

(1) 式は又水と固體或は水自身の内部に附着の性質のある事を示してゐる。

即ち固體面上では $\frac{\partial v}{\partial y}$ の値は有限で面に沿ふ相対速度は零でなければならぬ。又水の内部でも $\frac{\partial v}{\partial y}$ が無限大に、即ち或面を境として速度の急變があつてはならない。之等は何れも τ を無限大にする場合であつて、實際には起り得ない事である。

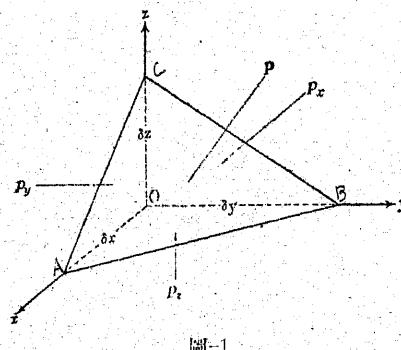
7°C に於ける水の粘性係数は Poiseuille (ポアシューユ) が 0° 乃至 100°C の間で實驗した結果により次の式で表される。

$$\mu = \frac{0.0178}{1 + 0.0337 T + 0.000221 T^2} \quad (\text{C.G.S. 単位}) \dots\dots\dots(2)$$

尙一般の流體 (液體と氣體を通じて) に就いてその粘性係数を μ 、密度を ρ とした時に、 $\frac{\mu}{\rho}$ をその流體の動粘性係数⁴⁾ と言ふ。

2. 靜水壓⁵⁾

流體の内部摩擦は運動がなければ作用せず、又流體中では張力は作用しないから、靜止した水の内部に作用してゐる力は壓力のみである。この壓力を靜水壓と名付ける。靜止した水の中に任意の面を考へれば、この面への切線方向の力即ち内部摩擦力は零であるから、靜水壓は必ずこの面に垂直である。



4) Coefficient of kinematic viscosity.
5) Hydrostatic pressure.

圖-1 の様な座標軸に平行な 3 種の長さが $\delta x, \delta y, \delta z$ の微小四面體を考へる。三角形 ABC の面積を δa 、その方向餘弦を l, m, n とし、又この面に働く水壓の強さ⁶⁾ (単位面積當りの水壓) を p 、 OBC, OCA, OAB の 3 面に働く水壓の強さを夫々 p_x, p_y, p_z と

する。この四面體に作用する力の中で x 方向の力の釣合を考へれば

$$p_x \times (\delta a \cdot l) = (p \cdot l) \times \delta a$$

$$\therefore p_x = p$$

$$\text{同様にして } p_y = p$$

次に重力の方向たる z 方向の力の釣合を考へれば、水の単位體積の重量を w_0 として

$$p_z \times (\delta a \cdot n) = (p \cdot n) \times \delta a + w_0 \cdot \frac{\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z}{6}$$

この方程式の最後の項は他の 2 項に比して高次の無限小であるから、この項は省略出来る。従つて

$$p_z = p$$

$$\text{故に } p_x = p_y = p_z = p \dots\dots\dots(3)$$

即ち面 ABC の方向の如何に拘らず、この面に働く靜水壓の強さ p は p_x, p_y 及び p_z に等しい。之は流體中の或一點に働く靜水壓の強さは總べての方向から一樣である事を意味する。

水面からの深さ h の點に於ける靜水壓の強さ p を求めるには、この點の上に立つ断面積 da の鉛直柱體の釣合を考へれば

$$pdal = h \cdot da \cdot w_0 + (\text{面積 } da \text{ に働く大氣壓})$$

$$\therefore p = w_0 h + (\text{大氣壓の強さ}) \dots\dots\dots(4)$$

實際問題に於ては大氣壓は一定と見做して之を水壓の基準に取り、次の式を以て表す。

$$p = w_0 h \dots\dots\dots(5)$$

次に圖-2 の様な密閉した容器に水を満たし、 A 及び B に於ける水壓の強さを夫々 p_1, p_2, A と B の高さの差を h とすれば

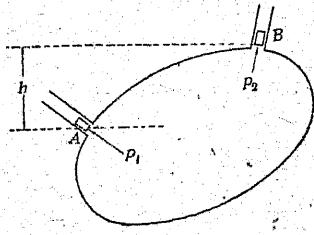


圖-2

$$p_2 = p_1 + w_0 h$$

活栓 A, B に外から壓力を加へて容器内部の水の壓力を増加させる。この時 p_1 が $p_1 + \Delta p_1$ に、 p_2 が $p_2 + \Delta p_2$ に上つたものとすれば

$$p_2 + \Delta p_2 = p_1 + \Delta p_1 + w_0 h$$

$$\therefore \Delta p_2 = \Delta p_1$$

即ち壓力の増加は A, B の位置に關係なく容器内の水全體を通じて一様である。又或一部に壓力を加へればその壓力は容器全體に一様に傳達される。之を Pascal (パスカル) の原理と言ふ。

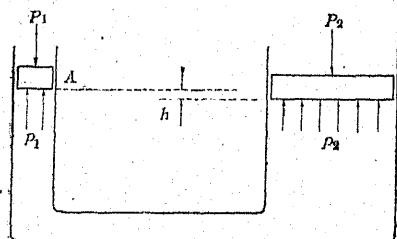


圖-3

[問題 1] 圖-3 の様な U 字管の兩脚 A, B の断面積を夫々 a_1, a_2 とし、各々の活栓に夫々 P_1, P_2 なる荷重を載せた時に兩者が釣合つたものとする。 P_1 と P_2 の比を求めよ。但し A と B の兩活栓

の高さはほゞ等しく、 P_1 と P_2 は何れも相當に大きいものとする。

(解) A, B 兩活栓の下面に働く水壓の強さを夫々 p_1, p_2 、兩栓の高さの差を h とすれば

$$p_2 = p_1 + w_0 h$$

各活栓の釣合を考へれば、 $P_1 = a_1 p_1$ 、 $P_2 = a_2 p_2$ であるから

$$\frac{P_2}{a_2} = \frac{P_1}{a_1} + w_0 h$$

然るに P_1, P_2 は大きな量であり、 h は小さいから、一般には最後の項は省略して差支へない。

$$\therefore \frac{P_1}{a_1} = \frac{P_2}{a_2}$$

即ち $\frac{a_2}{a_1}$ の比を非常に大きくして置けば、 P_1 に或力を加へて、それよりも遙かに大きい力 P_2 と釣合はしめる事が出来る。

[問題 2] 圖-4 は差の極めて小さい 2 つの水壓の強さ p_1 及び p_2 の差を測定する爲の微壓計⁷⁾ の構造を示す。之は等脚の U 字管の兩脚を夫々に壓力 p_1 及び p_2 の水に連絡し、管の彎曲部をベンゾール、石油等の様な水よりも比重の稍小さい液體（比重 w' ）で満たして置く。この時 U 字管の兩脚に現れる水位の差 z は

$$z = \frac{p_1 - p_2}{w_0 - w'} \quad \dots \dots \dots (6)$$

を以て與へられる事を證明せよ。

(解) 圖-4 の様に記號を定め、頂點 C の左右に働く液體壓力の釣合を考へれば

$$p_1 - z_1 w_0 - z_0 w' = p_2 - z_2 w_0 - (z_0 + z) w'$$

之と $z_1 - z_2 = z$ の關係から直ちに (6) 式が得られる。

3. 靜水力学⁸⁾ の基本方程式

静水中に圖-5 の様な微小直六面體 $ABCDEFGH$ の釣合を考へる。その 3 邊は各座標軸に平行で、長さが夫々 $\delta x, \delta y, \delta z$ とする。水の單位質量に働く外力の 3 成分を X, Y, Z とし、静水壓の強さを面 $ABCD$ に働くものを ρ とすれば、面 $EFGH$ に働くものは $\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x$ である。故に x 方向の力の釣合は、

$$\rho \delta x \delta y \delta z \cdot X - \rho \cdot \delta y \delta z + \left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z = 0$$

7) Differential manometer. 8) Hydrostatics.

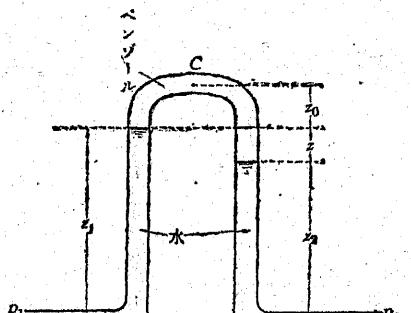


圖-4 微壓計

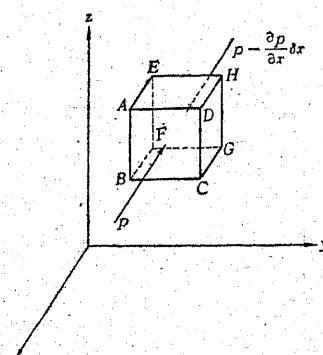


圖-5

但し ρ は水の密度を表す。同様にして

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z$$

然るに $dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$

であるから、之に上の関係を代入すれば

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz) \dots\dots\dots (7)$$

水中の壓力の等しい點を連ねた面、即ち等壓面⁹⁾は $dp = 0$ にて與へられるのであるから、この面の方程式は

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \dots\dots\dots (8)$$

[問題 3] 半径 r の圓盤の中に入れた水に回轉速度 ω の回轉を與へた時に、その水の自由水面の形がく曲面を計算せよ。

(解) 自由水面の形は軸對稱であるから図-6の様な断面に就いて考へればよい。この水は静水ではないが、 x 方向には速度がない故この方向に關する限り静水と考へてよい。

然し回轉速度 ω の爲に x 方向に遠心力を生

する。遠心力は眞の外力ではないが、回轉運動による見掛けの外力であつて、之を $X = \alpha$ とする。又 z 方向には重力が作用してゐるから $Z = g$ である。自由水面上では $p = 0$ であつて、その方程式は

$$\alpha dx + g dz = 0$$

然るに $\alpha = \frac{(\omega x)^2}{x} = \omega^2 x$ であるから、之を上の式に代入すれば

9) Equipressure surface.

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{\omega^2 x}{g} \quad \therefore z = - \frac{1}{2g} \omega^2 x^2 + C$$

$x = 0$ で $z = 0$ とすれば $C = 0$

$$\therefore z = - \frac{1}{2g} \omega^2 x^2$$

周邊に於ける水面の高さ h_0 は

$$h_0 = - \frac{1}{2g} \omega^2 r^2$$

4. 平面に作用する静水壓

静水中に置かれた任意の平面の片側に働く静水壓を計算する。平面が水深 H の處に水平に置かれてゐる時は、面の上では何れの點でも水壓の強さは大氣壓以上 $w_0 H$ であるから、面の全面積を A とすれば之に働く全壓力 P は $w_0 A H$ である。

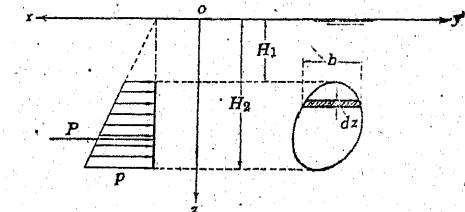


圖-7

圖-7 の様に任意の形の平面が鉛直に置かれてゐる時は、多數の水平線でこの面を幅 dz の帶狀部分に分ければ、その 1 つに働く壓力 dP は

$$dP = \delta \cdot dz \cdot w_0 z$$

但し z はこの帶狀部分までの水面からの水深、 δ はこの部分の長さである。従つて全平面に作用する水壓は

$$P = \sum_{z=H_1}^{H_2} w_0 \delta z dz = w_0 \int_{H_1}^{H_2} \delta z dz \dots\dots\dots (9)$$

(9) の右邊の積分はこの面積の δz 軸の周りの面積モーメントを表すものであるから、この面の面積を A 、その重心の水面からの深さを H_G とすれば

$$P = w_0 H_G A \dots\dots\dots (10)$$

故に P の作用點の深さも射影面のみに就いて考へたものと同じである。

[問題 5] 水平面と 45° 傾いた直徑 a の圓形平面に働く靜水壓を計算せよ。

但し圓の中心までの深さを b とする。

(解) yoz 面への射影 A_x は半軸長 $\frac{a}{2}$ 及び $\frac{a}{2\sqrt{2}}$ の橢圓である。従つて射影面積は

$$A_x = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{2}}$$

従つて靜水壓の水平分力は

$$P_x = w_0 b \frac{\pi a^2}{4\sqrt{2}}$$

鉛直分力は (15) から

$$P_z = w_0 \left(\frac{\pi a^2}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) b = w_0 b \frac{\pi a^2}{4\sqrt{2}} = P_x$$

作用點までの水深は

$$H_o = b + \frac{1}{b} \left(\frac{a}{4\sqrt{2}} \right)^2 = b + \frac{a^2}{32b}$$

5. 曲面に作用する靜水壓

平面が 3 つの座標面の何れにも傾いてゐる時は、初圖-9 の様に ox' 軸、 oy' 軸を夫々線 PQ (面 A と水平面 oxy 面との交線) に垂直及び平行になる様に擇ぶ。面 A の $y'oz$ 面上の射影を $A_{x'}$ とすれば x' 軸方向の靜水壓の分力は

$$P'_x = w_0 A_{x'} H_G$$

故に x 方向及び y 方向の靜水壓の分力は

$$P_x = P'_x \cos \angle xox' = w_0 A_x H_G$$

$$P_y = P'_x \sin \angle xox' = w_0 A_x H_G$$

即ちこの場合も鉛直座標面上の射影面に就いて考へればよい。又 P_z はこの面を底とする鉛直柱體の重量に等しい。

靜水中に置かれた曲面の片側に働く靜水壓は上の結果から簡単に求める事が出来る。圖-10 の様に曲面を多数の微小部分に分け、その中の 1 つ dA に就いて考へれば之は平面と見做す事が出来る。従つて dA に働く靜水壓の水平分力は、その水平射影面 dA_x 、 dA_y に働く水壓であり、鉛直分力は dA を底とする水面までの高さの水柱の重量である。

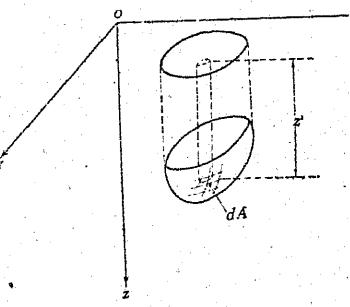


圖-10

曲面全體に働く靜水壓はこの微小部分への水壓の總和であるから、水平壓力は夫々 yoz 面及び yoz 面への射影面に働く水壓に等しく、鉛直壓力はこの曲面全部を底とする水面までの高さの柱體の重量になる。但し曲面の形によつては座標面上の射影の一部が重なる事があるが、その時は圖-11 の様に重なる部分は別に分けて A_{x1} 、 A_{x2} の如くに考へ、兩者に働く壓力の符號を反対にする。

尚 P_x の作用點の座標は A_x の重心であつて、之を (y_x, z_x) とすれば

$$y_x = \frac{1}{P_x} \int_{A_x} w_0 y z dA_x, \quad z_x = \frac{1}{P_x} \int_{A_x} w_0 z^2 dA_x \quad \dots \dots \dots (17)$$

P_y に對しても同様である。 P_z の作用點の位置は柱狀體の重心を通る線上であつて、之を (x_z, v_z) とすれば

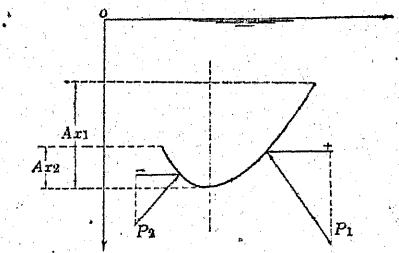


圖-11

$$x_z = \frac{1}{P_z} \int_{A_z} w_0 v z dA_z, \quad y_z = \frac{1}{P_z} \int_{A_z} w_0 v z dA_z \quad \dots \dots \dots (18)$$

6. 静水壓曲線¹²⁾

前節に述べた所により任意の形の面に働く水壓を計算する事が出来るが、この面を或位置にて固定すれば面には一般に水壓の爲の曲げモーメントが作用する。然し面に特殊の形を擇べば直應力のみで、曲げモーメントは全然働く様にする事が出来る。一般に考へられるのは水平壁面であつて、従つて

その垂直断面に就いて考へればよい。而してこの断面曲線を静水壓曲線と言ふ。

圖-12 の様な水平桶状の面では面内に生ずる直應力は張力である。静水壓曲線の微小部分 ds に作用する力の釣合は、水壓 pds と兩端の張力 T 及び $T + \frac{dT}{ds} ds$ の各分力の平衡である。 p 及び T の x 方向及び z 方向の成分を夫々 p_x, T_x 及

び p_z, T_z とすれば、 x 方向の力の釣合は

$$T_x - \left(T_x + \frac{dT_x}{ds} ds \right) - p_x ds = 0$$

z 方向には

$$T_z - \left(T_z + \frac{dT_z}{ds} ds \right) + p_z ds = 0$$

$$\therefore \frac{dT_x}{ds} + p_x = 0, \quad \frac{dT_z}{ds} - p_z = 0 \quad \dots \dots \dots (19)$$

然るに

$$T_x = T \frac{dx}{ds}, \quad T_z = T \frac{dz}{ds}$$

$$p_x = p \frac{dx}{ds}, \quad p_z = p \frac{dz}{ds}$$

12) Hydrostatic curve.

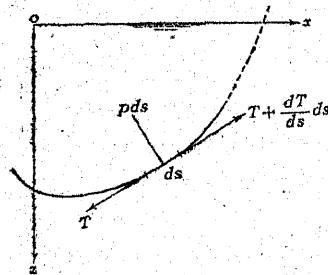


圖-12

且 $p = w_0 z$ であるから、之等を (19) に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) + \frac{w_0}{2} \frac{dz^2}{ds} &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) - w_0 z \frac{dx}{ds} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (20)$$

この第1式を積分すれば

$$T \frac{dx}{ds} + \frac{w_0}{2} z^2 + C = 0$$

C を定める爲の條件としては $\frac{dx}{ds} = 0$ になる點 (圖-13 の D) の水深 b が與へられたものとする。

$$C = - \frac{w_0}{2} b^2$$

$$\therefore T \frac{dx}{ds} = \frac{w_0}{2} (b^2 - z^2)$$

$$\text{之から } T \frac{dz}{ds} = T \frac{dz}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{w_0}{2} (b^2 - z^2) \frac{dz}{dx}$$

之を (20) の第2式に代入すれば

$$\frac{w_0}{2} \frac{d}{ds} \left\{ (b^2 - z^2) \frac{dz}{dx} \right\} = w_0 z \frac{dx}{ds}$$

$\frac{dz}{dx} = y$ と置けば

$$y \frac{d}{dz} \left\{ (b^2 - z^2) y \right\} = 2z$$

$$\frac{y dy}{1 + y^2} = \frac{2z dz}{b^2 - z^2}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \log (1 + y^2) = - \log (z^2 - b^2) + c' \quad (z \geq b)$$

$$\therefore (1 + y^2)(z^2 - b^2)^2 = c''$$

水深最大なる點 A に於ては $y = \frac{dz}{dx} = 0$ であるから、この點の水深を a とすれば、 $c'' = (a^2 - b^2)^2$ となつて

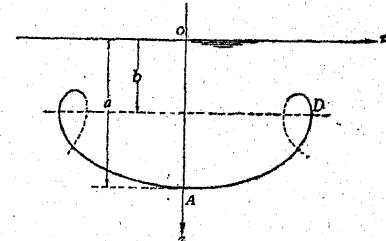


圖-13

$$\begin{aligned} 1+y^2 &= \frac{(a^2-b^2)^2}{(z^2-b^2)^2}, \\ \therefore \frac{dz}{dx} &= \pm \sqrt{\frac{(a^2-b^2)^2}{(z^2-b^2)^2}-1} \\ x = \mp \int_a^x \frac{(z^2-b^2) dz}{\sqrt{(a^2-b^2)^2-(z^2-b^2)^2}} \end{aligned} \quad \left. \right\} \dots\dots\dots (21)$$

±符号の中で - の方は $x < 0$ の部分を表す。(21) によつて與へられる静水圧曲線を水圧垂曲線¹³⁾と言ふ。この場合の張力の大きさ T を計算するには, ds の水平よりの傾角 θ とその曲率半径 ρ を用ひて (19) を書き直せば

$$d\left(T \frac{dx}{ds}\right) = \rho \sin \theta \cdot \rho d\theta$$

$$d\left(T \frac{dz}{ds}\right) = -\rho \cos \theta \cdot \rho d\theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta dT - T \sin \theta d\theta &= \rho \sin \theta \cdot \rho d\theta \\ \sin \theta dT + T \cos \theta d\theta &= -\rho \cos \theta \cdot \rho d\theta \end{aligned} \quad \left. \right\} \dots\dots\dots (22)$$

(22) から

$$Td\theta + \rho \rho d\theta = 0$$

$$T = -\rho \dot{\theta} = -w_0 z \cdot \rho \quad \dots\dots\dots (23)$$

又一方, (22) の兩式から T を消去すれば

$$dT = 0 \quad \text{即ち} \quad T = \text{const.}$$

即ち水圧垂曲線は $z\rho = \text{const.}$ で表され, その直應力は總べての點に於て同じである。然るに曲率半径 ρ は

$$\rho = (1+y^2)^{\frac{3}{2}} / \frac{dy}{dx}$$

$$\text{且} \quad \frac{dy}{dx} = y \frac{dy}{dz} = y \frac{2z}{y} \frac{1+y^2}{b^2-z^2} = 2z \frac{1+y^2}{b^2-z^2}$$

$$\therefore \rho = \frac{(b^2-z^2)\sqrt{1+y^2}}{2z} = -\frac{a^2-b^2}{2z} < 0 \quad \left. \right\} \dots\dots\dots (24)$$

$$T = -w_0 z \rho = \frac{w_0}{2} (a^2 - b^2) > 0$$

13) Hydrostatic catenary.

直應力が壓力である場合の靜水壓曲線

は水壓拱曲線¹⁴⁾と言ひ, 解法は前の場合と同じであるが, a は最小水深であるから, $a \leq z \leq b$ となり, 従つて $\rho > 0$, $T < 0$ である。又曲線の方程式は

$$\frac{dz}{dx} = \pm \sqrt{\frac{(b^2-a^2)^2}{(b^2-z^2)^2}-1} \quad \therefore (25)$$

圖-14

曲率半径 ρ 及び壓力 T は (24) にて與へられる。

7. Archimedes の原理

圖-15 の甲の様に水中に靜止してゐる物體に働く水壓を考へる。靜水壓の水平分力は鉛直坐標面上の射影面への靜水壓に等しいから, 何れの方向から見ても必ず物體の表と裏から等しい水壓が加はつてゐる。即ち水平方向の水壓は常に釣合つてゐる。

靜水壓の鉛直分力は上側の

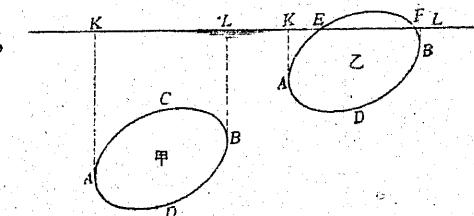


圖-15

面 ACB には, 之を底とする壩體 $ACBLK$ の體積の水の重量に等しい水壓が下向きに加はり, 下側の面 ADB には同じく之を底とする壩體 $ADBLK$ の體積の水の重量に等しい水壓が上向きに加はる。従つて全體としての鉛直壓力は物體の體積に等しい容積の水の重量で表され, 方向は上向きである。この力を浮力¹⁵⁾と言ひ物體が平衡してゐる時にはその作用線は物體の重心を通る。

圖-15 の 乙 の様に物體が浮かんでゐる時は水平壓力が釣合つてゐる事は前と同じである。鉛直壓力は下向きには AEK , BLF の様な部分の水の重

14) Hydrostatic arch. 15) Buoyancy.

量に等しく、上向きには ADB を底とする構體 $KADBL$ の體積の水の重さに等しい。従つて全體としての鉛直壓力は上向きに $EADBF$ の部分即ち水面下にある物體の體積に等しい水の重量で表はされる。この時は靜止してゐるならば浮力の作用線は物體の重心を通ると共に、水面下にある物體の體積の重心を通る。後者を浮力の作用點と考へて浮心¹⁶⁾と稱する。

上に述べた浮力の大きさに關する法則を Archimedes (アルキメデス) の原理と言ふ。

8. 對稱形の浮體の釣合

物體の形が yoz 面に關して對稱で長さの方向に一樣な場合又は一樣でなく

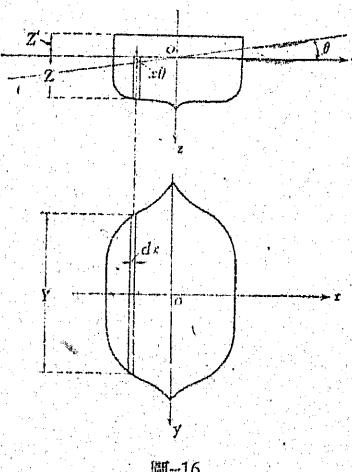


圖-16

とも、圖-16 の様に長さの方向の軸即ち oy 軸の周りに物體が傾いても、浮力が重心と同じ鉛直断面内に留まつてゐる事が明らかな場合には、問題は二
次元的に取扱はれる。

xoy 面を水面に取つて、物體が z 軸の周りに或小さい角 θ だけ傾いた時の安定を考へて見る。但し z 軸は 圖-17 の AA' (水面が物體の断面を切る線) の中點を通るものとするのであつて、従つて傾斜によつて新たに水中に入れる部分と水上に出る部分の體積は等しい。而して θ が小さい限り傾いて後も oy 軸は BB' を 2 等分すると考へてよい。

yoz 面に關して對稱形の物體では重心 G 及び浮心 C は何れも z 軸上にある。之が z 軸の周りに θ だけ回轉した結果水面が BB' に移つたものと

すれば、 OAB は新たに水上に出てこの部分には浮力が失はれて下向きの力が加はり、 $OA'B'$ は水面下に入つてこの部分には上向きの浮力が加はる。而して

$$\text{面積 } OAB = \text{面積 } OA'B'$$

であるから、此處に偶力を生じて物體を oy 軸の周りに回轉させ様とする。この偶力が物體の傾きを回復して靜止の

位置に戻すに充分な時は、この浮體の釣合は安定¹⁷⁾であると言ひ、反対に傾きが益々増加する様な時は釣合は不安定¹⁸⁾であると言ふ。又この偶力の影響が零になる時は浮體は傾いたまゝ静止するのであつて、その釣合は中立¹⁹⁾であると言ふ。

浮體が傾けば水中にある部分の形が變化し、従つて浮力の作用線は移動する。この浮力の作用線、従つて浮心の移動によつて重力と浮力とが 1 つの偶力を形成する。この偶力は浮體の釣合を定めるものであつて、浮心は BB' 以下の部分の重心で圖-17 で 3 力 g_1 , g_2 , W の合力の作用點から定まる。圖の場合は偶力は右廻りであるから浮心 C は右方に移る。新しい浮力の作用線が oz 軸と交る點を M とし、作用線上に C' を $MC = MC'$ となる様に定めれば、 C' はほゞ新しい浮心と一致する。

M は浮體の釣合上常に問題とされるものであつて、之を傾心²⁰⁾と名付ける。傾心の位置が重心 G の上に来れば釣合は安定なる事は明らかであつて、

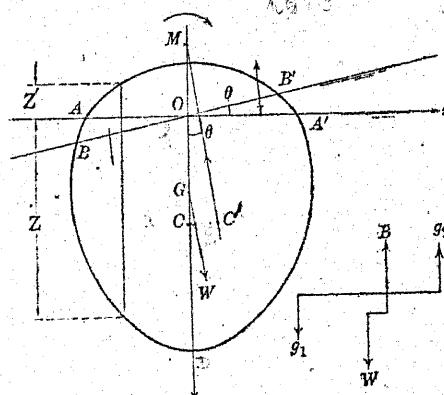


圖-17

16) Center of buoyancy.

17) Stable. 18) Unstable. 19) Neutral. 20) Metacenter.

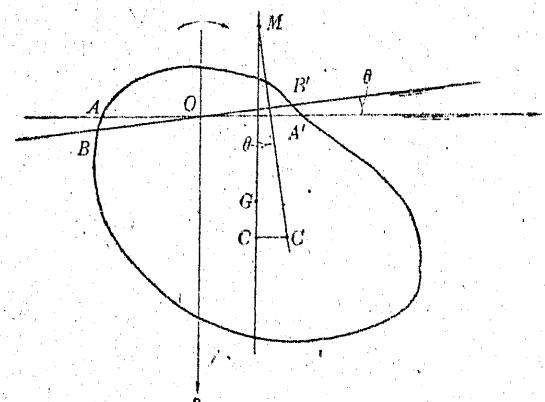


図-19

の浮心の位置を C' とする。

この物體の排水量を w_0V , θ だけ傾いた爲に新しく水中に入り, 又は水上に出た部分の體積を dV とすれば g_1 , g_2 に働く力は w_0dV 及び $-w_0dV$ であり, 浮心 C に働く力は $-w_0V$ である。而してこの3つの合力が C'

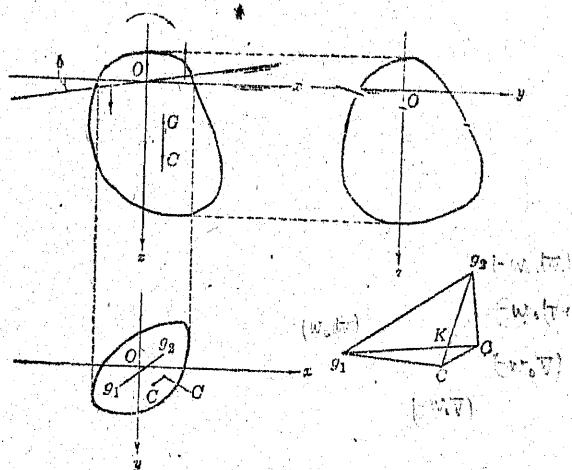


図-20

を通る浮力 $-w_0V$ となつてゐるのである。そこで先づ C に於ける $-w_0V$ と g_2 に於ける $-w_0dV$ の2力の合力の作用線の xoy 面上の位置を K とし, C , C' に就いてもこの面上の射影を考へれば

$$CK : Kg_2 = dV : V$$

K に作用する力の大きさは $-w_0(V + dV)$ であつて, 之と g_1 に於ける w_0dV との合力が C' を通るのであるから

$$CK : Cg_1 = dV : (V + dV)$$

$$\therefore CK : \frac{K}{g_1} = dV : V$$

$$CC' \parallel g_1g_2$$

即ち浮心は g_1g_2 の線に平行に動き, その結果として起る偶力は一般に最初の回転軸の周りに起らず, 直線 g_1g_2 に垂直な線の周りに起る。若し最初の回転軸 oy が g_1g_2 に垂直になつてゐれば, 問題は今までに取扱つて來たものと同様である。然しこの兩者が垂直になつてゐない時は浮力によつて生ずる偶力は oy 軸のみならず, ox 軸の周りにも回転の成分を有する。その結果一般には浮體に振動が起つて, 回転軸がそれに對する g_1g_2 の線に垂直になる様な回転に近付かうとするのである。

浮體の水面による断面形によつて最初の回転軸 oy がそれに對する g_1g_2 の線に垂直になる様なもの

は1つ又は數個しか存在しないのが普通である。

例へば 図-21 に見る様に正方形, 矩形, 楕圓形等の断面の場合にはこの様な

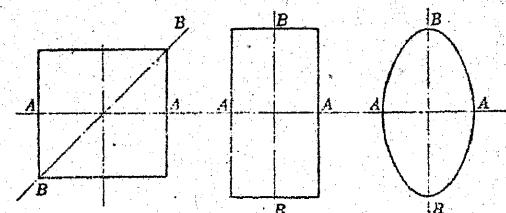


図-21

oy 軸の位置に何れも2種ある。而して實際に浮體が傾く時はその中で最も傾き易い軸の周りの回転に近付くので, その軸は上の様な oy 軸の中で慣性モーメント I_y の最小な軸である事は(28)から明らかである。即ち 図-21

で言へば正方形の場合は AA, BB の兩軸の周りの I_y の値は同じであるから何れの軸の周りにも同様に傾き、矩形及び橢圓形の場合には AA 軸の周りには傾かずして BB 軸の周りに傾かうとする。但し初めから AA 軸の周りに傾けた時は別である。

10. 浮體の鉛直振動

任意の形狀の浮體が静止の位置の上下に鉛直振動をする場合を考へる。静止してゐる時に水面以下 z の處の水平断面の面積を $A(z)$ とする。浮體が静止の位置から z だけ沈んだ時の浮力の増加は

$$w_0 \int_z^0 A(z) dz = - w_0 \int_0^z A(z) dz$$

又この時の上向きの加速度は、 $-\frac{d^2 z}{dt^2}$ であるから抵抗を無視すれば、

$$-\frac{w_0 V}{g} \frac{d^2 z}{dt^2} + w_0 \int_0^z A(z) dz = 0$$

$$\therefore -\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{g}{V} \int_0^z A(z) dz \quad \dots \dots \dots (29)$$

静止の位置から z だけ浮かんだ時にも全然同じ形の式となるから、(29) の解を求めればよい。この兩邊に $2 \frac{dz}{dt}$ を乘じて變形すれば

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = -\frac{2g}{V} \left(\int_0^z A(z) dz \right) \frac{dz}{dt}$$

$$\therefore \frac{dz}{dt} = \left[-\frac{2g}{V} \int_{z_0}^z \int_0^z A(z) dz dz + C_1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$z = z_0$ にて $\frac{dz}{dt} = 0$ とすれば $C_1 = 0$ となる。更に之を積分すれば

$$t = \int_0^z \frac{dz}{\frac{2g}{V} \left[-\int_{z_0}^z \int_0^z A(z) dz dz \right]^{\frac{1}{2}}} + C_2 \quad \dots \dots \dots (30)$$

$t = 0$ にて $z = 0$ とすれば $C_2 = 0$ となる。 $A(z) = A = \text{const.}$ なる時は (29) は

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{g}{V} Az \quad \dots \dots \dots (31)$$

$$\therefore z = K_1 \sin \sqrt{\frac{gA}{V}} t + K_2 \cos \sqrt{\frac{gA}{V}} t$$

$$t = 0 \text{ にて } z = 0, z = z_0 \text{ にて } \frac{dz}{dt} = 0 \text{ から } K_2 = 0, K_1 = z_0$$

$$z = z_0 \sin \sqrt{\frac{gA}{V}} t \quad \dots \dots \dots (32)$$

浮體を或程度以上沈めて置いて急に離せば、浮力が非常に大きい爲に浮體が全然空中に飛び出す事もある。

11. 浮體の横振動

浮體が回轉軸の周りに θ_0 だけ傾いてゐる時を考へると、この時は浮體に偶力が作用してゐるから、之を放置すれば運動を起す。而してこの運動が振動となるのは浮體の釣合が安定な場合、即ち $h > 0$ なる場合に限り、その時の偶力の大きさは $Wh\theta$ である。運動に對する水の抵抗を無視すれば

$$Wh\theta + I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0$$

I は回轉軸の周りの浮體全體の慣性モーメントであつて、回轉半径を k で表せば

$$I = k^2 \frac{W}{g}$$

$$\therefore \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{gh}{k^2} \theta = 0 \quad \dots \dots \dots (33)$$

$$t = 0 \text{ で } \theta = \theta_0, \frac{d\theta}{dt} = 0 \text{ とすれば } h > 0 \text{ であるから}$$

$$\theta = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{gh}{k}} t$$

この振動の週期は $T = \frac{2\pi k}{\sqrt{gh}}$ となる。

水の抵抗を考慮する場合には、運動が遅いから抵抗は線速度に比例すると

考へられるのであるが、浮體から見れば回転の角速度に比例するものと見做し得る。この抵抗力を $f \frac{d\theta}{dt}$ で表せば

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{fg}{k^2 W} \frac{d\theta}{dt} + \frac{gh}{k^2} \theta = 0 \quad \dots\dots\dots\dots(34)$$

$$\frac{fg}{k^2 W} = p, \quad \frac{gh}{k^2} = q \quad \text{とおけば}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + p \frac{d\theta}{dt} + q\theta = 0$$

$p > 0$ 即ち釣合の安定な場合を考へれば、(34) の解は p と q の大きさの關係によつて次の3つがある。

$$\frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}) = m_1, m_2$$

とすれば、($m_1 < 0, m_2 < 0$)

$$p^2 > 4q \text{ ならば } \theta = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t}$$

$$C_1 = -\frac{m_2}{\sqrt{p^2 - 4q}} \theta_0, \quad C_2 = \frac{m_1}{\sqrt{p^2 - 4q}} \theta_0$$

$$p^2 = 4q \text{ ならば } \theta = \theta_0 e^{-\frac{p}{2}t} \left(1 + \frac{p}{2}t \right)$$

$$p^2 < 4q \text{ ならば } \theta = \theta_0 e^{-\frac{p}{2}t} \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{4q - p^2} \cdot t \right)$$

$$+ \theta_0 \frac{pe^{-\frac{p}{2}t}}{\sqrt{4q - p^2}} \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{4q - p^2} t \right)$$

振動の状態となるのはこの最後の場合、即ち $\frac{fg}{k^2 W^2} < 4h$ の場合のみであつて、之は抵抗の比較的小さい場合に相當し、運動は減衰振動である。然しこれは水平の浮體の振動に於ては必ず $p^2 < 4q$ と見て差支へないのである。

12. 水面のうねりによる船の振動

水面のうねりによる船の振動は鉛直振動と横振動とから成ると考へる事が出来るが、先づ鉛直振動のみに就いて考へる。静水上に浮かんだ時に水面の位置にあつた水平断面 AB が、うねりによつて鉛直振動を起してゐる時

絶対の移動距離を $*z$ 、その時の水

面からの相對的移動距離を ζ とし、

$z = \zeta + \eta$ で表す。船の平均吃水

深を h_0 とすれば $h_0 = \frac{V}{A}$ であ

つて、又水の抵抗は船と水との相

對速度に比例すると考へられるか

ら、この抵抗を $f \frac{d\zeta}{dt}$ を以て表

せば

$$\frac{w_0 V}{g} \frac{d^2 z}{dt^2} + f \frac{d\zeta}{dt} + w_0 A \zeta = 0$$

$$\frac{fg}{w_0 V} = \epsilon \text{ と書けば}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \epsilon \frac{d\zeta}{dt} + \frac{g}{h_0} \zeta = 0 \quad \dots\dots\dots\dots(35)$$

之に $\zeta = z - \eta$ を代入し、 $\frac{g}{h_0} = \frac{gA}{V} = \alpha_0^2$ と書けば

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \epsilon \frac{dz}{dt} + \alpha_0^2 z = \epsilon \frac{d\eta}{dt} + \alpha_0^2 \eta \quad \dots\dots\dots\dots(36)$$

η は水面の形を表すものであるから

$$\eta = \eta_0 \sin \frac{2\pi}{J} (x - at) = \eta_0 \sin (\alpha x + \beta t)$$

の形で表す事が出来るが、考へてゐる位置を $x = 0$ に取れば次の様に書けばよい。

$$\eta = \eta_0 \sin \beta t, \quad \frac{d\eta}{dt} = \eta_0 \beta \sin \beta t$$

従つて之を (36) に代入すれば

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \epsilon \frac{dz}{dt} + \alpha_0^2 z = \eta_0 (\epsilon \beta \cos \beta t + \alpha_0^2 \sin \beta t) \quad \dots\dots\dots\dots(37)$$

之は強制振動の微分方程式であつて、次の形の解を有する。

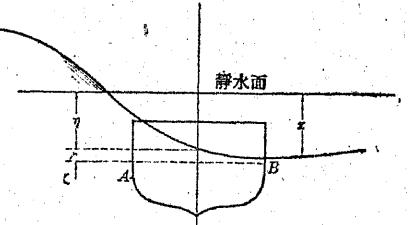


圖-22

$$z = A \cos \beta t + B \sin \beta t$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{-\eta_0 \epsilon \beta^3}{(\alpha_0^2 - \beta^2)^2 + \beta^2 \epsilon^2}, & B &= \frac{\eta_0 [(\alpha_0^2 - \beta^2) \alpha_0^2 + \beta^2 \epsilon^2]}{(\alpha_0^2 - \beta^2)^2 + \beta^2 \epsilon^2} \end{aligned} \right\} \cdots (38)$$

この振幅は

$$z_0 = \sqrt{A^2 + B^2} = \eta_0 \sqrt{\frac{\beta^2 \epsilon^2 + \alpha_0^4}{(\alpha_0^2 - \beta^2)^2 + \beta^2 \epsilon^2}} \cdots \cdots \cdots (39)$$

従つて振幅が最大となるのは $\alpha_0 = \beta$ の場合であつて、この時の振幅 z_1 は

$$z_1 = \eta_0 \frac{\sqrt{\beta^2 + \epsilon^2}}{\epsilon}$$

次にうねりによる横振動を考へる。船の傾きの角を φ 、水面の傾きの角を χ とすれば船の水面との相対的の傾きの角は $\varphi - \chi$ である。

重力と浮力による偶力は $CG = a^{22)}$ とすれば

$$-Wa\varphi + w_0 I_y (\varphi - \chi)$$

I_y は前に定義したと同じく、静水面断面の y 軸の周りの慣性モーメントである。浮體全體の回転軸の周りの慣性モーメントを I とし、流體抵抗は前節と同様に考へれば

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \epsilon I \frac{d(\varphi - \chi)}{dt} - Wa\varphi + w_0 I_y (\varphi - \chi) = 0 \cdots \cdots \cdots (40)$$

$I = \frac{W}{g} k_0^2$, $I_y = Ak^2$ と書き、平均吃水を h_0 とすれば、 $I = \frac{w_0 A}{g} h_0 k_0^2$ であるから

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \epsilon \frac{d\varphi}{dt} + \frac{(-ah_0 + k^2)g}{h_0 k_0^2} \varphi = \epsilon \frac{d\chi}{dt} + \frac{gk^2}{h_0 k_0^2} \chi \cdots \cdots \cdots (41)$$

22) G が上にある時を正とする。

傾心 M と重心 G の距離 h は (28) により

$$h = \frac{I_y}{V} - a = \frac{k^2}{h_0} - a$$

$$\therefore \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \epsilon \frac{d\varphi}{dt} + \frac{gh}{k_0^2} \varphi = \epsilon \frac{d\chi}{dt} + \frac{gk^2}{h_0 k_0^2} \chi \cdots \cdots \cdots (42)$$

水面の波の形は $\eta = \eta_0 \sin(\alpha x + \beta t)$ を以て表されるが、水面の傾斜 χ が大きくないものと假定すれば

$$\chi = \chi_0 \cos(\alpha x + \beta t)$$

を以て表す事が出来る。従つて考へる位置を $x = 0$ に取れば

$$\chi = \chi_0 \cos \beta t, \quad \frac{d\chi}{dt} = -\beta \chi_0 \sin \beta t$$

更に $\frac{gh}{k_0^2} = \alpha_1^2$, $\frac{gk^2}{h_0 k_0^2} = \alpha_2^2$ と書けば (42) は

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \epsilon \frac{d\varphi}{dt} + \alpha_1^2 \varphi = \chi_0 (\alpha_2^2 \cos \beta t - \epsilon \beta \sin \beta t) \cdots \cdots \cdots (43)$$

之は船の強制横振動の微分方程式であつて、その解は次の様になる。

$$\varphi = C \cos \beta t + D \sin \beta t$$

$$C = \chi_0 \frac{(\alpha_1^2 - \beta^2) \alpha_2^2 + \epsilon^2 \beta^2}{(\alpha_1^2 - \beta^2)^2 + \epsilon^2 \beta^2}, \quad D = -\omega \epsilon \beta \frac{\alpha_1^2 - \beta^2 + \alpha_2^2}{(\alpha_1^2 - \beta^2)^2 + \epsilon^2 \beta^2} \cdots \cdots \cdots (44)$$

この振動の振幅は

$$\varphi_0 = \sqrt{C^2 + D^2} = \chi_0 \sqrt{\frac{\epsilon^2 \beta^2 + \alpha_2^4}{(\alpha_1^2 - \beta^2)^2 + \epsilon^2 \beta^2}} \cdots \cdots \cdots (45)$$

之が共振状態となるのは $\alpha_1 = \beta$ の場合であつて、その時は

$$\varphi_1 = \chi_0 \frac{\sqrt{\epsilon^2 \alpha_1^2 + \alpha_2^4}}{\epsilon \alpha_1}$$

船の横振動に於ては最も大きく傾いた時でも甲板の隅點 E 又は F (圖-24) が水面下に入らぬ事が必要である。即ち船の中心線 OM と OE 又は OF のなす角を φ_2 とした時に

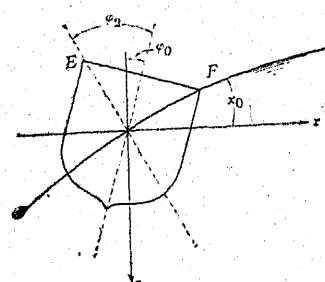


圖-24

$$\varphi_0 + \chi_0 < \varphi_2 \dots \dots \dots (46)$$

となる事を要する。之に (45) を代入すれば上の條件は

$$\chi_0 \left(1 + \sqrt{\frac{\epsilon^2 \beta^2 + \alpha_2^4}{(\alpha_1^2 - \beta^2)^2 + \epsilon^2 \beta^2}} \right) < \varphi_2$$

共振状態となる時にはこの條件は次の様になる。

$$\chi_0 \left(1 + \sqrt{\frac{\epsilon^2 \alpha_1^2 + \alpha_2^4}{\epsilon \alpha_1}} \right) < \varphi_2$$

13. 表面張力²³⁾

液體内部の分子は周囲から一樣の引力を受けるが、液面を成してゐる分子は液の内部からの引力を受けるのみであるから、液體はその表面を縮少せんとする傾向を生ずる。その結果液面は引張つたゴム膜で作られてゐる様な状態となり、その面内に張力を生ずる。之を表面張力と稱する。

液面上に ds の長さの直線を考へ、之に直角に且液面の方向に働く力を dP とすれば、 $\frac{dP}{ds}$ を以て表面張力の強さを表し、単位は一般に gr/cm を用ひる。

表面張力の強さを T とし、之によつて ds の部分が dn だけ垂直變位をなしたものとすれば、爲された仕事の量は

$$W = \iint T ds dn = T(S_2 - S_1)$$

但し S_1 及び S_2 は液面の最初及び最後の面積である。 W はポテンシアルエネルギーとして液面に貯へられる。

液面はゴム膜の様になつて内側に壓力を加へるから、液面の兩側には壓力の差を生ずる。液面上に 4 つの主曲率線で切り取られる小面積 $ABCD$ (面

23) Surface tension.

積 dS) を考へ、之が表面張力の爲に面に垂直に δx だけ變位し $A'B'C'D'$ (面積 dS') に移つたものと考へる。圖-25 に於て OA 又は OB は大きい主曲率半径、 $O'B$ 又は $O'C$ は小さい曲率半径である。

液面内外の壓力差を ϕ とすれば dS の部分に爲された仕事は $\phi dS \delta x$ であり、その爲のポテンシアル・エネルギーの増加は $T(dS' - dS)$ であるから

$$\phi dS \delta x = T(dS' - dS)$$

$$\text{然るに } A'B' = AB \frac{OA'}{OA} = AB \left(1 + \frac{\delta x}{R} \right)$$

$$B'C' = BC \frac{O'B'}{O'B} = BC \left(1 + \frac{\delta x}{R'} \right)$$

$$\text{但し } R = OA = OB, \quad R' = O'B = O'C$$

$$\text{従つて } dS' = A'B' \times B'C' = AB \times BC \times \left(1 + \frac{\delta x}{R} \right) \left(1 + \frac{\delta x}{R'} \right)$$

$$\therefore dS' = dS \left\{ 1 + \delta x \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \right\}$$

之を上の關係式に代入すれば

$$\phi = T \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \dots \dots \dots (47)$$

液體が固體の表面に接する時はその間に附着力²⁴⁾を生ずる。而して固體の壁面と液面とはその物質によつて定まつた角度をなすものであり、之を接觸角²⁵⁾と言ふ。この角は水とガラスの場合に約 90° ,

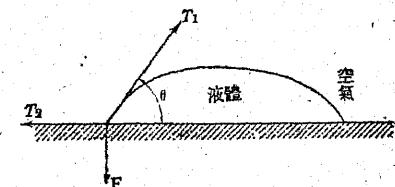


圖-26

24) Adhesion. 25) Angle of contact.

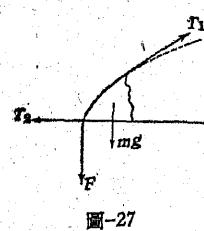


圖-27

水銀とガラスの場合に約 140° である。圖-26 の様に板の上に液體の 1 滴がある時には、液體と空氣の間のみならず、板と液體の間にも相互の分子引力の相異から来る表面張力があるから、之等を夫々 T_1 及び T_2 とする。又圖-27 の様な液面と板の接觸線附近の微小體を切取れば、之には重力 mg が作用する。尙之等の他に液面が板に附着する爲の附着力 F が作用してゐる。之等の力の水平及び鉛直成分の釣合を考へれば

$$T_1 \cos \theta - T_2 = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (48)$$

$$T_1 \sin \theta - F - mg = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (49)$$

(48) から接觸角 θ は

$$\cos \theta = \frac{T_2}{T_1} \quad \dots \dots \dots \quad (50)$$

又 (49) に於て T_1 及び F は (長さ) \times (強さ) で與へられるが、 mg は (體積) \times (強さ) で與へられるから、微小體を充分小さく取れば mg は省略される。又之から見れば小量の液體程表面張力の影響は大きい。

次に毛管を静止した液中に立てば液と管との性質によつて管中の液面は上昇或は下降する。之を毛管現象²⁶⁾と言ふ。今管内の液面上昇の高さを h 、管の半径を r 、液體の密度を ρ とすれば、力の釣合により

$$2\pi r T_2 - \pi r^2 \rho g h = 0$$

之と (50) から

$$h = \frac{2T_1 \cos \theta}{\rho r g} = \frac{2T_1 \cos \theta}{w r} \quad \dots \dots \dots \quad (51)$$

w は液體の單位體積の重さである。(51) から

26) Capillarity.

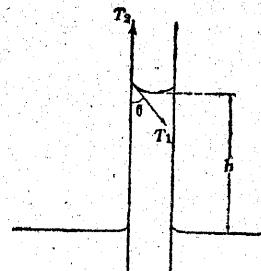


圖-28

θ が 90° より大なる時は液面は低下する事を知る。水とガラス管の場合は $T_1 = 77$ (C.G.S. 單位), $\theta = 9^\circ$ であるから

$$h = 0.155 \times \frac{1}{r} \quad (\text{cm 單位})$$

[練習問題]

1. 傾斜 θ の坂路上を加速度 a を以て水槽を曳き上げた時の水面の形を求めよ。

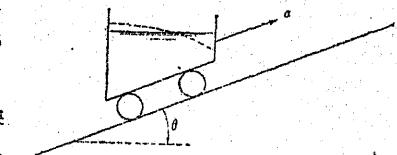


圖-29

2. 一様断面の鉛直槽内の底から h_1 の深さまで密度 ρ_1 の液體があり、その上に h_2 の深さだけ密度 ρ_2 の液體がある。更にこの上に夫々 h_3 , h_4 , h_5 の深さづゝの密度 ρ_3 , ρ_4 , ρ_5 の液體がある。この時槽壁の各點に働く圧力を求めよ。

3. 圖-30 の様な對稱形四邊形に働く水壓及びその合力の作用點の位置を求めよ。

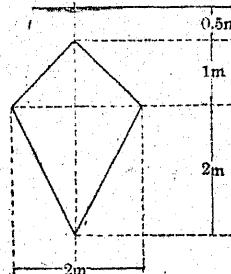


圖-30

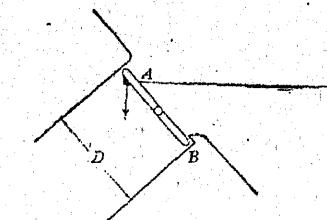


圖-31

4. 中心を水面上に有する四分の一圓の断面を有する水平槽状面に働く水壓を計算せよ。
5. 圖-31 の様な圓板状の瓣がある。之に働く水壓及び中心を通る水平軸の周りのモーメントを計算せよ。又瓣の A の端に質量 M を附加すれば水面が何程度上った時にこの瓣が自然に閉くか。
6. 棱の長さが a なる正四面體が 1 つの頂點を下にして水上に浮かんでゐる。この

各面及び全體に働く水圧を求めよ。但し四面體の比重を 0.8 とする。

7. 水中に水平に置かれた径 d' の圓盤上の水圧の強さを計算せよ。

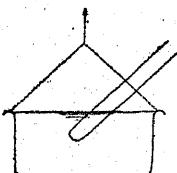


圖-32

8. 図-32 の様に初容器に水を満たして之を吊つて居り、この中に静かに棒を入れる。この時に容器を吊るに要する力は如何に変化したか。

9. 1 邊の長さ a なる正三角形断面の橋状體が横になつて水上に浮んでゐる。この橋状體の釣合は 1 つの稜が真下にある時と真上にある時とで何れが安定度が大きい。

10. 縦 10 m, 横 6 m, 深さ 4 m の頂面の開いてゐる矩形函の傾心の高さを求めよ。
但し周壁の厚さは 15 cm, 底の厚さは 30 cm, 材料の比重は 2.5 とする。

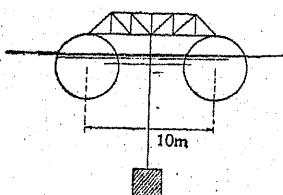


圖-33

11. 外徑 5 m の 2 つの圓盤を 図-33 の様に中心距離 10 m に連結し、その中心から綱によつて水中で 1 ton の重量の物を吊してある。この時の全體としての安定を計算せよ。但し圓盤の比重は 0.9、長さは共に 5 m、両盤は充分剛に連結されているものとする。

12. 直徑 1 m、長さ 4 m、比重 0.85 の圓盤を軸を鉛直に浮かべ、頂面を水面まで歟し下げて離した時の振動を計算せよ。但し抵抗は無視する。

13. 問題 9 の正三角橋體の鉛直小振動を計算せよ。

14. 問題 9 の正三角橋體の横振動を計算せよ。但し抵抗は無視する。