

VIII. 曲がり梁又はアーチ

曲がり梁の種類及荷重

(一) 曲がり梁の種類

通常曲がり梁は両端支持の方法によつて下の三種がある皆凸部を上方に向けて用ふるを常とする。

(イ) 三鉸アーチ (Three-hinged Arch)



第 1 圖

(ロ) 二鉸アーチ (Two-hinged Arch)



第 2 圖

(ハ) 無鉸アーチ又は定端アーチ (No-hinged Arch or Fixed Arch)



第 3 圖

曲がり梁は又トラス、ラーメンの部材として使用されることもある。

(二) 曲がり梁の受ける荷重

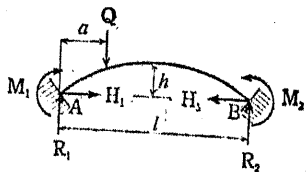
曲がり梁の受ける荷重は多くは通常の直梁の場合と同じ。

曲がり梁の應力

(三) 曲がり梁の反力

曲がり梁の上に荷重が載るときその両端に於て生ずる反力は通

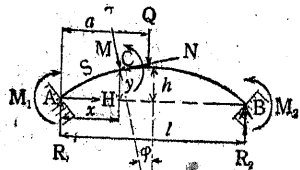
常の直梁の場合の反力 R_1, R_2 [これをアーチでは垂直反力 (Vertical Reaction) といふ] の外に回転端では水平反力 (Horizontal Reaction) H_1 があり固定端では更にこれに端力のモーメント (End Moment) M_1, M_2 が起る。今此等の正の値を第4圖の如く定む。



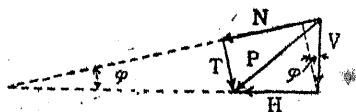
第 4 圖

(四) 曲がり梁の曲げモーメント、垂直推力及接線力

曲がり梁の任意の點に於ては上述の荷重及反力の爲めに曲げモーメント (Bending Moment) M 及び垂直推力 (Normal Thrust) N 及接線力 (Tangential Force) T が生ずる。今此等の正の値を第5圖に示す様にきめる。



第 5 圖



第 6 圖

今 N と T との合力を P としこれを水平及垂直に分力すれば H 及 V となる (第6圖)。

$C(x, y)$ の點に於て AC 側の外力のモーメントをとれば曲げモーメント M は

$$\begin{aligned} M &= M_1 + R_1 x - H_1 y & [x < a] \\ M &= M_1 + R_1 x - H_1 y - Q(x-a) & [x > a] \end{aligned} \dots\dots\dots (1)$$

C 點に於ける垂直推力は

$$N = V \sin \varphi + H \cos \varphi$$

然るに $H = H_1$, V は $x < a$ では R_1 に等しく $x > a$ では $R_1 - Q$ に等しき故

$$\begin{aligned} N &= R_1 \sin \varphi + H_1 \cos \varphi & [x < a] \\ N &= (R_1 - Q) \sin \varphi + H_1 \cos \varphi & [x > a] \end{aligned} \dots\dots\dots (2)$$

C 點に於ける接線力 T は

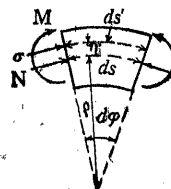
$$T = V \cos \varphi - H \sin \varphi$$

なる故

$$\begin{aligned} T &= R_1 \cos \varphi - H_1 \sin \varphi & [x < a] \\ T &= (R_1 - Q) \cos \varphi - H_1 \sin \varphi & [x > a] \end{aligned} \dots\dots\dots (3)$$

(五) 曲がり梁の應力

曲がり梁の断面に起る垂直應力 σ は曲げモーメント M 及垂直推力 N から生ずる。今曲がり梁の一小部をとり第7圖に示せる様な M, N, σ を正とすれば s, s' と φ とは反対向の方向が正なる故



第 7 圖

$$ds' = \left(1 + \frac{\eta}{\rho}\right) ds = ds - \eta d\varphi$$

此の部分にフックの弾性法則を應用すれば

$$\sigma = -E \frac{\delta(ds')}{ds'}$$

但 δ は弾性による變化量を示す。

$$\delta(ds') = \delta(ds) - \eta \delta(d\varphi)$$

$$\therefore \sigma = E \left\{ -\frac{\delta(ds)}{ds} + \frac{\delta(d\varphi)}{ds} \eta \right\} \frac{\rho}{\rho + \eta} \dots\dots\dots(4)$$

此式に於ける $-\frac{\delta(ds)}{ds}$ は中立軸上の壓縮歪であつて $\frac{\delta(d\varphi)}{ds}$ は拱角の歪化を示す。

今 $-\frac{\delta(ds)}{ds} = X, \quad \frac{\delta(d\varphi)}{ds} = Y$ と置けば

$$N = \int_{(A)} \sigma dA = E \left\{ X \int_{(A)} \frac{\rho}{\eta + \rho} dA + Y \int_{(A)} \frac{\rho \eta}{\eta + \rho} dA \right\}$$

$$M = \int_{(A)} \sigma \eta dA = E \left\{ X \int_{(A)} \frac{\rho \eta}{\rho + \eta} dA + Y \int_{(A)} \frac{\rho \eta^2}{\rho + \eta} dA \right\}$$

今 $\int_{(A)} dA = A, \quad \int_{(A)} \eta dA = G, \quad \int_{(A)} \frac{\rho \eta^2}{\rho + \eta} dA = I'$ とすれば

$$N = E \left\{ X \left(A - \frac{G}{\rho} + \frac{I'}{\rho^2} \right) + Y \left(G - \frac{I'}{\rho} \right) \right\}$$

$$M = E \left\{ X \left(G - \frac{I'}{\rho} \right) + Y I' \right\}$$

中立軸が拱肋の中心を通るときは上式の断面一次モーメント G は 0 である I' は断面の慣性モーメント I に似た値であつて ρ が大なるときはこれは I と一致する。 I' を準慣性モーメント (Modified Moment of Inertia) と呼ぶ。今 $G=0, I'=I$ として XY を求めれば

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\delta(ds)}{ds} = X &= \frac{N}{EA} + \frac{M}{EA\rho} \\ \frac{\delta(d\varphi)}{ds} = Y &= \frac{N}{EA\rho} + \frac{M}{EI} + \frac{M}{EA\rho^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

故に (4) に於て ρ が η に對して大なる故

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} \frac{\rho \eta}{\rho + \eta} + \frac{M}{A\rho} \dots\dots\dots(6)$$

此第一項は短柱の応力第二項は曲がり梁の曲げ応力であり第三項は曲がり梁特有の項である。この第三項はアーチの半径 ρ が充分大ならば無視してもよい故通常のアーチでは両端より壓力を受ける直梁と同一の垂直應力を生ずるものと見て下式を使つてよい。

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} \eta \dots\dots\dots(7)$$

接線應力の計算には直梁の場合に於ける剪断力 S の代りに接線力 T を用ひて $V(7)$ を用ふればよい。アーチの場合には通常この接線應力は重要ではない。

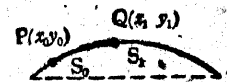
(六) 曲がり梁の變形

曲がり梁の變形は (5) 式より ρ が充分大なるときは

$$\left. \begin{aligned} \delta(ds) &= -\frac{N}{EA} ds \\ \delta(d\varphi) &= \frac{M}{EI} ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

此第一式は N の爲めに起る ds の變形を與へる故にこの兩邊に $\cos \varphi$ 及 $\sin \varphi$ を乗すれば dx 及 dy の變形となる。

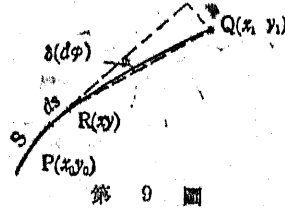
即アーチの一點 $P(x_0, y_0)$ と他の點 $Q(x_1, y_1)$ との間の N による x 及 y の互の變化は



第 8 圖

$$\left. \begin{aligned} \delta(x_1-x_0) &= -\int_P^Q \frac{N}{EA} dx \\ \delta(y_1-y_0) &= -\int_P^Q \frac{N}{EA} dy \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

xy の變化はこの外にMより来るものがある。即今アーチの $R(x, y)$ に於ける一部 ds が M の爲めに $\delta(d\varphi)$ の變化を受ければ Q 點 (x_1, y_1) は R を中心として $\delta(d\varphi)$ 丈回転する故に x_1 及 y_1 の變化は $-\delta(d\varphi)(y_1-y)$ 及 $\delta(d\varphi)(x_1-x)$ 故に M による PQ 間の xy の變化は



$$\left. \begin{aligned} \delta(x_1-x_0) &= -\int_P^Q \delta(d\varphi)(y_1-y) = -\int_P^Q \frac{M}{EI} (y_1-y) ds \\ \delta(y_1-y_0) &= \int_P^Q \delta(d\varphi)(x_1-x) = \int_P^Q \frac{M}{EI} (x_1-x) ds \end{aligned} \right\} \dots\dots(10)$$

(9) 及 (10) を併せて

$$\left. \begin{aligned} \delta(x_1-x_0) &= -\int_P^Q \frac{M}{EI} (y_1-y) ds - \int_P^Q \frac{N}{EA} dx \\ \delta(y_1-y_0) &= \int_P^Q \frac{M}{EI} (x_1-x) ds - \int_P^Q \frac{N}{EA} dy \end{aligned} \right\} \dots\dots(11)$$

又 PQ の間の φ の變化は (8) 下式より

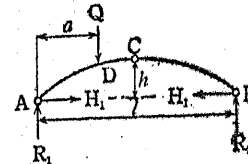
$$\delta(\varphi_1-\varphi_0) = \int_P^Q \frac{M}{EI} ds \dots\dots\dots(12)$$

(11) (12) による曲がり梁の任意の二點間の互の變位及變角を知ることを得。

三 鉸 アーチ

(七) 垂直及水平反力

此場合には R_1 及 R_2 は B 又は A に就いて凡ての外力のモーメントをとつて零と置けば



第 10 圖

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{Q(l-a)}{l} \\ R_2 &= \frac{Qa}{l} \end{aligned} \right\} \dots\dots(13)$$

此れ全く單純梁の場合と同一値である。 H_1 は C に就いて CB 部分の外力のモーメントをとれば

$$H_1 = \frac{Qa}{2h} \dots\dots\dots(14)$$

即此場合は此等凡て靜力學的に決定する。

(八) 曲げモーメント垂直推力接線力及應力

$R_1 R_2 H_1$ が求まれば $M_1=0$ なる故 (1) (2) (3) によつて M, N, T を得られる従つてこれに應ずる應力及變形も (五)(六) によりて得られる。M はこの場合單純梁の場合に $-H_1 y$ が加はる丈の差異である。但符號は單純梁の時と異り第 4 圖第 5 圖の如きを正とする。

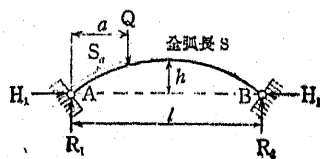
二 鉸 アーチ

(九) 荷重による反力

第 11 圖の垂直反力 $R_1 R_2$ は (13) と同じく

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= Q \frac{l-a}{l} \\ R_2 &= Q \frac{a}{l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

水平反力 H_1 は静力學的不定量であるこれを定むるに曲がり梁變形の (11) 式を用ひる。第一式の積分を AB 全長 S についてとれば



第 11 圖

$$\delta l = \int_0^S \frac{My}{EI} ds - \int_0^S \frac{N}{EA} dx$$

スパンの長さ不変とすれば $\delta l = 0$ なる故

$$\int_0^S \frac{My}{EI} ds - \int_0^S \frac{N}{EA} dx = 0 \dots\dots\dots (16)$$

M は (1) に於て $M_1 = 0, R_1 = Q \frac{l-a}{l}$ なる故に

$$\left. \begin{aligned} M &= Q \frac{l-a}{l} x - H_1 y & [x < a] \\ M &= Q \frac{l-a}{l} x - H_1 y - Q(x-a) & [x > a] \end{aligned} \right\}$$

N は (2) より

$$\left. \begin{aligned} N &= Q \frac{l-a}{l} \sin \varphi + H_1 \cos \varphi & [x < a] \\ N &= -Q \frac{a}{l} \sin \varphi + H_1 \cos \varphi & [x > a] \end{aligned} \right\}$$

此等を (16) に入れて

$$\begin{aligned} & Q \frac{l-a}{l} \int_0^S \frac{xy ds}{I} - H_1 \int_0^S \frac{y^2 ds}{I} - Q \int_{S_a}^S \frac{(x-a)y}{I} ds \\ & - Q \int_0^{S_a} \frac{\sin \varphi}{A} dx + Q \frac{a}{l} \int_0^S \frac{\sin \varphi dx}{A} - H_1 \int_0^S \frac{\cos \varphi dx}{A} = 0 \\ & \int_0^S \frac{y^2}{I} ds = 2 \int_0^{\frac{S}{2}} \frac{y^2}{I} ds, \quad \int_0^S \frac{xy ds}{I} = l \int_0^{\frac{S}{2}} \frac{y ds}{I} \\ & \int_0^S \frac{\sin \varphi}{A} dx = 0, \quad \int_0^S \frac{\cos \varphi dx}{A} = 2 \int_0^{\frac{S}{2}} \frac{\cos \varphi dx}{A} \end{aligned}$$

なる故

$$H_1 = \frac{Q}{2} \frac{\int_0^{S_a} \frac{xy ds}{I} + a \int_{S_a}^{\frac{S}{2}} \frac{y}{I} ds - \int_0^{S_a} \frac{\sin \varphi}{A} dx}{\int_0^{\frac{S}{2}} \frac{y^2}{I} ds + \int_0^{\frac{S}{2}} \frac{\cos \varphi dx}{A}} \dots\dots\dots (17)$$

N の影響は通常小なる故これを無視すれば

$$H_1 = \frac{Q}{2} \frac{\int_0^{S_a} \frac{xy ds}{I} + a \int_{S_a}^{\frac{S}{2}} \frac{y}{I} ds}{\int_0^{\frac{S}{2}} \frac{y^2}{I} ds} \dots\dots\dots (18)$$

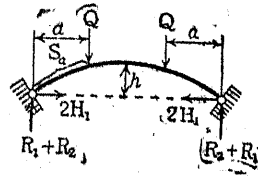
(一〇) 荷重による拱頂の撓

第 12 圖の如く對稱的の二荷重を用ふる方計算に便である。一個の場合の拱頂の撓を δh とすればこの場合は其二倍となる (11) 第二式に於て積分を A より拱頂迄とれば

$$\delta h = - \int_0^{\frac{S}{2}} \frac{M}{EI} x ds - \int_0^{\frac{S}{2}} \frac{N}{EA} dy \dots\dots\dots (19)$$

M 及 N は下の如し

$$\left. \begin{aligned} M &= (R_1 + R_2)x - 2H_1y & [x < a] \\ &= (R_1 + R_2)x - 2H_1y - Q(x-a) & [x > a] \\ N &= (R_1 + R_2) \sin \varphi + 2H_1 \cos \varphi & [x < a] \\ &= 2H_1 \cos \varphi & [x > a] \end{aligned} \right\}$$



第 12 圖

但し R_1, R_2, H_1 は凡て片側荷重による値である。
故に

$$2\delta h = 2H_1 \left(\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{xy ds}{EI} - \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{\cos \varphi dy}{EA} \right) - Q \left(\int_0^{sa} \frac{x^2 ds}{EI} + a \int_{sa}^{\frac{s}{2}} \frac{x ds}{EI} + \int_0^{sa} \frac{\sin \varphi dy}{EA} \right) \dots (20)$$

N の影響を無視すれば

$$2\delta h = 2H_1 \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{xy ds}{EI} - Q \left(\int_0^{sa} \frac{x^2 ds}{EI} + a \int_{sa}^{\frac{s}{2}} \frac{x ds}{EI} \right) \dots (21)$$

此式の H_1 には (九) の式を用ふ。

(一) 温度による反力及拱頂撓

曲がり梁が全體一樣に熱せられ温度 t 上昇するとき兩支點不動とすれば熱應力を生ずる今曲がり梁材料の熱膨脹係数を α とすれば梁を自由に放置すればスパン全長に於て $\alpha t l$ の伸を起す故に (11) 第一式は

$$\delta l = \int_0^s \frac{My}{EI} ds - \int_0^s \frac{N}{EA} dx + \alpha t l$$

但此の場合荷重なき故 $R_1 = R_2 = 0$, 温度による H_1 を H_t とすれば

$$\left. \begin{aligned} M &= -H_t y \\ N &= H_t \cos \varphi \end{aligned} \right\}$$

スパン不變とすれば $\delta l = 0$

$$-H_t \int_0^s \frac{y^2 ds}{EI} - H_t \int_0^s \frac{\cos \varphi}{EA} dx + \alpha t l = 0$$

$$H_t = \frac{E \alpha t l}{2 \left\{ \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{y^2 ds}{I} + \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{\cos \varphi}{A} dx \right\}} \dots (22)$$

N の影響を無視すれば

$$H_t = \frac{E \alpha t l}{2 \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{y^2 ds}{I}} \dots (23)$$

拱頂の撓は (11) 第二式より

$$\delta h = - \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{M}{EI} x ds - \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{N}{EA} dy + \alpha t h$$

此に $M = -H_t y$, $N = H_t \cos \varphi$ を入れて

$$\delta h = H_t \left\{ \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{xy}{EI} ds - \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{\cos \varphi dy}{EA} \right\} + \alpha t h \dots (24)$$

N の影響を無視すれば

$$\delta h = H_t \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{xy}{EI} ds + \alpha t h \dots (25)$$

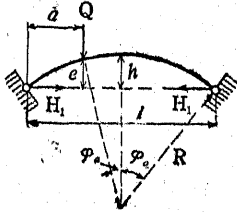
此等の式の H_t には (22) (23) を用ふ。

(二) 曲げモーメント垂直推力接線力及應力

R_1, R_2, H_1 が求まれば $M_1 = 0$ なる故 (1) (2) (8) により M, N, T を得それに應ずる應力は (五) で求められる。

(一三) 不變断面をもつ二絞アーチ (但 $N=0$ の場合)

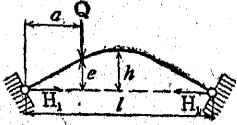
圓形アーチ



$$H_1 = \frac{(R-h)\{2e + \varphi_a(l-2a) - \varphi_0 l\} + a(l-a)Q}{2\varphi_0[R^2 + 2(R-h)^2]}$$

$$H_2 = \frac{\alpha l EI}{R\{\varphi_0[R^2 + 2(R-h)^2] - \frac{8}{2}l(R-h)\}}$$

低拋物線アーチ



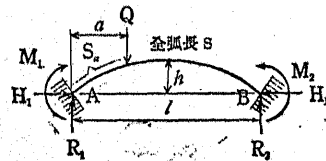
$$H_1 = \frac{5a(l-a)(l^2 + al - a^2)Q}{8hl^3}$$

$$H_2 = \frac{15\alpha l EI}{8h^2}$$

無絞アーチ

(一四) 荷重による反力及端力のモーメント

反力 $R_1 R_2 H_1$ 端力のモーメント $M_1 M_2$ の内 $R_2 M_2$ は R_1 及 M_1 が解つてゐれば静力學的に求められる。



第 13 圖

$$\left. \begin{aligned} R_2 &= Q - R_1 \\ M_2 &= M_1 + R_2 l - Q(l-a) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

故に $H_1 M_1 R_1$ がアーチとしての静力學的に不定の量である。

(11) (12) 式より AB 端不動なる故 AB 間に積分して下式を得

$$\left. \begin{aligned} \int_0^s \frac{M}{EI} y ds - \int_0^s \frac{N}{EA} dx &= 0 \\ - \int_0^s \frac{M}{EI} x ds - \int_0^s \frac{N}{EA} dy &= 0 \\ \int_0^s \frac{M}{EI} ds &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

此式の MN は (1)(2) 式と同じく

$$\begin{aligned} M &= M_1 + R_1 x - H_1 y & [x < a] \\ &= M_1 + R_1 x - H_1 y - Q(x-a) & [x > a] \\ N &= R_1 \sin \varphi + H_1 \cos \varphi & [x < a] \\ &= (R_1 - Q) \sin \varphi + H_1 \cos \varphi & [x > a] \end{aligned}$$

故に下の三式を得

$$\left. \begin{aligned} M_1 \int_0^s \frac{y ds}{I} + R_1 \left\{ \int_0^s \frac{xy ds}{I} - \int_0^s \frac{\sin \varphi}{A} dx \right\} - H_1 \left\{ \int_0^s \frac{y^2 ds}{I} \right. \\ \left. + \int_0^s \frac{\cos \varphi dx}{A} \right\} - Q \left\{ \int_{s_a}^s \frac{(x-a)y ds}{I} - \int_{s_a}^s \frac{\sin \varphi dx}{A} \right\} &= 0 \\ -M_1 \int_0^s \frac{x ds}{I} - R_1 \left\{ \int_0^s \frac{x^2 ds}{I} + \int_0^s \frac{\sin \varphi dy}{A} \right\} \\ + H_1 \int_0^s \frac{xy ds}{I} + Q \left\{ \int_{s_a}^s \frac{(x-a)x ds}{I} + \int_{s_a}^s \frac{\sin \varphi dy}{A} \right\} &= 0 \\ M_1 \int_0^s \frac{ds}{I} + R_1 \int_0^s \frac{x ds}{I} - H_1 \int_0^s \frac{y ds}{I} - Q \int_{s_a}^s \frac{(x-a) ds}{I} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

これを解いて

$$H_1 = \frac{Q}{2} \frac{\int_0^{S\alpha} \frac{xy ds}{I} + \alpha \int_{S\alpha}^{\frac{S}{2}} \frac{y ds}{I} - \int_0^{S\alpha} \frac{\sin \varphi dx}{A}}{\int_0^{\frac{S}{2}} \frac{y^2 ds}{I} + \int_0^{\frac{S}{2}} \frac{\cos \varphi dx}{A}}$$

$$= \frac{\int_0^{\frac{S}{2}} \frac{y ds}{I} \left(\int_0^{S\alpha} \frac{x ds}{I} + \alpha \int_{S\alpha}^{\frac{S}{2}} \frac{ds}{I} \right)}{\left(\int_0^{\frac{S}{2}} \frac{y ds}{I} \right)^2} \int_0^{\frac{S}{2}} \frac{ds}{I}$$

$$(28)$$

$$M_1 = H_1 \frac{\int_0^{\frac{S}{2}} \frac{y ds}{I}}{\int_0^{\frac{S}{2}} \frac{ds}{I}} + Q \frac{- \int_0^S \frac{x ds}{I} \left(\int_{S\alpha}^S \frac{(x-\alpha)x}{I} ds \right)}{2 \int_0^{\frac{S}{2}} \frac{ds}{I} \left(\int_0^S \frac{x^2 ds}{I} \right)}$$

$$+ \frac{\int_{S\alpha}^S \frac{\sin \varphi dy}{A}}{\int_0^{\frac{S}{2}} \frac{\sin \varphi dy}{A}} + \frac{\int_{S\alpha}^S \frac{(x-\alpha) ds}{I} \left(\int_0^S \frac{x^2 ds}{I} + \int_0^S \frac{\sin \varphi dy}{A} \right)}{\left(\int_0^S \frac{x ds}{I} \right)^2}$$

$$R_1 = -M_1 \frac{2 \int_0^{\frac{S}{2}} \frac{ds}{I}}{\int_0^S \frac{x ds}{I}} + H_1 \frac{2 \int_0^{\frac{S}{2}} \frac{y ds}{I}}{\int_0^S \frac{x ds}{I}} + Q \frac{\int_{S\alpha}^S \frac{(x-\alpha) ds}{I}}{\int_0^S \frac{x ds}{I}}$$

N の影響は小なる故これを無視すれば

$$H_1 = \frac{Q}{2} \frac{\int_0^{S\alpha} \frac{xy ds}{I} + \alpha \int_{S\alpha}^{\frac{S}{2}} \frac{y ds}{I} - \int_0^{\frac{S}{2}} \frac{y ds}{I} \left(\int_0^{S\alpha} \frac{x ds}{I} + \alpha \int_{S\alpha}^{\frac{S}{2}} \frac{ds}{I} \right)}{\int_0^{\frac{S}{2}} \frac{y^2 ds}{I} - \frac{\left(\int_0^{\frac{S}{2}} \frac{y ds}{I} \right)^2}{\int_0^{\frac{S}{2}} \frac{ds}{I}}}$$

$$M_1 = H_1 \frac{\int_0^{\frac{S}{2}} \frac{y ds}{I}}{\int_0^{\frac{S}{2}} \frac{ds}{I}} \quad (29)$$

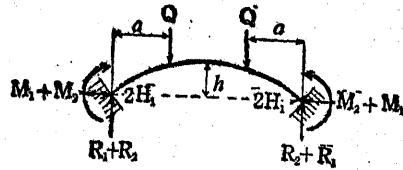
$$+ Q \frac{- \int_0^S \frac{x ds}{I} \int_{S\alpha}^S \frac{(x-\alpha)x}{I} ds + \int_{S\alpha}^S \frac{(x-\alpha) ds}{I} \int_0^S \frac{x^2 ds}{I}}{2 \int_0^{\frac{S}{2}} \frac{ds}{I} \int_0^S \frac{x^2 ds}{I} - \left(\int_0^S \frac{x ds}{I} \right)^2}$$

$$R_1 = -M_1 \frac{2 \int_0^{\frac{S}{2}} \frac{ds}{I}}{\int_0^S \frac{x ds}{I}} + H_1 \frac{2 \int_0^{\frac{S}{2}} \frac{y ds}{I}}{\int_0^S \frac{x ds}{I}} + Q \frac{\int_{S\alpha}^S \frac{(x-\alpha) ds}{I}}{\int_0^S \frac{x ds}{I}}$$

(一五) 荷重による拱頂撓

第 14 圖の如く二個の對稱荷重をのせてその一個荷重による拱頂の撓を δh とすれば

$$2\delta h = -\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{Mx ds}{EI} - \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{Ndy}{EA}$$



第 14 圖

此式で

$$\begin{aligned} M &= M_1 + M_2 + (R_1 + R_2)x - 2H_1y & [x < a] \\ &= M_1 + M_2 + (R_1 + R_2)x - 2H_1y - Q(x-a) & [x > a] \\ N &= (R_1 + R_2) \sin \varphi + 2H_1 \cos \varphi & [x < a] \\ &= 2H_1 \cos \varphi & [x > a] \end{aligned}$$

但し $M_1 M_2 R_1 R_2 H_1$ は凡て片側荷重のみによる値である。

$$\begin{aligned} 2\delta h &= -(M_1 + M_2) \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{x ds}{EI} + 2H_1 \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{xy ds}{EI} \\ &\quad - Q \int_0^{s_a} \frac{x^2 ds}{EI} - Q \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{ax dx}{EI} - Q \int_0^{s_a} \frac{\sin \varphi dy}{EA} \\ &\quad - 2H_1 \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{\cos \varphi dy}{EA} \dots \dots \dots (30) \end{aligned}$$

N の影響を無視すれば

$$\begin{aligned} 2\delta h &= -(M_1 + M_2) \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{x ds}{EI} + 2H_1 \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{xy ds}{EI} \\ &\quad - Q \int_0^{s_a} \frac{x^2 ds}{EI} - Q \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{ax dx}{EI} \dots \dots \dots (31) \end{aligned}$$

(一六) 温度による反力端力のモーメント及拱頂撓

曲がり梁が一樣に熱せられ温度 t° 上昇するとき熱膨脹係数を α とすれば

$$\left. \begin{aligned} \delta l &= \int_0^s \frac{My}{EI} ds - \int_0^s \frac{N}{EA} dx + \alpha t l = 0 \\ \text{又} \quad \delta \varphi &= \int_0^s \frac{M}{EI} ds = 0 \end{aligned} \right\}$$

これより温度による反力及端力のモーメント H_t M_t が決定される R_t は勿論この場合零である。

$$\left. \begin{aligned} H_t &= \frac{E\alpha t l}{2 \left\{ \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{y^2 ds}{I} + \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{\cos \varphi dx}{A} - \frac{\left(\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{y ds}{I} \right)^2}{\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{ds}{I}} \right\}} \\ M_t &= H_t \frac{\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{y ds}{I}}{\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{ds}{I}} \end{aligned} \right\} \dots (32)$$

N の影響を無視すれば

$$\left. \begin{aligned} H_t &= \frac{E\alpha t l}{2 \left\{ \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{y^2 ds}{I} - \frac{\left(\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{y ds}{I} \right)^2}{\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{ds}{I}} \right\}} \\ M_t &= H_t \frac{\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{y ds}{I}}{\int_0^{\frac{s}{2}} \frac{ds}{I}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33)$$

温度による撓は

$$\delta h = -M_t \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{x ds}{EI} + H_t \left\{ \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{xy ds}{EI} - \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{\cos \varphi dy}{EA} \right\} + \alpha t h \dots \dots \dots (84)$$

N の影響を無視すれば

$$\delta h = -M_t \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{x ds}{EI} + H_t \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{xy ds}{EI} + \alpha t h \dots \dots \dots (85)$$

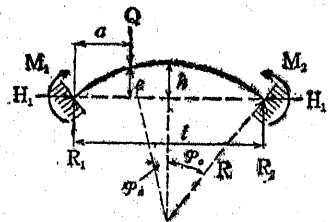
此等の M_t, H_t には (32)(33) を用ふ。

(一七) 曲げモーメント垂直推力接線力及應力

R_1, R_2, M_1, M_2, H_1 が求めれば (1)(2)(3) により MNT を得。従てこれに應ずる應力は (五) によりて求められる。

(一八) 不變断面をもつ無絞アーチ (但 $N=0$ の場合)

圓形アーチ



$$H_1 = \frac{le + \left(\frac{l}{2} - a\right) \{ \varphi_0 l - \varphi_0 (l - 2a) \} - \varphi_0 a (l - a)}{\varphi_0 (2R^2 \varphi_0 + l(R - h)) - l^2} Q$$

$$M_1 = \left(\frac{l}{2\varphi_0} - R + h \right) H_1 + \frac{(l - 2a) (2R^2 \varphi_0 - le) \varphi_0 - 2\varphi_0 \varphi_a R^2 l}{4\varphi_0 (2R^2 \varphi_0 - \dots)} - \frac{\{ 2R^2 \varphi_0 - l(R - h) \} \{ 2\varphi_0 a + l(\varphi_0 - \varphi_a) - 2e \}}{l(R - h)} Q$$

$$R_1 = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\{ 2\varphi_a R^2 - (l - 2a)(R - h + e) + 2e(l - 2a) \}}{2\{ 2R^2 \varphi_0 - l(R - h) \}} \right\} Q$$

$$H_t = \frac{2l\alpha EI \varphi_0}{R[\varphi_0(2\varphi_0 R^2 + l(R - h)) - l^2]}$$

$$M_t = H_t \frac{l - 2\varphi_0(R - h)}{2\varphi_0}$$

$$H_1 = \frac{15a^2(l - a)^2}{4hl^3} Q$$

$$M_1 = -\frac{a(l - a)^2(2l - 5a)}{2l^3} Q$$

$$R_1 = \frac{(l + 2a)(l - a)^2}{l^3} Q$$

$$H_t = \frac{45\alpha EI}{4h^2}$$

$$M_t = \frac{15\alpha EI}{2h}$$

低拋物線アーチ

