

第2章 水流の一般問題

層流 湍乱流 (乱流)

1. ラミナ流¹⁾とタービュレント流²⁾

管内を水が流れる時には管壁に沿つては速度は殆ど零である。即ち水は管壁に附着する性質があり、管の中心部では或速度を以て流れてゐるから、管内の水分子は之に隣接する水分子との間に相対速度を有し、従つて粘性による摩擦力の作用が見られる。その結果水流に対する抵抗を生じ、水流のエネルギーを消費させるのである。

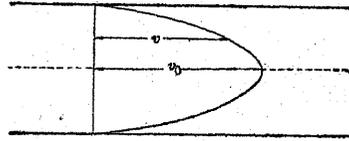


圖-34

圖-35 の様な甲、乙2水槽を管 AB によつて連結し、兩水槽の水面の高さの差を H とする。この時甲水槽内の水は乙水槽内の水よりも位置エネルギーが大きい故、水は甲から乙に向つて流れる。若し何等かの方法によつて兩水槽の水面を各々一

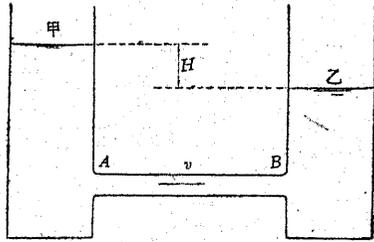


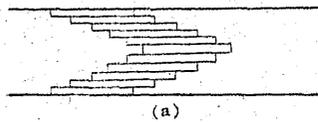
圖-35

定に保つてゐれば、甲にあつた水が乙に入るまでに乙の内の水のエネルギーよりも過分な量だけを丁度管内の摩擦抵抗で消費してしまはねばならない。従つて H が大きければそれだけ AB 内の流速 v も大きくなつて、それに伴ふエネルギーの消費が増すのである。

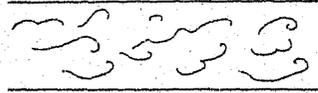
今甲乙兩水槽の間の水面差 H を非常に小さい場合から順次に大きくして行けば、 H が或値以下にある間は v と H は比例してゐる。而してこの範囲内では水分子は管の方向に平行に動き、従つて水流は 圖-36 (a) の様な層

1) Laminar flow. 2) Turbulent flow.

ラミナ流



(a)



(b)

図-36

状運動（但し層の厚さは微小である）と見る事が出来る。この種の流れをラミナ流と稱する。

水面差 H が或限界を越えれば、それ以上では流れの状態は急に變化して 圖-36 (b) の様な混濁した流れとなり、 H は v のほゞ 2 乗に比例する様になる。この種の流れをタービュレント流と稱する。

この場合には水分子は不規則な方向を取つて運動し、之を時間的に平均すれば管の方向に平行な方向を取つてゐる。従つてこの平均の運動方向を以てタービュレント流の方向とし、之を連ねたものを以てその時の流線³⁾と考へるのである。

ラミナ流とタービュレント流の限界をなす速度を限界速度⁴⁾（又は限界流速）と言ふが、之は唯一つの確定値を持つものではない。圖-37 の様な $\log H$ と $\log v$ との関係圖を畫がけば

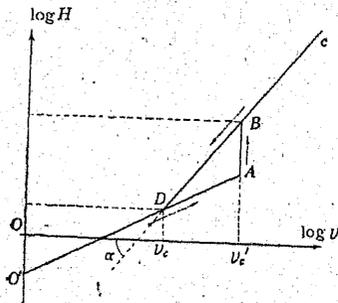


図-37

$H = Kv^n$ ($1 \leq n \leq 2$) であるから、(但し K は比例常数)

$$\log H = \log K + n \log v$$

$\log H$ と $\log v$ の關係は常に直線的である。 H を零から次第に増加して行けば、ラミナ流の間は $n = 1$ であつて、 $\log v$ は直線 $O'A$ に沿つて増加し、 A に達すれば急にタービュレント流となり、直線 BC に移る。この時の速度 v_c を高限界速度⁵⁾と言ふ。之に反してタービュレント流の状態にある流れから始めて H を次第に減じて行けば、速度が v_c' 以下となつても直ちに

3) Stream line. 4) Critical velocity. 5) Higher critical velocity.

ラミナ流とはならず、 $\log H$ と $\log v$ の關係は直線 BC の延長に沿つて變化し、 BC と $O'A$ の交點 D に至つて初めてラミナ流となる。この時の速度 v_c を低限界速度⁶⁾と稱する。

又タービュレント流に對する n の値、即ち圖-37 の $\tan \alpha$ の値は、種々の材料で作つた管に水を通して實驗した結果によれば

管の材料	鉛	ガラス	ワニス塗	新鑄鐵	古鑄鐵
n	1.79	1.79	1.82	1.88	2.00

即ち何れも 2 又は之よりも稍小さい値を示してゐる。

本章以下に述べる水流現象は特別に注意せぬ限り總べてタービュレント流であると考へてよい。即ち自然現象に於て見られる水流は大部分はタービュレント流の状態に在るのである。内徑 D の圓管では限界速度 v_c の大きさは大體 $v_c \approx 2,000 \frac{\nu}{D}$ 程度である。運動粘性係數 $= \frac{\mu}{\rho}$

2. タービュレント流の抵抗⁷⁾

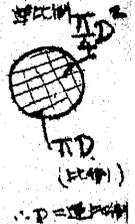
内徑 D の管内を流れる水の單位體積の部分考へれば、この部分が單位時間に摩擦の爲に失ふエネルギーは、運動エネルギー $\rho g \frac{v^2}{2g}$ の一部分であつて、Weisbach は之が D に逆比例するものと考へた。従つて單位體積の水が長さ L だけ流れる間に摩擦の爲に失ふエネルギー ρgh_L は次の形で與へられる。

$$\rho gh_L = \rho g \left(\frac{fL}{D} \frac{v^2}{2g} \right) \dots \dots \dots (1)$$

但し f は管壁の状態によつて定まる常数である。

タービュレント流の内部では流れの混濁の爲に相當なエネルギーの消費があるが、管壁面が粗面の場合には壁面に沿つた薄い層内でのエネルギーの消費は他の部分に比して遙かに大きい。故に管の内壁面に於ける摩擦力の強さを τ として、上のエネルギーの消費が壁面のみで起るものと考へれば

6) Lower critical velocity. 7) Resistance.



長さ \$L\$ の管に作用する抵抗力

$$\pi DL \cdot \tau = \frac{\pi D^2}{4} \rho g h_L$$

$$f = 8 \cdot \frac{\tau}{\rho v^2} \dots\dots\dots (2)$$

そこで壁面の粗度⁸⁾を表すのに長さのデメンションを有する量 \$k\$ を以てする。即ち壁面の凸凹の高さの様な量を \$k\$ とするのである。今

$$\tau \propto \mu^x \rho^y v^z D^s k^t$$

と置いてこの両邊のデメンションを比較すれば

$$[ML^{-1}T^{-2}] = [ML^{-1}T^{-1}]^x [ML^{-3}]^y [LT^{-1}]^z [L]^s [L]^t$$

$$\therefore f = 1 - x, \quad z = 2 - x, \quad s = -x - t$$

$$\therefore \tau \propto \mu^x \rho^{1-x} v^{2-x} D^{-x-t} k^t$$

$$\therefore \tau \propto \rho v^2 \left(\frac{\nu}{vD}\right)^x \left(\frac{k}{D}\right)^t \dots\dots\dots (3)$$

従つて係数 \$f\$ は次の様に

$$f = 8 \cdot \frac{\tau}{\rho v^2} = \varphi \left(\frac{\nu}{vD}, \frac{k}{D}\right) \dots\dots\dots (4)$$

\$\frac{vD}{\nu}\$: Reynolds number

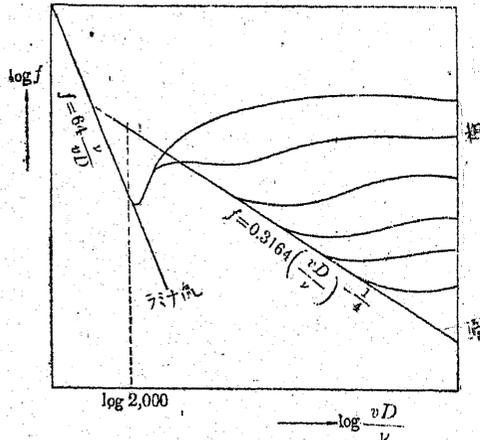


圖-38 (砂を塗つた管壁)

即ち $\frac{\nu}{vD}$ と $\frac{k}{D}$ の或函数を以て表す事が出来る。圖-38 は Nikuradse の實驗の結果から \$f\$ と $\frac{\nu}{vD}$ の關係を求めたもので、之から見ればラミナ流の時は \$f\$ は粗度 \$k\$ に無關係である。タービュレント流の曲線は上のもの程 \$k\$ が大きい。タービュレント流に對す

8) Roughness. 9) $\frac{\nu}{vD}$ に関しては第2編で述べる。

る \$\varphi\$ の形に関しては Blasius は滑らかな管に對して次の様に與へた。

$$f = K \left(\frac{vD}{\nu}\right)^{-1/4}, \dots\dots (K \text{ は常數}) \dots\dots\dots (5)$$

$$h_L = \frac{KL\nu^{0.25}}{2g} \frac{v^{1.75}}{D^{1.25}} \dots\dots\dots (6)$$

圓形以外の断面の管では \$D\$ に相當する長さを定めねばならない。抵抗の問題ではその爲に管又は自由水面のある開水路を通じて次の量を用ひる。

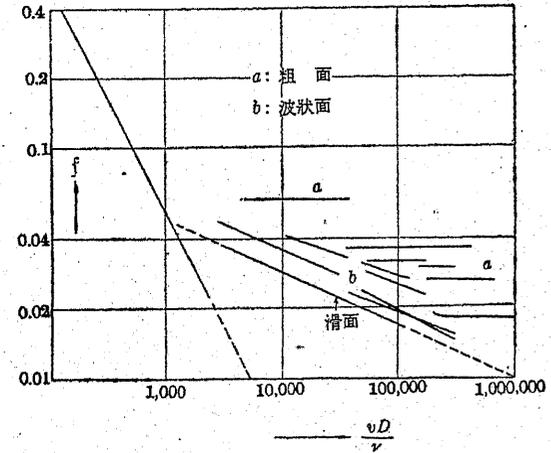


圖-39

$$R = \frac{A}{S} \dots\dots\dots (7)$$

徑深

但し \$A\$ は斷面積, \$S\$ は斷面の周囲の長さ即ち壁面摩擦力の作用する長さであつて、開水路では壁面の水に接してゐる部分だけを測る。この \$R\$ を徑深¹⁰⁾と稱し、圓形斷面では $R = \frac{D}{4}$, 1 邊 \$a\$ の正方形斷面では $R = \frac{a}{4}$ となる。又 \$S\$ を潤邊¹¹⁾の長さと言ふ。圖-39 は圓管に對する $\frac{vD}{\nu}$ と \$f\$ の關係を種々の實際の管に就いて實驗した結果である。

10) Hydraulic mean radius. 11) Wetted perimeter.

3. 速度分布

圓管内の水流の速度は中心線に沿つて最大であり、壁面に沿つて最小であつて、その間連続的に變化してゐる。従つて前節中の速度 w は管の断面を通じての平均値である。他の断面の場合も同様であつて、この平均した速度を平均流速¹²⁾と稱する。

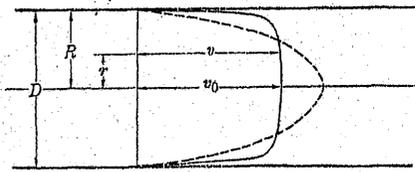


圖-40

滑らかな管内の流れが總べてラミナ流の場合には速度分布は圖-40 の點線の様に拋物線状になつてゐる。然しタービュレント流では圖-40 の實線の分布曲線の様になつて、壁に沿つた薄い層の中で速度は急激に變化し、従つてその層内では大きな摩擦抵抗があるが、他の部分では速度にあまり變化がなく摩擦抵抗は比較的小さい。この時の速度分布曲線は、中心線上の速度を v_0 、中心から r の距離の速度を v 、管の半径を r_0 とすれば次の公式がある。

$$v = v_0 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}} \dots\dots\dots(8)$$

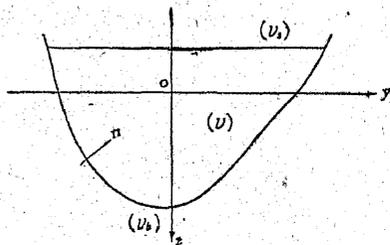


圖-41

但し n は 1.25 ~ 2.00 の値を持つ常數である。

一般の断面形の場合に就いては Boussinesq (ブーシネスク) は流体内部の摩擦抵抗をタービュレント流では $\tau_{yz} = \epsilon \frac{\partial v}{\partial y}$ 及び $\tau_{zx} = \epsilon \frac{\partial v}{\partial z}$ の形で表し、 ϵ を常數

と見做さず

12) Mean velocity.

$$\epsilon = w_0 \sigma_1 R v_b F \left(\frac{y}{R}, \frac{z}{R} \right) \dots\dots\dots(9)$$

と置いた。但し σ_1 は常數、 R は徑深、 v_b は断面最底部の速度¹³⁾、 F は任意の形の函數である。この F の形を断面の形に応じて適當に定める。又壁面での摩擦抵抗は壁面への法線方向を n で表して

$$\epsilon \frac{dv}{dn} = -w_0 \sigma_2 v_b^2 f \left(\frac{y}{R}, \frac{z}{R} \right) \dots\dots\dots(10)$$

で與へた。但し σ_2 は常數、 f は断面の形によつて定まる函數である。

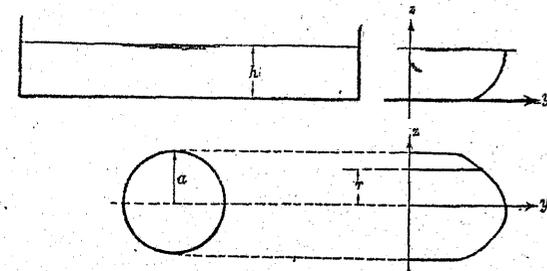


圖-42

特殊の形の断面に對する F の形を Boussinesq は次の様に與へた。

$$\left. \begin{array}{l} \text{水深 } h \text{ の幅の廣い矩形断面} \\ F = 1, (R = h) \\ \text{半径 } a \text{ の圓形又は半圓断面} \\ F = \frac{a}{r}, (R = \frac{a}{2}) \end{array} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

ϵ のデイメンションは $[ML^{-1}T^{-1}]$ であるから、 σ_1 のデイメンションは $[L^{-1}T^2]$ となつてゐる。

之から幅の廣い矩形断面内の速度分布は次の様にして計算される。 σ_1 も壁の粗度によつて影響されるから

13) 薄い層の外側の速度と考へる。

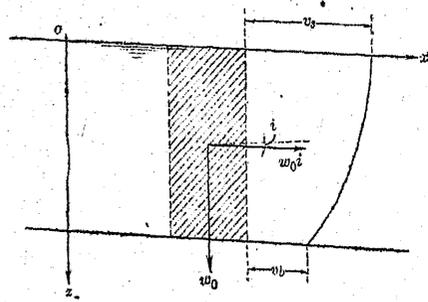


圖-43

$$\sigma_1 = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\sigma_2}{h}}$$

と書いて置く。i なる勾配¹⁴⁾を持つた流れの中で dx の距離にある 2 つの鉛直断面の間の部分の平衡を考へれば、摩擦力の中で外力となるのは壁面に働くもののみであるから

$$\left[\varepsilon \frac{dv}{dn} \right]_p S dx + A dx \cdot w_0 i = 0$$

[]_p は壁面の値なる事を示し、S は潤邊の長さ、A は断面積である。従つて (10) から

$$\sigma_2 v_0^2 f \left(\frac{y}{R}, \frac{z}{R} \right) = \frac{A}{S} i$$

$$\therefore \sigma_2 = \frac{Ri}{v_0^2} f \left(\frac{y}{R}, \frac{z}{R} \right) \dots\dots\dots(12)$$

底の条件が一樣ならば f = 1 である。又 (11) を用ひて F = 1, R = h として水面から z までの深さの部分の釣合を考へれば

$$\varepsilon \frac{\partial v}{\partial z} = -w_0 \sigma_2 i$$

$$\frac{h}{k} v_0 \cdot \frac{\sqrt{hi}}{v_0} \frac{\partial v}{\partial z} = -iz, \quad \therefore \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{k}{h} \sqrt{\frac{i}{h}} z$$

之を積分して水面 z = 0 で v = v_s とすれば

$$v = v_s - \frac{k}{2} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \sqrt{hi} \dots\dots\dots(13)$$

或は積分の際の条件として水底 z = h で v = v_b を用ひれば

$$v = v_b + \frac{k}{2} \sqrt{hi} \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \dots\dots\dots(14)$$

14) この様な問題では一樣な流れと假定して i は床勾配としてよい。

平均流速 \bar{v} の大きさは

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v dz = v_s - \frac{k}{6} \sqrt{hi} \dots\dots\dots(15)$$

又は

$$\bar{v} = v_b + \frac{k}{3} \sqrt{hi}$$

Bazin の實驗によれば k の値はほゞ 41.2 である。速度 v が丁度平均流速に等しくなる様な水深 z_m は

$$z_m = \frac{h}{\sqrt{3}} = 0.577 h$$

即ち大體 0.6 h 位の處にあるのが普通である。

4. Bernoulli の定理

先づ水の摩擦抵抗の無視出来る場合を考へ、尙運動は時間的に變化する事のない定常運動であるとする。従つて各水分子の運動の経路を示す線、即ち流線は不變であつて、1 つの水分子の後から來て同じ経路を取る水分子は終始前のものと同じ流線上を動く。従つて又多數の流線によつて囲まれた管、即ち流管の形及び位置も不變である。

今流水中に微小な断面積を有する流管 A₁A₂ を考へ、或標準水平面から

測つた A₁, A₂ の高さを夫々 z₁, z₂,

その断面積を A₁ 及び A₂ とする。

又 A₁ 及び A₂ に於ける水の壓力の強さ及び速度を夫々 p₁, v₁ 及び p₂, v₂ とする。

この流管内の水の質量は不變であるから単位時間内にこの中に入る水の質量 ρv₁A₁ と、その間に之から出る水の質量 ρv₂A₂ は等しい。従つて

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \dots\dots\dots(16)$$

微小時間 δt の間に A₁ を通つて流管内に入る運動エネルギーは $\frac{1}{2g} (\rho v_1^2$

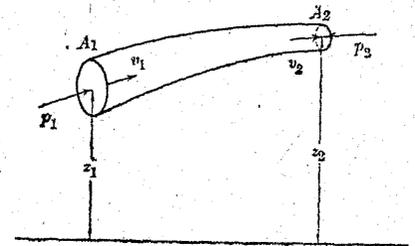


圖-44

$A_1 v_1 \delta t$ v_1^2 , A_2 を通つて出る運動エネルギーは $\frac{1}{2g} (w_0 A_2 v_2 \delta t) v_2^2$ であつて、之以外には運動エネルギーの出入はない。又水圧によつてこの流體部分になされる仕事の量は A_1 に於ては p と v の方向が一致するから $A_1 p v_1 \delta t$, A_2 に於ては之等の方向が反對であるから $-A_2 p_2 v_2 \delta t$ であり、又 δt の間は $w_0 A_1 v_1 \delta t$ の水が $z_2 \rightarrow z_1$ だけ揚げられたのであるから、その爲になされる仕事は $-w_0 A_1 v_1 \delta t (z_2 - z_1)$ である。従つてエネルギー不滅の法則により

$$\frac{1}{2g} (w_0 A_1 v_1 \delta t) v_1^2 - \frac{1}{2g} (w_0 A_2 v_2 \delta t) v_2^2 + A_1 p_1 v_1 \delta t - A_2 p_2 v_2 \delta t - w_0 A_1 v_1 \delta t (z_2 - z_1) = 0$$

之に (16) を代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{w_0} &= \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{w_0} \\ \frac{v_1^2}{2} + g z_1 + \frac{p_1}{\rho} &= \frac{v_2^2}{2} + g z_2 + \frac{p_2}{\rho} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

(17) は流水中の任意の點に於ける速度を v , 或標準水平面からの高さを z , 水壓の強さを p とした時に、 $\left(\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{w_0}\right)$ は 1 つの流線に沿つて何れの點に於ても同じ大きさを有する事を示すもので、之を Bernoulli (ベルヌイ) の定理と稱する。(17) は又

$$H_e = \frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{w_0} \dots\dots\dots(18)$$

の形で表し、 H_e を全ヘッド¹⁵⁾ (又はエネルギーヘッド¹⁶⁾)と言ふ。

一般に 1 つの水流系を通じて全ヘッド H_e は共通の値を有すると考へられる事が多い。例へば水位一定な水槽の水の底部に連結した小さい管から流れ出る時は、水槽の水面では速度零と考へられ、水壓は零であるから、其處では H_e は z に等しく之は一定である。従つて總べての流線が水面から初ま

15) Total head. 16) Energy head.

ると考へれば全流水を通じて H_e は水面の z の値に等しい。又河川や運河の水流の様に空氣に接する水面を持つものでは、水面からの水深 z の點の水壓の強さは $w_0 z$ である故、 $z + \frac{p}{w_0}$ は 1 つの鉛直断面内の總べての點を通じて等しい値を有する。故に摩擦抵抗が無視され且断面内の速度を一様と見做して平均流速を用ひる時には、 H_e は全流水を通じて等しい値を持つ。

(18) の右邊の各項の中で $\frac{v^2}{2g}$ を速度ヘッド¹⁷⁾ (又は速度水頭), z を高度ヘッド¹⁸⁾ (又は高度水頭), $\frac{p}{w_0}$ を壓力ヘッド¹⁹⁾ (又は壓力水頭) と稱する。之等は何れも長さのデメーションを有し、 $\frac{v^2}{2g}$ は運動エネルギーの大きさ、 $z + \frac{p}{w_0}$ はポテンシャル・エネルギーの大きさを代表するものである。

次に流水の内部摩擦によるエネルギーの消耗のある場合を考へ、圖-44 の流管の長さを l とし、その中の一部 dl を通る間に摩擦の爲に失はれるエネルギーを $(w_0 A_1 v_1 \delta t) \cdot f_1 v^2 dl$ で表す。即ち (1) の中で $\frac{f}{2gD}$ を f_1 と書いたのである。この時間内に A_1 と A_2 の間で失はれるエネルギーは

$$\int_{A_1}^{A_2} (w_0 A_1 v_1 \delta t) f_1 v^2 dl \quad f_1 = \frac{f}{2gD}$$

但し v は任意の位置に於ける速度である。之を考へれば (17) は次の形になる。

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{w_0} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{w_0} + \int_{A_1}^{A_2} f_1 v^2 dl \dots\dots\dots(19)$$

Bernoulli の定理の簡単な場合の 1 つに Torricelli (トリチェリ) の定理がある。之は水槽の壁に水面から H の深さの處に小さい断面積 a の孔があつて、之から水が速度 v で流出する場合である。流れに對する摩擦抵抗は水槽内の速度が極めて小さいから無視してよい。定常運動と假定出来る時は Bernoulli の定理に於て

$$\text{水面にて} \quad v_1 = 0, \quad p_1 = 0$$

17) Velocity head. 18) Elevation head. 19) Pressure head.

流出孔にて $v_2 = v$ $f_2 = 0$

且 $z_1 - z_2 = H$ であるから

$$\frac{v^2}{2g} = H, \text{ 又は } v = \sqrt{2gH} \dots\dots\dots(20)$$

即ち孔からの流出速度は $\sqrt{2gH}$ で與へられる。

この様な問題の力學的な相似性を考へて見ると、今2つの運動があつて、第2のものは第1のものに比して長さに於て總べて m 倍され、速度に於て n 倍されてゐるものとする。この2つが力學的に相似になる爲には両者が同じ運動法則に従へばよいのであるから、(20)は

第1の流れに對して $v = \sqrt{2gH}$

第2の流れに對して $nv = \sqrt{2gmH}$

この2式が同時に成立する爲には $n^2 = mg$ なる事を必要とする。之を言ひ換へれば第1及び第2の流れの長さ及び速度を L_1, v_1 及び L_2, v_2 で表せば

$$\frac{L_1 g}{v_1^2} = \frac{L_2 g}{v_2^2} \text{ 又は } \frac{\sqrt{L_1 g}}{v_1} = \frac{\sqrt{L_2 g}}{v_2}$$

となる事が必要である。この $\frac{v}{\sqrt{Lg}}$ なる量を Froude 數²⁰⁾と言ひ

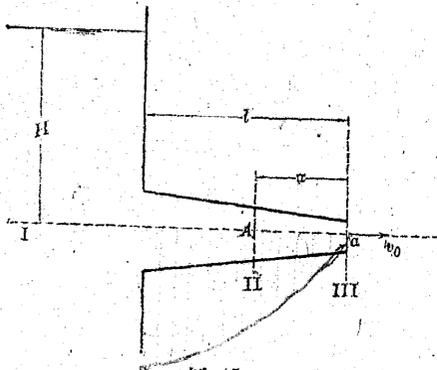


圖-45

摩擦抵抗が無視出来る時の相似法則はこの値が共通になればよいのである。Froude 數のディメンションは g が入つてゐる爲に

$$[L]^{-\frac{1}{2}} [LT^{-2}]^{-\frac{1}{2}} [LT^{-1}] = 1$$

即ちディメンションのない數となつてゐる。

20) Froude's number

力学的相似 { 摩擦 + v, 重力 - v } $\frac{v}{\sqrt{gL}} = \text{const Froude's number}$
 { 摩擦 - v, 重力 + v } $\frac{vL}{\nu} = \text{const Reynold's number}$

[問題 1] 圖-45 の様な無限に大きいと考へられる水槽から断面の變化する小管が出てゐる場合の管の中心線に沿ふ水壓の強さを求めよ。但し管は水平でその断面積は $A = a + bx$ を以て表されるものとする。

(解) 先づこの管からの流出量を求めるには、管が小さいから断面 a の中では速度は一様と考へて、Bernoulli の定理を I と III の間に適用する事により

$$H = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{p}{w_0} + f_1 v_1^2 l$$

但し v_0 は流出孔での速度で、 v_1^2 は長さ l の間の v^2 の平均値である。 v_1^2 の値は最初は假定せねばならない。又孔口が小さければ $p = 0$ としてよいから

$$v_0^2 = 2g(H - f_1 v_1^2 l)$$

流出する流量²¹⁾ (單位時間に断面を通過する水量) Q は

$$Q = v_0 a = a \sqrt{2g(H - f_1 v_1^2 l)}$$

次に圖の断面 I と II の間で Bernoulli の定理を適用すれば

$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{w_0} + f_1 v_x^2 (l - x)$$

但し v_x^2 は長さ $(l - x)$ の間の v^2 の平均値である。且

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{a}{a + bx} \sqrt{2g(H - f_1 v_1^2 l)}$$

之を上関係式に代入して p を求めれば

$$p = w_0 \left[H - \frac{a^2}{(a + bx)^2} (H - f_1 v_1^2 l) - f_1 v_x^2 (l - x) \right]$$

但し v_1^2 及び v_x^2 は次の形で與へられる。

$$v_1^2 = \frac{1}{l} \int_0^l \left(\frac{a}{A} v_0 \right)^2 dx = \frac{v_0^2}{l} \int_0^l \left(\frac{a}{A} \right)^2 dx = \frac{av_0^2}{lb} \left(1 - \frac{a}{a + bl} \right)$$

21) Discharge.

$$v_x^2 = \frac{1}{l-x} \int_x^l \left(\frac{a}{A} v_0^2 \right) dx = \frac{a^2 v_0^2}{(l-x)} \left(\frac{1}{a+bx} - \frac{1}{a+bl} \right)$$

尙此處では抵抗は摩擦によるものとみしてゐるが、実際には管への入口で渦が生じてその爲に多少のエネルギーの消耗がある。

5. ピトー管²²⁾とベンチュリ・メーター²³⁾

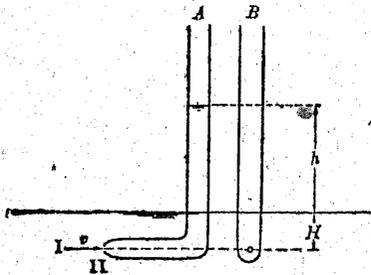


圖-46

ピトー管とは圖-46 の様に下端を直角に曲げた管を流水中に入れて、屈曲部を流れに平行に上流に向け、第2の管は先端を閉じて側面に小孔を開けて置く。I と II の間で Bernoulli の定理を適用すれば、管内では速度は零であるからそれだけ水圧が昇り、管内の水面は h だけ上昇してゐる。即ち II

に於ける水圧は $w_0(h + H)$ である。

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{w_0 H}{w_0} = \frac{1}{w_0} \{w_0(h + H)\}$$

$$\therefore h = \frac{v^2}{2g} \quad \text{又は} \quad v = \sqrt{2gh}$$

従つて h を測定すれば速度 v を知る事が出来る。 h を測定する爲に A, B 兩管をゴム管によつて微壓計の兩脚に連結して置けば、微壓計の讀みによつて小さい速度まで測定する事が出来る。

ベンチュリ・メーターとは壓力差によつて水を流してゐる管路の速度を測るに用ひるものであつて、圖-47 の様に管路の一部に狹窄部を入れた形になつてゐる。一般斷面積の位置 (断面 I) 及び狹窄部 (断面 II) に細管を立て、そこに現れる水位差 h を壓力計によつて讀む。断面 I に於ける水壓、速度及び斷面積を夫々 p_1, v_1 及び A_1 とし、断面 II に於けるものを夫々 $p_2,$

22) Pitot tube. 23) Venturi-meter.

v_2 及び A_2 として、兩断面の間に Bernoulli の定理を適用すれば

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{w_0} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{w_0}$$

摩擦は長さが小さいと無視出来

但し z_1 及び z_2 は断面の中心線の高さを表すものであるが、メーターを水平に置けば $z_1 = z_2$ である。更に $v_1 A_1 = v_2 A_2$ なる関係を代入すれば

$$v_1^2 = \frac{2g A_2^2}{A_1^2 - A_2^2} \cdot \frac{p_1 - p_2}{w_0}$$

然るに $p_1 - p_2 = w_0 h$ であるから

$$v_1 = \frac{A_2 \sqrt{2gh}}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \dots \dots \dots (21)$$

故に h を測定すれば v_1 の大きさを知る事が出来る。實際に之を應用して計器を作る時には狹窄部にエネルギーの消耗を伴ふから (21) の右邊に係數 μ を乗じて、之を豫め檢定によつて決定して置く。

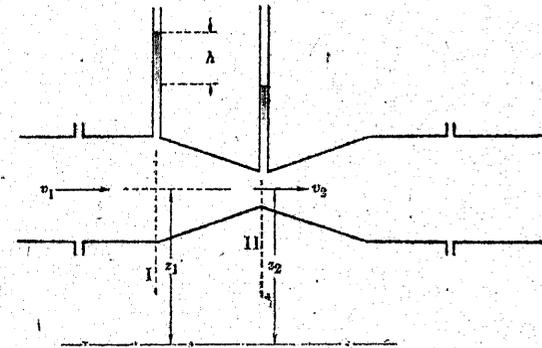


圖-47

〔問題 2〕 開水路の途中に狹窄部を作り、狹窄部と下流側との水位差を測定した時に、この水位差と水路を流れる流量 Q との關係を求めよ。

(解) この装置は後に述べる理由によつて勾配の緩やかな、従つて速度の余り大きくない水路でなければならない。断面 II 及び III の間で Bernoulli の定理を適用する事とし、任意の 1 流線を考へてその流線の位置を

水面から ζ の深さとすれば $p = w_0 \zeta$, 又速度には平均流速を用ひる事とすれば $v = \frac{Q}{bh}$ の形で表される。従つて摩擦抵抗を無視し、狭搾部の底を水平として

$$\zeta_2 + (h_2 - \zeta_2) + \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{h_2 b_2} \right)^2 = \zeta_1 + (h_1 - \zeta_1) + \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{h_1 b_1} \right)^2$$

$$\therefore h_1 - h_2 = \frac{Q^2}{2g} \left\{ \left(\frac{1}{h_2 b_2} \right)^2 - \left(\frac{1}{h_1 b_1} \right)^2 \right\}$$

$$\therefore Q = \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{\left(\frac{1}{h_2 b_2} \right)^2 - \left(\frac{1}{h_1 b_1} \right)^2}} \dots \dots \dots (22)$$

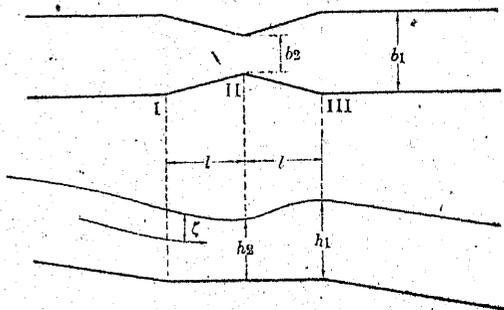


圖-48

即ちこの場合には水位差 $h_1 - h_2$ のみでなく、水深 h_1 と h_2 を各々測定して置く必要がある。

6. 不定流²⁴⁾の一般式

定常運動の状態にない水流即ち時間的に状態の變化する水流を不定流と言ひ、之に對して定常運動の状態にあるものを定流²⁵⁾と稱する。先づ定流に關する Bernoulli の定理を微分方程式の形に書き改めれば、圖-44 の A_1 と A_2 の距離を極めて短く取る事により

24) Unsteady flow. 25) Steady flow.

$$\frac{1}{2g} (v_2^2 - v_1^2) = d \left(\frac{v^2}{2g} \right), \quad z_2 - z_1 = dz, \quad \frac{1}{w_0} (p_2 - p_1) = d \left(\frac{p}{w_0} \right)$$

と書く事が出来る。又 A_1 と A_2 の距離を ds とすれば (19) の最後の項は $f_1 v^2 ds$ である。従つて (19) は次の様になる。

$$d \left(\frac{v^2}{2g} \right) + dz + \frac{dp}{w_0} + f_1 v^2 ds = 0$$

$$\therefore \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{dz}{ds} + \frac{1}{w_0} \frac{dp}{ds} + f_1 v^2 = 0 \dots \dots \dots (23)$$

不定流の運動方程式は次の様にして導入する事が出来る。4 に於ては時間 δt の間に長さ l の流管に出入するエネルギーを考へたが、長さ ds の流管では之が

$$\left\{ d \left(\frac{v^2}{2g} \right) + dz + \frac{dp}{w_0} \right\} w_0 A v \delta t$$

である。不定流ではその間にこの部分の速度が単位時間に $\frac{\partial v}{\partial t}$ の割合で増加するから、 $\frac{w_0}{g} A ds$ の質量が $\frac{\partial v}{\partial t}$ の加速度を以て $v \delta t$ だけ動く事になり、 $\frac{w_0}{g} A v \frac{\partial v}{\partial t} ds \delta t$ だけのエネルギーが消費される。従つて水流の運動に關する微分方程式は

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{w_0} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \dots \dots \dots (24)$$

更に摩擦抵抗を考へる場合には

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{w_0} \frac{\partial p}{\partial s} + f_1 v^2 + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \dots \dots \dots (25)$$

水流の問題を解くには運動に關する方程式の他に水流の連続性に關する方程式を必要とする。之は質量不變則を表すものであつて、定流ならば $Av = \text{const.}$ 又は $\frac{d}{ds} (Av) = 0$ である。不定流では ds の長さの流管部分に時間 δt の間に上流側から流入する水量は $w_0 A v \delta t$, 下流側から流出する水量は $w_0 \left(A + \frac{\partial A}{\partial s} ds \right) \left(v + \frac{\partial v}{\partial s} ds \right) \delta t$ であるから、この差はこの間に兩断面間に水量の増す量に等しい。水の壓縮性を無視すればこの増加量は

$w_0 \frac{\partial A}{\partial t} ds dt$ であるから、連続性の方程式は

$$w_0 A v \delta t - w_0 \left(A + \frac{\partial A}{\partial s} ds \right) \left(v + \frac{\partial v}{\partial s} ds \right) \delta t - w_0 \frac{\partial A}{\partial t} ds \delta t = 0$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + v \frac{\partial A}{\partial s} + A \frac{\partial v}{\partial s} &= 0 \\ \text{又は} \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} (Av) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

7. 管路²⁶⁾及び開水路²⁷⁾の流れの基本方程式

(25) 及び (26) を管路又は開水路の場合に就いて書き直して見る。何れの場合にも

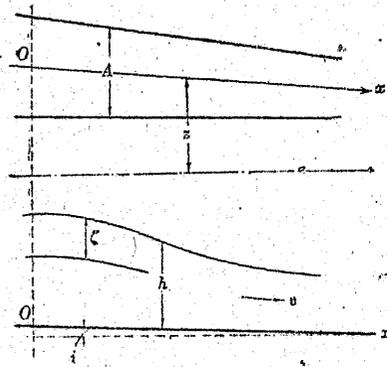


圖-49

場合にも圖-49 の様に流れの方向に x 軸を取り、この方向に垂直な断面内の平均流速を v として使用に便利な形にする。即ち (25) は一旦全断面に亘つて積分した後、断面積で除し平均値とするのである。

先づ (25) の第 1 項はこの様にして平均すれば $\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\text{平均流速}^2}{2g} \right)$ とはならない。単位時間に dA を通

つて流れる量 $w_0 v dA$ が $\frac{v^2}{2g}$ の運動エネルギーを持つてゐて、之を全断面に亘つて平均するのであるから、平均値は $\frac{1}{w_0} \frac{\partial}{\partial s}$ なる計算を加へて

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v^2}{2g} \right) dA \right\} = \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{v^2}{2g} \int_A \left(\frac{v}{\bar{v}} \right)^2 \frac{dA}{A} \right\}$$

此處で $\alpha = \int_A \left(\frac{v}{\bar{v}} \right)^2 \frac{dA}{A}$ と書き、之を断面の形になつて定まる常數と考へる。Boussinesq は圓形断面に對して $\alpha = 1.097$ 、幅の廣い矩形断面に對して $\alpha = 1.058$ を與へた。

26) Pipeline. 27) Open channel.

$\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{w_0} \frac{\partial p}{\partial s}$ は管路の場合には一般に壓力が $w_0 z$ (常數 $-z$) に比例して變化するから管断面を通じてこの項は一定と見てよく、従つて之はそのままに用ひられる。開水路の場合は水面から z の深さにある流線を考へれば

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{w_0} \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (h - z) \cdot dx - i dx \right\} + \frac{1}{w_0} \frac{\partial (w_0 z)}{\partial x} dx$$

$$= \left(-i + \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx$$

即ちこの 2 項は $-i + \frac{\partial h}{\partial x}$ で表される。

$f_1 v^2$ は係數 f_1 が管内の平均流速を用ひた場合に適當する様な値に定めればよい。之は實驗によつて定まるものである。

最後の項は $w_0 v dA$ なる水が $\frac{\partial v}{\partial t}$ の加速度を得る時の仕事量を全断面に亘つて平均したものであるから

$$\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \int_A \frac{v^2 dA}{A} = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \bar{v}^2 \int_A \left(\frac{v}{\bar{v}} \right)^2 \frac{dA}{A} \right\}$$

此處で $1 + \eta = \int_A \left(\frac{v}{\bar{v}} \right)^2 \frac{dA}{A}$ と書き、之も前と同じ様に断面形によつて定まる常數と考へて、Boussinesq は圓形断面に對して $\eta = 0.033$ 、幅の廣い矩形断面に對して $\eta = 0.020$ を與へた。

従つて管路内の水流の運動に関する方程式は、 v を平均流速を表すものと考へれば

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{w_0} \frac{\partial p}{\partial x} + f_1 v^2 + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1 + \eta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \dots\dots (27)$$

開水路内の水流に對しても v を平均流速を表すものとすれば

$$-i + \frac{\partial h}{\partial x} + f_1 v^2 + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1 + \eta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \dots\dots (28)$$

(26) は管路に對しては管断面積を A とすれば

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Av) = 0 \dots\dots (29)$$

開水路に對しても同じであるが幅 b の矩形断面の時は $A = bh$ であるから

連続性

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hv) = 0 \dots\dots\dots(30)$$

Boussinesq は流體力學の一般運動方程式を積分して、(27) 及び (28) の最後の 2 項の更に厳密な形として次の 3 項を得た。

$$(2\alpha - 1 - \eta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1 + 2\eta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\alpha - 1 - 2\eta}{g} \frac{v}{A} \frac{\partial A}{\partial t}$$

之によつて計算した値は (27) 又は (28) から計算したものと殆ど違ひはない。尚 Boussinesq が鉛直方向の速度成分を考慮して (28) を補正したものは、定流の場合に對して次の形になる。

$$-i + \frac{dh}{dx} + f_1 v^2 + (2\alpha - 1 - \eta) \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{hv^2}{3g} \frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{hv^2}{2g} \frac{d^2 i}{dx^2} = 0 \dots\dots\dots(31)$$

之に對する連続性の方程式は (30) でよい。

8. 等流²⁸⁾

等流とは定流の中で流れの状態が流れの方向に變化のないもの、即ち流れ全體を通じて斷面積、流速の一樣なものであつて、一樣な管又は一樣な無限に長い開水路に於てのみ起り得るものである。然し開水路の場合にも近似的に等流と考へる事は少くない。

(27) 又は (28) に於て管路の $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{w_0} \frac{\partial \rho}{\partial x}$ 、又は開水路の $-i + \frac{\partial h}{\partial x}$ を $-I$ で表せば、等流の場合は

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

であるから、(27) 又は (28) は

$$I = f_1 v^2 \dots\dots\dots(32)$$

之が等流の運動を表す方程式であつて、開水路に對しては $I = i$ である。

28) Uniform flow.

(32) は等流に於てはポテンシアル・エネルギーの勾配が丁度摩擦抵抗と釣合つてゐる事を示すものであつて、外力によつて流水に爲される仕事は總べてこの摩擦抵抗に打勝つ爲に消費されてしまふのである。摩擦抵抗に對するエネルギーの消費は單位體積の水に對して L だけ流れる間に $w_0 f_1 v^2 L$ で與へてゐるのであるから、(32) に (1) を代入すれば

$$I = \frac{f}{D} \frac{v^2}{2g} \quad \text{又は} \quad I = \frac{f'}{R} \frac{v^2}{2g} \dots\dots\dots(33)$$

R は徑深であつて、圓形斷面の場合は $f = 4f'$ である。(33) から平均流速 v は次の形で表される。

$$V = \sqrt{\frac{2g}{f}} \sqrt{RI} \dots\dots\dots(34)$$

(34) を Chézy (シエジー) の平均流速公式と言ひ、 $C = \sqrt{\frac{2g}{f}}$ と書いてこの C の値が多くの実験によつて與へられた。

9. 平均流速公式

平均流速公式の問題は結局 Chézy の公式 $v = C\sqrt{RI}$ の係數 C 又は f を與へる實驗公式を定める事に歸する。 C 又は f は色々な量の影響を受けるが一般には特に壁面の粗度による影響が大きい。完全に滑らかな管に對する粗度を含まない公式としては Lees の公式

$$f' = 0.0018 + 0.09419 \left(\frac{vR}{\nu} \right)^{-0.35} \dots\dots\dots(35)$$

又は Jakob 及び Erk の公式

$$f' = 0.001785 + 0.09393 \left(\frac{vR}{\nu} \right)^{-0.35} \dots\dots\dots(36)$$

がある。 ν の値は常溫の水に對して 0.000,001,25 (m-秒單位) 前後である。粗度を含んだ公式には Mises の管に對する公式として次のものがある。

$$f' = 0.0024 + \sqrt{\frac{k}{2R}} + 0.2121 \sqrt{\frac{\nu}{vR}} \dots\dots\dots(37)$$

之は勿論タービュレント流に對する公式であつて、 k の値は長さに cm を用ひた時に次の様な値を取る。

管の材料	$10^5 k$
ガラス	0.2 ~ 0.8
セメント、滑及び粗	7.5 ~ 15 及び 20 ~ 40
鑄鐵管、新及び古	100 ~ 200 及び 250 ~ 500
鋳鋼管	200 ~ 500
木材、滑及び普通	20 ~ 50 及び 50 ~ 100
切石積	200 ~ 400
煉瓦積	200 ~ 400

Biel の公式は圓管に對して

$$f' = \frac{2g}{1,000} \left(a + \frac{2b}{\sqrt{D}} + \frac{2c}{v\sqrt{D}} \right) \dots (m\text{-單位}) \dots (38)$$

a, b, c は常數であつて $a = 0.12, b$ 及び c は次の表の様に變化する。

管壁の種類	b	c (12°C の値)
眞 鑄 鉛	0.95	0.0118
ガ ラ ス	0.71	0.0088
新鑄鐵、平滑なコンクリート	0.46	0.0057
普通のコンクリート	0.27	0.0032

Hazen-Williams (ヘーゼン・ウィリアムス) の公式は

$$v = C'R^{0.63} J^{0.54} \text{ 或は } C = C'R^{0.13} J^{0.04} \dots (39)$$

の形を有するもので、 C' の値は次の様になる。

管材料	C' (m-秒單位)
最良鑄鐵管	118
新鑄鐵管	110
滑かな木管	102

鑄鐵管は使用と共に粗度を増すが、その關係は N 年使用後に C' が C_N' となるものとすれば

$$C_N' = C' \left(1 - 0.00268 \frac{\sqrt{N}}{D} \right)^{2.03} \dots (40)$$

開水路に多く用ひられる公式としては、Bazin (バザン) の公式は C を次の形で與へる。

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} \dots (m\text{-秒單位}) \dots (41)$$

γ の値は水路壁面の状態によつて次の様な値を取る。

水路壁面の状態	γ
滑らかな木材	0.06
削らぬ木材、切石積、煉瓦積	0.16
割石積	0.46
張石、規則正しい土砂底	0.86
普通地盤	1.30
抵抗の特に大きい地盤	1.75

Ganguillet-Kutter (ガンギレー・クッター) の公式は Mississippi 河に於ける實測の結果と適合させる様に作られたものであるが、その中の粗度係數 n は色々の場合に對して定められた。公式の形は

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0.00155}{I}}{1 + \left(23 + \frac{0.00155}{I} \right) \frac{n}{\sqrt{R}}} \dots (m\text{-秒單位}) \dots (42)$$

粗度係數 n は次の様な値を取る。

壁面の状態	n
鑄鐵管	0.011 ~ 0.015
眞鑄管及びガラス管	0.009 ~ 0.013
鋳鋼管	0.013 ~ 0.017
煉瓦積	0.011 ~ 0.015
セメント・モルタル	0.010 ~ 0.017
コンクリート	0.012 ~ 0.016
木材	0.010 ~ 0.015
切石積	0.013 ~ 0.017
礫セメント	0.017 ~ 0.030

運河及び溝渠

土、直線で一樣	0.017 ~ 0.025
岩盤、平滑で一樣	0.025 ~ 0.035
岩盤、粗面で不規則	0.035 ~ 0.045
土、普通の状態	0.025 ~ 0.033

自然河川

直線状で満水	0.025 ~ 0.033
直線状で多少の草及び石あり	0.030 ~ 0.040
彎曲して多少の深淺あり	0.033 ~ 0.045
水少く、凹凸あり	0.040 ~ 0.055
草多く餘り流れぬ水路	0.050 ~ 0.150

Manning (マンニング) の公式は

$$v = \frac{1}{n} R^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{2}} \quad \text{又は} \quad C = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}} \dots (\text{m-秒単位}) \dots (43)$$

の形を有するもので、 n の値は Ganguillet-Kutter の公式に於ける値をそのまま用ひるのであるから、(42) を簡易化したものと見る事が出来る。然しこの公式は管に對しても屢々用ひられる。

Forchheimer (フォルハイマー) の公式は Manning の公式を歐洲の河川に於ける實測値に適合する様に修正したものであつて、その形は

$$v = \frac{1}{n} R^{0.7} I^{\frac{1}{2}} \quad \text{又は} \quad C = \frac{1}{n} R^{0.2} \dots (\text{m-秒単位}) \dots (44)$$

であり、之も n の値は Ganguillet-Kutter の公式に於ける n の値を用ひる。

10. 水路の断面形と徑深

人工水路の各種の断面形に就いて徑深 R の値を、潤邊の長さ S 及び流水の断面積 A と共に列記する。

幅 B 、水深 H の矩形断面では

$$S = 2H + B, \quad A = HB, \quad R = \frac{HB}{2H + B} \dots (45)$$

幅 B が水深 H に比して著しく大きい時は

$$S \doteq B, \quad A = HB, \quad R \doteq H \dots (46)$$

梯形断面 (底幅 b 、水深 H 、測壁勾配 θ) に對しては

$$S = b + 2H \operatorname{cosec} \theta, \quad A = H(b + H \cot \theta)$$

$$R = \frac{H(b + H \cot \theta)}{b + 2H \operatorname{cosec} \theta} \dots (47)$$

この時 A を一定にして R を最大ならしめる條件は $\frac{\partial R}{\partial H} = 0$ から $\frac{b}{H} = 2 \tan \frac{\theta}{2}$ であつて、 R

が大きければ平均流速を増すから、この條件を満足する形は同じ断面積で最大の流量を與へ得るものである。

半径 a の圓形断面で水深を H とすれば、圖-50 に示す θ を用ひて

$$S = 2a\theta, \quad A = a^2(\theta - \cos \theta \sin \theta), \quad H = a(1 - \cos \theta)$$

$$R = \frac{a}{2\theta} (\theta - \cos \theta \sin \theta) \dots (48)$$

水が断面を充たして管路の状態となれば $H = 2a$ 、 $\theta = \pi$ であるから

$$S = 2\pi a, \quad A = \pi a^2, \quad R = \frac{a}{2} \dots (49)$$

圓形断面の平均流速が最大となる

様な水深は $\frac{\partial R}{\partial \theta} = 0$ から $\tan 2\theta = 2\theta$ 即ち $\theta \doteq 128^\circ 50'$ 、 $H \doteq 1.64a$ である。然し流量が最大となる爲には $vA = C\sqrt{R}A$ として、 C を常數と見做しても $\sqrt{R}A$ が最大にならねばならない。この條件を満足するものは $\theta \doteq 154^\circ$ 即ち $H \doteq 1.90a$ である。

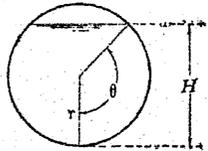
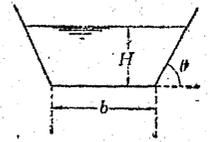


圖-50

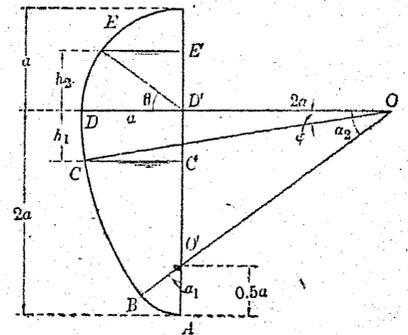


圖-51

標準形の卵形暗渠²⁹⁾は断面の高さが最大幅の 1.5 倍に當り 上の 1/3 は半徑 a の圆弧, 下の 2/3 は半徑 $3a$ の圆弧と, 半徑 $0.5a$ の圆弧の連続した曲線となつてゐる。圖-51 に於て水面が DD' の下で B より上にある場合は

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= a \left(4.791 - 6 \arcsin \frac{h_1}{3a} \right) \\ A_1 &= a^2 \left(3.028 - 9 \arcsin \frac{h_1}{3a} \right) - h_1 a \left(3 \sqrt{1 - \left(\frac{h_1}{3a} \right)^2} - 4 \right) \end{aligned} \right\} \dots(50)$$

水面が DD' よりも上にある時は

$$\left. \begin{aligned} S_2 &= a \left(4.791 + 2 \arcsin \frac{h_2}{a} \right) \\ A_2 &= a^2 \left(3.028 + \arcsin \frac{h_2}{a} \right) + h_2 a \sqrt{1 - \left(\frac{h_2}{a} \right)^2} \end{aligned} \right\} \dots(51)$$

流れが全断面に充ちて管路の状態となれば

$$S_3 = 7.930 a, \quad A_3 = 4.594 a^2, \quad R_3 = 0.579 a \dots(52)$$

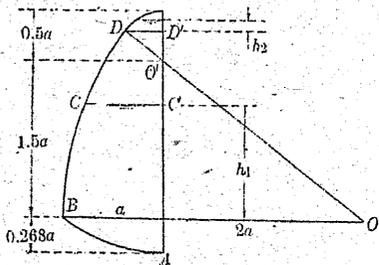


圖-52

圖-52 の様な複合断面の暗渠では、水面が DD' 以下で BB' よりも上にあれば

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= 2a \left(1.048 + 3 \arcsin \frac{h_1}{3a} \right) \\ A_1 &= a^2 \left(0.364 + 9 \arcsin \frac{h_1}{3a} \right) + h_1 a \left(3 \sqrt{1 - \left(\frac{h_1}{3a} \right)^2} - 4 \right) \end{aligned} \right\} \dots(53)$$

水面が DD' 以上にあれば

$$S_2 = a \left(5.960 + \arcsin \frac{4}{5} - \arcsin \frac{0.3a + h_2}{0.5a} \right)$$

29) Egg-shape conduit.

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= a^2 \left\{ 3.130 + 0.25 \left(\arcsin \frac{4}{5} - \arcsin \frac{0.3a + h_2}{0.5a} \right) \right\} \\ &+ 0.5a(0.3a + h_2) \sqrt{1 - \left(\frac{0.3a + h_2}{0.5a} \right)^2} \end{aligned} \right\} \dots(54)$$

流れが全断面を充たしてゐる時は

$$S_3 = 6.882a, \quad A_3 = 3.388a^2, \quad R_3 = 0.492a \dots(55)$$

圖-53 の様な梯形類似の断面では

$$\left. \begin{aligned} S &= 2H_1 \operatorname{cosec} \theta + a\varphi \\ A &= H_1(b + H_1 \cot \theta) \\ &+ \frac{a^2}{2}(\varphi - \sin \varphi) \end{aligned} \right\} \text{但し } \varphi = 2 \arcsin \frac{b}{2a} \dots(56)$$

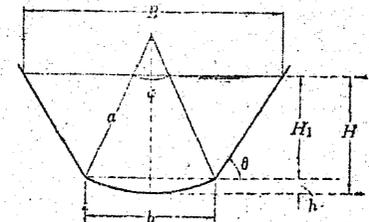


圖-53

11. 常流³⁰⁾と射流³¹⁾

タービュレント流はその速度の大小によつて 2 つの違つた状態がある。例へば 圖-54 の様に堰堤上を水が流下する場合に、堰堤直上の断面 AB よりも上流では流れの亂れ方が著しく速度は緩慢であるが、 AB よりも下流では速度は急に大きくなり、流れの亂れ

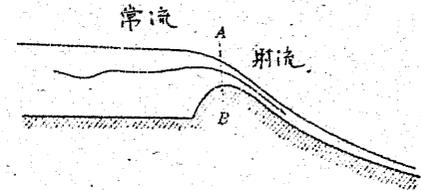


圖-54

方は少くなる。この初めの状態を常流、後の状態を射流と稱する。常流から射流に移る時の水深は流量によつて一定してゐて、之を限界水深³²⁾と言ふ。又射流から常流に復する時は一般に連続的に變化せず、圖-55 の様に突然に變化して變遷部には水平軸の渦を生ずる。この現象を跳水現象³³⁾と言ひ、生

30) Ordinary flow. 31) Jet flow. 32) Critical depth. 33) Hydraulic jump.

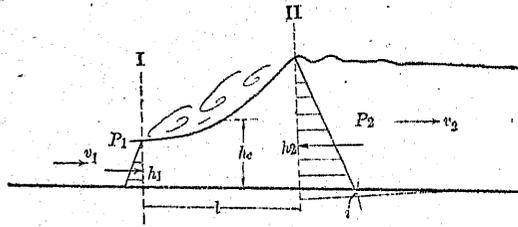


図-55

する渦を表面渦³⁴⁾と稱する。

跳水現象の水理關係を知るには 圖-55 の様に跳水の起る位置の前後に距離 l の二断面 I, II を取り、兩断面に於ける諸量を夫々尾字 1 及び 2 を附して區別すれば、流水が断面 I から II まで流れる間に失ふ運動量は

$$\left[\int_A v \left(\frac{w_0}{g} v dA \right) \right]_2 - \left[\int_A v \left(\frac{w_0}{g} v dA \right) \right]_1$$

即ち
$$\frac{w_0}{g} Q [(1 + \eta_2) v_2 - (1 + \eta_1) v_1]$$

但し Q は流量、 η は l に於て定義した量である。³⁵⁾ (断面平均速度一定数)

外力としては長さ l の間で働く摩擦力は、 l が小さい割合に水深、速度等の變化が著しいから、運動量及び水壓の變化する量に比して省略される。

水壓の差 $P_2 - P_1$ は流水断面を鉛直で且幅 b 矩形と考へれば

$$P_2 - P_1 = \left\{ \frac{w_0}{2} b h_2^2 - \frac{w_0}{2} b h_1^2 \right\} \cos i$$

従つて力積方程式は

$$P_2 - P_1 = - \frac{w_0}{g} Q [(1 + \eta_2) v_2 - (1 + \eta_1) v_1]$$

$$\therefore \left[P + \frac{w_0}{g} Q (1 + \eta) v \right]_1 = \left[P + \frac{w_0}{g} Q (1 + \eta) v \right]_2 \dots (57)$$

34) Surface eddy.

即ち $P + \frac{w_0}{g} Q (1 + \eta) v$ は總べての断面に對して等しい値を持つてゐる。上に求めた $P_2 - P_1$ の値を (57) に代入すれば $1 + \eta$ は常數として

$$\frac{w_0}{g} (1 + \eta) Q (v_1 - v_2) = \frac{w_0 b}{2} (h_2^2 - h_1^2) \cos i$$

$Q = b h_2 v_2$ と書けば

$$\frac{1 + \eta}{g} \cdot v_2 (v_1 - v_2) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_1}{h_2} \right) (h_2 - h_1) \cos i \dots (58)$$

この兩邊に $\frac{1 + \eta}{2g} (v_2^2 - v_1^2)$ を加へれば

$$- \frac{1 + \eta}{2g} (v_1 - v_2)^2 = \frac{1 + \eta}{2g} (v_2^2 - v_1^2) + (h_2 - h_1) \cos i - \frac{1}{2} \frac{(h_2 - h_1)^2}{h_2} \cos i$$

$$\begin{aligned} \therefore \left[\frac{1 + \eta}{2g} v^2 + h \cos i \right]_1 &= \left[\frac{1 + \eta}{2g} v^2 + h \cos i \right]_2 \\ &= \frac{1 + \eta}{2g} (v_1 - v_2)^2 - \frac{1}{2} \frac{(h_2 - h_1)^2}{h_2} \cos i \end{aligned}$$

左邊は I から II まで流れる間のエネルギーの消費量にほゞ等しい。従つて之を ΔE で表せば之は表面渦の爲に失はれるエネルギーと考へる事が出来る。之は書き直せば $\cos i \approx 1$ として

$$\Delta E = \frac{1 + \eta}{2g} (v_1 - v_2)^2 - \frac{1 + \eta}{g} \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1} v_2 (v_1 - v_2) \dots (59)$$

又は
$$= \frac{(h_2 - h_1)^3}{4 h_1 h_2}$$

又 (58) を變形して $1 + \eta = \alpha'$ と書けば³⁵⁾

$$\alpha' \frac{Q^2}{b^2} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) = \frac{g}{2} (h_2^2 - h_1^2) \cos i$$

$$\therefore h_1 h_2 (h_1 + h_2) = \frac{2 \alpha' Q^2}{g^2 \cos i}$$

35) 更に嚴密に計算を行へばこの α' は (31) の $2\alpha - 1 - \eta$ に等しくなる。

h_2 : 常流水深

h_1 : 射流水深

$$h_2 = -\frac{h_1}{2} + \sqrt{\frac{h_1^2}{4} + \frac{2\alpha'Q^2}{g^2b^3\cos^2i}} \quad (60)$$

(60) は本流の水深 h_2 と射流の水深 h_1 との関係とを興へるものであつて、この式中の h_1 と h_2 は可逆的であるから、 h_2 を知つて h_1 を計算する時も式の形は只 h_1 と h_2 の位置が逆になるだけである。 α' の値は普通約 1.1 に取る。

水路底の水平な場合を考へれば $\cos i = 1$ であるから

$$h_2 = -\frac{h_1}{2} + \sqrt{\frac{h_1^2}{4} + \frac{2\alpha'Q^2}{g^2b^3}} \quad (61)$$

限界水深を h_0 とすれば之は h_1 と h_2 が一致する場合であるから、 $h_1 = h_2 = h_0$ と置けば

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{\alpha'Q^2}{g^2b^3}} \quad \text{限界水深} \quad (62)$$

$h < h_0$ ならば射流、 $h > h_0$ ならば常流であつて、その条件は

射流ならば $1 - \frac{\alpha'Q^2}{g^2b^3h^3} < 0$

常流ならば $1 - \frac{\alpha'Q^2}{g^2b^3h^3} > 0$

開水路の全ヘッドを

$$E = h + \frac{\alpha'}{2g} \frac{Q^2}{h^3b^3} \quad (63)$$

で興へ 又 $P + \alpha' \frac{2v_0}{g} Qv$ は共通な大きさを持つてゐるから之を F で表せば

$$\frac{h^3}{2} - Fh + \frac{\alpha'Q^2}{g^2b^3} = 0 \quad (64)$$

限界水深 h_0 は $\frac{\partial E}{\partial h} = 0$ 又は $\frac{\partial F}{\partial h} = 0$ を満足するものなる事は之等の微係数を計算すれば容易に知る事が出来る。 Q の大きさを一定にして h と E 又は F の関係を圖示すれば 圖-56 の様になる。 $h = h_0$ に於て E

も F も最小であつて、 $h < h_0$ 即ち射流部では水深が増せば E 又は F は減少し、 $h > h_0$ 即ち常流部では水深が増せば E 又は F は増大する。従つて跳水現象の場合には射流状態で下流した水が下流にある水深 h_2 の常流状態の流れに移るのに、エネルギーの損失に伴つて次第に水深を増し、(61) で興へられる h_1 に達すれば跳水現象を起す。常流の水深 h_2 は一般に他の条件から定まつてゐる。

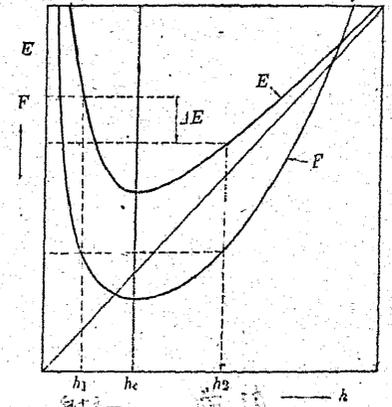


圖-56

又 h_1 と h_2 の差が小さい時には表面渦は起らずに波形水面を生ずる。

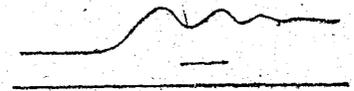


圖-57

この場合を波状跳水と言ふ。

底勾配 i の或水路の中の流れが等流状態になつた時の水深を h_0 とすれば、幅の廣い矩形断面と假定出来る時には $v = C\sqrt{h_0i}$ であるから

$$i = \frac{Q^2}{C^2h_0^3b^3}$$

等流状態の時に常流である様な水路では $h_0^3 > \frac{\alpha'Q^2}{g^2b^3}$ であるから、之と上の關係から

$$i < \frac{g}{\alpha'C^2} \quad (65)$$

同様にして等流状態の時に射流となる様な水路は

$$i > \frac{g}{\alpha'C^2} \quad (66)$$

〔練習問題〕

1. 圖-35 の管 AB 内の壓力分布を求めよ。

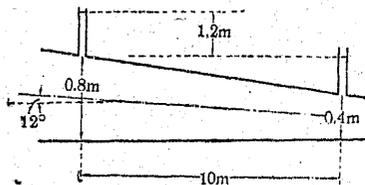


圖-58

2. 圖-58 の様に内径が直線的に減少する管の 2 つの断面で測つた壓力の差が 1.2 m となつた時に、この管を流れる流量を計算せよ。但し摩擦抵抗は無視する。
3. 開水路の幅が急に擴大する時に、水面が逆勾配を呈する事のある理由を説明せよ。

4. 水平斷面積 20 cm^2 の一様圓錐狀水槽があり、その上縁から 1 m の處に斷面積 0.5 cm^2 の流出孔が取り付けられてあるものとする。初め上縁まで水を満たして流出孔を開けば何秒後に水面が流出孔の高さまで下るか。

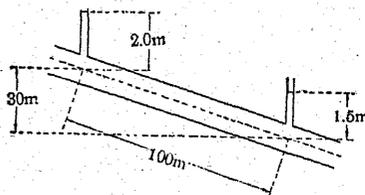


圖-59

5. 長さ 100 m, 内径 3 m の鑄鐵管が圖-59 の様に傾いて置かれて居り、その兩端での壓力ヘッドが上端で 2.0 m, 下端で 1.5 m なる時に、管内を流れる水の速度及び流量を計算せよ。
6. 土砂地盤に掘つた一様斷面の矩形

水路で

$$h = 3 \text{ m}, \quad b = 70 \text{ m}, \quad i = 1/800$$

之等が與へられた時に平均流速を、Bazin, Ganguillet-Kutter, Manning 及び Forchheimer の各公式を用ひて計算せよ。

7. 幅 30 m, 勾配 $1/1,000$ の非常に長い開水路に $50 \text{ m}^3/\text{秒}$ の水を流すには何程の水深が必要か。但し水路壁は普通の土とする。
8. コンクリート管の圓形暗渠で最大 $120 \text{ m}^3/\text{秒}$ までの水を流すには内徑を何程にすればよいか。但し勾配は $1/700$ とする。
9. 高さ 50 m の堰堤から 1 m 當り $12 \text{ m}^3/\text{秒}$ の水が流下する時に、この水を堰堤の下で直ちに常流状態に變へるには水叩きに何程の水深を必要とするか。但し摩

擦抵抗は總べて無視する。

10. 前の問題で表面渦の爲に失はれるエネルギーは何程か。
11. 問題 9 に於て水叩きの水深を 1.5 m とすれば流下した水が跳水をなすまでに何程流れるか。但し堰堤を流下する間の摩擦抵抗は無視する。