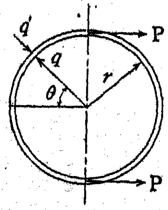
XII. 雜 論

(一) パイプ

單位長のパイプをとり壁を薄きものと考へればこれに働く應力は等分布と考へてよい今パイプの内外の壓力を q 及 q' とすれば管の半分をとつてその切斷面の力を p とすれば(第1圖)



第 1 圖

$$2P-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(q-q')rd\theta\cos\theta=0$$

$$\therefore\ P=(q-q')r \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

故にパイプの厚さを t とすれば $\frac{P}{t}$ をして許容應力より小なる様に t を定むればよい。q' が q より大なるときは p 壓縮應力となるが極めて薄い管では凹んでつぶれる即ち長柱と同じく挫屈の現象を呈する。かゝる場合について Unwin 及 Fairbairn は下の實驗式を出した。

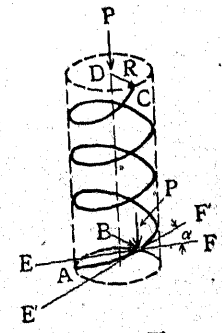
$$q'-q=c\frac{t^n}{d^m l^s} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

但 t は管の厚さ，d は直徑，l は長さであり此等を英單位（听及吋）で表せば實驗の結果錬鐵管では $n \fallingdotseq 2$, $m \fallingdotseq 1$, $s \fallingdotseq 1$, c は下表の値となる。

	C の 値
縦に接合あるパイプ	7,400,000—9,600,000
縦及横に接合あるパイプ	15,500,000

(二) 螺線發條

第2圖に示す如く發條に働く外力 P は AB 部に對しては B 點に於ける P なる力と M=PR なる偶力とを生ずる。B に於ける P はこの點で AB に直接壓力及剪斷力を與へるが此れは通常の發條では無視してゐる。M は B に於ける發條圓筒面の水平接線 EF を軸として捩る作用をなす。今螺線 AB の B に於ける接線を E'F' とすればこれと EF となす角 α は通常の發條では小さい故 M は E'F' を軸として AB を捩る偶力と見てよい。即これは軸の問題と同じである。



第 2 圖

P の爲に發條が單位長に於て δ 丈縮むものとすれば仕事の量は

$$W=\frac{1}{2}P.\delta \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

トルク M の爲めに生ずる發條線の歪エネルギーの値は

$$W=\frac{1}{2}M\varphi=\frac{1}{2}M.\frac{d\varphi}{dz}.L$$

但し φ は捩れ角 z は發條線に沿うてとつた坐標 L は發條の單位長の針線の全長でこれは發條の軸單位長の間に於ける卷き回數を n とすれば

$$L=2\pi nR$$

軸論 XI (1) により

$$\frac{d\varphi}{dz}=\frac{M}{GI}$$

なる故內力仕事は

$$W=\frac{L}{2}\cdot\frac{M^2}{GI}=\frac{\pi nR^3P^2}{GI}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(3) (4) より

$$\delta=\frac{2n\pi R^3P}{GI}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

通常 $\delta=1$ を與ふる $P=\frac{GI}{2\pi nR^3}$ を發條の硬さ (Stiffness of Spring) といふ。

圓い線で作つた發條はその直徑を d とすれば

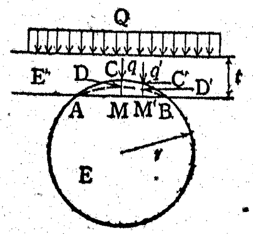
$$I=I_x+I_y=\frac{\pi d^4}{32}$$

なる故

$$\delta=\frac{64nR^3P}{Gd^4}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

(三) ローラー

半徑 r のローラーの上に厚さ t の板をのせて壓するときはローラーと板とは ADB の面で接しその頂點及任意の點に生ずる應力を q q' とする。ローラー及板のヤング係數を夫れ夫れ E, E′ とすれば



第 3 圖

$$\frac{CD}{r}=\frac{q}{E},\quad \frac{MD}{t}=\frac{q}{E'}$$

$$\therefore\quad CM=q\left(\frac{r}{E}+\frac{t}{E'}\right)$$

同樣に

$$C'M'\fallingdotseq q'\left(\frac{r}{E}+\frac{t}{E'}\right)$$

$$\therefore\quad q'=\frac{q}{CM}C'M'$$

今長さ一米のローラーをとつて考へれば

板上の全荷重 $Q=\int_A^B q'dx=\frac{q}{CM}\int_A^B C'M'dx$

ACB は圓弧なれ共小なる故此を拋物線と假定すれば

$$\int_A^B C'M'dx=\frac{4}{3}CM.\,MB$$

なる故

$$Q=\frac{4}{3}q.\,MB$$

然るに

$$MB=\sqrt{2r.\,CM}=\sqrt{2r.\,q\left(\frac{r}{E}+\frac{t}{E'}\right)}$$

$$\therefore\quad Q=\frac{4}{3}\sqrt{2r.\,q^3\left(\frac{r}{E}+\frac{t}{E'}\right)}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

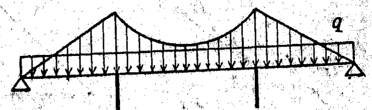
通常實際上では

$$Q=cr\ \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

として破壞荷重に對する各種の材料の c を實驗的に定めてゐる。

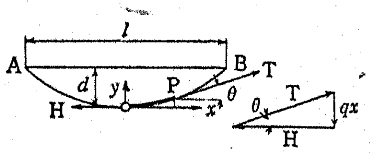
(四) 吊橋のケーブル

第 4 圖の如き吊橋に等分布荷重 q が戰つてゐる場合にそのケーブルのなす曲線



第 4 圖

は下の如くなる。第5圖に於てケーブルの一部 OP をとつて考へると O に於ては水平張力 H あり P に於ては曲線のこゝに於ける接線の方向に T なる張力が働くこれ等と OP に働く垂直荷重（即 P の坐標を x, y とすれば qx）は釣合ふべし故に第5圖の如く力の三角形によつて H 及 T を得。又は P に於て OP に働く外力のモーメントをとり



第 5 圖

$$\mathrm{H}y = q\frac{x^2}{2}$$

$$\therefore\quad y = \frac{q}{2\mathrm{H}}x^2 \quad\cdots\cdots(9)$$

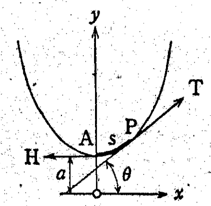
即曲線は拋物線をなす。

徑間 l 垂下 d とすれば

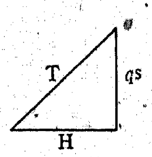
$$\mathrm{H} = \frac{qx^2}{2y} = \frac{ql^2}{8d} \quad\cdots\cdots(10)$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{T} = \sqrt{\mathrm{H}^2+(qx)^2} \\ \text{塔頂では}\quad &\mathrm{T} = \frac{ql^2}{8d}\sqrt{1+\frac{16d^2}{l^2}} \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(11)$$

（五） 架空線のケーブル



第 6 圖 (A)



第 6 圖 (B)

架空線のケーブルは主として自重を支へる故第 6 圖に示す如く AP 部の外力は H と T と AP 部の自重即 AP の長さを s とし單

位長の重さを q とすれば qs とによつて釣合ふ。

$$qs = \mathrm{H}\tan\theta$$

$$\therefore\quad s = a\tan\theta \qquad \text{但}\quad a = \frac{\mathrm{H}}{q}$$

此れを微分して

$$\frac{ds}{d\theta} = a\sec^2\theta$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{ds}\,\frac{ds}{d\theta} = \sin\theta.\,a\sec^2\theta = a\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

此を積分して

$$y = a\int_0^\theta \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = a\sec\theta \quad\cdots\cdots(12)$$

但 $\theta=0$ の所の $y=a$ とす。

同樣に $$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{ds}\,\frac{ds}{d\theta} = \cos\theta.\,a\sec^2\theta = a\sec\theta$$

此を積分して

$$x = a\int_0^\theta \sec\theta\,d\theta = a\log(\sec\theta+\tan\theta) \quad\cdots\cdots(13)$$

(12)(13)は架空線のケーブル曲線の式である。(13)を書き直して

$$e^{\frac{x}{a}} = \sec\theta+\tan\theta$$

此逆數 $$e^{-\frac{x}{a}} = \sec\theta-\tan\theta$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right) = \sec\theta$$

$$\therefore\quad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\cosh\frac{x}{a} \quad\cdots\cdots(14)$$

これは即懸垂曲線（Catenary）の式である。

$\cosh\frac{x}{a}$ を級數和で表はして最初の二項迄とれば

$$y=a+\frac{x^2}{2a}=\frac{H}{q}+\frac{q}{2H}x^2$$

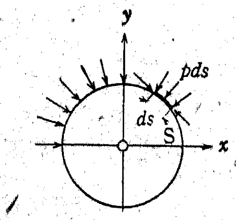
となり (9) と同じくなる。

張力は

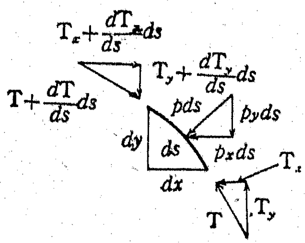
$$\left.\begin{aligned}T&=H\sec\theta=qy\\H&=qa\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

（六） 等壓曲線

靜水壓力の如く方向が異つても常に等しき强度 p の壓力が板の面に垂直に働く場合にこれを撓み易き板を以つて支へるときは下の如き曲線となる。



第 7 圖 (A)



第 7 圖 (B)

今板の長さ一米について考へれば p 及 T を xy に分力して

$$p_x=p\frac{dy}{ds},\quad p_y=p\frac{dx}{ds},\quad T_x=T\frac{dx}{ds},\quad T_y=T\frac{dy}{ds}$$

ds 部の平衡より

$$\left.\begin{aligned}&T_x+\frac{dT_x}{ds}ds-T_x-p_xds=0\\&-\left(T_y+\frac{dT_x}{ds}ds\right)+T_y-p_yds=0\end{aligned}\right\}$$

即 $$\frac{d\left(T\frac{dx}{ds}\right)}{ds}=p\frac{dy}{ds},\quad \frac{d\left(T\frac{dy}{ds}\right)}{ds}=-p\frac{dx}{ds}\cdots\cdots\cdots(16)$$

$y=0$ で $\frac{dx}{ds}=o$, $x=0$ で $\frac{dy}{ds}=0$ として積分すれば

$$T\frac{dx}{ds}=py\quad T\frac{dy}{ds}=-px\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

上式で T を消去し積分すれば

$$x^2+y^2=C\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

即曲線は圓である又 (17) より T を求むれば

$$T=pr\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

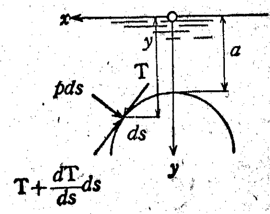
これはパイプの場合と同一である。

（七） 靜水壓曲線

水平面を有する水を下部より撓み易き板によつて支へんとするときは下の如き曲線となる。

水の單位重量を w とすれば

$$p=wy$$



第 8 圖

∴ (16) 式はこの場合下の如くなる。

$$\frac{d\left(T\frac{dx}{ds}\right)}{ds}=-wy\frac{dy}{ds},\quad \frac{d\left(T\frac{dy}{ds}\right)}{ds}=wy\frac{dx}{ds}\cdots\cdots(20)$$

此の第一式を積分して $T\frac{dx}{ds}=\frac{w}{2}(b^2-y^2)$ 但 b は常數

第二式に入れて

$$\frac{d\left\{(b^2-y^2)\dfrac{dy}{dx}\right\}}{ds}=2y\frac{dx}{ds}.$$

此式で $\dfrac{dy}{dx}=z$ と置けば

$$z\frac{d\{(b^2-y^2)z\}}{dy}=2y$$

$$\therefore\quad \frac{zdz}{1+z^2}=\frac{2ydy}{b^2-y^2}$$

此を積分して $\dfrac{1}{2}\log(1+z^2)=-\log(b^2-y^2)+C'$

即 $$(1+z^2)(b^2-y^2)^2=C$$

$y=a$ で $z=\dfrac{dy}{dx}=0$ なる故 $C=(b^2-a^2)^2$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{(b^2-a^2)^2}{(b^2-y^2)^2}-1}$$

故に

$$x=\int_a^y\frac{(b^2-y^2)dy}{\sqrt{(b^2-a^2)^2-(b^2-y^2)^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

此れは楕圓積分の式であるが此曲線は第 9 圖の如き形をしてゐて靜水壓曲線 (Hydrostatic Curve) と呼ぶ。

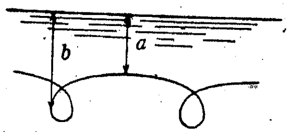
(20) 式で

$\dfrac{dx}{ds}=\cos\theta,\quad \dfrac{dy}{ds}=\sin\theta,$

$ds=\rho d\theta,\quad p_x=p\sin\theta,$

$p_y=p\cos\theta$

と置けば



第 9 圖

$$\left.\begin{aligned}d(\mathrm{T}\cos\theta)&=-p_x\rho d\theta\\ d(\mathrm{T}\sin\theta)&=p_y\rho d\theta\end{aligned}\right\}$$

即 $$\left.\begin{aligned}\cos\theta d\mathrm{T}-\mathrm{T}\sin\theta\, d\theta+p_x\rho d\theta&=0\\ \sin\theta d\mathrm{T}+\mathrm{T}\cos\theta d\theta-p_y\rho d\theta&=0\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\quad d\mathrm{T}+(\rho p_x\cos\theta-\rho p_y\sin\theta)d\theta=0$$

$p_x=p\sin\theta,\ p_y=p\cos\theta$ なる故 $d\mathrm{T}=0$ 即 T は常數となる。上式より $d\mathrm{T}$ を消去すれば

$$\mathrm{T}=(p_x\sin\theta+p_y\cos\theta)\rho=wy\rho$$

且 $$\rho=\frac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}=\frac{b^2-a^2}{2y}$$

$$\therefore\quad \mathrm{T}=w\frac{b^2-a^2}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$