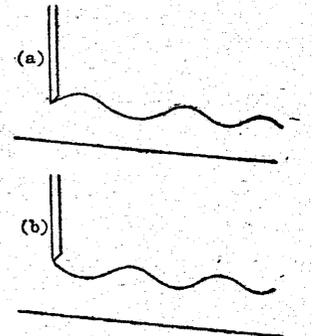


圖-92

る。 $i > i_0$ の時は m_2, m_3 は實数であるから水面の形は 圖-85 の a, b と大差のないものとなる。但し何れの場合にも i は $g/\alpha C^2$ にあまり近い値を取らないと假定してゐる。

5. 横からの流入のある水流

水路の側壁から単位長さ當りに q の流入量のある場合は、 dx だけ離れた 2 断面に就いてエネルギーの方程式を作る。流入する水 $q dx$ は流れの方

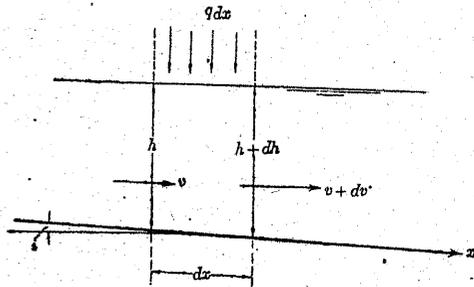


圖-93

向の運動エネルギーを持たず、水面の高さに相當する位置エネルギーのみを持つものとするば上流側から及び側壁から単位時間に流入する水の持つ全エネルギーは

$$w_0 b h v \left(\frac{\alpha v^2}{2g} + h \right) + w_0 q dx \cdot h$$

下流側から単位時間に流出する水の持つエネルギーは

$$w_0 \{ b(h + dh)(v + dv) + q dx \} \left\{ \alpha \frac{(v + dv)^2}{2g} + h + dh \right\}$$

上流側から入る水は底勾配の關係で $w_0 b h v \cdot i dx$ の位置エネルギーを加へ、摩擦抵抗によつて失はれるエネルギー $f_1 v^2 \cdot w_0 b h v dx$ を考へれば、エネルギーの方程式は高次の微小項を省略する事により、

$$- i dx \cdot b h v + \frac{\alpha b}{2g} (v^3 dh + 3 h v^2 dv) + b(h^2 dv + 2 v h dh)$$

$$+ q \left(\frac{\alpha v^2}{2g} + h \right) dx + f_1 v^2 b h dx - q dx \cdot h = 0$$

$$\therefore -i + \left(\frac{\alpha v^2}{2g} \cdot \frac{1}{h} + 2 \right) \frac{dh}{dx} + \left(\frac{3\alpha v}{2g} + \frac{h}{v} \right) \frac{dv}{dx} + f_1 v^2 + \frac{\alpha v}{2g} \frac{q}{b h} = 0 \dots\dots\dots(31)$$

この場合の連続の方程式は

$$b h v + q dx = b(h + dh)(v + dv)$$

$$\therefore \frac{q}{b h v} = \frac{1}{h} \frac{dh}{dx} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} \dots\dots\dots(32)$$

(31) と (32) から $\frac{dv}{dx}$ を消去すれば

$$-i + \left(1 - \frac{\alpha v^2}{g} \cdot \frac{1}{h} \right) \frac{dh}{dx} + \left(\frac{4\alpha v^2}{2g} + h \right) \frac{q}{b h v} + f_1 v^2 = 0$$

上流側の流量を $Q = b h v$ とし、断面を幅の廣い矩形と假定して $f_1 = \frac{1}{C^2 h}$ と書けば

$$-i + \left(1 - \frac{\alpha Q^2}{g b^2 h^3} \right) \frac{dh}{dx} + \left(\frac{2\alpha}{g} \frac{Q^2}{b^2 h^2} + h \frac{q}{Q} \right) + \frac{Q^2}{C^2 h^3 b^3} = 0 \dots\dots\dots(33)$$

但し $Q = Q_0 + q x$ の形で與へられる。 C を常數と假定して

$$h_c^3 = \frac{\alpha Q_0^2}{g b^2}, \quad i h_0^3 = \frac{Q_0^2}{C^2 b^2}$$

と書けば (33) は次の形になる。

$$-i + \left(1 - \frac{h_c^3}{h^3} \right) \frac{dh}{dx} + \left(2 \frac{h_c^3}{h^3} + 1 \right) \frac{q h}{Q} + \frac{h_0^3}{h^3} i = 0$$

$$\therefore \frac{dh}{dx} = \frac{i(h^3 - h_0^3) - (2h_c^3 + h^3) \frac{q h}{Q}}{h^3 - h_c^3} \dots\dots\dots(34)$$

この計算は數値計算によつて行ふ事が出来る。 $i < g/\alpha C^2$ ならば下流端の水深が境界條件として與へられる事が必要で、此處から上流に向つて Δx

づ、計算を進めて行く。 $i > g/\alpha C^2$ ならば計算は上流から下流に向つて行ふ。

6. 橋脚による堰上

橋脚の様な障碍物が水流中に置かれた時の堰上の問題は、結局障碍物によつて起るヘッドの損失の問題である。開水路でも管路と同じくヘッドの損失

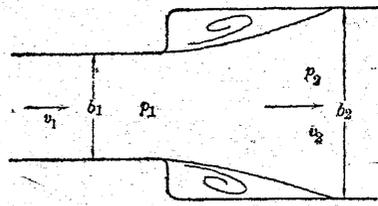


圖-94

の原因となるのは主として断面積特に水路幅の急激な變化に伴ふ渦の發生である。

水路幅が急に b_1 から b_2 に擴大し、水深が h_1 から h_2 に變じた場合は、管の場合と同様に摩擦

抵抗を無視して力積の變化を壓力の差によるものとすれば

$$(p_2 - p_1) b_2 h_2 = \frac{\alpha w_0 Q}{g} (v_1 - v_2)$$

ヘッドの損失を ΔE_1 を以て表せば、Bernoulli の定理により

$$\Delta E_1 = \left(\frac{p_1}{w_0} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} \right) - \left(\frac{p_2}{w_0} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} \right)$$

之等から $p_2 - p_1$ を消去すれば

$$\Delta E_1 = \alpha \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \frac{\alpha Q^2}{2g} \left(\frac{1}{b_1 h_1} - \frac{1}{b_2 h_2} \right)^2 \dots\dots\dots(35)$$

断面が急激に縮少する爲の損失は擴大の場合の様に力積の變化から計算する事が出来ないが、運動エネルギーの一部を失ふのであるからヘッドの損失 ΔE_2 を

$$\Delta E_2 = \mu^2 \frac{v^2}{2g}$$

の形で表し、係數 μ_2 を適當に定める。

水路中に橋脚が存在する時は橋脚の中心間隔を b_0 、橋脚の幅を h_1 、 $b_0 - b_1 = b$ とすれば、流れの幅は橋脚の形によつて一度 b 以下まで縮少し、

橋脚を通過すれば背後に一旦渦を生じた後再び元の幅に戻る。圖-95 に於て AB 間の縮小及び CD 間の擴大の爲のヘッドの損失に打ち勝つ爲に A の水位は δh だけ堰き上げられる。

AB 間に Bernoulli' の定理を適用し、AD 間の長さは比較的短いからその間の摩擦抵抗及び底勾配による位置エネルギーの差を無視すれば

$$\delta h = \frac{\alpha Q^2}{2g b_0^3} \left[\frac{1}{h_0^2} - \frac{1}{(h_0 + \delta h)^2} \right] + \Delta E_2 + \Delta E_1 \dots\dots\dots(36)$$

ΔE_2 及び ΔE_1 は夫々 AB 間及び CD 間のヘッドの損失で、橋脚の形、 $\frac{b_1}{b_0}$ の比等によつてその値が異なる。 μ_2 の値は圖-96 の様な色々な橋脚の形に應じて、圖-62 と $\frac{b_1}{b_0}$ の比から 0~0.30 程度の値を適當に定める。又 ΔE_1 の計算には C に於ける bh を知る必要があり、之を $b(h_0 - \delta h)$ とすれば

$$\Delta E_1 = \frac{\alpha Q^2}{2g} \left\{ \frac{1}{b(h_0 - \delta h)} - \frac{1}{b_0 h_0} \right\}^2$$

$\frac{\delta h'}{h_0}$ も橋脚の形及び $\frac{b_1}{b_0}$ の比によつて異なり、圖-96 の (a) の様な形は (c) の様な形よりもこの値が大で、又 $\frac{b_1}{b_0}$ が大きければこの値は大きく

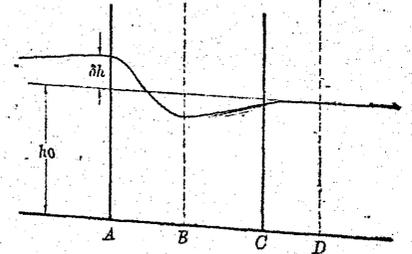
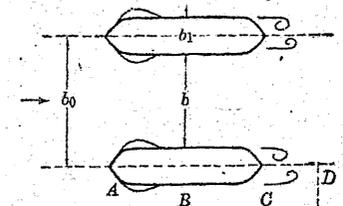


圖-95

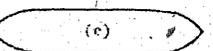
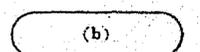
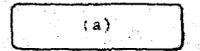


圖-96

なる。従つて計算に際しては $\frac{\delta h'}{h_0}$ を之等の關係から 0.05 ~ 0.20 位の程度で適當に定める。⁶⁾

7. 堰の溢流量

堰とは水流を横切る工作物で水が之を越えて流れるものである。一般に

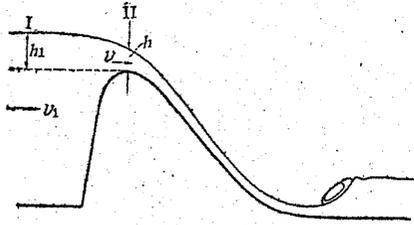


圖-97

圖-97 の様に流下する水は射流となつて落ち、下流側の影響は堰頂に及ばず、従つて問題は上流側の断面 I と堰頂断面 II との水深が與へられ

ば解決する。圖の h_1 を溢流水深⁸⁾と言ひ、溢流量を定めるのに重要な量である。

先づ圖-97 の様な形の堰に就いて考へれば堰頂部に $i = g/\alpha C^2$ になる處

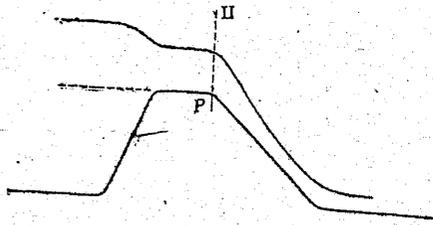


圖-98

があり、之は圖-90 の P 點に相當する點である故之から下流が射流になる。圖-98 の様な所謂廣頂堰⁹⁾ならば P がこの點に當る。この位置を断面 II に取つて I と II の間

で Bernoulli の定理を適用し、變化が急激であるから摩擦損失を無視すれば

$$\frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{v^2}{2g} + h = h_0$$

と置く。

$$\therefore v = \sqrt{2g(h_0 - h)}, \quad Q = bh\sqrt{2g(h_0 - h)} \dots\dots(37)$$

b は堰の長さ即ち水路の幅で、 v_1 は接近流速¹⁰⁾と稱する。 h は限界水深 h_c 。

6) 橋脚による堰上の問題には良い實驗公式がない。

7) Weir.

8) Overflow depth.

9) Broad-crested weir.

10) Approach velocity.

に等しい處を擇んでゐるから

$$h = h_c = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}}$$

$$\therefore Q^2 = 2g \left[h_0 b^2 \left(\frac{\alpha Q^2}{gb^2} \right)^{2/3} - b^2 \left(\frac{\alpha Q^2}{gb^2} \right) \right]$$

$$\therefore (1 + 2\alpha) Q^{2-4/3} = 2gh_0 b^2 \left(\frac{\alpha}{gb^2} \right)^{2/3}$$

$$\therefore Q = \alpha b h_0 \sqrt{\frac{8gh_0}{(1 + 2\alpha)^3}} \dots\dots(38)$$

之から h_c を計算すれば

$$h_c = \frac{\alpha}{1 + 2\alpha} h_0 \dots\dots(39)$$

$\alpha \doteq 1$ と置けば (38) 及び (39) は

$$Q = \frac{2}{3} b h_0 \sqrt{\frac{2}{3} g h_0}, \quad h_c = \frac{2}{3} h_0 \dots\dots(40)$$

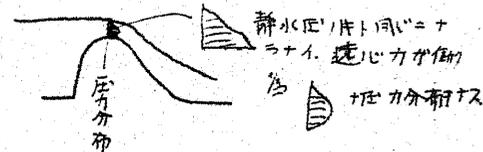
この關係は所謂 Bélanger (ベランジェ) の法則から簡單に求める事が出来る。Bélanger の法則とは堰頂の水深 h は與へられたヘッド h_0 を以て流し得る流量が最大になる様な大きさになると言ふのであり、(37) から、 $\frac{\partial Q}{\partial h} = 0$ を計算すれば直ちに $h = \frac{2}{3} h_0$ を得、従つて (40) が得られる。

一般には流量 Q を

$$Q = m b h_0 \sqrt{2g h_0}$$

の形で表して m を流量係數¹¹⁾と言ふ。實際の堰に於ては遠心力等の影響の爲に水脈内の壓力分布が變化し、 m は必ずしも $\frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3}}$ に等しくならず、堰頂の形及び溢流水深によつて多少變化し、一般には $\frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3}}$ よりも大きくなり、又 h_0 が大きい程大きくなるのが普通である。圖-97 の様な堰では m の値は 0.4 ~ 0.5 位で、圖-98 の様な形では之が 0.35 ~ 0.45 位に

11) Discharge coefficient.



$$Q = \left(0.6035 + 0.0813 \frac{h_0}{h_d} \right) \frac{2}{3} \sqrt{2g} b h_0^{\frac{3}{2}}$$

$$h_0 = h_1 + 0.0011 m$$

なる。

圖-99 の様な堰を鋭縁堰¹²⁾と言ひ、この場合は堰頂に於ける水壓の分布が

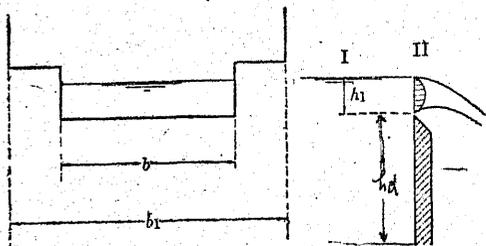


圖-99

簡單でない爲に (37) の様な關係を得る事が出来ない。¹³⁾ 然し形による誤差のない事と、堰の性質として溢流水深のみで流量が定まる事から流量の測定に廣く用ひられてゐる。その流量を與へる公式として最も廣く用ひられてゐるのは Francis (フランシス) の公式であつて、その形は

$$Q = 1.84b \left\{ h_0^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{v_1^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \dots \dots (m\text{-秒單位}) \dots \dots (41)$$

圖-99 の様に幅 b_1 の水路中に b の堰がある時は流れの收縮を考慮して b の代りに $b - \frac{h_1}{5}$ を用ふる。尚堰の高さが h_1 に比して相當大きければ Francis の公式は $Q = 1.84bh_1^{\frac{3}{2}}$ としても殆ど違ひはない。

圖-100 の様に下流側の水深が次第に増加すれば遂に堰を越す水に射流状

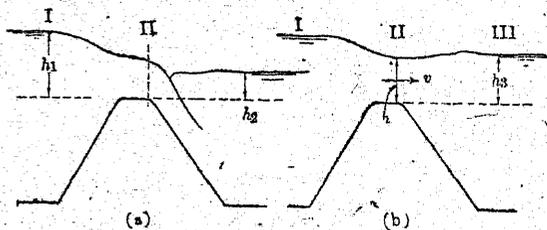


圖-100

12) Sharp-crested weir.

13) 之に関しては Boussinesq の理論がある。

態が現れなくなる。この時は下流側の水深 h_2 が溢流量 Q に影響するのであつて、この様な堰を潜堰¹⁴⁾と稱する。潜堰の流量を求めるには 圖-100 (b) の I と II 及び III の間に Bernoulli の定理を適用し、前と同じく摩擦抵抗は無視すれば

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_0 = h + \frac{v^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta E \dots \dots (42)$$

ΔE は流れが擴がる爲のヘッドの損失である。之を $\mu \frac{v^2}{2g}$ と置けば

$$h = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} - (1 - \mu) \frac{v^2}{2g}$$

$\frac{v_2^2}{2g}$ は極めて小さいが、 μ は一般に 1 に近く、普通は $h = h_2$ と考へてよい。従つて (42) から

$$v = \sqrt{2g(h_0 - h_2)}, \quad Q = bh_2 \sqrt{2g(h_0 - h_2)} \dots \dots (43)$$

この計算では上述の様な假定があり、又堰の形によつても Q の値は變化するから (43) の Q の式の右邊には形によつて變化する係數 m' (1 に近い値を取る) を乗じて置く。

今 h_1 を一定にして h_2 を次第に大きくして行けば、上に述べた處によれば $h_2 = \frac{2}{3} h_0$ になるまでは Q は一定で、之を過ぎれば (43) で與へられた大ききになり、 $h_2 = h_0$ で $Q = 0$ になる。然し實際には h_2 が増加して $\frac{2}{3} h_0$ に近付けば 圖-100(a) の

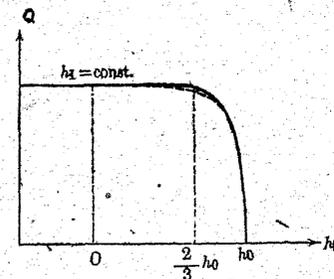


圖-101

様になつて、 h_2 の大きさが堰頂断面の水壓分布に影響する様になり、 Q は多少低下して 圖-101 の點線で示した様になる。

14) Submerged weir.

尚 m' の値は 1 の時に $m = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3}}$ の公式に連続するのであるから、1 よりも稍大きくなるのが普通である。

〔問題 2〕 或水面を堰によつて一定に保つには毎秒 25 m^3 を溢流せしめる必要があるものとする。堰の長さを 60 m とすれば堰頂は水面以下何程の處に置けばよいか。但し堰は潜堰とはならず、又水面から底までの水深は 7 m とする。

(解) 圓頂の堰を用ひる事とし $m = 0.5$ と假定する。接近流速は

$$v_1 = \frac{25}{60 \times 7} = 0.060 \text{ m/sec}$$

$$\therefore Q = 25 = 0.5 \times 60$$

$$\times \left(h_1 + \frac{0.060^2}{2 \times 9.8} \right) \sqrt{2 \times 9.8 \times \left(h_1 + \frac{0.060^2}{2 \times 9.8} \right)}$$

$\frac{v_1^2}{2g}$ は非常に小さいから平方根は 2 項定理で展開して

$$\frac{5}{6} = \left(h_1 + \frac{1.83}{10,000} \right) \left(19.6h_1 + \frac{3.6}{2 \times 19.6h_1 \times 1,000} \right)$$

微小項を省略すれば次の 2 次方程式になる。

$$19.6h_1^2 + \frac{3.6}{1,000} h_1 - \frac{5}{6} + \frac{0.92}{10,000} = 0$$

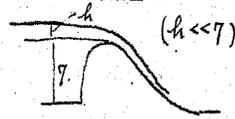
$$\therefore h_1 = \sqrt{\frac{5}{6 \times 19.6}} = 0.206 \text{ m}$$

即ち接近流速は初めから省略してよいのである。

8. 流出孔¹⁵⁾と水門¹⁶⁾

水槽壁面の孔から流出せしめるものを流出孔と言ひ、孔の面積が小さければ流量は Torricelli の定理から計算が出来、孔の處では流線が断面に垂直にならず、従つて $Q = av$ とする事が出来ない。圖-102 の様に流出水の断面が收縮して a_0 になり、此處では流線が断面に垂直になる。その位置の

15) Orifice. 16) Sluice gate.



速度は水面との間に Bernoulli の定理を適用すれば矢張り $v_0 = \sqrt{2gH}$ になるから、

流出量は

$$Q = a_0 v \sqrt{2gH} = C_a a_0 \sqrt{2gH}, \quad (C_a < 1)$$

C_a は断面の收縮を表す係数であつて收縮係數¹⁷⁾と稱する。或は更に摩擦等による僅かの損失も考慮して

$$Q = C a_0 \sqrt{2gH} \dots\dots\dots(44)$$

と書き、 C を流量係數¹⁸⁾と言ふ。流量係數 C

の値は徑 d の圓形断面で 圖-102 の ϕ が 45° の場合には次の様な値を取る。

$d(\text{cm})/H(\text{cm})$	6	20	40	80	120	200	300
0.55	.681	.656	.640	.629	.624	.623	.622
2.00	.628	.617	.609	.603	.594	.598	.597
7.00	.618	.609	.603	.597	.594	.593	.593

收縮係數の大きくなる様な形では之よりも相當に大きくなる。

流出孔の断面積 A が水深 H

の割合に小さくない場合には、

圖-103 の様に任意の點の水深を $s = H - \zeta$ で表す。この

點の速度は

$$v = \sqrt{2g(H - \zeta) + v_0^2}$$

但し v_0 は接近流速である。従つて $H_0 = H + \frac{v_0^2}{2g}$ と書けば

$$v = \sqrt{2gH_0 \left(1 - \frac{\zeta}{H_0} \right)}$$

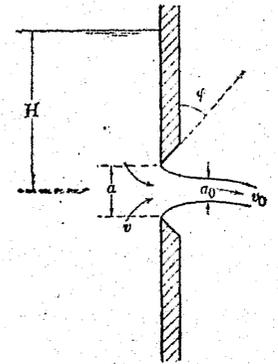


圖-102

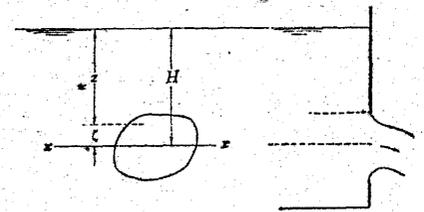


圖-103

17) Coefficient of contraction.

18) Coefficient of discharge.

$$= \sqrt{2gH_0} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\zeta}{H_0} - \frac{1}{8} \frac{\zeta^2}{H_0^2} - \dots \right)$$

従つて鉛直壁にある流出孔では、流出量 Q は

$$Q = C \int v dA = C \sqrt{2gH_0} \left(A - \frac{G_x}{2H_0} - \frac{I_x}{8H_0^2} - \int_A \frac{\zeta^3}{16H_0^3} dA \dots \right)$$

但し G_x は面積 A の xx 軸の周りの面積モーメント、 I_x はその慣性モーメントである。従つて xx 軸を A の重心を通る様に擇べば $G_x = 0$ であり、又一般に括弧内の第 4 項以下は省略して差支へないから

$$Q = C \sqrt{2gH_0} \left(A - \frac{I_x}{8H_0^2} \right) \dots \dots \dots (45)$$

例へば半径 R の圓形流出孔では

$$Q = C \sqrt{2gH_0} \cdot \pi R^2 \left(1 - \frac{R^2}{32H_0^2} \right) \dots \dots \dots (46)$$

又幅 B の矩形流出孔で上邊及び下邊までの水深を H_1 及び H_2 とすれば

$$Q = C \sqrt{2gH_0} \cdot B (H_2 - H_1) \left[1 - \frac{(H_2 - H_1)^2}{96H_0^2} \right] \dots \dots \dots (47)$$

(46) の場合に C は小流出孔に對して與へた C の値の 0.95 ~ 1.00 倍程度であるが、矩形断面では H の他に $\frac{B}{H}$ の比によつても可成り著しく變化する。¹⁹⁾

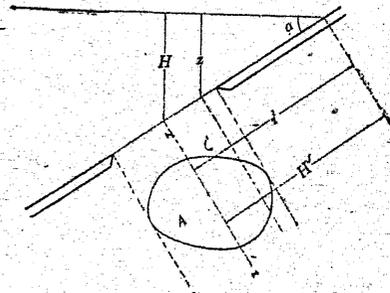


圖-104

圖-104 の様に水平から α だけ傾いた壁面の流出孔では

$$z = z' \sin \alpha = (H' - \zeta') \sin \alpha$$

$$H' \sin \alpha + \frac{v_0^2}{2g} = H_0' \sin \alpha$$

と書けば、流出量は

$$Q = C \int \sqrt{2gH_0' \sin \alpha} \left(1 - \frac{\zeta'}{H_0'} \right) dA$$

19) 物部長穂, 水理学, 参照。p. 197 ~ 198

$$= \sqrt{2gH_0' \sin \alpha} \left(A - \frac{G_x'}{2H_0'} - \frac{I_x'}{8H_0'^2} - \dots \right)$$

G_x' 及び I_x' は A の xx 軸の周りの面積及び慣性モーメントであつて、この軸が A の重心を通る様にすれば $G_x' = 0$ である。前と同様に括弧内の第 4 項以下を省略すれば

$$Q = C \sqrt{2gH_0' \sin \alpha} \left(A - \frac{I_x'}{8H_0'^2} \right) \dots \dots \dots (48)$$

孔の面積の比較的大きい場合には収縮係数は 1 に近くなるが、孔の位置で $\alpha = 0$ の假定が正しくない爲に係数 C の値は C_a よりも或程度小さくなる。

水門は普通に矩形断面の流出孔と見る事が出来るが、下流側の水面が高くなつて潜流出孔²⁰⁾の状態になる事が多い。圖-105 に於て下流側の水位 h_2 が

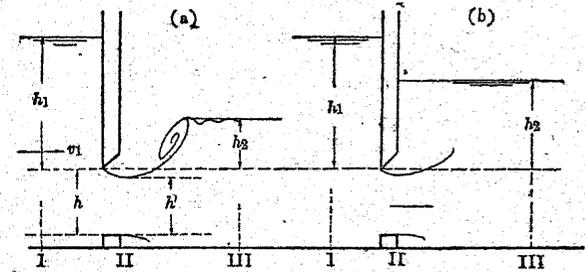


圖-105

次第に増加すれば (a) の様な射流となつて流出してゐる場合でも、流れの収縮した断面 II に於て $v = 0$ とするのは不當であるから此處でも普通の靜水壓を考へて、I と II の間で Bernoulli の定理を適用すれば

$$h_0 = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h' + \frac{v^2}{2g} = h + h_0$$

但し h_0 は全ヘッド h' は収縮した断面の高さ、 v は其處の速度である。従つて流出量は $h' = C_a h$ として

$$C_a = 0.7 \sim 0.8$$

水門の形による異なり

20) Submerged orifice.

$$Q = C_d b h_1 \sqrt{2g(h_0 - h_1)} \dots\dots\dots(49)$$

圖-105 の (b) の様に h_2 が大きくなつて射流部が全く水中に没する時は、I と II の間に Bernoulli の定理を適用すれば、

$$h_0 = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\therefore Q = C_d b h_1 \sqrt{2g(h_0 - h_2)} \dots\dots\dots(50)$$

(50) を用ふべき状態となるのは h_2 が第 2 章の (61) から必要とされる値以上昇つた場合である。
($\alpha = 0.7 \sim 0.8$.)

9. 低い波

不定流の 1 つの問題として等流状態にある開水路に波高が水深に比して比較的小さく、而も波長の大きい波が進行する場合を考へる。第 2 章の (28) 及び (30) から

$$-i + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{v^2}{C^2 h} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1+\eta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots(51) \text{運動方程式}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hv) = 0 \dots\dots\dots(52) \text{連続方程式}$$

等流の状態の時の水深及び速度を h_0, v_0 とし、次の様に書く。

$$h = h_0 + h_1, \quad v = v_0 + v_1$$

$$\therefore \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial x}$$

上の假定によつて h_1 及び v_1 は夫々 h_0 及び v_0 に比して小さい量であるから、(51) を書き直せば

$$-i + \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{v^2}{C^2(h_0 + h_1)} + \frac{\alpha v}{g} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1+\eta}{g} \frac{\partial v_1}{\partial t} = 0$$

更に $\frac{v^2}{C^2(h_0 + h_1)} \doteq \frac{v_0^2}{C^2 h_0} = i$ とすれば $v_0 = (\sqrt{gh_0})$ 等流

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\alpha v_0}{g} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1+\eta}{g} \frac{\partial v_1}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots(53)$$

(52) を書き直せば

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + v_0 \frac{\partial h_1}{\partial x} + h_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(54)$$

(53) と (54) から v_1 を消去すれば

$$\left[1 - \frac{\alpha v_0^2}{gh_0} \right] \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - (\alpha + 1 + \eta) \frac{v_0}{gh_0} \frac{\partial^2 h_1}{\partial x \partial t} - \frac{1+\eta}{gh_0} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots(55)$$

波動

(55) は F を任意の形の函数として、 $h_1 = F(x - \omega t)$ の形の一般解を有する。故に之を (55) に代入すれば

$$\frac{1+\eta}{gh_0} \omega^2 - (\alpha + 1 + \eta) \frac{v_0}{gh_0} \omega - \left(1 - \frac{\alpha v_0^2}{gh_0} \right) = 0$$

$\frac{\alpha + 1 + \eta}{1 + \eta} \doteq 2$ であるから、之を 2 と見做して上の方程式を解けば

$$\left. \begin{matrix} \alpha = 1.06 \\ \eta = 0.02 \end{matrix} \right\} \omega = v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + \frac{gh_0 - \alpha v_0^2}{1 + \eta}} \dots\dots\dots(56)$$

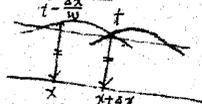
又は $1 + \eta - \alpha = 0$ とし、分母の η を省略すれば

ω : 表面波速度

$$\omega = v_0 \pm \sqrt{gh_0} \dots\dots\dots(57)$$

h_1 が $F(x - \omega t)$ の形で表される時の $x + \Delta x$ に於ける h_1 の値は

$$F(x + \Delta x - \omega t) = F\left[x - \omega \left(t - \frac{\Delta x}{\omega}\right)\right]$$



即ち $x + \Delta x$ に於ける時間 t の水位は x に於ける時間 $t - \frac{\Delta x}{\omega}$ の水位に等しい。故に同一の水位が ω の速度で x 方向に傳播してゐる事になる。然るに ω は h_1 に無関係であるから、波全體が一定の傳播速度²¹⁾ ω を以て進む事になる。(57) の ω の中で $v_0 + \sqrt{gh_0}$ は流れの方向に波の傳播する場合であり、 $v_0 - \sqrt{gh_0}$ は流れと反對の方向に波の傳播する場合である。

21) Propagation velocity.

等流が常流状態になる時は

$$i < g/\alpha C^2 \quad \therefore \alpha v^2 < gh_0$$

であるから (56) により

$$\omega_1 = v_0 + \sqrt{gh_0} > 2v_0$$

$$\omega_2 = v_0 - \sqrt{gh_0} < 0 \quad \text{上流へ進み得ず}$$

即ち常流状態の時には下流に向ふ波は $2v_0$ 以上の速度で進み、上流に向ふ波も或速度を以て上流に進んで行く。

然るに等流が射流状態になる様な勾配の時は

$$\omega_1 = v_0 + \sqrt{g_0 h} < 2v_0$$

$$\omega_2 = v_0 - \sqrt{g_0 h} > 0 \quad \text{上流へ進み得ず}$$

即ち射流状態の時には下流に向ふ流は $2v_0$ 以下の速度で進み、上流に向ふ波は水分子に相対的には上流に傳播しても、実際には廻行する事が出来ない。

流れのない水面を低い波が進む時は、その傳播速度は (57) から

$$\omega = \sqrt{gh_0} \dots\dots\dots(58)$$

で與へられるが、Scott-Russel は高さ h_1 の唯一つの波が進行する場合を觀測して次の法則を與へた。高波の場合

$$\omega = \sqrt{g(h_0 + h_1)} \dots\dots\dots(59) \quad \text{*体積同率等$$

又 Boussinesq は (58) を波高の稍々大きい場合に擴張して次の式を與へた。

$$\omega = \sqrt{gh_0} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{h_1}{h_0} + \frac{h_0^2}{6h_1} \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} \right) \dots\dots\dots(60)$$

10. 段 波²²⁾

堰堤の崩壊や水門の急な開放の爲に河川の上流から急に大きな水量が流下する時は前面が段状になつた波の形で傳播する。平時及び段波の時の水流の斷面積、平均流速、流量、水面幅及び水深を夫々に a, v, q, b, h 及び $A,$

22) Hydraulic bore.

V, Q, B, H とし、波の傳播速度を ω とすれば

$$Q = AV = \left\{ a + \frac{(b+B)}{2} (H-h) \right\} V \dots\dots\dots(61)$$

圖-106 の斷面 I から單位時間に Q の水量が入り、II からはその間に q の水量が出るから、その差だけ段波の波頭は進む。従つて

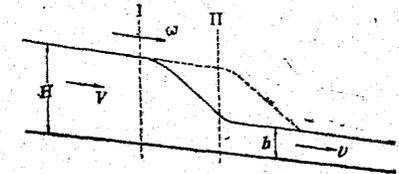


圖-106

$$Q - q = \omega \frac{(b+B)}{2} (H-h) \dots\dots\dots(62)$$

(61) と (62) から Q を消去し、 $H-h = \zeta, \frac{1}{2}(b+B) = B_1$ と書けば

$$V = \frac{q + B_1 \zeta \omega}{a + B_1 \zeta} \dots\dots\dots(63)$$

次に斷面 I と II の壓力差により單位時間に力積の變化を考へる。この壓力差によつて圖-107 の P の部分が速度 v から V に變ずるのであるから、力積の方程式は近似的に

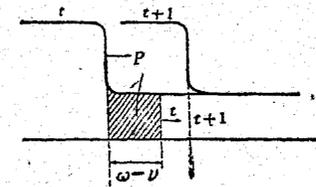


圖-107

$$w_0 \frac{b}{2} (h + \zeta)^2 - w_0 \frac{b \zeta^2}{2} = \frac{w_0}{g} a (\omega - v) (V - v)$$

$$V = v + \frac{g \zeta}{\omega - v} \left(1 + \frac{\zeta}{2h} \right) \dots\dots\dots(64)$$

(63) と (64) から V を消去すれば ω を與へる式が得られる

$$\frac{q + B_1 \zeta \omega}{a + B_1 \zeta} = v + \frac{g \zeta}{\omega - v} \left(1 + \frac{\zeta}{2h} \right)$$

$$\therefore \omega^2 - 2v\omega + v^2 - g \left(1 + \frac{\zeta}{2h} \right) \left(\frac{a}{B_1} + \zeta \right) = 0 \dots\dots\dots(65)$$

ω 又は V に比して v が非常に小さい時には

$$\omega^2 = \frac{g}{B_1} (a + B_1 \zeta) \left(1 + \frac{\zeta}{2h}\right) \dots\dots\dots (66)$$

水門を急に閉じた場合の様子に段波が上流に向つて傳播する場合には、 ω 及び V は負になり (65) の第 2 項の符號が正になる。然し v が非常に小さければ ω は (66) の負の根を取ればよい。

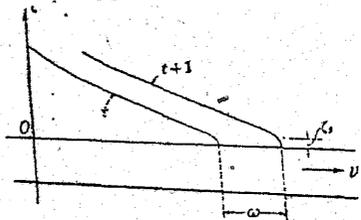


圖-118

之等の計算では段波の高さは不變としたが、實際には傳播と共に高さは減少して行く。Forchheimer は次の様にして段波の形狀を定める事を試みた。例へば上流から傳はる段波ならば水門等の位置を原點とし其

處の流量を Q とすれば、連続性の方程式は

$$Q = \omega B_1 \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \int_0^\infty B dx + q \dots\dots\dots (67)$$

水門を急に開放した様な瞬間に $x = 0$ に於て $Q = Q_0$, $\omega = \omega_0$, $\zeta = \zeta_0$ とすれば

$$Q_0 = \omega_0 B_1 \zeta_0 + q, \quad \therefore \zeta_0 = \frac{Q_0 - q}{\omega_0 B_1} \dots\dots\dots (68)$$

流速公式に Forchheimer の公式を用ひ、徑深を R とすれば

$$V = \frac{R^{0.7}}{n} \sqrt{i - \frac{\partial \zeta}{\partial x}}$$

波頭に於ける諸量は添字 s を付けて表す事とすれば

$$V_s = \frac{R_s^{0.7}}{n} \sqrt{i - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_s}$$

然るに波頭の流量は $Q_s = \omega B_1 \zeta_s + q$ であるから

$$V_s = \frac{Q_s}{A_s} = \frac{\omega B_1 \zeta_s + q}{A_s}$$

$$\therefore \left(\frac{\omega B_1 \zeta_s + q}{A_s}\right)^2 = \frac{R_s^{1.4}}{n^2} \left\{i - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_s\right\}$$

今近似的に波頭に對して $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_s$, ζ_s の代りに夫々 $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$, ζ を用ひれば

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = i - \left(\frac{\omega B_1 n}{A_s R_s^{0.7}}\right)^2 \left(\zeta + \frac{q}{\omega B_1}\right)^2$$

$\frac{A_s R_s^{0.7}}{\omega B_1 n} = f$ と置いて上式を更に近似的に書き改めれば

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{1}{f^2} \left\{ \left(\zeta + \frac{q}{\omega B_1}\right)^2 - f^2 i \right\}$$

之を積分して $x = x_1$ にて $\zeta = \zeta_1$ とすれば、波頭の高さが ζ_1 となるべき位置が定まる。即ち

$$x_1 = \frac{f}{2\sqrt{i}} \log \frac{\left(\zeta_1 + \frac{q}{\omega B_1} + f\sqrt{i}\right)\left(\zeta_0 + \frac{q}{\omega B_1} - f\sqrt{i}\right)}{\left(\zeta_0 + \frac{q}{\omega B_1} - f\sqrt{i}\right)\left(\zeta_1 + \frac{q}{\omega B_1} + f\sqrt{i}\right)} \dots\dots (69)$$

〔練習問題〕

- 問題 1 を各断面が水面幅 b , b_1 , b_2 の拋物線形断面として計算せよ。
- 圖-109 の様な派川を有する河川に $700 \text{ m}^3/\text{秒}$ の流量が流下する時に、本川及び派川に何程づの流量が流れるか。但し分岐點と河口の間の河床の高さの差は 2 m 、河口の水深は 5.5 m 、粗度 n は 0.032 で、
 $L_1 = 2 \text{ km}$, $L_2 = 2.4 \text{ km}$,
 $b_1 = 180 \text{ m}$, $b_2 = 70 \text{ m}$,
 $b = 200 \text{ m}$.
- 或河川で 2.5 km の彎曲部を Short cut して長さを 1 km とした。初めの河床勾配を $1/1,300$ 、水路幅は常に 140 m 、粗度 n は 0.030 として、流量 $1,000 \text{ m}^3/\text{秒}$ の時の水位を計算せよ。

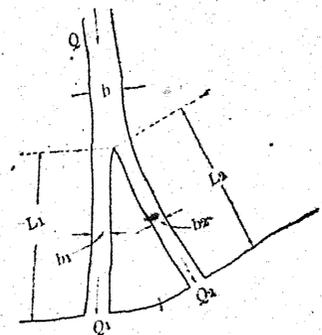


圖-109

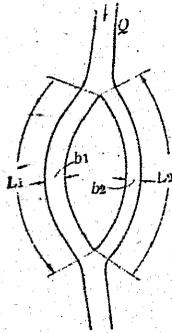


圖-110

4. 圖-110 の様な河川で

$$Q = 1,500 \text{ m}^3/\text{秒}, \quad b_1 = 150 \text{ m}, \quad b_2 = 110 \text{ m},$$

$$L_1 = 1,400 \text{ m}, \quad L_2 = 1,900 \text{ m}, \quad n = 0.032$$

分岐点と合流点の河床の高さの差が 1.8 m, 合流点の水深を 6 m とする時に, 兩川への流量の配分比を計算せよ。

5. 水路幅が $b = (50 + 0.1x)$ m で與へられる河川で, $Q = 1,000 \text{ m}^3/\text{秒}$, $i = 1/1,200$, $C = 50$ で河口 ($x = 1,000$ m) で, 水深が 7 m の時に $x = 0$ から $x = 1,000$ m の間の水位を計算せよ。

6. $i = 1/500$, $Q_0 = 20 \text{ m}^3/\text{秒}$, $b = 10$ m, $n = 0.016$ の數値が與へられた水路で $x = 0$ から $x = 50$ m の間に $q = 0.3 \text{ m}^3/\text{秒}$ の水が横から流入する時の水面の縦斷曲線を計算せよ。

7. 高さ 2 m, $h_1 = 1.5$ m, $h_2 = 1.1$ m の潜堰で $Q = 45 \text{ m}^3/\text{秒}$ の水を溢流させるには堰の長さを何程にすればよいか。

8. 圖-105 の様な水門で $h_1 = 3.5$ m, $h = 0.9$ m, $C_a = 0.9$, $b = 10$ m なる時に, h_2 が何程になれば圖の (b) の状態になるか。又 (a) 及び (b) の状態に於ける流量を計算せよ。

9. 高さ 60 m の堰堤から 1.2 m の溢流水深を以て水が流下する時, 堰堤の下で直ちに常流に變化させるには水叩きの水深を何程にすればよいか。但し摩擦抵抗は總べて無視する。

10. 幅 30 m, 底勾配 1/800 の水路に $20 \text{ m}^3/\text{秒}$ の流量が流れてゐた時に, その上流に水深 10 m を堰上げてゐた堰堤が俄に崩壊したものととして, 生じた段波が 5 km の下流に達するに要する時間を推算せよ。但し各々の兩岸の勾配は 45° とする。