X. 平　板

平板の基本式

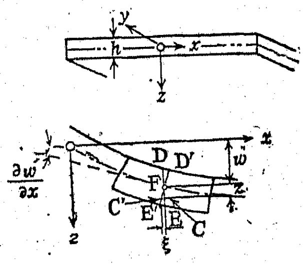
(一) 平板の應力，曲げモーメント，剪斷力及平衡式

平板に外力がかゝるとき曲げを起し外曲部は伸び內曲部は縮まり中央に近い處に不變の面がある此面を中立面 (Neutral Surface) といふ。平板に立てた垂直線は曲げの後にもそのまゝ直線をなして傾いて中立曲面に垂直をなすものと假定し (此を Kirchhoft の假定といふ) 坐標原點を中立面の上にとり x 及 y を板の橫縱の方向にとれば第1圖に於て C 點の x 方向の變位は

$$\xi=-z\frac{\partial w}{\partial x}$$

同樣に y 方向の變位は

$$\eta=-z\frac{\partial w}{\partial y}$$



第　1　圖

故に x y 方向の歪度 ε_x, ε_y は

$$\varepsilon_x=\frac{\partial\xi}{\partial x}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y=\frac{\partial\xi}{\partial y}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

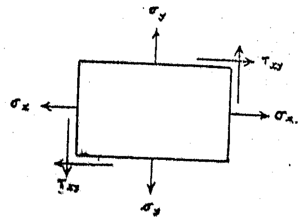
xy 面內の剪斷歪 γ_{xy} は

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}=-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

直角に働く二方向の應力を受けた場合にはフツクの法則により歪度 ε_x ε_y と應力 σ_x σ_y との間には下の關係あり

$$\left.\begin{aligned} E\varepsilon_x &= \sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} \\ E\varepsilon_y &= \sigma_y - \frac{\sigma_x}{m} \end{aligned}\right\}$$

但 E はヤング係數 $\frac{1}{m}$ はポアソン比剪斷應力 τ_{xy} と剪斷歪 γ_{xy} との間には同じく



第 2 圖

$$G\gamma_{xy} = \tau_{xy} \qquad \text{但 G は剛性係數}$$

或は書き直して

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\frac{1}{m^2}}\left(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_y}{m}\right) = -\frac{Ez}{1-\frac{1}{m^2}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\frac{1}{m^2}}\left(\varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x}{m}\right) = -\frac{Ez}{1-\frac{1}{m^2}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = -2Gz\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

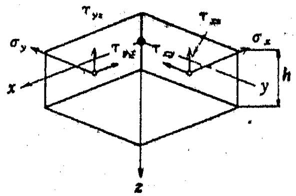
此等の應力より

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \int_{(h)} \sigma_x z dz = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y &= \int_{(h)} \sigma_y z dz = -D\left(\frac{\sigma^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{m}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ M_{xy} &= \int_{(h)} \tau_{xy} z dz = -D\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

但 $D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\frac{1}{m^2}\right)} = \frac{EI}{1-\frac{1}{m^2}}$ 平板曲げ剛さ (Flexural Rigidity of a Plate) $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

M_x M_y を xy 方向の平板の曲げモーメント (Bending Moment) M_{xy} を平板の捩りモーメント (Torsion Moment) といふ。

應力 σ_x σ_y τ_{xy} は何れも平板の上下縁に於て最大となり縁應力 (Extreme Fibre Stress) は



$$\left.\begin{aligned} \sigma'_x &= \pm\frac{6M_x}{h^2} \\ \sigma'_y &= \pm\frac{6M_y}{h^2} \\ \tau'_{xy} &= \pm\frac{6M_{xy}}{h^2} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

第 3 圖

今平板の要素部分をとりてこれに働く應力を圖示すれば第3圖の如くなる。

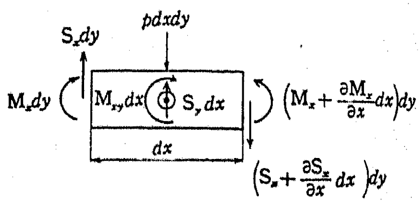
(2) に洩れた τ_{xz} 及 τ_{yz} より

$$\left.\begin{aligned} S_x &= \int_{(h)} \tau_{xz} dz \\ S_y &= \int_{(h)} \tau_{yz} dz \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

これを x 面及 y 面に於ける平板の剪斷力 (Shearing Force of a Plate) といふ。τ_{xz} τ_{yz} の最大值は中立面に於て起りその大さ τ'_{xz} τ'_{yz} は

$$\left.\begin{aligned} \tau'_{xz} &= \frac{3}{2}\frac{S_x}{h} \\ \tau'_{yz} &= \frac{3}{2}\frac{S_y}{h} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

平板の要素部分をとりこの上面に働く外壓力及び (2) (5) によって表せる曲げモーメント捩りモーメント及剪斷力を圖示すれば第 4 圖の如し（但 y 軸の方向より見たるもの)。此要素部分の中點Oに於て y に平行の軸（卽紙面に垂直の軸）に就いて全力のモーメントをとり零と置けば



第 4 圖

$$S_x\frac{dxdy}{2}+\left(S_x+\frac{\partial S_x}{\partial x}dx\right)\frac{dxdy}{2}+\left(M_x-M_x-\frac{\partial M_x}{\partial x}dx\right)dy$$
$$+\left(M_{xy}-M_{xy}-\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}dy\right)dx=0$$

故に

$$\left.\begin{aligned} S_x&=\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}=-D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w\\ &\text{同樣に}\\ S_y&=\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}=-D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w\\ &\text{但}\quad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{aligned}\right\}\text{..................(7)}$$

次に第 4 圖に於て z 軸の方向の力の和を零と置けば

$$\left(S_x+\frac{\partial S_x}{\partial x}dx-S_x\right)dy+\left(S_y+\frac{\partial S_y}{\partial y}dy-S_y\right)dx+pdxdy=0$$

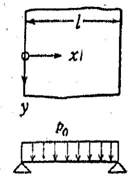
故に (7) を入れて

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{p}{D}\quad \text{or}\quad \nabla^2\nabla^2 w=\frac{p}{D}\ \text{.........(8)}$$

此れをキルヒホフ又はラグランジユの式 (Equation of Kirchhoff-Lagrange) といふ。

平 板 各 論

(二) **帶狀板** (Strip-plate)



第 5 圖

y の方向に無限に延びた帶狀板が p_0 なる强さの等分布荷重を受け $x=0$ 及 l なる二邊にて單に支持されてゐるとすれば w は x のみの函數となりキルヒホフの式は簡單に

$$\frac{d^4 w}{dx^4}=\frac{p_0}{D}\ \text{........................(9)}$$

となる。此れを積分して下の邊緣條件

$$x=0 \text{ 及 } l \text{ に於て}\qquad w=0 \text{ 及 } M_x=0$$

を入るれば下の如き w を得。

$$w=\frac{p_0}{24D}(x^4-2lx^3+l^3x)\ \text{....................(10)}$$

故に

$$\left.\begin{aligned} M_x&=-D\frac{d^2 w}{dx^2}=\frac{p_0}{2}(lx-x^2)\\ M_y&=-\frac{D}{m}\frac{d^2 w}{dx^2}=\frac{p_0}{2m}(lx-x^2)\\ M_{xy}&=0 \end{aligned}\right\}\text{...............(11)}$$

$$\left.\begin{aligned} S_x&=-D\frac{d^3 w}{dx^3}=p_0\left(\frac{l}{2}-x\right)\\ S_y&=0 \end{aligned}\right\}\text{...........(12)}$$

最大應力はこれより (4) 及 (6) 式により得らる。

(三) 楕圓板及圓板

楕圓形の平板が等分布荷重 p_0 を受け周邊を固定せるとき假に

$$w=c\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2$$

但 a, b は楕圓の最大及最小半軸 c は常數

とすれば周邊に於て $w=0$ 及 $\dfrac{\partial w}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial w}{\partial y}=0$ 卽周邊固定の條件を充たす。且

$$\nabla^2\nabla^2 w=8c\left\{3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2-\frac{4}{a^2b^2}\right\}$$

これと (8) と比較して

$$c=\frac{p_0}{8\mathrm{D}}\cdot\frac{1}{3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2-\frac{4}{a^2b^2}}$$

故に

$$w=\frac{p_0}{8\mathrm{D}}\cdot\frac{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2}{\left\{3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2-\frac{4}{a^2b^2}\right\}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

は求むる撓なり。曲げモーメント剪斷力及應力はこれより容易に得らる。

(13) に於て $a=b=r$ とすれば半徑 r の圓板の場合となる。卽

$$w=\frac{p_0}{64\mathrm{D}}(x^2+y^2-r^2)^2\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

(四) 矩形板

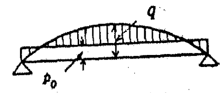
a 及 b なる幅及長さを有する四邊單純支持の矩形板が等分布荷重 p_0 を受ける場合を解くに際し先づ假りにこの矩形板が

$$w=c\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

なる撓を生ずるに必要なる荷重 p を求めるときは (8) により

$$p=\mathrm{D}\nabla^2\nabla^2 w=q\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\qquad 但\ q=\mathrm{D}\pi^4 c\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2$$

卽この場合荷重 p は四邊に於て零中央に於て最大なる sin 曲面狀のものとなる。



第 6 圖

今この p と等分布荷重 p_0 との差の自乘を板全面に積分してこの差を最小ならしめれば (觀差の最小自乘法と同一筆法)

$$\mathrm{I}=\int_0^b\int_0^a(p-p_0)^2dxdy$$

$$\frac{\partial\mathrm{I}}{\partial q}=2\int_0^b\int_0^a(p-p_0)\frac{\partial p}{\partial q}dxdy=0$$

$$\therefore\ q=\frac{16p_0}{\pi^2}\qquad 或は\qquad c=\frac{16p_0}{\pi^6\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2\mathrm{D}}$$

故に

$$w=\frac{16p_0}{\pi^6\mathrm{D}}\frac{\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

これは四邊に於て w 及曲げモーメント零となる故四邊單純支持の邊緣條件を充たしてゐる。曲げモーメント剪斷力は容易に (15) より求められる。

此問題を Fourier 級數を用ひて解けば更に正確である (Navier の法)

今

$$w_{r,s}=c_{r\,s}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}\quad 但\quad \left.\begin{matrix}r\\s\end{matrix}\right\}=1,\ 2,\ 3\ldots\ldots$$

と置けばこれは四邊支持の邊緣條件は $r,\ s$ の如何に係らず滿足する。

(8) より

$$p=\mathrm{D}\nabla^2\nabla^2 w_{r\,s}=q_{r,\,s}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}$$

但
$$q_{r,s}=\mathrm{D}\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}\right)^2\pi^4 c_{r,s}$$

$r,\ s$ の 1, 2…… の値について斯くの如きものを加へ合せて

$$p=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}q_{r,\,s}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}$$

で表はせば p は Fourier の定理により如何なる値でも表はし得るわけである。p が等分布荷重 p_0 の場合には上式の Fourier 係數 $q_{r,s}$ は

$$q_{rs}=\frac{\int_0^a\int_0^b p_0\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}\,dxdy}{\int_0^a\int_0^b \sin^2\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}\,dxdy}=\frac{\frac{4p_0ab}{rs\pi^2}}{\frac{ab}{4}}=\frac{16p_0}{rs\pi^2}$$

即
$$p=\frac{16p_0}{\pi^2}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{rs}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}$$

$$\therefore\quad c_{rs}=\frac{16p_0}{\pi^6\mathrm{D}}\,\frac{1}{\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}\right)^2 r.s}$$

故に

$$w=\frac{16p_0}{\pi^6\mathrm{D}}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}}{\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}\right)^2 r.s}\quad\ldots\ldots\ldots(16)$$

(15) はこの式の第一項丈とつた近似値と見てよい。

(五)　矩形板の實用式

鐵筋混凝土等に於て長邊が短邊の二倍以下なる矩形板の曲げモーメントは下の如き簡略法で求めることがある。等分布荷重 p_0 を p_1 p_2 に分けて p_1 は a をスパンとする梁に p_2 は b をスパンとする梁に加はるものと考へその中央の撓を求めれば兩端支持の場合とすれば V (八) の表により

$$\xi^1{}_m=\frac{5}{384}\,\frac{p_1a^4}{\mathrm{EI}}$$

$$\xi^2{}_m=\frac{5}{384}\,\frac{p_2b^4}{\mathrm{EI}}$$

これは一枚の板を縱と横とから見たるに過ぎぬため

$$\xi'_m=\xi^2{}_m$$

$$\therefore\quad p_1a^4=p_2b^4$$

且
$$p_1+p_2=p_0$$

故に $p_1,\ p_2$ の値は

$$p_1=\frac{b^4}{a^4+b^4}p_0,\qquad p_2=\frac{a^4}{a^4+b^4}p_0\quad\ldots\ldots\ldots(17)$$

故に四邊支持の板の最大曲げモーメントは中央に於て起り下の如き値である。

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \frac{p_1 a^2}{8} = \frac{b^4}{a^4+b^4}\,\frac{p_0 a^2}{8} \\ M_y &= \frac{p_2 b^2}{8} = \frac{a^4}{a^4+a^4}\,\frac{p_0 b^2}{8} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

尙四邊固定の板に於ても同様に中央最大曲げモーメントは

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \frac{p_1 a^2}{24} = \frac{b^4}{a^4+b^4}\,\frac{p_0 a^2}{24} \\ M_y &= \frac{p_2 b^2}{24} = \frac{a^4}{a^4+b^4}\,\frac{p_0 b^2}{24} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

又固定端の曲げモーメントは

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -\frac{p_1 a^2}{12} = -\frac{b^4}{a^4+b^4}\,\frac{p_0 a^2}{12} \\ M_y &= -\frac{p_2 b^2}{12} = -\frac{a^4}{a^4+b^4}\,\frac{p_0 b^2}{12} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

尙板の四隅がしつかりアンカーされてゐるときは M_{xy} を生ずる爲め $M_x M_y$ は實は (19) (20) より多少小さくなる。