IX. エネルギー式による解法

歪エネルギー式

(一) 歪エネルギー

彈性體の一部が變形して縦歪 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ 剪斷歪 $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ を生ずるとき此れ等に應ずる垂直應力を $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 剪斷應力を $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ とするときは單位容積の歪エネルギーは

$$\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx})\;\ldots\ldots\ldots(1)$$

である。$dx\times dy\times dz$ の要素部分に於けるエネルギーは

$$dW=\frac{1}{2}dxdydz(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx})\;\ldots(2)$$

故に彈性體全體に於ては

$$W=\frac{1}{2}\iiint_{[\text{全容積}]} dxdydz(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx})\;\ldots\ldots\ldots(3)$$

W を歪エネルギー又は內力仕事 (Internal Work) といふ。

(二) 直接應力に因る內力仕事

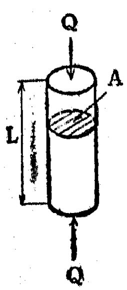
直接應力を受けた彈性體の斷面積を A とすれば歪度は IV (2) により

$$\varepsilon=\frac{Q}{EA}\qquad \text{但 E はヤング係數}$$

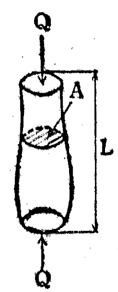
應力は IV(1) により

$$\sigma=\frac{Q}{A}$$

故に單位容積に於ける歪エネルギーは



第 1 圖



第 2 圖

$$\frac{1}{2}\sigma.\varepsilon=\frac{Q^2}{2EA^2}\ \text{又は}\ \frac{E\varepsilon^2}{2}\ \text{L}\ldots(4)$$

第 1 圖の如く斷面不變の彈性體に於ては彈性體全體の內力仕事は

$$W=\frac{1}{2}\sigma.\varepsilon.AL=\frac{Q^2L}{2EA}\;\ldots(5)$$

第 2 圖の如く斷面變化せる場合の全體の內力仕事は

$$W=\int_0^L\frac{Q^2}{2EA}dL\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

(三) 曲げモーメントに因る梁の內力仕事

第 3 圖

曲げモーメント M の爲めに梁の任意の點に起る垂直應力は V(4) により

$$\sigma_x=-\frac{M}{I}y$$

但 I は梁の斷面の慣性モーメント y は中立軸よりの距離

同じく歪度は

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}$$

故に此の點に於ける單位容積の内力仕事は

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sigma_x{}^2}{E}=\frac{1}{2}\,\frac{M^2}{EI^2}y^2 \;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

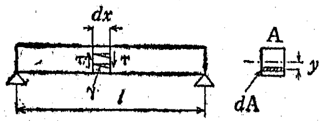
桁の斷面積を A 全長を l とすれば梁全體の内力仕事は

$$W=\int_{(l)}\int_{(A)}\frac{1}{2}\,\frac{M^2}{EI^2}y^2dA\,dx$$

然るに $\int_{(A)}y^2dA=I$ なる故

$$W=\int_0^l\frac{M^2}{2EI}dx \;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

(四) 剪斷力に因る梁の内力仕事



第 4 圖

剪斷應力 τ と剪斷歪 γ とは

$\tau=G\gamma$ 但 G は剛さ

故に單位容積内に於ける内力仕事は

$$\frac{1}{2}\tau\gamma=\frac{1}{2}\,\frac{\tau^2}{G}$$

$dA\,dx$ なる要素部分に於ける内力仕事は

$$dW=\frac{1}{2}\,\frac{\tau^2}{G}dA\,dx$$

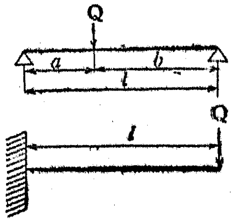
梁全體に對しての内力仕事は

$$W=\int_0^l\int_{(A)}\frac{1}{2}\,\frac{\tau^2}{G}dx\,dA$$

然るに V(8) により $\int_{(A)}\tau dA=S$ 但 S は剪斷力

$$W=\int_0^l\alpha\frac{S^2}{2GA}dx \qquad 但\quad \alpha=\frac{A}{S^2}\int_{(A)}\tau^2dA \;\cdots\cdots\cdots(9)$$

(五) 梁の内力仕事の例



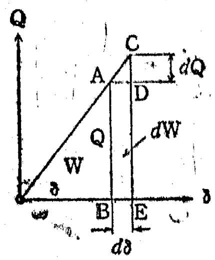
$$W=\frac{Q^2a^2b^2}{6EIl}$$

$$W=\frac{Q^2l^3}{6EI}$$

最小仕事の原理

(六) カスチリアノの定理

彈性體に外力 Q が働いて彈性變形をなしその働點が δ の轉位をした際更に微小なる轉位 $d\delta$ が加はつた爲に生ずる歪エネルギーの變化 dW は第 5 圖に於て ACD の三角を ABCDE に比して微量と考へれば



第 5 圖

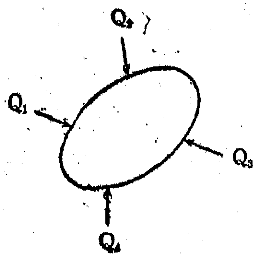
$$dW=Q\,d\delta$$

$$\therefore\quad \frac{dW}{d\delta}=Q \;\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

然るに $\Delta OAB\backsim\Delta ACD$ なる故 $\dfrac{d\delta}{dQ}=\dfrac{\delta}{Q}$,

$$\therefore\quad \frac{dW}{dQ}=\delta \;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

内力仕事を外力について微分するときはその外力の働點の轉位を得第6圖の如く Q_1 Q_2 Q_3 Q_4…と多數の外力あるときこの中の Q_n が dQ_n 丈増加した際の内力仕事は



第 6 圖

$$W+\frac{\partial W}{\partial Q_n}dQ_n\cdots\cdots\cdots(イ)$$

然るに内力仕事はこれに加はる外力の順序には無關係なる故今最初に dQ_n なる外力を彈性體にかけ然る後に Q_1 Q_2…Q_n…等を加へたと假定すればその爲めに起る内力仕事は

$$W+dQ_n.\delta_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(ロ)$$

この W は Q_1 Q_2…Q_n…の dQ_n を除いて全部の外力の爲めに起る内力仕事であつて $dQ_n\,\delta_n$ は最初から加はつてゐた爲め後に Q_n が加はつてその働點が δ_n 丈動いたとすれば dQ_n の爲めに自然これ丈の内力仕事が加はるわけである。但し最初に dQ_n 丈かけた爲に起つた働點の轉位 $d\delta_n$ は δ_n に比して微量なる爲め無視する。(イ)(ロ)は等しかるべきにより

$$\frac{\partial W}{\partial Q_n}=\delta_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

即多數の外力によつて起る彈性體の變形の場合にもその内の任意の外力について内力仕事を微分すればその外力の働點の轉位が得られる。この事は外偶力が働く場合も同樣で只その際には角轉位即廻轉の量が出る。上の定理をカスチリアノの定理 (Theorem of Castigliano) といふ。

(七) 最小仕事の原理

カスチリアノの定理に於て外力 Q_n を今轉位の起らざる樣なものにとれば當然

$$\frac{\partial W}{\partial Q_n}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

故に今構造物の不明の反力又は應力等を X, Y, Z…としそれ等の働く點が不動と考へれば

$$\frac{\partial W}{\partial X}=0,\quad \frac{\partial W}{\partial Y}=0,\quad \frac{\partial W}{\partial Z}=0,\quad \&\ C.\cdots\cdots\cdots(14)$$

此等の式は何れも XYZ…に就いて一次式であつて式の數と XYZ…の數とは等しい故この聯立方程式を解けば XYZ…を求めることが出來る。此れを最小仕事の原理 (Principle of Least Work) といふ。これは不靜定應力の計算に用ひて便である。

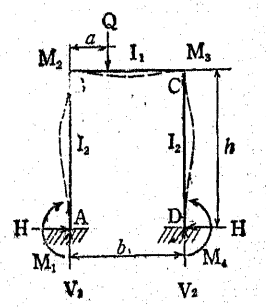
最小仕事の原理の應用

(八) 矩形門形ラーメン

AB 柱の A より x の距離にある點の A 側の曲げモーメントは

$$M=M_1-Hx$$

ABC なる折れ曲つた梁の B より x なる距離にある點の B 側の曲げモーメントは



第 7 圖

$$M=M_1+V_1x-Hh \qquad [x<a]$$

$$\quad=M_1+Vx-Hh-Q(x-a) \qquad [x>a]$$

ABCD なる折れ曲つた柱の C より x 距離にある點の C 側の曲げモーメントは

最小仕事の原理より矩形門形ラーメンに於て隅角の曲げモーメントを求めるには通常曲げモーメントの影響のみを考へれば充分である故門形ラーメン全體の內力仕事は

$$W=\frac{1}{2EI_2}\left[\int_0^h (M_1-Hx)^2dx+\int_0^h \{M_4-H(h-x)\}^2 dx\right]$$
$$+\frac{1}{2EI_1}\left[\int_0^a (M_1+V_1x-Hh)^2dx+\int_a^b \{M_1+V_1x-Hh-Q(x-a)\}^2 dx\right]$$

故に M_1, M_4, H を未知と考へ

$$\frac{\partial W}{\partial M_1}=0,\quad \frac{\partial W}{\partial M_4}=0,\quad \frac{\partial W}{\partial H}=0$$

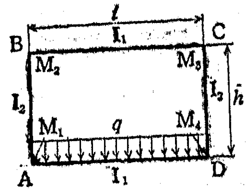
よりこれ等を求むれば

$$\left.\begin{aligned} H&=\frac{3I_2a(b-a)}{2h(hI_1+2bI_2)}Q\\ M_1&=\frac{I_2}{2}\left\{\frac{1}{hI_1+2bI_2}-\frac{b-2a}{b(6hI_1+bI_2)}\right\}a(b-a)Q\\ M_4&=\frac{I_2}{2}\left\{\frac{1}{hI_1+2bI_2}+\frac{b-2a}{b(6hI_1+bI_2)}\right\}a(b-a)Q \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(15)$$

を得尙他の未知値 M_2, M_3, V_1, V_2 は下式により容易に求められる

$$\left.\begin{aligned} M_2&=M_1-Hh\\ M_3&=M_4-Hh\\ V_1&=\frac{1}{b}\{M_4-M_1+Q(b-a)\}\\ V_2&=Q-V_1 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

（九） 矩形函形ラーメン



第 8 圖

AB 柱に於て A より x の距離にある A 側の曲げモーメントは

$$M=M_1-\frac{M_1-M_2}{h}x$$

BC 梁の B より x の距離にある B 側の曲げモーメントは

$$M=M_2$$

CD 柱は AB 柱に同じ

AD 梁の A より x の距離にある A 側の曲げモーメントは

$$M=M_1+M'$$

（但 M' は單純梁として q の爲めに起る曲げモーメント）

故にこれ等の爲めに起る函形ラーメン全體の內力仕事は

$$W=\frac{2}{2EI_2}\int_0^h\left\{M_1-\frac{M_1-M_2}{h}x\right\}^2dx+\frac{1}{2EI_1}\int_0^l M_2^2dx$$
$$+\frac{1}{2EI_1}\int_0^l (M_1+M')^2dx$$

これを M_1 M_2 なる未知値に對し

$$\frac{\partial W}{\partial M_1}=0,\quad \frac{\partial W}{\partial M_2}=0$$

より M_1 M_2 を求めれば

$$M_1=-\frac{\left(\frac{l}{I_1}+\frac{2h}{3I_2}\right)\int_0^l \frac{M'dx}{I_1}}{\left(\frac{l}{I_1}+\frac{2h}{2I_2}\right)^2-\left(\frac{h}{3I_2}\right)^2}$$

$$M_2=\frac{\frac{h}{3I_2}\int_0^l \frac{M'dx}{I_1}}{\left(\frac{l}{I_1}+\frac{2h}{3I_2}\right)^2-\left(\frac{h}{3I_2}\right)^2}$$

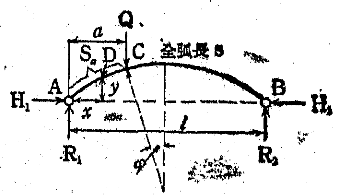
但し q なる等分布滿載荷重に對しては $\int_0^l M'dx=-\frac{ql^3}{12}$ なるにより

$$\left.\begin{aligned} M_1&=\frac{\frac{l^3}{12I_1}\left(\frac{l}{I_1}+\frac{2h}{3I_2}\right)q}{\left(\frac{l}{I_1}+\frac{2}{3}\frac{h}{I_2}\right)^2-\left(\frac{h}{3I_2}\right)^2} \\ M_2&=-\frac{\frac{l^3h}{36I_1I_2}q}{\left(\frac{l}{I_1}+\frac{2}{3}\frac{h}{I_2}\right)^2-\left(\frac{h}{3I_2}\right)^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

これは VII (14) に於て $q_0=0$ とせるものに同じ。M_3 M_4 は左右對稱たる故求むる要なし。

(一〇)　二鉸アーチ

既に VIII (9) に於て知れる如く二鉸アーチに於ては R_1 R_2 は靜力學的に求められ H_1 のみが靜力學的不定値である



第　9　圖

これを最小仕事の原理により求むるには下の曲げモーメント

と垂直推力とによる内力仕事を考へれば通常充分である。

$$\left.\begin{aligned} M&=Q\frac{l-a}{l}x-H_1y & [x<a] \\ &=Q\frac{l-a}{l}x-H_1x-Q(x-a) & [x>a] \\ N&=Q\frac{l-a}{l}\sin\varphi+H_1\cos\varphi & [x<a] \\ &=-Q\frac{a}{l}\sin\varphi+H_1\cos\varphi & [x>a]\end{aligned}\right\}\cdots\cdots[\text{VIII (9)}]$$

故にアーチ全體の内力仕事は

$$W=\int_0^S\frac{M^2ds}{2EI}+\int_0^S\frac{N^2ds}{2EA}$$

$$=\int_0^{S_a}\frac{1}{2EI}\left\{Q\frac{l-a}{l}x-H_1y\right\}^2ds+\int_{S_a}^S\frac{1}{2EI}\left\{Q\frac{l-a}{l}x-H_1y\right.$$

$$\left.-Q(x-a)\right\}^2ds+\int_0^{S_a}\frac{1}{2EA}\left\{Q\frac{l-a}{l}\sin\varphi+H_1\cos\varphi\right\}^2ds$$

$$+\int_{S_a}^S\frac{1}{2EA}\left\{-Q\frac{a}{l}\sin\varphi+H_1\cos\varphi\right\}^2ds$$

$\frac{\partial W}{\partial H_1}=0$ より

$$H_1=Q\frac{\int_0^S\frac{(l-a)xy}{lI}ds-\int_{S_a}^S\frac{(x-a)y}{I}ds}{\int_0^S\frac{y^2}{I}ds}$$

$$\frac{-\int_0^S\frac{(l-a)\sin\varphi}{lA}dx+\int_{S_a}^S\frac{\sin\varphi}{A}dx}{+\int_0^S\frac{\cos\varphi}{A}dx}\cdots\cdots\cdots(18)$$

[VIII (17)]

溫度の爲めに起る H_t は下の如くにして求める。

$$M=H_t y$$

$$N=H_t\cos\varphi$$

なる故溫度の爲めの內力仕事は

$$W=\int_0^S \frac{H_t^2 y^2 ds}{2EI}+\int_0^S \frac{H_t^2\cos^2\varphi\, ds}{2EA}$$

この內力仕事は鉸距離が $t\alpha l$（但 t は溫度の上昇 α は膨脹係數）丈自由に伸びれば消失するわけなり故にこの內力仕事は H_t によつて $t\alpha l$ 轉位を鉸に與へたために生じたものと見做し得卽

$$\frac{\partial W}{\partial H_t}=t\alpha l$$

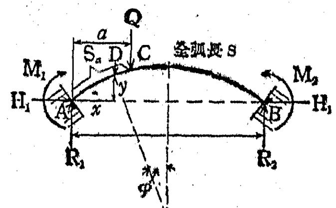
これより

$$H_t=\frac{t\alpha El}{\int_0^S \frac{y^2 ds}{I}+\int_0^S \frac{\cos\varphi}{A}dx}\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

[VIII (22)]

(一一) 無鉸アーチ

反力 H_1 R_1 R_2 端力のモーメント M_1 M_2 の中 R_2 M_2 は VIII (26) により靜力學的に求められる故に H_1 R_1 M_1 が不靜定値である。D に於ける A 側の曲げモーメント及垂直推力は VIII (14) により



第 10 圖

$$M=M_1+R_1x-H_1y \qquad [x<a]$$

$$=M_1+R_1x-H_1y-Q(x-a) \qquad [x>a]$$

$$N=R_1\sin\varphi+H_1\cos\varphi \qquad [x<a]$$

$$=(R_1-Q)\sin\varphi+H_1\cos\varphi \qquad [x>a]$$

夫れ故にこれ等による內力仕事は

$$W=\int_0^S \frac{M^2}{2EI}ds+\int_0^S \frac{N^2}{2EA}ds$$

$$=\int_S^{S_a}\frac{\{M_1+R_1x-H_1y\}^2}{2EI}ds+\int_{S_a}^S\frac{\{M_1+R_1x-H_1y-Q(x-a)\}^2}{2EI}ds$$

$$+\int_0^{S_a}\frac{\{R_1\sin\varphi+H_1\cos\varphi\}^2}{2EA}ds+\int_{S_a}^S\frac{\{(R_1-Q)\sin\varphi+H_1\cos\varphi\}^2}{2EA}ds$$

$\frac{\partial W}{\partial H_1}=0$, $\frac{\partial W}{\partial M_1}=0$, $\frac{\partial W}{\partial R_1}=0$ より M_1, M_1, R_1 に就いて VIII (28) と同一式を得。

溫度による爲めの反力及び端力のモーメントは R_1 R_2 は消失して H_t と M_t とになる。

$$W=\int_0^S \frac{\{M_t-H_t y\}^2}{2EI}ds+\int_0^S \frac{(H_t\cos\varphi)^2}{2EA}ds$$

に於て

$$\frac{\partial W}{\partial H_t}=t\alpha l,\quad \frac{\partial W}{\partial M_t}=0$$

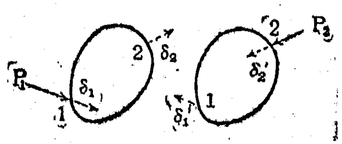
より H_t M_t に關して VIII (32) と同一式を得。

相反作用の定理

(一二) 相反作用の定理

彈性體の一點 1 に P_1 なる外力が働いたとき此點の轉位 δ_1, 2 の點の轉位を δ_2 とする次に同じ彈性體の 2 の點に外力 P_2 が働

いたとき此點の轉位 δ'_2, 1 の點の轉位を δ'_1 とする。然るときは彈性體に働く外力の仕事の量は



第 11 圖

P_1 が 1 に働く時は $\dfrac{P_1\delta_1}{2}$ 次に P_2 が 2 に加はる時は $\dfrac{P_2\delta'_2}{2}$ この時 1 の點は仕事 $P_1\delta'_1$ を生ずる。故に P_1 及 P_2 のかゝつた爲めの仕事の總和は

$$W=\frac{P_1\delta_1}{2}+\frac{P_2\delta'_2}{2}+P_1\delta'_1$$

今度は先づ P_2 なる外力を 2 にかけて後 P_1 を 1 にかければ仕事の總和は

$$W=\frac{P_2\delta'_2}{2}+\frac{P_1\delta_1}{2}+P_2\delta_2$$

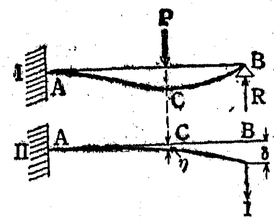
P_1 及 P_2 の爲めに生ずる仕事の總和はこれをかける順序には無關係なるべきにより上の仕事の總和は互に等しかるべき筈である

$$\therefore\quad P_1\delta'_1=P_2\delta_2 \quad\cdots\cdots(20)$$

特に $P_1=P_2$ の際には $\delta'_1=\delta_2$ 卽 P_1 なる外力が 1 に働いて 2 に生ずる轉位 δ_2 は同じ大さの外力が 2 に働いて 1 に生ずる轉位 δ'_1 と等しい。(20) の關係は澤山の外力のある場合に於ても成立する。これをマクスウエル・ベツテイの相反作用の定理 (Maxwell-Betti's Reciprocal Theorem) といふ。

(一三) 相反作用の定理擴張應用

第 12 圖 I の B に於ける反力 R を取り去つて II の如くこゝに 1 なる荷重を加へたるときの (卽 1 なる端荷重を受けた片持梁の) B 及 C に於ける撓を δ 及 η とすればこれ等を求めることは容易である。[V (8)]



第 12 圖

今假りに I の外力で II の如き撓を生じたものと假想すれば梁全體の外力の仕事量は固定端に於て梁が充分に固定されてゐれば

$$W=P\eta-R\delta$$

然るに逆に II の外力で I の如き撓を生じたものと考へれば外力の存在する A, B 端不動なる爲め梁全體の外力の仕事の量は零である。相反作用の定理によりこの二つの場合の仕事の量は等しかるべきにより

$$W=P\eta-R\delta=0$$

$$\therefore\quad R=\frac{P\eta}{\delta} \quad\cdots\cdots(21)$$

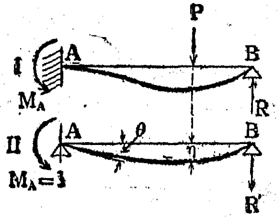
卽ち第 12 圖 II の場合の η δ を知るときは I の場合 R を上式より得。卽ち第 12 圖 II の η の値(卽片持梁の 1 なる端荷重を受けたるときの撓) は I の場合の R を與へる影響線をなしてゐる。

第 13 圖 II の如き場合の θ と η とは容易に求められる。これと同一撓を有し I の如き外力の働く場合の仕事の量は

$$W=P\eta-M_A\theta$$

逆に II の如き外力で I と同一なる撓を與へる時の仕事の量は

零である。この兩者の仕事の量は等しかるべきにより



第 13 圖

$$W=P\eta-M_A\theta=0$$

$$\therefore \quad M_A=\frac{P\eta}{\theta}\quad\cdots\cdots\cdots(22)$$

卽 η, θ が知れれば (22) により M_A を得卽第 13 圖 II の撓は I の M_A の影響線をなしてゐる。