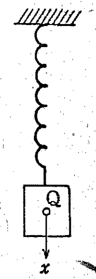
# XIII. 彈 性 振 動

## 振動一般論

### (一) 自由振動

第1圖の如く重量 Q (即質量 Q/g) の物體を螺旋發條で靜かに吊して平衡せる位置を O とする今 Q を O から少し下に引張つて放せば Q は O を中心として上下に振動るす。Q が O から上下に離れるに從つて發條の壓縮力又は張力が增す。O を原點にとり下向に $x$ 軸をとれば



第 1 圖

發條の張力(又は壓力) $S=-kx$

但 $k$ は發條の硬さ XII (二)

故に運動の方程式は發條の重量を無視してよいと假定すれば

$$\frac{Q}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$$

或は

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2}+p^2x=0 \\ \text{但}\quad &p=\sqrt{\frac{kg}{Q}} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此解は

$$x=A\cos pt+B\sin pt\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$



A, B は初發の變位 $x_0$ 及初發の速度 $v_0$ から決定する即 (2) に於て $t=0$ で $x=x_0$ と置き且 (2) を $t$ について微分して $t=0$ で $\frac{dx}{dt}=v_0$ と置き AB を求むれば

$$A=x_0,\quad B=\frac{v_0}{p}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

振動の周期は

$$T=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{Q}{kg}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

斯くの如く自個の彈性力で續けて行く振動を自由振動 (Free Vibration) 又は固有振動 (Natural Vibration) と呼び T をその彈性體の固有周期 (Natural Period) といふ。

振動の問題に於てもエネルギー方程式による方法が屢々役立つ即 Q の有する

運動エネルギー $\frac{1}{2}\frac{Q}{g}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$

位置エネルギー $k\frac{x^2}{2}$

エネルギー保有の法則 (Law of Conservation of Energy) によつて

$$\frac{1}{2}\frac{Q}{g}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+k\frac{x^2}{2}=C\ \cdots\cdots C\ \text{は常數}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

此を $t$ について微分すれば (1) 式を得。

### (二) 減衰振動

Q が空中又は水中等に於て振動する時は空氣又は水の抵抗により振動は漸次減衰する (眞空內の振動に於ても實は彈性體內部の摩擦の爲めに減衰を起すもこれはこゝには考へない) その抵抗力

は通常振動速度に比例するものと考へられる故にこの場合の運動方程式は

$$\frac{Q}{g}\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha\frac{dx}{dt}=-kx \qquad 但\ \alpha\ は減衰力の係數$$

或は

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+p^2x=0\\ 但\quad &p=\sqrt{\frac{kg}{Q}},\quad 2n=\frac{\alpha g}{Q}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

此解は

$$x=e^{-nt}(A\sin\sqrt{p^2-n^2}t+B\cos\sqrt{p^2-n^2}t)\cdots\cdots\cdots(7)$$

$t=0$ で $x=x_0$, $\dfrac{dx}{dt}=v_0$ とすれば

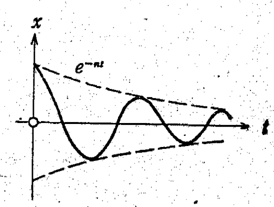
$$A=\frac{1}{\sqrt{p^2-n^2}}(v_0+nx_0),\quad B=x_0\cdots\cdots\cdots(8)$$

振動の周期は通常 $p^2$ は $n^2$ に比し大なる故

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{p^2-n^2}}\doteqdot\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{Q}{kg}}\cdots\cdots\cdots(9)$$

即 (4) と同じ

振幅 (Amplitude) は (7) により第2圖の示す如く時間 $t$ の進むに從つて漸減する故に斯くの如き振動を減衰振動 (Damped Vibration) といふ。




第 2 圖

$e^{-nT}:1$ を減衰比 (Damping Ratio) といふ。



## (三) 強制振動

Q に張力 S の外に $F\sin mt$ なる周期的の外力が働く場合には運動方程式は

$$\frac{Q}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=-kx+F\sin mt$$

或は

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2x}{dt^2}+p^2x=q\sin mt\\ 但\quad &p=\sqrt{\frac{kg}{Q}},\quad q=\frac{gF}{Q}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

此解は自由振動の式 (1) の一般解に此 (10) 式の特解を加へたもので表はし得。卽

$$x=A\sin pt+B\cos pt+\frac{q}{p^2-m^2}\sin mt\cdots\cdots\cdots(11)$$

A, B は初發の變位及速度により決定するが周期は複雑になる。此式で $p=m$ の場合卽強制外力の周期と弾性體の固有周期とが一致すれば振幅は限りなく增大するこれを共鳴 (Resonance) といふ。上の如き振動を強制振動 (Forced Vibration) といふ。

減衰を伴ふ強制振動に於ては運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+p^2x=q\sin mt\cdots\cdots\cdots(12)$$

となり此の特解を求むるには

$x=M\sin mt+N\cos mt$ 　但 M N は $t$ に無關係の値

と置き (12) 式の左邊に入れて右邊項と比較して

$$N=-\frac{2qmn}{(p^2-m^2)^2+4m^2n^2},\quad M=\frac{q(p^2-m^2)}{(p^2-m^2)^2+4m^2n^2}$$

を得

故に (12) の一般解は

$$x=e^{-nt}(\mathrm{A}\sin\sqrt{p^2-n^2}\,t+\mathrm{B}\cos\sqrt{p^2-n^2}\,t)$$

$$-\frac{2qmn}{(p^2-m^2)^2+4m^2n^2}\cos mt+\frac{q(p^2-m^2)}{(p^2-m^2)^2+4m^2n^2}\sin mt$$

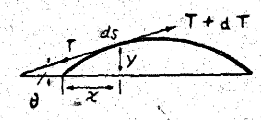
或は
$$\left.\begin{aligned} x&=e^{-nt}(\mathrm{A}\sin\sqrt{p^2-n^2}\,t+\mathrm{B}\cos\sqrt{p^2-n^2}\,t)\\ &\quad+\frac{q}{\sqrt{(p^2-m^2)^2+4m^2n^2}}\sin(mt-\alpha)\\ \text{但}\quad \tan\alpha&=\frac{2mn}{p^2-m^2} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(13)$$

此式により暫らく振動を續けてゐれば $e^{-nt}$ の項は減衰して第二項のみ殘る卽强制外力と同一周期の運動のみとなる外力の周期 $\left(\frac{2\pi}{m}\right)$ が固有周期 $\left(\frac{2\pi}{p}\right)$ より大なれば位相の遲れ $\alpha$ は $\frac{\pi}{2}$ より小、反對に外力の周期が固有周期より小なれば $\alpha$ は $\frac{\pi}{2}$ より大となる此の周期等しき時卽共鳴の時には位相の遲れは $\frac{\pi}{2}$ 卽四分の一周期であつて減衰係數小なる時は振幅は無限に增大する。

## 振動各論

### (四) 糸の振動

第3圖に於て糸の微長 $ds$ に働く張力の $y$ の方向に於ける分力は糸の振動の振幅あまり大ならずとすれば




第 3 圖



$$\left\{\mathrm{T}\sin\theta+\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{T}\sin\theta)dx\right\}-\mathrm{T}\sin\theta=\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{T}\sin\theta)dx$$

故に運動方程式は

$$\sigma dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{T}\sin\theta)dx$$

但し $\sigma$ は糸の單位長の密度（質量/長さ）

$$\therefore\quad \sigma\frac{\sigma^2 y}{\partial t^2}=\mathrm{T}\frac{\partial\sin\theta}{\partial x}$$

$$\sin\theta\doteqdot\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\qquad \text{但}\quad c^2=\frac{\mathrm{T}}{\sigma}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

此式で $y\infty e^{nti}$ と置けば　(但 $i=\sqrt{-1}$)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{n^2}{c^2}y=0$$

∴ (14) の解は

$$y=e^{nti}\left\{\mathrm{A}\cos\frac{nx}{c}+\mathrm{B}\sin\frac{nx}{c}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

糸の兩端を固定すれば $x=0$ 及 $x=l$ で $y=0$ なるにより $\mathrm{A}=0$ 及 $\sin\frac{nl}{c}=0$, 後式より

$$\frac{nl}{c}=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi\cdots\cdots$$

故にこの値を假りに Z とすれば周期は

$$\mathrm{t}=\frac{2\pi}{n}=\frac{2\pi l}{c\mathrm{Z}}=\frac{2\pi l}{\mathrm{Z}}\sqrt{\frac{\sigma}{\mathrm{T}}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

且　$y=\mathrm{B}e^{\frac{\mathrm{S}-\mathrm{C}}{l}ti}\sin\frac{\mathrm{S}\pi x}{l}\quad \mathrm{S}=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots$

$\mathrm{B}=\mathrm{C}_s e^{\alpha i}$ と置けば

$$y=\mathrm{C}_s\, e^{\frac{\mathrm{S}\pi \mathrm{C}}{l}ti+\alpha i}\sin\frac{\mathrm{S}\pi x}{l}$$

此の實値を取つて

$$y=\mathrm{C}_s\sin\frac{\mathrm{S}\pi x}{l}\cos\left(\frac{\mathrm{S}\pi c}{l}t+\alpha\right)\qquad \mathrm{S}=1,\ 2,\ 3\ldots\ldots$$

故に兩端固定した長さ $l$ の糸の振動は一般に

$$y=\sum_{\mathrm{S}=1,2,3..}\left(\mathrm{A}_s\cos\frac{\mathrm{S}\pi ct}{l}+\mathrm{B}_s\sin\frac{\mathrm{S}\pi ct}{l}\right)\sin\frac{\mathrm{S}\pi x}{l}\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

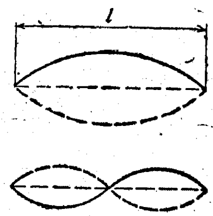
此式で $\mathrm{A}_s$, $\mathrm{B}_s$ は初發條件で決定する例へば $t=0$ で $x=a$ の點を $y=\beta$ 丈變位して靜かに放せば $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0}=0$ なる故 $\mathrm{B}_s=0$,

$$\mathrm{A}_s=\frac{2\beta l^2}{s^2\pi^2 a(l-a)}\sin\frac{\mathrm{S}\pi a}{l}$$

$$y=\frac{2\beta l^2}{\pi^2 a(l-a)}\sum_{\mathrm{S}=1,2,3..}\frac{1}{\mathrm{S}^2}\sin\frac{\mathrm{S}\pi a}{l}\sin\frac{\mathrm{S}\pi x}{l}\cos\frac{\mathrm{S}\pi ct}{l}\ldots(18)$$

S=1 卽原音 (獨 Grundton) 及 S=2 卽オクターブ (Octave) の振動の形は第 4 圖の如し。

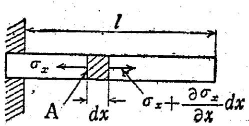
(18) 式によれば高次振動 (Higher Harmonics) の振幅は $\frac{1}{\mathrm{S}^2}$ により急激に小となる。




第 4 圖

### (五) 棒の縱振動

第5圖の如き斷面積Aが一定の棒の縱振動の運動方程式は棒の密度 $\rho$, $x$ 方向の變位を $\xi$ とすれば




第 5 圖



$$\rho\mathrm{A}\,dx\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)\mathrm{A}-\sigma_x\mathrm{A}$$

Hooke の法則により

$$\sigma_x=\mathrm{E}\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

なるにより

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\qquad 但\quad c^2=\frac{\mathrm{E}}{\rho}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

此式で $\xi\infty e^{nti}$ と置けば

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{n^2}{c^2}\xi=0$$

故に (19) の解は

$$\xi=e^{nti}\left\{\mathrm{A}\cos\frac{nx}{c}+\mathrm{B}\sin\frac{nx}{c}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(20)$$

一端 ($x=0$) を固定し卽 $\xi=0$, 他端 ($x=l$) を放端卽 $\sigma_x=0$ とすればこの放端では $\frac{\partial\xi}{\partial x}=0$

故に $\mathrm{A}=0$ 及 $\cos\frac{nl}{c}=0$, 後式より

$$\frac{nl}{c}=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \ldots\ldots$$

故に振動の周期は上の値を假りに Z とすれば

$$\mathrm{T}=\frac{2\pi}{n}=\frac{2\pi l}{c\mathrm{Z}}=\frac{2\pi l}{\mathrm{Z}}\sqrt{\frac{\rho}{\mathrm{E}}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

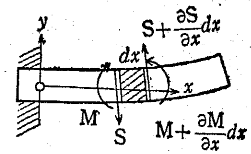
故に一端固定他端自由なる棒の縱振動は一般に

$$\xi=\sum_{\mathrm{S}=1,2,3..}\left(\mathrm{A}_s\cos\frac{\mathrm{S}\pi}{2l}ct+\mathrm{B}_s\sin\frac{\mathrm{S}\pi}{2l}ct\right)\sin\frac{\mathrm{S}\pi x}{2l}\ldots\ldots(22)$$

此の $A_s$ $B_s$ は初發條件より決定する。

### (六) 棒の横振動

第6圖に於て斷面積Aの不變の棒が曲げ振動をなすときM及Sを曲げモーメント及剪斷力とすれば$y$方向の運動方程式は




第 6 圖

$$\rho A\,dx\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=\frac{\partial S}{\partial x}dx$$

但 $\rho$ は棒の密度 $\eta$ は $y$ 方向の變位。

次に棒の曲げの運動方程式は

$$\rho A\,dx\,r^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)=\left(M+\frac{\partial M}{\partial x}dx\right)-M+S\,dx$$

但 $r$ は斷面の回轉半徑とす。

上の二式よりSを消去して

$$\rho A\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-r^2\frac{\partial^4\eta}{\partial x^2\partial t^2}\right)=-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}$$

然るに $\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=\frac{M}{EI}$ なる故

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-r^2\frac{\partial^4\eta}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{Er^2}{\rho}\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}=0\ldots\ldots\ldots\ldots(23)$$

通常此式の第二項は回轉惰性(Rotatory Inertia)の項と稱し他の項に比して小なる故これを省略して

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+\frac{Er^2}{\rho}\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}=0\ldots\ldots\ldots\ldots(24)$$

此式に於て $\eta\propto e^{nti}$ と置けば



$$\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}=m^4\eta$$

但 $$m^4=\frac{n^2\rho}{Er^2}=\frac{n^2\rho A}{EI}\ldots\ldots\ldots\ldots(25)$$

故に(24)の解は

$$\eta=e^{nti}(A\cos mx+B\sin mx+C\cosh mx+D\sinh mx)\ldots\ldots(26)$$

一端($x=0$)定端($\eta=0$ 及 $\frac{\partial\eta}{\partial x}=0$),他端($x=l$)自由端$\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=0\right.$ 及 $\left.\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}=0\right)$なる場合は

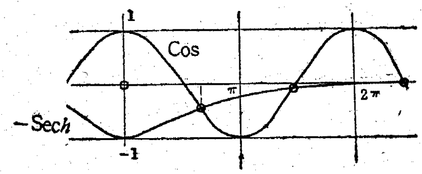
$$\left.\begin{aligned}&A+C=0,\qquad B+D=0\\&-A\cos ml-B\sin ml+C\cosh ml+D\sinh ml=0\\&A\sin ml-B\cos ml+C\sinh ml+D\cosh ml=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(27)$$

此等の式よりABCDを消去すれば

$$\cos ml=-\operatorname{sech} ml$$

此を解くには通常圖式法を用ひ第7圖の如くして下の値を得

$ml=1.875,\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \frac{7\pi}{2},\ \ldots\ldots$




第 7 圖

故に上の $ml$ の値を假に Z とすれば(25)式より

$$n=\left(\frac{Z}{l}\right)^2\sqrt{\frac{Er^2}{\rho}}$$

故に振動周期は

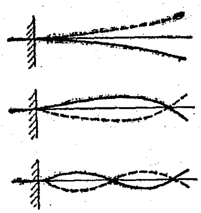
$$T=\frac{2\pi}{n}=\frac{2\pi l^2}{rZ^2}\sqrt{\frac{\rho}{E}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

(26) より

$$\eta=K\left\{\frac{\cosh mx-\cos mx}{\cosh ml+\cos ml}-\frac{\sinh mx-\sin mx}{\sinh ml+\sin ml}\right\}e^{nit}\quad\cdots\cdots(29)$$

但 K は初發條件によつて定まる定數である。

原音及第二次及第三次高音の振動の形は第 8 圖の如し。



第 8 圖

## (七) 柱體の耐震計算

塔煙突橋脚建物の柱等の地震による振動は水平動丈をとつて考へれば柱脚に於て周期的なる外力を有する横振動と見てよいが破壊を與へる如き激震では上下動を伴つたり衝撃を生じたりして極めて複雜なものとなる從つて通常是等の構造物の耐震計算には振動論を用ひず構造物各部分の質量に水平に地震の加速度を加へて靜力學的にその安定及應力を計算するこの水平加速度を何程にとつたならば構造物は充分安全なるかは重大な問題であるが我邦では通常これを重力加速度 $g$ の $\frac{1}{10}$ 乃至 $\frac{1}{3}$ にとる。構造物の振動周期が地震動の周期に近いときは共鳴をして甚だ危險である爲めそれは是非とも避けねばならぬ通常我邦の大地震の周期は震害の大なる軟弱地盤では一秒內外である。