第 3 章 管　　路

1. 断面積の變化による管内のヘッドの損失[1]

管路とは水が暗渠の全断面を充たして流れる場合であり，自由水面を有する開水路に比して断面積の急變や水路の屈曲等によるエネルギーの損失が大きい。之等のエネルギーの損失，即ちヘッドの損失は多くは局部的な渦を生じてその爲に運動エネルギーの一部が消費されるのであつて，一般に $\zeta\frac{v^2}{2g}$ (ζ は係數) の形で表はされる。

断面積の變化の中で最も大きい損失を伴なふのは断面積の急激な擴大である。圖-60 の様に断面積 a の管路から急に断面積 A の大きい管路に移つた場合を考へ，小管中の断面 I に於ける速度及び壓力を v 及び p_1，大管中で流水断面が管全體に擴がつた處の断面 II に於ける速度及び壓力を V 及び p_2 とし，この間に失はれるヘッドの損失を h_e とすれば，兩断面の間に Bernoulli の定理を適用する事により

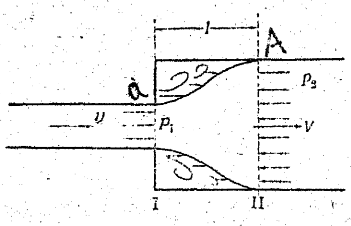

圖-60

$$\frac{p_1}{w_0}+\frac{v^2}{2g}=\frac{p_2}{w_0}+\frac{V^2}{2g}+h_e$$

管断面積が急に擴がつたのである故，兩断面の距離 l は比較的小さく，従つてその間の摩擦損失は無視してよい。即ち h_e は断面積急變による損失量を表してゐると考へられる。尚管が水平に置かれてゐると考へてゐるが，之も多少傾いてゐても l が小さいから高さの差は他の量に比して省略してもよい。

断面 I と II の間の渦を除いた流水部に働く水壓は略 p_1A-p_2A で

1) Loss of head.

あつて，この部分の水の單位時間に於ける運動量の變化は $\frac{w_0}{g}QV-\frac{w_0}{g}Qv$ であるから

$$p_1-p_2=\frac{w_0}{g}\frac{Q}{A}(V-v)=\frac{w_0}{g}V(V-v)$$

但し Q は管の流量である。之を上に求めた關係に代入すればヘッドの損失 h_e は次の形で表される。

$$h_e=\frac{1}{w_0}(p_1-p_2)+\frac{1}{2g}(v^2-V^2)$$

$$=\frac{1}{2g}[2V(V-v)+v^2-V^2]$$

loss of head.

$$\therefore\quad h_e=\frac{1}{2g}(v-V)^2 \quad \text{又は} \quad h_e=\frac{v^2}{2g}\left(1-\frac{a}{A}\right)^2 \quad \cdots\cdots(1)$$

従つて小さい管から非常に大きい水槽内に流出する場合には運動エネルギーの全部が消費される事になる。尚 (1) は實驗にも比較的好く一致する。

断面積が急に縮少する時には 圖-61 の様に流水断面積は A から一旦 a よりも小さい a_0 まで縮少し，更に之から a まで擴大する。断面の變化する處では多少の渦が起るが，速度 V が小さい故渦の大きさも回轉速度も急擴大の場合に比して非常に小さい。従つて損失の大部分は流水断面積が a_0 から a に擴がる爲のものであつて，大體

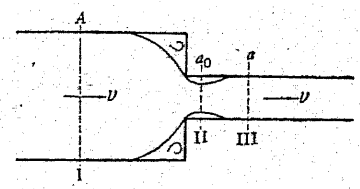

圖-61

$$h_e=\frac{v^2}{2g}\left(\frac{a}{a_0}-1\right)^2=f_e\frac{v^2}{2g}\quad\cdots\cdots(2)$$

の形となる。f_e は入口損失[2]の係數と稱せられ，a_0 の大きさに關係する故 $\frac{a}{A}$ の比及び管取付部の形によつてその値が變化する。

A が無限大の場合，即ち水槽から管に流入する時は，a_0 は管の入口の水

2) Entaance loss.

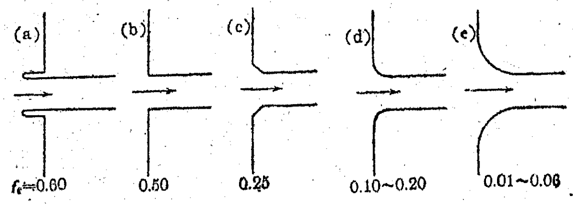

圖-62

深に關係するが，之を大體一定と假定すれば f_e は 圖-62 の様な値になる。

又内徑 D の管から内徑 d の小管に移る場合で，取付部の形は 圖-62 の (b) の様な狀態に對して次の實驗公式がある。

$$h_e = 0{\cdot}7\left\{1-\left(\frac{d}{D}\right)^2\right\}\frac{v^2}{2g} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

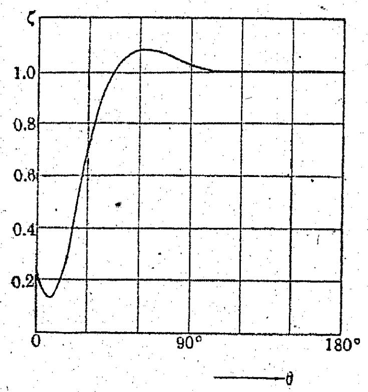

圖-63

圖-63 の様に斷面積の擴大が緩慢な場合にはヘッドの損失は急變化の場合に比して遙かに小さく，

$$h_e = \zeta\frac{(v^2-V^2)}{2g}$$

の形で表した時に，係數 ζ の値は圖-63 の圖表の様になつて，$\theta = 60°$ 位から上では殆ど $\zeta = 1$ と見做して差支へない。

斷面積の縮少が緩慢な場合は之に伴なふヘッドの損失は極めて小さい。

〔問題 1〕 内徑 5 cm の鉛直管の一部が内徑 10 cm の管になつてゐる。この管に流量 0·015 m³/秒 を流して，10 cm の徑の部分の前後で壓力を測定して上端側で $\frac{p_1}{w_0} = 1{\cdot}25$ m，下端側で $\frac{p_2}{w_0} = 0{\cdot}90$ m を得

た。壓力を測つた點の距離を 1·5m，水は上から下に流れるものとして，徑が 10cm から 5cm に移る處でのヘッドの損失の係數 $\zeta\left(h_e = \zeta\frac{(v^2-V^2)}{2g}\right)$ を求めよ。但し管徑擴大の損失は (1) で與へる。

(解) 内徑 5 cm の管内の速度 v は

$$v = \frac{4\times 0{\cdot}015}{\pi\times 0{\cdot}05^2} = 7{\cdot}65\ \text{m/秒}.$$

壓力を測つた 2 點の間で Bernoulli の定理を適用すれば

$$\frac{p_1}{w_0} + 1{\cdot}50 + \frac{v^2}{2g} = \frac{p_2}{w_0} + \frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g}\left[1-\left(\frac{5}{10}\right)^2\right]^2 + \zeta\frac{(v^2-V^2)}{2g}$$

V は内徑 10 cm の管内の速度であるから $v = \left(\frac{10}{5}\right)^2 V = 4V$ となる。

從つて上の式に數値を代入すれば

$$1{\cdot}50 + (1{\cdot}25 - 0{\cdot}90) = \frac{7{\cdot}65^2}{2\times 9{\cdot}8}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \zeta\frac{7{\cdot}65^2}{2\times 9{\cdot}8}\left(1-\frac{1}{16}\right)$$

$$\therefore\quad \zeta = \left(\frac{1{\cdot}85\times 2\times 9{\cdot}8}{7{\cdot}65^2} - \frac{9}{16}\right)\times\frac{16}{15}$$

$$= 0{\cdot}058\times\frac{16}{15} = 0{\cdot}062$$

2. 彎曲その他の原因によるヘッドの損失

管が彎曲する時にも管内には渦を生じて運動エネルギーの一部は之に消費される。管が 90° 曲つてゐる時のヘッドの損失を

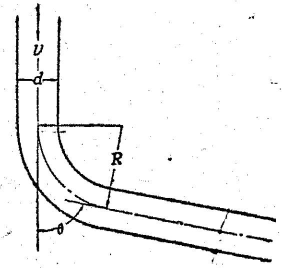

圖-64

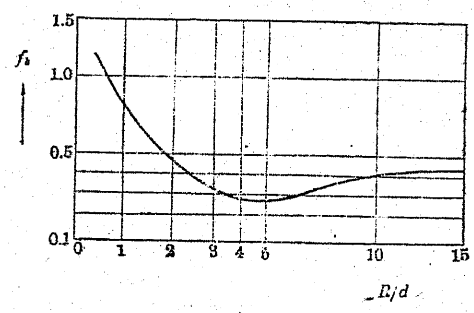

圖-65

$$h_e = f_b \frac{v^2}{2g}$$

で表せば，曲りの曲率半徑 R と管內徑 d の比と係數 f_b との關係は，色々な實驗を平均すれば大體 圖-65 の程度にある。

曲りの角度（圖-64 の θ）が 90° 以外の時の f_b は 90° の時の値に或係數 m を乘ずる。その値は大體次に示す程度である。

θ	30°	60°	120°	150°
m	0·50	0·85	1·10	1·25

管の分岐によつて起るヘッドの損失は彎曲による損失として計算すればよい。

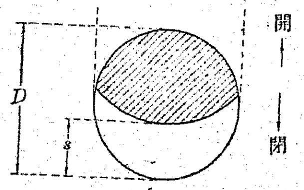

圖-66

管內にある瓣[3]による損失は瓣の形によつて異なる。

$$h_e = f_v \frac{v^2}{2g}$$

とした時の f_v の値は 圖-66 の様な仕切瓣に就いての實驗によれば，v は損失の爲に低下した速度を取つて

$D = 40$ mm の管に對しては

$\frac{S}{D}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$
f_v	97·8	17·0	5·52	2·06	0·81	0·26	0·07

$D = 762$ mm の管に對しては

$\frac{S}{D}$	0·05	0·10	0·20	0·30	0·40	0·50	0·60	0·70	0·80
f_v	333	111	23	9·4	5·2	3·1	1·9	1·13	0·60

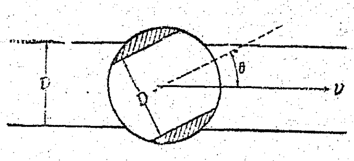

圖-67

圖-67 の様な形の瓣に於ては

$\theta°$	10	20	30	40	50	60	82°7′30″
f_v	0·29	1·56	5·47	17·3	52·6	206	∞

3) Valve.

沖　水力学
物部　水理学
土木工学ポケットブック

3. 普通の管路の定流

2 地點間を連絡する管路で途中に分岐又は管徑の變化等のない場合には，圖-68 の様に兩地點間の落差を H とすれば，この H だけのヘッド卽ちエネルギーが，管內での摩擦抵抗，入口及び出口に於ける損失，途中の曲りによる損失等によつて總べて消費されるのである。卽ち管內の速度 v はこの H が丁度消費される様な大きさになるのである。但し 圖-68 の乙水槽が小さくてこの中の運動エネルギーが零と考へられない時は H とこのエネルギーに相當するヘッドの差だけが消費される。

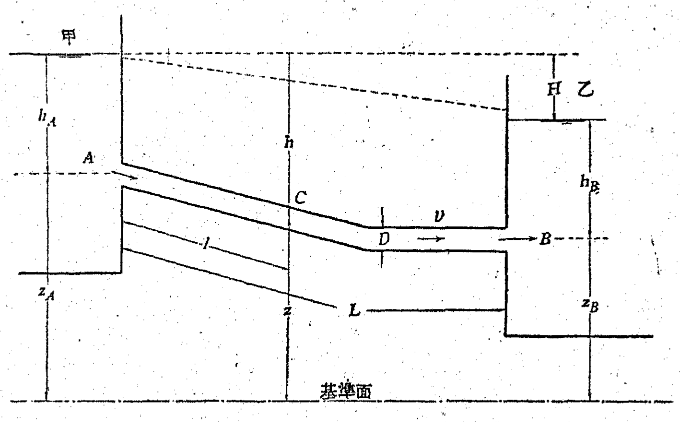

圖-68

圖-68 の A と B の間で Bernoulli の定理を適用し，B に於ける速度を零とすれば

$$z_A + h_A = \overbrace{f_e \frac{v^2}{2g} + f_b \frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} + \frac{fL}{D}\frac{v^2}{2g}}^{\text{損失}} + z_B + h_B$$

A=於ケル，曲リニヨル，B=於ケル，摩擦

$$\therefore \quad z_A + h_A - z_B - h_B = H = \left(1 + f_e + f_b + \frac{fL}{D}\right)\frac{v^2}{2g}$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{2gH}{1 + f_e + f_b + f\dfrac{L}{D}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

之は管内の速度を與へる式であつて，水槽内に h' なる速度ヘッドがあれば H の代りに $H-h'$ を用ひればよい。又摩擦損失の係數 $f(=4f')$ は第 2 章中の公式によつてその値を定める。

流量 Q，落差 H 及び長さ L が與へられて，必要な管徑 D を定めるは

$$D=\sqrt{\frac{Q}{\pi}}\sqrt[4]{\frac{1+f_e+f_b+f\dfrac{L}{D}}{gH}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

〔問題 2〕 $H=3\ \mathrm{m}$，$f_e=0{\cdot}3$，$f_b=0{\cdot}1$，$D=1{\cdot}4\ \mathrm{m}$ を與へて長さ 10 m 及び 100 m の鑄鐵管内の速度を比較せよ。

（解） 先づ係數 f の値を定める必要がある。Mises，Lang 等の公式では v を假定する必要があるから，簡單に Manning の公式を用ひる事とすれば，$n=0{\cdot}012$ として

$$C=\frac{1}{n}R^{\frac{1}{6}}=\frac{1}{0{\cdot}012}\left(\frac{1{\cdot}4}{4}\right)^{\frac{1}{6}}=\frac{1}{0{\cdot}012}\times 0{\cdot}35^{\frac{1}{6}}$$

$$f=\frac{8g}{C^2}=8\times 9{\cdot}8\times\frac{0{\cdot}012^2}{0{\cdot}35^{\frac{1}{3}}}=0{\cdot}0160$$

$L=10\ \mathrm{m}$ ならば $\quad f\dfrac{L}{D}=0{\cdot}142$

$L=100\ \mathrm{m}$ ならば $\quad f\dfrac{L}{D}=1{\cdot}42$

$L=10\ \mathrm{m}$ の時の速度は

$$v=\sqrt{\frac{2\times 9{\cdot}8\times 3}{\underbrace{1+0{\cdot}3+0{\cdot}1}_{其ノ他}+\underbrace{0{\cdot}142}_{摩擦}}}=6{\cdot}18\ \mathrm{m/秒}$$

$L=100\ \mathrm{m}$ の時の速度は

$$v=\sqrt{\frac{2\times 9{\cdot}8\times 3}{\underbrace{1+0{\cdot}3+0{\cdot}1}_{其ノ他}+\underbrace{1{\cdot}42}_{摩擦}}}=4{\cdot}57\ \mathrm{m/秒}$$

管の長さ L が更に長くなれば $1+f_e+f_b$ は $f\dfrac{L}{D}$ に對して省略出來

$\dfrac{L}{D}>500 \qquad v=C\sqrt{RI}$

$\dfrac{L}{D}<500 \qquad v=\sqrt{\quad}$

る様になる。

水槽からホースによつて水を流す時には，水槽水面とホースの先の高さの差を H，ホースの長さ及び徑を L 及び d とすれば，ホースの先では壓力は零と考へられるが，噴出する水は

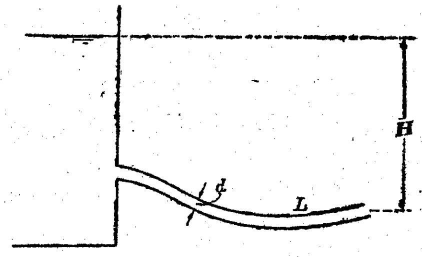

圖-69

$\dfrac{v^2}{2g}$ の速度ヘッドを持つてゐるから，出口の損失 $\dfrac{v^2}{2g}$ の代りにこの速度ヘッドの項が加はつて，結局速度を與へる式は (4) と同じになる。

4. 管内の壓力と動水勾配[4)]

圖-68 の管内の 1 點 C に於ける水壓を求めるには，之を p，甲水槽水面から C までの高さの差を h，管の入口から C までの長さを l とすれば，A と C の間に Bernoulli の定理を適用する事により

$$\frac{v^2}{2g}+z+\frac{p}{w_0}=z_A+h_A-\left(f_e+f_b+\frac{fl}{D}\right)\frac{v^2}{2g} \qquad \cdots\cdots\cdots(6)$$

但し $f_b\dfrac{v^2}{2g}$ は入口から C までの間にある曲りの爲の損失である。又 $z_A+h_A-z=h$ であるから

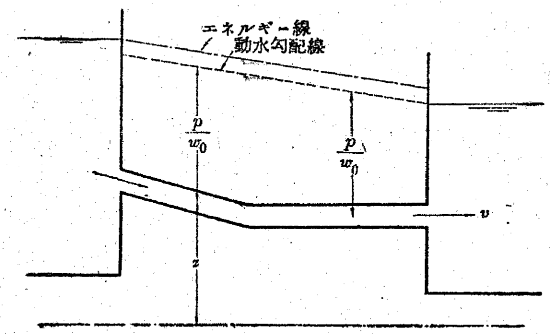

圖-70

4) Hydraulic gradient.

$$p = w_0\left[h - \left(f_e + f_b + \frac{fl}{D} + 1\right)\frac{v^2}{2g}\right] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

圖-70 の點線は (6) によつて興へられる $z + \frac{p}{w_0}$ の大きさを示すもので，この線の傾きは $-\frac{\partial}{\partial l}\left(z + \frac{p}{w_0}\right)$ を表す。5) 之を動水勾配と稱し，開水路の流れに於ける水面勾配に相當する量である。尙圖中に鎖線で示したエネルギー線は一様管では動水勾配線以上 $\frac{v^2}{2g}$ の處にある。又出口の處で失ふエネルギーは $\frac{v^2}{2g}$ であるから，此處では動水勾配線は丁度水槽水面の高さに一致する。

5. 分岐管路

水槽甲から出た管が途中で分岐して水槽乙及び丙に入つてゐる場合には，圖-71 の様に甲と乙及び丙との間の落差を H_1 及び H_2 とし，更に動水勾配

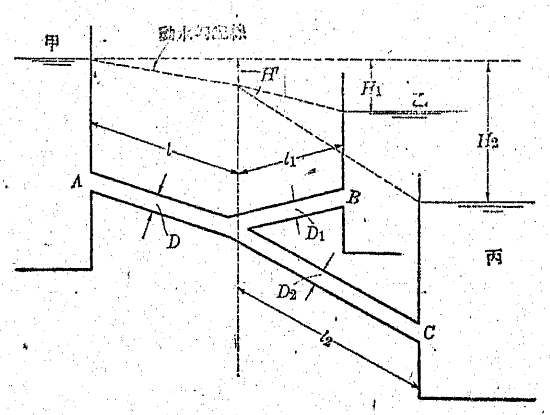

圖-71

線を畫がいた時に分岐點 E に於ける動水勾配線の高さと甲水槽水面の高さとの差を H' とする。管の長さ及び內徑は分岐するまでを l, D，分岐後を夫々 l_1, D_1 及び l_2, D_2 とする。

5) 嚴密には管を直線に引伸ばした圖に就いて畫がかねばならない。

$\left(\frac{l}{D} > 500\right)$

管の長さが相當に長くなれば問題2で述べた樣に $1 + f_e + f_b + f\frac{L}{D}$ の中で $1 + f_e + f_b$ は $f\frac{L}{D}$ に比して省略出來る樣になる。故に此處ではヘッドの損失は摩擦によるもの〻みを考へる事とする。從つて分岐するまでの管 AE に對しては

$$H' = f\frac{l}{D}\frac{v^2}{2g}$$

分岐後の管 EB 及び EC に對しては，之等の管內の流速を夫々 v_1 及び v_2 とすれば

$$H_1 - H' = f_1\frac{l_1}{D_1}\frac{v_1^2}{2g}$$

$$H_2 - H' = f_2\frac{l_2}{D_2}\frac{v_2^2}{2g}$$

但し f_1, f_2 は各管に對する摩擦抵抗の係數である。之等の3式から H' を消去すれば

(摩擦ニヨル損失以外ハ省略シタ場合)

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= f\frac{l}{D}\frac{v^2}{2g} + f_1\frac{l_1}{D_1}\frac{v_1^2}{2g} = \frac{8}{g\pi^2}\left(f\frac{lQ^2}{D^5} + f_1\frac{l_1Q_1^2}{D_1^5}\right) \\ H_2 &= f\frac{l}{D}\frac{v^2}{2g} + f_2\frac{l_2}{D_2}\frac{v_2^2}{2g} = \frac{8}{g\pi^2}\left(f\frac{lQ^2}{D^5} + f_2\frac{l_2Q_2^2}{D_2^5}\right) \end{aligned}\right\} \cdots(8)$$

但し Q, Q_1, Q_2 は各管の流量であるから，定常流の狀態にある爲には $Q = Q_1 + Q_2$ となる必要がある。故に H_1 及び H_2 を知つて流量 Q を求めるには之等から Q_1, Q_2 を消去すればよい。

$$Q = \sqrt{\frac{D_1^5}{f_1l_1}\left(\frac{g\pi^2}{8}H_1 - f\frac{lQ^2}{D^5}\right)} + \sqrt{\frac{D_2^5}{f_2l_2}\left(\frac{g\pi^2}{8}H_2 - f\frac{lQ^2}{D^5}\right)} \cdots(9)$$

之から Q を計算するには試算法によらねばならない。Q を知れば (8) 式から Q_1, Q_2 も決定される。又 Q, Q_1, Q_2 を知つて D, D_1, D_2 を決定する事も (8) 式から容易に行はれる。入口，彎曲及び出口のヘッドの損失を省略しない場合にも同樣の方法で計算する事が出來る。

分岐點が2箇所以上ある場合，或は管が合流してゐる場合等も同樣の考へ

によつて計算すればよい。

6. サイフォン[5)]

高低 2 水槽を連結する管路が途中で動水勾配線以上の高さまで昇るものをサイフォンと言ひ，水を高い處を越して送る場合に用ひられる。

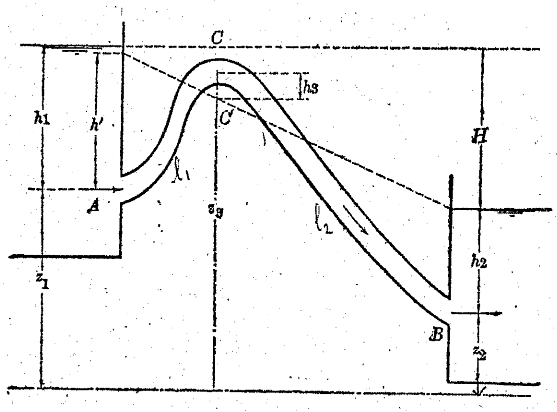

圖-72

圖-72 の様に水平基準面から管の中心までの高さを z，管の中心から動水勾配線までの高さを h とすれば，入口 A の右側では

$$h' = h_1 - f_e \frac{v^2}{2g}$$

管の最高點 C に於ける壓力は $-w_0h_3$ 即ち大氣壓 p_0 以下 w_0h_3 であるが，水壓は負になる事は出來ないから h_3 は $\frac{p_0}{w_0}$ (大気圧) よりも小さい事が必要であつて，h_3 が之よりも大きくなればサイフォンの作用は起らない。

兩水槽の落差を H，管 AC 及び CB の長さを l_1 及び l_2 とすれば

$$H = (h_1 + z_1) - (h_2 + z_2)$$

各斷面の間に Bernoulli の定理を適用すれば

6) Siphon.

$$h_1 + z_1 - f_e\frac{v^2}{2g} = z_3 - h_3 + f\frac{l_1}{D}\frac{v^2}{2g} + f_{b1}\frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g}$$

$$= z_2 + h_2 + \frac{v^2}{2g} + f\frac{l_1 + l_2}{D}\frac{v^2}{2g} + (f_{b1} + f_{b2})\frac{v^2}{2g}$$

f_{b1}, f_{b2} の AC 及び BC の間の彎曲によるヘッドの損失の係數である。之から流速及び流量 Q は次の様な形で與へられる。

$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2gH}{1 + f_e + f\frac{l_1 + l_2}{D} + f_{b1} + f_{b2}}} \\ Q &= \frac{\pi D^2}{4} v \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(10)$$

尙 h_3 の大きさは

$$h_3 = \underbrace{-(h_1 + z_1) + z_3}_{h_s} + \left(f_e + f_{b1} + f\frac{l_1}{D}\right)\frac{v^2}{2g}$$

之から計算した h_3 の値が $\frac{p_0}{w_0}$ よりも或程度小さくなつてゐる事が必要である。故に $z_3 - (h_1 + z_1) = h_s$ と書けば，速度 v の達し得る最大値は

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2g\left(\frac{p_0}{w_0} - h_s\right)}{f_e + f_{b1} + f\frac{l_1}{D}}} \qquad \cdots\cdots(11)$$

即ちサイフォンでは落差 H が $v < v_{\max}$ を滿足させる範圍内にある事

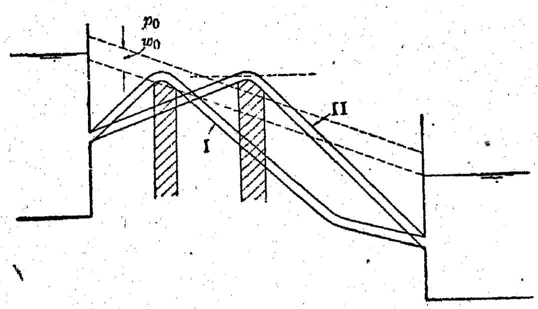

圖-73

が必要であつて，之以上に落差を大きくすれば矢張りサイフォンの機能がなくなるのである。從つてサイフォンの計算では先づ $h_{13}< \frac{p_0}{w_0}$ なる事を確め，v_{max} を計算して，次に普通管と同樣にして (10) から速度 v を計算する。この v の値が v_{max} よりも或程度小さければよいが，その差が餘り小さいか或は v_{max} より大きい時はこの管は水を流し得ない事になる。尚圖-73 の樣に同じ落差で，同じ高さの場所を越す時にも，管の形によつてサイフォンの機能のある場合とない場合がある。

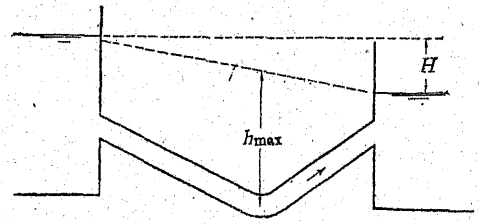

圖-74

谷又は河床の下を通る管路は圖-74 の樣な倒サイフォン[7]が用ひられる。之に對する流速，流量の計算は普通の管の場合と全く同じである。唯圖の h_{max} に相當する樣な大きな壓力が管內に生ずる事を注意すればよい。

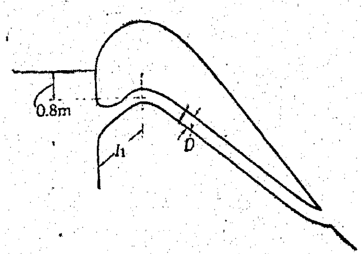

圖-75

〔問題 3〕 圖-75 の樣なサイフォンでは v_{max} の値は何程になるか。但し $l_1 = 10$ m，$D = 1{\cdot}2$ m とする。

（解） h_s は $-0{\cdot}8$ m である。又 $f_e = 0{\cdot}05$ とし彎曲の影響を無視すれば，摩擦抵抗には Manning の公式を用ひて

$$C = \frac{1}{n}R^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{0{\cdot}014}\left(\frac{1{\cdot}2}{4}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{0{\cdot}014} \times 0{\cdot}3^{\frac{1}{6}}$$

$$f = \frac{8g}{C^2} = 8 \times 9{\cdot}8 \times \frac{0{\cdot}014^2}{0{\cdot}3^{\frac{1}{3}}} = 0{\cdot}0229$$

7) Inverted siphon

餘裕を見て $p_0 = 700$ mm に取れば

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2\times 9{\cdot}8(0{\cdot}7\times 13{\cdot}5+0{\cdot}8)}{0{\cdot}05+0{\cdot}0229\times\frac{10}{1{\cdot}2}}} = 28{\cdot}9\,\text{m/秒}$$

7. 摩擦抵抗のない管內の水の振動

管路の斷面積を一樣とすれば不定流の問題でも斷面積の時間的な變化がなく，常に壓力と速度のみの問題になる。從つて運動及び連續性の方程式は第2章の (27), (29) から

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(z+\frac{p}{w_0}\right)+f_1v^2+\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{1+\eta}{g}\frac{\partial v}{\partial t}=0 \cdots\cdots\cdots(12)$$

$$\frac{\partial(Av)}{\partial x}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

摩擦抵抗は無視してゐるから f_1v^2 は零である。

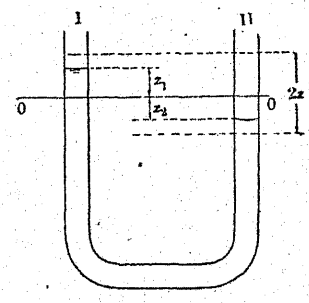

圖-76

先づ圖-76 の樣な等斷面の U 字管內の水の振動を考へる。或瞬間 $t=0$ に於て兩端の水面に落差 $2Z$ を與へれば管內の水は振動を起す。(13) から

$$Av = F_1(t) \quad 又は \quad v = F(t)$$

即ち v は t のみの函數であるから (12) を書き直せば

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(z+\frac{p}{w_0}\right)+\frac{1+\eta}{g}\frac{dv}{dt}=0$$

但し x は管軸に沿つて測つてゐる。而して管內の水量は一定である故，管軸に沿つて測つた兩水面の距離は一定となる。故に之を l を以て表し，兩水面の基準水面からの上昇を夫々 z_1 及び z_2 とすれば，管內の動水勾配は

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(z+\frac{p}{w_0}\right)=\frac{z_1-z_2}{l}$$

即ち I の水面が II よりも高い時に動水勾配を正としてゐる。從つて I

から II に向ふ速度を正とすれば

$$v=-\frac{dz_1}{dt}=\frac{dz_2}{dt}$$

$$\therefore \quad 2v=-\frac{d}{dt}(z_1-z_2)$$

之等の關係を上に求めた基本式に代入すれば

$$-\frac{z_1-z_2}{l}-\frac{1+\eta}{2g}\frac{d^2}{dt^2}(z_1-z_2)=0$$

$$\therefore \quad \frac{d^2}{dt^2}(z_1-z_2)=-\frac{2g}{(1+\eta)l}(z_1-z_2)$$

$t=0$ に於ては $z_1-z_2=2Z$, $v=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(z_1-z_2)=0$ であるから，この微分方程式の解は

$$z_1-z_2=2Z\cos\sqrt{\frac{2g}{(1+\eta)l}}\cdot t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

從つて振動の週期 T は $2\pi\sqrt{\frac{(1+\eta)l}{2g}}$ であるが，η を無視すれば $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$ になる。又基準水面として靜水面を取れば $z_1=-z_2$ であるから $z_1-z_2=2z_1$ になる。

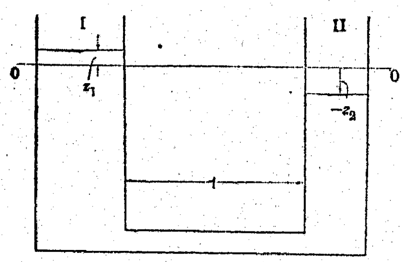

圖-77

次に2つの水槽 I, II の底を管で連絡した場合を考へる。I 及び II の水平斷面積を A_1 及び A_2，管の斷面積を a とし，基準面として靜水面を取れば

$$z_1A_1=-z_2A_2$$

I 及び II の水面の昇降速度 v_1 及び v_2 は

$$v_1=-\frac{dz_1}{dt},\quad v_2=\frac{dz_2}{dt}=-\frac{A_1}{A_2}\frac{dz_1}{dt}$$

管內の速度を v とすれば前と同樣にして

$$-\frac{z_1-z_2}{l}+\frac{1+\eta}{g}\frac{dv}{dt}=0$$

但し l は管の長さで，水槽內の水の加速度は無視してゐる。

$$z_2=-\frac{A_1}{A_2}z_1,\quad v=\frac{A_1}{a}v_1=-\frac{A_1}{a}\frac{dz_1}{dt}$$

之等を上の式に代入すれば

$$-\frac{z_1}{l}\left(1+\frac{A_1}{A_2}\right)-\frac{1+\eta}{g}\frac{A_1}{a}\frac{d^2z_1}{dt^2}=0$$

$t=0$ に於て $z_1-z_2=2Z$, $v=0$ とすれば，この微分方程式の一般解は

$$z_1=2Z\frac{A_2}{A_1+A_2}\cos\sqrt{\frac{ga}{(1+\eta)l}\cdot\frac{(A_1+A_2)}{A_1A_2}}\cdot t \quad \cdots\cdots\cdots(15)$$

從つて振動の週期は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{(1+\eta)l}{ga}\cdot\frac{A_1A_2}{(A_1+A_2)}}$$

8. 摩擦抵抗のある管內の水の振動

基本方程式の積分を可能ならしめる爲に，先づ管內の速度があまり大きくないものとして摩擦抵抗が管內の平均流速に比例するものと假定する。從つて (12) 式中で f_1v^2 の代りに cv (但し c は常數) を用ひる。管の斷面積が一樣ならば

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(z+\frac{p}{w_0}\right)+cv+\frac{1+\eta}{g}\frac{dv}{dt}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(16)$$

圖-76 の樣な U 字管の場合には靜水面を基準面に取れば

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(z+\frac{p}{w_0}\right)=\frac{2z_1}{l},\quad v=-\frac{dz_1}{dt}=\frac{dz_2}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{1+\eta}{g}\frac{d^2z_1}{dt^2}+c\frac{dz_1}{dt}+\frac{2z_1}{l}=0$$

この微分方程式の一般解は η を省略すれば

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= C_1e^{(p_1+p_2)t} + C_2e^{(p_1-p_2)t} \\ {}_1 &= -\frac{cg}{2}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{c^2g^2}{4} - \frac{2g}{l}} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

前と同じく　$t=0$　にて　$z_1 - z_2 = 2z_1 = 2Z$,　$v=0$　とすれば

$$C_1 = -\frac{Z}{2}\,\frac{p_1-p_2}{p_2}, \quad C_2 = \frac{Z}{2}\,\frac{p_1+p_2}{p_2}$$

$$\therefore \quad z_1 = \frac{Z}{2}e^{p_1t}\left(-\frac{p_1-p_2}{p_2}e^{p_2t} + \frac{p_1+p_2}{p_2}e^{-p_2t}\right)$$

從つて p_2 が實數卽ち　$\dfrac{c_1^2g^2}{4} \geqq \dfrac{2g}{l}$　の時は管內の水の運動は振動とならず，水面差　$z_1 - z_2$　が次第に減少して零に近付く。然し　$\dfrac{c_1^2g^2}{4} < \dfrac{2g}{l}$　の時は p_2 が虛數となるから，之を iq（q は實數）と置けば

$$z_1 = \frac{Z}{2}e^{p_1t}\left(\frac{ip_1+q}{q}e^{iqt} - \frac{ip_1-q}{q}e^{-iqt}\right)$$

$$\therefore \quad z_1 = \frac{Z}{2}e^{p_1t}\left(2\cos qt - \frac{2p_1}{q}\sin qt\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

之は e^{p_1t} を減衰率とする減衰振動[8]である。

圖-77 の様な水槽を管で連絡した場合も同樣であつて，運動の方程式は

$$\frac{1+\eta}{g}\,\frac{A_1}{a}\,\frac{d^2z_1}{dt^2} + c\frac{A_1}{a}\,\frac{dz_1}{dt} + \frac{z_1}{l}\left(1+\frac{A_1}{A_2}\right) = 0 \quad \cdots\cdots(19)$$

η を無視し，$gc = 2m$,　$\dfrac{ga}{l}\cdot\dfrac{(A_1+A_2)}{A_1A_2} = n^2$　と置けば

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} + 2m\frac{dz_1}{dt} + n^2 = 0$$

この微分方程式の一般解は

$$z_1 = C_1e^{(-m+\sqrt{m^2-n^2})t} + C_2e^{(-m-\sqrt{m^2-n^2})t}$$

であつて，前と同じ條件によつて常數 C_1, C_2 を定めれば

8) Damped oscillation.

$$z_1 = \frac{Z}{2\sqrt{m^2-n^2}}e^{-mt}\{(m+\sqrt{m^2-n^2})\,e^{\sqrt{m^2-n^2}t}$$
$$-(m-\sqrt{m^2-n^2})\,e^{\sqrt{m^2-n^2}t}\}$$

管內の水の運動が振動となる爲の條件は　$m^2 < n^2$　卽ち

$$\frac{C^2g}{4} < \frac{a}{l}\,\frac{(A_1+A_2)}{A_1A_2}$$

である。之が滿足される時は　$\sqrt{m^2-n^2} = iq$　と置く事により

$$z_1 = Ze^{-mt}\left\{\cos\sqrt{n^2-m^2}\,t + \frac{m^2}{\sqrt{n^2-m^2}}\sin\sqrt{n^2-m^2}\,t\right\} \cdots(20)$$

之は　e^{-mt}　を減衰率とする減衰振動である。

管內の水の速度が相當の大きさに達する時は，管內の摩擦抵抗は平均流速の 2 乘に比例するものとせねばならない。此處では 圖-77 の樣に 2 つの水槽の底部を管で連絡した時の管內の水の振動を考へる。內徑 D の管の單位長さ當りの摩擦抵抗は　$\dfrac{f}{D}\,\dfrac{v^2}{2g}$　の形になる。從つて運動の方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(z+\frac{p}{w_0}\right) \pm \frac{f}{D}\,\frac{v^2}{2g} + \frac{1+\eta}{g}\,\frac{dv}{dt} = 0$$

$\pm$ 符號の中で $+$ は水槽 I から水槽 II に向つて流れる時であり，$-$ はその反對である。

靜水面を基準面に取り η を省略すれば，前と同じ方法によつて

$$\frac{1}{g}\,\frac{A_1}{a}\,\frac{d^2z_1}{dt^2} \mp \frac{f}{2gD}\left(\frac{A_1}{a}\,\frac{dz_1}{dt}\right)^2 + \frac{z_1}{l}\left(1+\frac{A_1}{A_2}\right) = 0 \cdots\cdots(21)$$

此處で　$\dfrac{f}{D}\,\dfrac{A_1}{a} = m$,　$\dfrac{ga}{l}\cdot\dfrac{(A_1+A_2)}{A_1A_2} = n^2$　と置けば

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} \mp \frac{m}{2}\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 + n^2z_1 = 0$$

符號は $-$ が I から II に流れる場合である。之を積分すれば

$$e^{\mp mz}\left[\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 \mp \frac{2n^2}{m}z_1 - \frac{2n^2}{m^2}\right] + C = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dz_1}{dt} = \mp\sqrt{\pm\frac{2n^2}{m}z_1 + \frac{2n^2}{m^2} - Ce^{\pm mz_1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

I から II に流れる時は $\frac{dz_1}{dt} < 0$ であるから平方根の外の符號は $\mp$ になり，上が I から II に流れる場合を表す。常數 C を定めるには水位差の極大な時に $z_1 = Z$, $\frac{dz_1}{dt} = 0$ であるから

$$C = \frac{2n^2}{m^2}(\pm mZ + 1)\,e^{\mp mZ}$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \mp\sqrt{\frac{2n^2}{m^2}\left[\pm mz_1 + 1 - (\pm mZ + 1)\,e^{\pm m(z_1 - Z)}\right]} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

(23) を更に積分して z_1 の形を定める事は困難であつて，多くは數值計算等によつてゐる。然し z_1 の極大値 Z の値には次の關係がある。

$\frac{dz_1}{dt} = 0$ の時の Z の値を $t = 0$ から順次に $Z_0, Z_1, Z_2, \cdots\cdots$ とする。圖-78 に於て實線は I から II に，點線は II から I に流れる場合である。(23) 中の Z は之等の何れの値を入れても滿足されねばならないが，圖-78 の曲線は全體として1つの連續曲線として表されてはゐない。即ち $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots\cdots$ は何れの向きの流れを表す曲線からも定められるのであるから，C を與へる式から

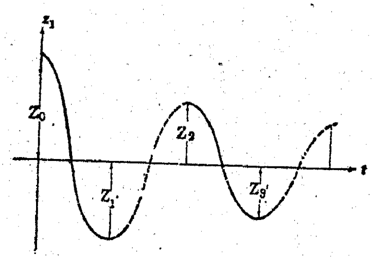

圖-78

$$mZ_0 + 1 = \frac{m^2}{2n^2}C_0e^{mZ_0} \quad \text{(I から II への流れ)}$$

$$mZ_1 + 1 = \frac{m^2}{2n^2}C_0e^{mZ_1} \quad (\;〃 \quad 〃\;)$$

$$-mZ_1 + 1 = \frac{m^2}{2n^2}C_1e^{-mZ_1} \quad \text{(II から I への 〃)}$$

$$-mZ_2 + 1 = \frac{m^2}{2n^2}C_1e^{-mZ_2} \quad (\;〃 \quad 〃\;)$$

$$mZ_2 + 1 = \frac{m^2}{2n^2}C_2e^{mZ_2} \quad \text{(I から II への 〃)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

然るに $Z_1, Z_3, Z_5, \cdots\cdots$ は負であるから，之等を $-Z_1', -Z_3', -Z_5', \cdots\cdots$ と書いて正の量 $Z_1', Z_3', Z_5', \cdots\cdots$ を用ひる事とすれば，同じ C を有する各組は全く同型となつて

$$\left.\begin{aligned} mZ_0 - \log(mZ_0 + 1) &= \log\frac{2n^2}{m^2C_0} \\ -mZ_1' - \log(-mZ_1' + 1) &= \log\frac{2n^2}{m^2C_0} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} mZ_1' - \log(mZ_1' + 1) &= \log\frac{2n^2}{m^2C_1} \\ -mZ_2 - \log(-mZ_2 + 1) &= \log\frac{2n^2}{m^2C_1} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}$$

故に若し最初の半振幅 Z_0 の大きさが與へられゝば，順次に $C_0, C_1, \cdots\cdots$ を消去して $Z_1', Z_2', Z_3', \cdots\cdots$ を求める事が出來る。即ち

$$\left.\begin{aligned} mZ_0 - \log(mZ_0 + 1) &= -mZ_1' - \log(-mZ_1' + 1) \\ mZ_1' - \log(mZ_1' + 1) &= -mZ_2 - \log(-mZ_2 + 1) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(24)$$

(24) の近似解は次の式によつて與へられる。

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{mZ_1'} - \frac{1}{mZ_0} &= \frac{1}{3} \\ \frac{1}{mZ_2} - \frac{1}{mZ_1'} &= \frac{1}{3} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

水面の運動を知るには (23) から

$$t = \int \mp \frac{\sqrt{\frac{m^2}{2n^2}}\,dz_1}{\sqrt{\pm mz_1 + 1 - (\pm mZ + 1)\,e^{\pm m(z_1 - Z)}}} + C \quad \cdots\cdots(26)$$

初期條件は $t=0$ で $z_1=Z_0$ であつて，之を用ひて數値計算等を行ふ。

〔練 習 問 題〕

1. 鉛直な管の途中にメーターを付け，メーターの前後で壓力 p_1 及び p_2 を測定し，メーターによつて管內流量 Q を測つた。水流は上から下に向ふものとしてメーターを通過する爲のヘッドの損失を計算せよ。但し與へられた數値は次の通りである。

メーター上部の水壓 $\frac{p_1}{w_0} = 0{\cdot}95\,\mathrm{m}$

メーター下部の水壓 $\frac{p_2}{w_0} = 1{\cdot}10\,\mathrm{m}$

$Q = 20\,l/\mathrm{sec}$, 管の內徑 $0{\cdot}12\,\mathrm{m}$

水壓測定個所の距離 $= 0{\cdot}4\,\mathrm{m}$.

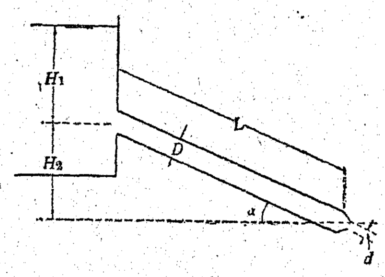

圖-79

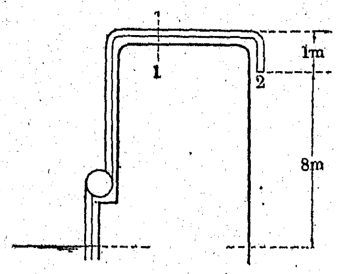

圖-80

2. 圖-79 の樣な末端を縮少した管內の速度，流量及び水壓の分布を計算せよ。但し

$H_1 = 12\,\mathrm{m}$, $H_2 = 10\,\mathrm{m}$, $L = 120\,\mathrm{m}$, $D = 0{\cdot}8\,\mathrm{m}$,

$d = 0{\cdot}3\,\mathrm{m}$, $f_e = 0{\cdot}2$

粗度係數 $n = 0{\cdot}012$

3. 1,500 m 離れた地點に $4{\cdot}5\,\mathrm{m^3}$/秒 の水量を 11 m の落差を以て送るには何程の徑の鐵管を要するか。但し途中に 90° の彎曲個所が 8 個所あるものとする。

4. 圖-80 の樣な個所で 30 馬力のポンプを用ひて揚水するものとし，排水管の末端を 1 及び 2 に置いた場合につき夫々流量を計算せよ。但し管の內徑は總べて 30 cm とする。

5. 配水本管から徑 d の給水管 5 本が出てゐる場合を考へる。圖-81 に示した各量の數値は

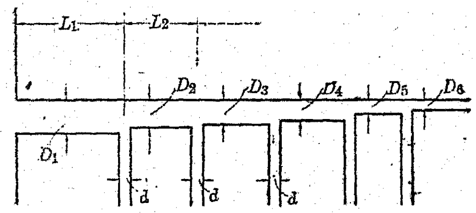

圖-81

$D_1 = 3\,\mathrm{m}$, $D_2 = 2{\cdot}6\,\mathrm{m}$, $D_3 = 2{\cdot}2\,\mathrm{m}$, $D_4 = 1{\cdot}8\,\mathrm{m}$,

$D_5 = 1{\cdot}4\,\mathrm{m}$, $D_6 = 1{\cdot}0\,\mathrm{m}$, $d = 0{\cdot}5\,\mathrm{m}$, $L_1 = 500\,\mathrm{m}$,

$L_2 = L_3 = L_4 = L_5 = 100\,\mathrm{m}$, $l = 200\,\mathrm{m}$.

管の始端に於ける壓力ヘッドは 10 m で，各分岐管末端で 1 m のヘッドを保たせたとすれば，各管からの流量は何程になるか。

6. 30 m の落差の下に $20\,\mathrm{m^3}$/秒 づゝ の水量を流す 2 本の管を途中で合流させるには，夫々何程の管徑を必要とするか。但し管の延長は初端から合流點までが 50m，之以下が 60 m とする。

7. 圖-82 の樣な地點で

$H = 20\,\mathrm{m}$, $CC' = 0{\cdot}5\,\mathrm{m}$, $AC = l_1 = 1{\cdot}2\,\mathrm{m}$, $CB = l_2 = 35\,\mathrm{m}$

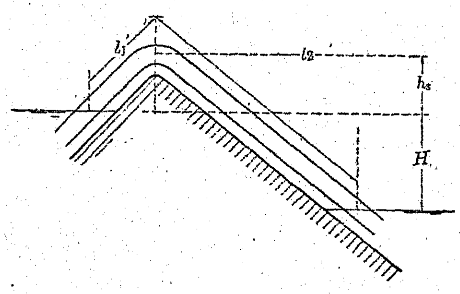

圖-82

が與へられた時に，このサイフォンによつて $Q=3\,\mathrm{m^3}$/秒 の水を送るには管徑は何程にすればよいか。

8. 圖-77 の樣な場合に $A_1=10\,\mathrm{m^2}$, $A_2=5\,\mathrm{m^2}$, $l=80\,\mathrm{m}$ とし，摩擦抵抗は速度の 2 乘に比例するものとする。最大の振幅を $Z=1{\cdot}4\,\mathrm{m}$ として，$z_1=1{\cdot}0\,\mathrm{m}$, $0{\cdot}7\,\mathrm{m}$ 及び $0{\cdot}4\,\mathrm{m}$ の時の管內の速度を計算せよ。

9. 圖-83 の樣な U 字管で $l=8\,\mathrm{m}$, $t=0$ にて I の中の水面上昇 $Z=0{\cdot}9\,\mathrm{m}$, その時の速度零なる時，摩擦抵抗を無視して管內の振動の週期を計算せよ。

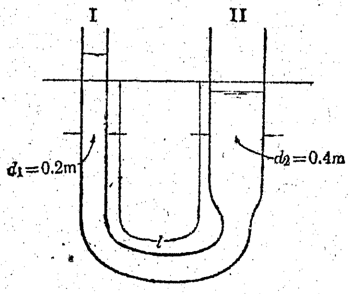

圖-83