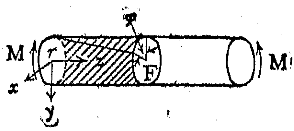
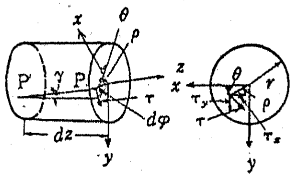
XI. 軸

(一) 圓形軸



第 1 圖



第 2 圖

圓形軸を第 1 圖の如くトルク (Torque) M を以つて捩る時は任意の斷面 F は捩れる後でも平面になつてゐる (Coulomb の定理) 故に F に於て垂直應力は起らず接線應力 τ のみ存在する。此れを第 2 圖の如く τ_x τ_y に分力し第 1 圖の陰影部分の釣合を考へれば

$$\int_{(F)} (\tau_y x - \tau_x y)\, dF = M$$

且 Hooke の彈性法則により

$$\tau = G\gamma \qquad 但\ G\ は剛性係數$$

dz 間の捩れ角を $d\varphi$ とすれば

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz} \quad なる故$$

$$\tau = G\rho \frac{d\varphi}{dz}$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_x &= -\tau \sin\theta = -G \frac{d\varphi}{dz} y \\ \tau_y &= \tau \cos\theta = G \frac{d\varphi}{dz} x \end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\quad M=G\frac{d\varphi}{dz}\int_{(F)}(x^2+y^2)dF=G\frac{d\varphi}{dz}I$$
$$\text{或は}\quad \frac{d\varphi}{dz}=\frac{M}{GI} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但　$I=I_x+I_y=\frac{\pi r^4}{2}$ なる故

$$M=G\frac{d\varphi}{dz}\,\frac{\pi r^4}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又は

$$\tau=\frac{M}{I}\rho=\frac{2M}{\pi r^4}\rho \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

即ち τ は軸心よりの距離に比例し等變應力をなし軸の外面に於て最大となるその大さは

$$\text{最大}\ \tau=\frac{2M}{\pi r^3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

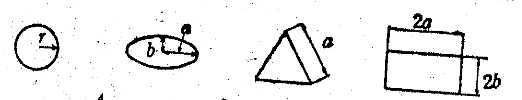
(二)　圓形ならざる軸

圓形ならざる軸は捩つた後で斷面は平面でなくなるが一般にトルクは

$$M=KG\frac{d\varphi}{dz} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

で表はし得。K を捩係數 (Torsion Constant) といふ

各種斷面形の捩係數

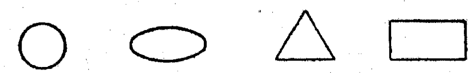


K	$\frac{\pi r^4}{2}$	$\frac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^3}$	$\frac{\sqrt{3}}{8}a^4$	βab^3

但　$\beta=\frac{16}{3}-3.36\frac{b}{a}\left(1-\frac{1}{12}\frac{b^4}{a^4}\right)$ [St. Venant]

$\frac{a}{b}$	1.0	1.5	2.0	20.0
β	2.249	3.132	3.659	5.165

各種斷面の最大接線應力



最大 τ	$\frac{2M}{\pi r^3}$	$\frac{2M}{\pi ab^2}$	$\frac{20M}{a^3}$	$\gamma b\frac{M}{I}$

但　$\gamma=\frac{3}{8}\left(1+0.6\frac{b}{a}\right)\beta$　[St. Venant]

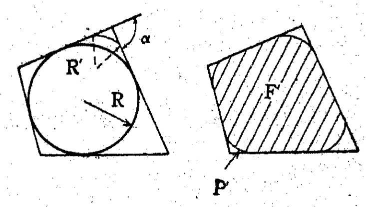
$\frac{a}{b}$	1.0	1.5	2.0	20.0
γ	1.351	1.695	1.860	2.00

(三)　グリフイス・テイラーの法

(5) 式の捩係數 K を Griffith 及 Taylor は一般に下の如く置いた

$$K=\frac{1}{2}\kappa^2F \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

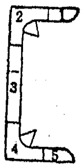
F は斷面積で k は圓軸ならば半徑に當るこれを捩半徑 (Equivalent Torsional Radius) といひ k を決定するには第 3 圖に示す如く少くとも三邊に接する最大圓を描きこの半徑 R 及び外角 α の大さより下表により軸の角を角取り



第　3　圖

する半徑 R′ を決定してそれによつて圍まれた面積 F′ と周邊 P′ とより

$$k=\frac{2F'}{P'}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$



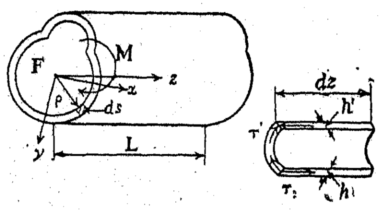
第 4 圖

$\dfrac{\alpha}{\pi}$	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1.0
$\dfrac{R'}{R}$	1.0	.93	.85	.75	.625	.50	.375	.27	.21	.17	.155

第 4 圖の如き場合は幾つかに區分して(6)を用ひ加算すればよい。

(四) 中 空 軸

中空軸の壁が充分薄いものと考へれば壁内に働く接線應力は厚さの方向に等分布と考へ得且此は壁面に平行して働く。



第 5. 圖

第 5 圖に於て

$$\tau h dz=\tau' h' dz$$

即　$\tau h=\tau' h'=$ 常數…(8)

トルク　$M=\int_{(s)}\tau h\rho ds$

τh は常數, $\int_{(s)}\rho ds$ は軸を無孔と考へたときの斷面積 F の二倍である故

$$M=\tau h.2F \quad 或は \quad \tau=\frac{M}{2hF}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

捩れ角 φ を出すには dz の長さの捩による歪エネルギー

$$dW=\frac{1}{2}Md\varphi$$

然るに接線力で同一エネルギーを表せば

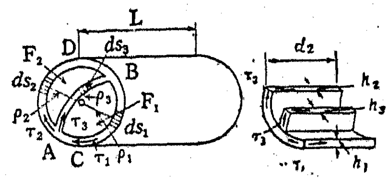
$$dW=\frac{dz}{2G}\int_{(s)}\tau^2 h ds$$

且 τh は常數なる故

$$M\frac{d\varphi}{dz}=\frac{\tau^2h^2}{G}\int_{(s)}\frac{ds}{h}$$

軸長 L とすれば捩れ角は

$$\varphi=\frac{ML}{4GF^2}\int_{(s)}\frac{ds}{h}$$



第　6　圖

第 6 圖の如く隔壁ある場合は

$$\tau_1h_1=\tau_2h_2+\tau_3h_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

トルク　$M=\tau_1h_1\int_B^A\rho_1ds_1+\tau_2h_2\int_A^B\rho_2ds_2+\tau_3h_3\int_A^B\rho_3ds_3$

(11) より

$$M=\tau_1h_1\left(\int_B^A\rho_1ds_1+\int_A^B\rho_3ds_3\right)+\tau_2h_2\left(\int_A^B\rho_2ds_2-\int_A^B\rho_3ds_3\right)$$

τ_1h_1 の括弧内は軸を無孔と考へた ABC の斷面積 F_1 の二倍 τ_2h_2

の括弧内は ADB の斷面積 F_2 の二倍

$$\therefore \quad M=2(\tau_1 h_1 F_1+\tau_2 h_2 F_2) \quad \cdots\cdots\cdots(12)$$

(11) 及 (12) より τ_1, τ_2, τ_3 を決定するには條件が一つ不足である故此の場合は靜力學的不定量となる因てカスチリアノの原理を追加する

今 $2\tau_1 h_1 F_1=M_1$, $2\tau_2 h_2 F_2=M_2$, と置けば

$$M=M_1+M_2 \quad \cdots\cdots\cdots(13)$$

軸長 L の內力仕事は

$$W=\frac{1}{2}M\frac{d\varphi}{dz}L$$

然るに $M\dfrac{d\varphi}{dz}=\dfrac{\tau^2 h^2}{G}\displaystyle\int_{(s)}\frac{ds}{h}$ なる故

$$W=\frac{1}{2}\ \frac{L}{G}\left\{\tau_1^2 h_1^2\int_{(s_1)}\frac{ds_1}{h_1}+\tau_2^2 h_2^2\int_{(s_2)}\frac{ds_2}{h_2}+\tau_3^2 h_3^2\int_{(s_3)}\frac{ds_3}{h_3}\right\}$$

然るに $\tau_3 h_3=\tau_1 h_1-\tau_2 h_2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M_1}{F_1}-\dfrac{M_2}{F_2}\right)$

$$\therefore \quad W=\frac{1}{8}\ \frac{L}{G}\left\{\frac{M_1^2}{F_1^2}\int_{(s_1)}\frac{ds_1}{h_1}+\frac{M_2^2}{F_2^2}\int_{(s_2)}\frac{ds_2}{h_2}+\left(\frac{M_1}{F_1}-\frac{M_2}{F_2}\right)^2\int_{(s_3)}\frac{ds_3}{h_3}\right\}$$

Castigliano の定理によつて F_1 部の捩れ角 φ_1 及 F_2 部の捩れ角 φ_2 は

$$\varphi_1=\frac{\partial W}{\partial M_1}=\frac{1}{4}\ \frac{L}{G}\left\{\frac{M_1}{F_1^2}\int_{(s_1)}\frac{ds_1}{h_1}+\left(\frac{M_1}{F_1}-\frac{M_2}{F_2}\right)\frac{1}{F_1}\int_{(s_3)}\frac{ds_3}{h_3}\right\}$$

$$\varphi_2\doteqdot\frac{\partial W}{\partial M_2}=\frac{1}{4}\ \frac{L}{G}\left\{\frac{M_2}{F_2^2}\int_{(s_2)}\frac{ds_2}{h_2}-\left(\frac{M_1}{F_1}-\frac{M_2}{F_2}\right)\frac{1}{F_2}\int_{(s_3)}\frac{ds_3}{h_3}\right\}$$

$\varphi_1=\varphi_2$ なるべきにより

$$\frac{M_1}{F_1}\left\{\frac{1}{F_1}\int_{(s_1)}\frac{ds_1}{h_1}+\frac{1}{F_1}\int_{(s_3)}\frac{ds_3}{h_3}+\frac{1}{F_2}\int_{(s_3)}\frac{ds_3}{h_3}\right\}=\frac{M_2}{F_2}\left\{\frac{1}{F_2}\int_{(s_2)}\frac{ds_2}{h_2}+\frac{1}{F_2}\int_{(s_3)}\frac{ds_3}{h_3}+\frac{1}{F_1}\int_{(s_3)}\frac{ds_3}{h_3}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots(14)$$

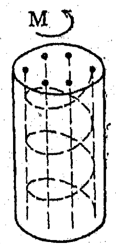
(13) (14) より M_1 M_2 を求めることが出來る M_1 M_2 が解れば

$$\tau_1=\frac{M_1}{2h_1F_1}, \qquad \tau_2=\frac{M_2}{2h_2F_2} \quad \cdots\cdots\cdots(15)$$

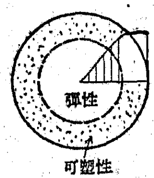
で τ_1 τ_2 を知り (11) により τ_3 を得。捩れ角は φ_1 又は φ_2 の何れかで解る。

(五) 軸の設計其他

軸を設計するには最大 τ が許容應力より小なる樣に軸の太さを決定すればよい。鐵筋混凝土の軸では鐵筋を螺線狀に入れると効果が大であるが斯かる場合の計算法は未だ確實なものがない(第７圖)。



第 7 圖



第 8 圖

軸を強く捩るときは外側に近き部分は τ が大となりて遂に彈性限度を超えてしまふ斯かる軸は一般に彈性限度以上の部分では第 8 圖の如く τ は拋物線狀分布 (J. J. Thomson の法則) か又は等分布をなす。